1 Способи задання кривих

Параметричний $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ Наприклад, $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$

Явний $y = f(t)$.

Неявний $F(x, y) = 0$ або $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (перетин поверхонь)

1. Перевірте, чи належать кривій точки $P(2, 1)$, $Q(-2, -1)$, $R(1, 0)$ та знайдіть точки перетину з осями координат. Запишіть параметричне або неявне рівняння. a) $\begin{cases} x = 2t^2 - 2 \\ y = t - 1 \end{cases}$ b) $x^2 - y^3 = 2x - 1$.

2. Складіть параметричне рівняння кола $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, якщо за параметр взяти: a) кутовий коефіцієнт променя, який виходить з початку координат b) кут між віссю Ox та прямою, що проходить через центр кола.

3. Покажіть, що рівняння $\begin{cases} x = a\cos\phi \\ y = b\sin\phi \end{cases}$ та $\begin{cases} x = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ задають одну й ту ж лінію. Як буде рухатись точка по кривій, коли t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$?

4. Покажіть, що рівняння $\begin{cases} x = a\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$ задає гіперболу. Як буде рухатись точка по кривій, коли t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$ $(t \neq 1)$?

5. Запишіть параметричне рівняння кривих a) $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ b) $r = a(1 + \cos\phi)$ c) $(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$.

6. Точка P рівномірно обертається навколо прямої і одночасно рівномірним рухом переноситься вздовж цієї прямої. Крива, по якій рухається ця точка P, зветься гвинтовою. Нехай цією прямою буде вісь Oz. Запишіть рівняння гвинтової лінії та її проекції на координатні площини.

7. Нехай OA — діаметр кола, $|OA| = 2a$, в точці A проведена дотична AC. Через точку O проведений промінь OC, який перетинає коло в точці B. На промені відкладений відрізок OM такий, що $OM = BC$. При обертанні променя OC навколо точки O, точка M рухається за траєкторією, що називається *цисоїда Діоклеса*. Написати рівняння цієї лінії.

8. Відрізок AB постійної довжини $2a$ ковзає своїми кінцями по вісям прямокутної системи координат Oxy. З початку координат до прямої AB проведений перпендикуляр OM. Скласти рівняння фігури, яка утворюється точками M.

9. Круговий циліндр радіусу R перетинається зі сферою радіусу $2R$ так, що одна з твірних циліндру проходить через центр сфери. Лінія перетину називається лінією Вівіані. Запишіть її рівняння в неявному та параметричному вигляді.

10. Лінію $x = t, y = t^2, z = e^t$ запишіть, як перетин двох поверхонь.

11. Покажіть (або побачте), що лінія $x = \sin 2\phi, y = 1 - \cos 2\phi, z = 2\cos\phi$ лежить на сфері та є лінією перетину параболічного і кругового циліндрів.

12. Знайдіть проекцію на площину Oxz лінії перетину a) конуса $y^2 = xz$ та площини $x - y + z + 1 = 0$; b) циліндру над параболою $y^2 = 2px$ та площини $x + y - z = 0$.

13. Яка крива задається рівнянням $\bar{r}(t) = \bar{a} + \bar{b}t + \bar{c}t^2$, де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — постійні вектори?

2 Властивості радіус-вектору

Доведіть, що для радіус-векторів $\bar{r}_i(t) = \begin{cases} x = x_i(t) \\ y = y_i(t) \\ z = z_i(t) \end{cases}$ виконується:

1. $(\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t))' = \bar{r}_1'(t) \pm \bar{r}_2'(t)$
2. $(f(t)\bar{r}(t))' = f'(t)\bar{r}(t) + f(t)\bar{r}'(t)$
3. $(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t))' = (\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t))$
4. $[\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)]' = [\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)] + [\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t)]$
5. $(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t))' = (\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t), \bar{r}_3(t)) + (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3'(t))$

1. Доведіть, що з неперервності радіус-вектора $\bar{r}(t)$ наслідком є неперервність $|\bar{r}(t)|$. Чи вірне зворотне твердження?

2. Обчисліть похідну від: a) $\bar{r}^2(t)$; b) $|\bar{r}(t)|$; c) $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)$; d) $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t))$; e) $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t))$; f) $\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \times \bar{r}'''(t)$; g) $|\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)|$;

3. Чи вірно, що $|\bar{r}'(t)| = |\bar{r}(t)|'$.

4. Доведіть, що якщо на деякому інтервалі $\bar{r}(t) = \bar{0}$, то $\bar{r}(t) = \text{const}$ на цьому інтервалі. Чи вірне зворотне твердження?

5. На деякому інтервалі $|\bar{r}(t)| = \text{const}$. Доведіть, що $\bar{r}(t) \perp \bar{r}'(t)$ на цьому інтервалі. Чи вірне зворотне твердження?

6. На деякому інтервалі $\bar{r}(t) \parallel \bar{r}'(t)$, для цього необхідно і достатньо, щоб $\bar{r}(t)$ мав постійний напрямок. Доведіть.

7. Нехай для вектор-функції $\bar{r}(t)$ класа C^k в усіх точках області визначення мають місце наступні співвідношення: $(\bar{r}'(t), \bar{r}''(t), \bar{r}'''(t)) = 0, \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) \neq 0$. Довести, що $\bar{r}(t)$ задає плоску криву.

8. Довести, що ветор-функція $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \cos(t)\bar{r}_1 + \sin(t)\bar{r}_2$ задає еліпс, якщо $\bar{r}_1 \nparallel \bar{r}_2$.