

Линейные изгибания призм с увеличением объема

В. А. Горькавый А. Д. Милка А. Н. Соболева

Аннотация Построены и проанализированы линейные изгибания правильных призм, приводящие к увеличению объема

Ключевые слова Жесткие и изгибаемые полиэдры · Линейные изгибания

УДК 514

*Памяти
Алексея Васильевича Погорелова*

1 Введение

В геометрии рассматриваются два вида изгибаний многогранников — классические, или просто изгибания, при которых грани многогранников перемещаются как твердые пластины, и линейные, при которых грани многогранников при перемещении допускают переламывания по новым, возможно "плывущим" ребрам [1,2]. По теореме Коши замкнутые выпуклые многогранники являются жесткими, т.е. не изгибаются в классе выпуклых многогранников. Пример нежесткого непрерывно изгибаемого многогранника с самопересечениями был построен Брикарром, а Глюк доказал, что нежесткие многогранники — весьма редкое явление. Первый сенсационный пример непрерывно изгибаемого замкнутого без самопересечений многогранника был

построен Коннелли. И по гипотезе Сулливана-Коннелли предполагалось, что при подобных изгибаниях объем многогранника сохраняется; гипотеза была искусно доказана И.Х. Сабитовым – с этими результатами можно ознакомиться в [3,4].

Последовательное изучение линейных изгибаний многогранников было начато в работах А.Д. Милки [5], В.А. Залгаллера и Ю.Д. Бураго [6], D.D. Bleeker [7]. Тематика, избранная авторами, была связана с открытием необычных деформаций многогранников и их моделей — оболочек, а также с изучением глубоких проблем изометрических погружений полиэдральных метрик. В частности, ими инициировалось новое направление геометрических исследований — изометрические деформации замкнутых поверхностей с увеличением объема.

В этом направлении А.Д. Милкой были построены специальные линейные изгибания правильных выпуклых многогранников. Высказывалось предположение, что введенные изгибания испытывают модели — оболочки замкнутых многогранников при потере устойчивости под внутренним или внешним давлением; численные оценки изменений объемов не приводились. Стимулом для построений являлись следующие принципиальные положения, сформулированные А.В. Погореловым в его геометрической теории оболочек [8, с.153–165]:

"... Опыт показывает, что выпуклая оболочка вращения под внутренним [или под внешним] давлением давлением может терять устойчивость с образованием системы правильно расположенных эллиптических вмятин вдоль некоторой параллели. Физическая причина такой формы потери устойчивости состоит в том, что для вмятин, вытянутых в направлении меридианов [соответственно — параллелей], при указанной деформации оболочки может иметь место общее увеличение ограничиваемого ею объема, несмотря на продавливание оболочки по системе вмятин внутрь этого объема... При определенном соотношении между главными кривизнами оболочки внутреннее давление [соответственно — внешнее давление] может вызвать появление сжимающих усилий в направлении параллелей [соответственно — в направлении меридианов]. Эти усилия при известной их интенсивности и вызывают потерю устойчивости ... "

Конечно, сформулированные положения правомочны для поверхностей и с другими симметриями. Именно с такой целью А.Д. Милкой и находились специальные линейные изгибания правильных выпук-

лых многогранников, на моделях которых было значительно проще провести технические эксперименты. Возможный эксперимент заинтересовал А.В. Погорелова — обсуждались детали эксперимента, намечалась оснастка, определялось новое лабораторное оборудование, но по объективным причинам планы остались невыполненными. Потенциально рассматривался также жесткий невыпуклый многогранник с богатой симметрией — шеддок A. Douady [5]. Картонная модель этого многогранника, вопреки устоявшимся представлениям геометров и механиков, оказалась свободно изгибаемой без видимого искажения материала. Так было открыто новое физическое явление в физике деформаций оболочек — нежесткая (мягкая или натянутая) потеря устойчивости, демонстрируемая жесткими многогранниками — модельными флексорами [9]. Большие, упорядоченные и обратимые изгибания модельных флексоров в закритической стадии, традиционно относившейся к области хаоса, оказались асимптотически точно описываемыми с помощью линейных изгибаний. Открытие модельных флексоров, недоступное классической механике, утвердило геометрические методы А.В. Погорелова в нелинейной теории оболочек как новую, геометрическую теорию устойчивости упругих систем.

Те же специальные линейные изгибания правильных выпуклых многогранников рассматривал D.D. Bleecker. Вопрос об увеличении объема он выделил в самостоятельную математическую проблему и установил некоторые конкретные численные оценки относительного увеличения объема правильных многогранников [7]. Позже его оценки усиливались А.Д. Милкой и В.А. Горькавым с помощью усовершенствованных итерационных линейных изгибаний [11]. Приведем для примера полученные последовательно значения относительного увеличения объема при линейных изгибаниях правильного тетраэдра: 1.37... [7], 1.42... [10], 1.44... [11]. Вопрос об окончательном, оптимальном увеличении объема правильных многогранников с помощью линейных изгибаний остается открытым. В этой связи следует отметить недавний результат Г.А. Самарина: любой замкнутый многогранник допускает линейное изгибание с увеличением объема [12]. Ранее аналогичный результат анонсировался А.Д. Милкой для многогранников, имеющих хотя бы одну выпуклую вершину [10]. Как следствие, поверхность максимально возможного объема, возникающая при линейных изгибаниях какого-либо многогранника, уже не бу-

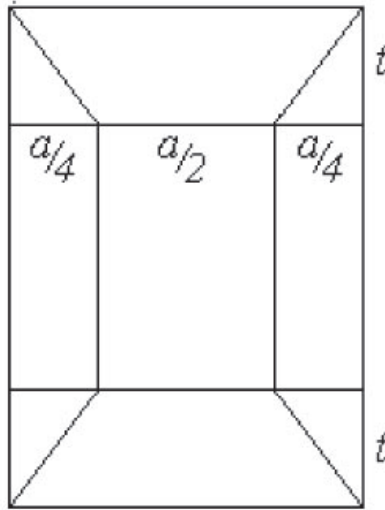


Рис. 1 Дополнительные ребра на боковой грани призмы.

дет многогранником и может иметь достаточно сложную форму, чем обусловлена трудность рассматриваемой проблемы.

Целью работы является построение линейных изгибаний с увеличением объема для правильных выпуклых призм. Каждая правильная призма M характеризуется тремя параметрами: n — количество сторон основания, R — радиус окружности, описанной вокруг основания, H — полувысота. Строится специальное линейное изгибание M : на развертке призмы на каждой из боковых граней одинаковым образом проводятся дополнительные ребра, положение которых зависит от параметра t (см. Рис. 1). Затем по измельченной развертке строится новый невыпуклый многогранник M_t^* (см. Рис. 2 ($n = 4$)).

Разным значениям t отвечают неконгруэнтные друг другу многогранники M_t^* , изометричные призме M . Параметр линейного изгибания t меняется в пределах

$$R \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq t \leq H,$$

что обусловлено геометрией изгибания. Поэтому предложенное линейное изгибание может быть реализовано лишь в случае, когда исходная призма M является достаточно высокой так, что

$$R \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq H.$$

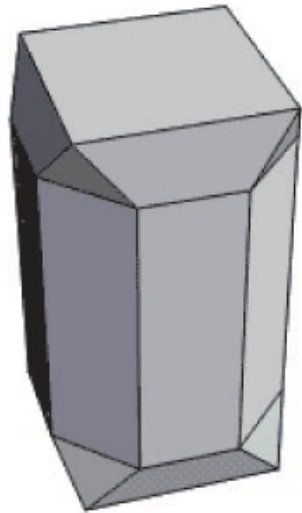


Рис. 2 Линейно изогнутый многогранник.

Объем $Vol(M_t^*) = V(t; n, R, H)$ рассматривается как функция переменной t с параметрами n, R, H . Анализ показывает, что функция $V(t)$ возрастает на начальном участке интервала $[R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$, всюду является выпуклой вверх и достигает своего максимума при

$$t_m = \frac{3}{2} R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}.$$

Обратим внимание, что t_m не зависит от H . Как следствие, если призма M является достаточно высокой так, что $t_m < H$, то независимо от высоты M при построении линейного изгибания с максимальным объемом горизонтальные изломы боковых граней располагаются на одном и том же расстоянии t_m от ребер основания.

Подробный анализ максимального объема, достигаемого при описанном линейном изгибании, в сравнении с объемом исходной призмы, позволяет нам предложить следующую деформационную классификацию призм:

- *короткие* призмы допускают предложенное линейное изгибание, но оно не приводит к увеличению объема;
- *средние и длинные* призмы допускают предложенное линейное изгибание, и это линейное изгибание приводит к увеличению объема исходной призмы (различие между средними и высокими призмами

— в форме многогранника с максимальным объемом, возникающего при линейном изгибании).

Точные оценки относительных размеров, характеризующие каждый из четырех классов, приведены в разделе 2. Как пример, отметим, что при $n = 3$ для достаточно высоких призм при $\frac{R}{H} \rightarrow 0$ увеличение объема достигает 50%.

Введенная схема линейного изгибания имеет итерационный характер и позволяет строить итерационные линейные изгибания исходной призмы M , вызывающие на каждом шаге увеличение объема. В пределе, как результат итерационного процесса в случае, когда призма M достаточно высока, получаем изометричную M поверхность. Эта поверхность состоит из двух правильных n -угольных оснований, двух примыкающих к ним бесконечных систем многогранных поясков и промежуточного между системами кругового цилиндра. В разделе 3 проанализирована сходимость итерационного процесса, получены оценки размеров предельной поверхности и, как основной результат, установлены оценки относительного увеличения объема. При $n = 3$ для достаточно высоких призм, когда $\frac{R}{H} \rightarrow 0$, увеличение объема достигает более 65%.

Примечательно, что выявленный характер деформаций у призм различается в зависимости от их относительной высоты. В теории оболочек для круговых цилиндров имеется такое же разделение на короткие, средние и длинные по механическим деформационным свойствам. Полученные нами результаты могут иметь прикладное значение, ведь оболочки позволяют моделировать, например, корпуса ракет (длинные цилиндры), подводных лодок (средние цилиндры), авиационных двигателей (короткие цилиндры) [13].

2 Линейное изгибание призмы с увеличением объема

2.1 Линейное изгибание

Пусть M — прямая призма, в основании которой лежит правильный n -угольник. В качестве параметров, характеризующих размеры призмы, возьмем полувысоту H и радиус R окружности, описанной около основания. Длина ребра основания равна $a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ — циклический центральный угол основания. Объем призмы M очевидно равен $Vol(M) = nHR^2 \sin \frac{2\pi}{n}$.

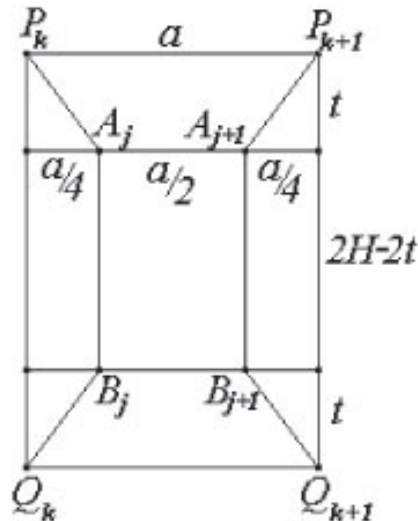


Рис. 3 Измельчение развертки призмы.

При должном выборе декартовых координат, вершины верхнего и нижнего оснований M будут располагаться соответственно в точках

$$P_k = (R \cos k\alpha, R \sin k\alpha, H)$$

и

$$Q_k = (R \cos k\alpha, R \sin k\alpha, -H),$$

$$k = \overline{0, n-1}.$$

Построим специальное линейное изгибание призмы M . Для этого рассмотрим развертку призмы M , состоящую из двух правильных n -угольников $P_0 \dots P_{n-1}$ и $Q_0 \dots Q_{n-1}$ и n равных боковых граней — прямоугольников $P_k P_{k+1} Q_{k+1} Q_k$. Измельчим развертку призмы, проведя на каждой из боковых граней новые дополнительные ребра так, как показано на Рис.3. Размеры и положение дополнительных ребер полностью определяются заданием параметра t , очевидно удовлетворяющего условию $0 \leq t \leq H$.

Если теперь из измельченной развертки попробовать "склеить" многогранник, то может получиться исходная призма M , на боковых гранях которой формально проведены дополнительные ребра. Но может получиться и иной многогранник, отличный от призмы M (см. Рис.4, где изображен случай $n = 4$).

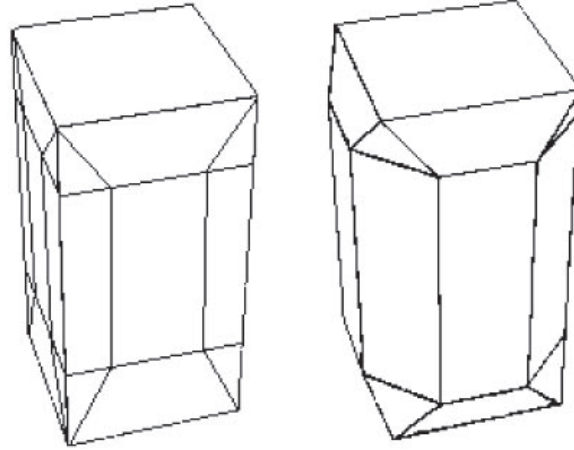


Рис. 4 Деформация призмы: слева — исходный, справа — изогнутый многогранник.

Опишем этот новый многогранник, который будем обозначать M^* . Основания у M^* такие же, как и у исходной призмы M , т.е. два равных правильных n -угольника. Боковую поверхность M^* удобно разбить на три части. Центральная часть образована из $2n$ равных прямоугольников со сторонами длины $a/2$ и $2(H-t)$. Между центральной частью и основаниями M^* расположены одинаковые многогранники-пояски, каждый из которых составлен из n равных треугольных граней и n равных граней-трапеций.

Найдем координаты вершин многогранника M^* . Вершины верхнего и нижнего основания обозначим соответственно P_k^* и Q_k^* . Тогда

$$P_k^* = (R \cos k\alpha, R \sin k\alpha, h), \quad Q_k^* = (R \cos k\alpha, R \sin k\alpha, -h). \quad (1)$$

Вершины M^* , отвечающие точкам A_j и B_j на измельченной развертке (см. Рис.2), обозначим соответственно и A_j^* и B_j^* . Точки $A_0^* \dots A_{2n-1}^*$ лежат в горизонтальной плоскости $z = (H-t)$ и являются вершинами правильного $2n$ -угольника со сторонами длины $a/2$, т.е.

$$A_j^* = \left(r \cos \left(j \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} \right), r \sin \left(j \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} \right), H-t \right). \quad (2)$$

Аналогично

$$B_j^* = \left(r \cos \left(j \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} \right), r \sin \left(j \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} \right), -(H-t) \right). \quad (3)$$

Неизвестные величины r и h легко определяются. Действительно, r является радиусом окружности, описанной вокруг правильного $2n$ -угольника $A_0^* \dots A_{2n-1}^*$ со сторонами длины $a/2$, поэтому $\frac{a}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{4}$. Подставляя выражение для длины a , находим

$$r = R \cos \frac{\alpha}{4}. \quad (4)$$

В свою очередь, для нахождения величины h воспользуемся, например, равенством $|P_0 A_0| = |P_0^* A_0^*|$; значение $|P_0 A_0|$ вычисляется по развертке как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длины $a/4$ и t , а $|P_0^* A_0^*|$ вычисляется через координаты точек P_0^* , A_0^* . Получаем уравнение

$$\frac{a^2}{16} + t^2 = \left(R - r \cos \frac{\alpha}{4}\right)^2 + \left(r \sin \frac{\alpha}{4}\right)^2 + (h - (H - t))^2,$$

откуда, подставляя в него выражения для a и r , находим

$$h = H - t + \sqrt{t^2 - R^2 \sin^4 \frac{\alpha}{4}}. \quad (5)$$

Формулы (1)–(5) полностью описывают вершины многогранника M^* .

Разным значениям t отвечают различные многогранники M^* , т.е. речь идет о семействе многогранников M_t^* . Несмотря на различие внешней формы, все M_t^* изометричны исходной призме M .

Обратим внимание, что, ввиду формулы (5), параметр t может изменяться только в интервале

$$R \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq t \leq H. \quad (6)$$

При $t = R \sin^2 \frac{\pi}{2n}$ у многогранника M_t^* пояски укладываются в плоскости оснований (см. Рис.5₁), а при $t = H$ у многогранника M_t^* будет отсутствовать центральная часть (см. Рис.5₃). Сама же призма M не входит в построенное непрерывное семейство многогранников M_t^* .¹

Интервал изменения параметра t не должен быть пустым, поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что исходная призма M удовлетворяет условию

$$R \sin^2 \frac{\pi}{2n} < H. \quad (7)$$

¹ Имеется двухпараметрическое непрерывное семейство изометричных многогранников, включающее как M , так и все M_t^* ; в данной статье оно не рассматривается.

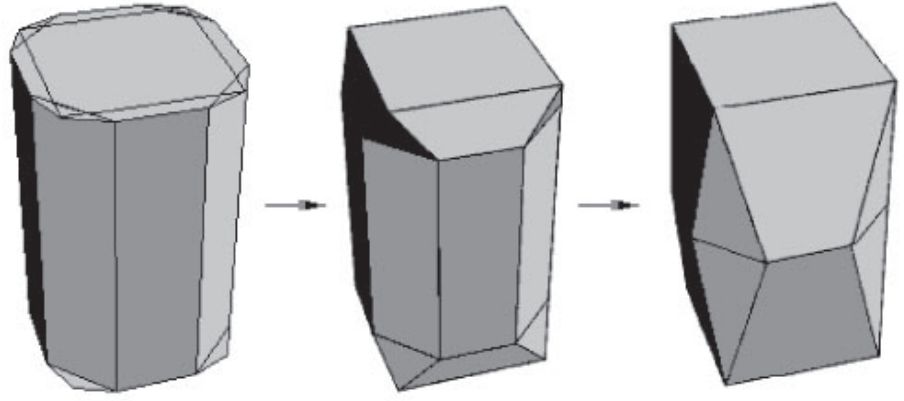


Рис. 5 Семейство изогнутых многогранников.

2.2 Объем изогнутых многогранников

Основной интерес представляет вопрос об оценке объема многогранников M_t^* в сравнении с объемом исходной призмы M . Для вычисления объема $Vol(M_t^*)$ триангулируем грани M_t^* , затем разобьем тело, ограниченное M_t^* , соответствующими треугольными пирамидами с вершиной в центре многогранника и с основаниями в гранях триангуляции. Суммарный объем пирамид и даст нам $Vol(M_t^*)$. Принимая во внимание формулы (1)–(5), находим:

$$Vol(M_t^*) = \frac{1}{3}R^2 \sin \frac{\pi}{n} \left(3H - 3t + 2\sqrt{t^2 - R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} + \right. \\ \left. + \cos \frac{\pi}{n} \left(3H - 3t + 4\sqrt{t^2 - R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \right) \right). \quad (8)$$

Мы видим, что объем многогранников M_t^* существенно зависит от t . Будем рассматривать $Vol(M_t^*)$ как функцию $V(t)$ переменной t с "управляющими" параметрами n, R, H . Областью определения функции $V(t)$ является множество $t \geq R \sin^2 \frac{\pi}{2n}$, но нам следует учитывать ограничение (6), вытекающее из предложенной геометрии деформации. Поэтому дальнейший анализ мы будем проводить в предположении, что $t \in [R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$.

Предложение 1 *Функция $V(t)$ обладает следующими свойствами:*

1. $\lim_{t \rightarrow R \sin^2 \frac{\pi}{2n}} V' = +\infty$;

2. $V''(t) < 0 \quad \forall t \in (R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$;
3. $V' = 0$ тогда и только тогда, когда $t = \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}$.

Доказательство проводится элементарными средствами.

Как следствие, когда t пробегает интервал $[R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$, возможны два варианта:

1. если $H \leq \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}$, то $V(t)$ строго возрастает, достигая максимального значения при $t = H$;
2. если $\frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} < H$, то $V(t)$ строго возрастает, достигает максимального значения при

$$t_m = \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} \quad (9)$$

и затем убывает.

Поэтому максимальное значение V_{max} функции $V(t)$ на интервале $[R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$ может быть представлено следующим образом.

Предложение 2

$$V_{max} = \begin{cases} V(H), & \text{если } H \leq \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} \\ V(t_m), & \text{если } \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} < H \end{cases} \quad (10)$$

Явное представление для V_{max} получается с учетом формул (8), (9) и представляет собой весьма громоздкое выражение, зависящее от n , R и H .

2.3 Относительное увеличение объема

Рассмотрим отношение Θ максимального объема V_{max} , представленного в Предложении 2, к объему V_0 исходной призмы M . Ясно, что Θ зависит от n , R и H . Оказывается, и в этом не сложно убедиться, что Θ зависит не от R и H , а только от их отношения R/H . Иначе говоря, $\Theta = \Theta(u, \alpha)$, где $u = R/H$, $\alpha = 2\pi/n$. С учетом (6), параметр u изменяется в пределах $(0, \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}})$, а $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3}]$. Выражение для $\Theta(u, \alpha)$ весьма громоздкое. График этой функции приведен на Рис.6. Выделенная на графике кривая Γ является линией пересечения графика с плоскостью $\Theta = 1$.

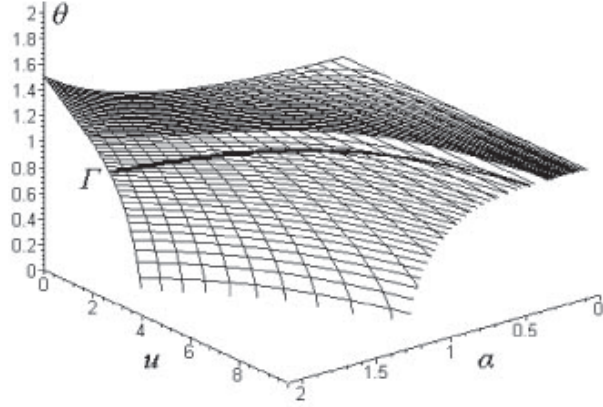


Рис. 6 Относительное увеличение объема Θ .

Удобно рассмотреть на плоскости параметров (u, α) область $\Omega = \left\{ (u, \alpha) \mid 0 < u < \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}, 0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$, в точках которой и рассматривается функция $\Theta(u, \alpha)$. На Рис. 7 в области Ω выделены кривая γ_1 , вдоль которой $t_m = H$, и кривая γ_2 , вдоль которой $\Theta(u, \alpha) = 1$. С учетом (9), γ_1 задается равенством $u = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4}}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. В свою очередь, несложный подсчет показывает, что кривая γ_2 определяется равенством $u = \frac{2\sqrt{3 - 5 \sin^2 \frac{\alpha}{4}}}{\sin \frac{\alpha}{4} (3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{4})}$. Наконец, кривая γ_3 , ограничивающая область Ω ввиду (7), задается равенством $u = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{4}}$.

Кривыми γ_1 и γ_2 область Ω разбивается на три подобласти:

Ω_1 — здесь $\Theta < 1$;

Ω_2 — здесь $\Theta > 1$ и при этом $V_{max} = V(H)$;

Ω_3 — здесь $\Theta > 1$ и при этом $V_{max} = V(t_m)$.

Область Ω можно интерпретировать как пространство правильных призм, рассматриваемых с точностью до движения и гомотетии. Поэтому приходим к следующей деформационной классификации правильных призм.

Призму назовем *короткой*, если

$$\frac{2\sqrt{3 - 5 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n} (3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n})} \leq \frac{R}{H} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгиба, но оно не приводит к увеличению объема.

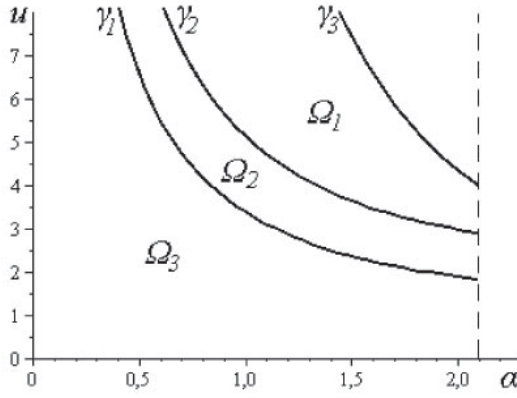


Рис. 7 Пространство Ω : длинные, средние и короткие призмы.

Призму назовем *средней*, если

$$\frac{2\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}{3 \sin \frac{\pi}{n}} \leq \frac{R}{H} < \frac{2\sqrt{3 - 5 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n} (3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n})}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгибания, оно приводит к увеличению объема, при этом максимальный объем достигается при $t = H$ (см. Рис.53).

Призму назовем *длинной*, если

$$0 < \frac{R}{H} < \frac{2\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}{3 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгибания, оно приводит к увеличению объема, при этом максимальный объем достигается при $t = t_m$ (см. Рис.52).

Пример 1 Рассмотрим случай треугольной призмы, т.е. положим $n = 3$ (соответственно $\alpha = \frac{2\pi}{3}$). В этом случае получаем, что если $\frac{R}{H} > 4$, то призма не допускает рассматриваемого линейного изгибания. Если $2.65 \dots \leq \frac{R}{H} \leq 4$, то линейное изгибание можно построить, но оно не дает увеличения объема. Если $1.83 \dots \leq \frac{R}{H} < 2.65 \dots$, то линейное изгибание дает увеличения объема, при этом многогранник максимального объема будет иметь форму подобную изображенной на Рис. 53. Наконец, если $0 < \frac{R}{H} < 1.83 \dots$, то линейное изгибание дает увеличения объема, при этом многогранник максимального объема будет иметь форму, подобную изображенной на Рис. 52. На

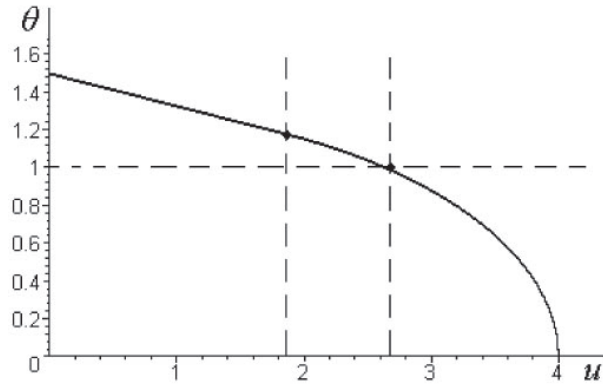


Рис. 8 График функции относительного увеличения объема ($n = 3$).

Рис. 8 приведен график функции относительного увеличения объема Θ при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Как видим, максимальное значение Θ достигается при $u \rightarrow 0$ и равно 1.5. Это означает, что при $n = 3$ увеличение объема для высоких призм (при $\frac{R}{H} \rightarrow 0$) составляет почти 50%.

3 Итерационное линейное изгибание призмы с увеличением объема

Предположим, что призма M является длинной. Тогда рассмотренное нами линейное изгибание приводит к увеличению объема, причем максимальный объем среди M_t^* достигается при $t = t_m$, задаваемом выражением (9). Многогранник $M_{t_m}^*$ устроен так, что в его срединной части располагаются $2n$ прямоугольных граней, представляющих собой боковую поверхность некоторой правильной $2n$ -угольной призмы, которую будем обозначать $M^{(1)}$, см. Рис. 52. Параметры призмы $M^{(1)}$ определяются формулами

$$n^{(1)} = 2n, \quad R^{(1)} = R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}, \quad H^{(1)} = H - \frac{3}{2} R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}. \quad (11)$$

Удобство предлагаемой конструкции состоит в том, что мы по той же схеме можем построить линейное изгибание и призмы $M^{(1)}$ — как результат, получим изометричный M многогранник, у которого будут два основания, четыре пояса и центральная часть, состоящая из $4n$

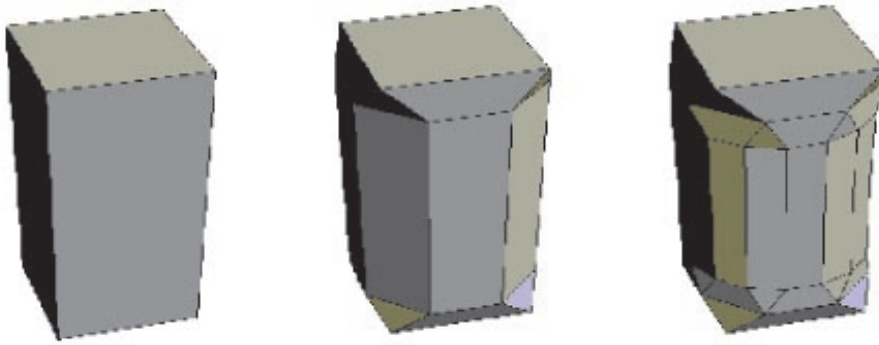


Рис. 9 Линейное изгибание призмы — итерации.

прямоугольников, образующих боковую поверхность новой правильной $4n$ -угольной призмы $M^{(2)}$, см. Рис. 9з.

Тем самым, инициируется итерационный процесс изгибания призмы M : на k -ом шаге строим линейное изгибание правильной $2^{k-1}n$ -угольной призмы $M^{(k-1)}$, получая изометричный M многогранник, у которого будут два основания, 2^k поясков и центральная часть, состоящая из $2^k n$ прямоугольников, образующих боковую поверхность новой правильной $2^k n$ -угольной призмы $M^{(k)}$.

По аналогии с формулами (11), выполняются следующие рекуррентные формулы, описывающие изменение параметров призм $M^{(k)}$:

$$n^{(k)} = 2n^{(k-1)}, \quad R^{(k)} = R^{(k-1)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k-1)}}}{2 \sin \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}},$$

$$H^{(k)} = H^{(k-1)} - \frac{3}{2} R^{(k-1)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k-1)}}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}}}.$$

При этом на каждом шаге мы строим линейное изгибание соответствующей призмы $M^{(k)}$ так, чтобы получить максимальное увеличение объема:

$$t_m^{(k)} = \frac{3}{2} R^{(k)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k)}}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n^{(k)}}}}.$$

Можно проверить, что выписанные формулы сводятся к следующим:

$$n^{(k)} = 2^k n, \quad R^{(k)} = R \frac{1}{2^k} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{2^k n}} \quad (12)$$

$$t_m^{(k)} = \frac{3}{2^{k+1}} R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{k+1}n}}}, \quad (13)$$

$$H^{(k)} = H - \sum_{j=0}^{k-1} t_m^{(j)} = H - \frac{3}{2} R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}}. \quad (14)$$

Описанный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока призмы $M^{(k)}$ остаются высокими. Как только на очередном шаге призма $M^{(k)}$ перестанет быть по определению длинной, итерационный процесс прервется. Принимая во внимание формулу (14), мы можем утверждать, что процесс итераций не прервется в том и только в том случае, когда размеры исходной призмы M удовлетворяют условию

$$H \geq \frac{3}{2} R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}}. \quad (15)$$

Лемма 1 *Имеет место следующая оценка:*

$$\frac{2}{\sqrt{6}} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}} < \frac{2}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}.$$

Доказательство основано на том, что выражение $\frac{1}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}}$ является убывающей по j функцией, поэтому его можно оценить сверху значением при $j = 0$, а снизу — значением при $j \rightarrow \infty$.

Как следствие, с учетом (15), можем сделать следующие выводы.

Если

$$H \leq \frac{3}{\sqrt{6}} R \sin \frac{\pi}{n},$$

то рассматриваемый итерационный процесс обязательно прервется на некотором шаге.

Если

$$H \geq \frac{3}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} R \sin \frac{\pi}{n},$$

то рассматриваемый итерационный процесс не прервется. В пределе мы получим изометричную M поверхность M_{∞}^* , уже не являющуюся многогранником²: эта предельная поверхность будет содержать два

² Подобная поверхность приведена как экзотический пример в недавней работе М. Штогрин [14] об изометрических деформациях цилиндров и конусов на основе классических методов А.В. Погорелова, развитых в его геометрической теории устойчивости оболочек.

n -угольных основания (как у M), от которых будут идти две бесконечные системы многогранных поясков, сходящихся к центральной части — круговому цилиндру C . Высота этого цилиндра равна

$$H_\infty = H - \sum_{j=0}^{\infty} t_m^{(j)}.$$

Применяя формулу (13), получаем, что высота цилиндра равна

$$H_\infty = H - \frac{3}{2} R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}} \quad (16)$$

и может быть также оценена с помощью приведенной выше Леммы:

$$H - \frac{3}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} R \sin \frac{\pi}{n} < H_\infty < H - \frac{3}{\sqrt{6}} R \sin \frac{\pi}{n}. \quad (17)$$

Радиус R_∞ основания цилиндра C легко находится из того очевидного наблюдения, что периметр основания цилиндра равен периметру основания исходной призмы M : $2\pi R_\infty = na = 2Rn \sin \frac{\pi}{n}$. Поэтому

$$R_\infty = \frac{nR}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}. \quad (18)$$

Проанализируем теперь объем $\operatorname{Vol}(M_\infty^*)$.

Предложение 3 *Справедлива следующая оценка относительного увеличения объема:*

$$\frac{2}{9} \frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{\cos \frac{\pi}{n} (1 + \cos \frac{\pi}{2n})} < \frac{\operatorname{Vol}(M_\infty^*)}{\operatorname{Vol}(M)} < \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Доказательство Для доказательства рассмотрим сначала первый шаг итерации. Если из объема экстремального многогранника $M_{t_m}^*$ вычесть объем центральной части — призмы $M^{(1)}$, то получим объем двух поясков (см. Рис.9₂), который с учетом формул (8), (9), (12) и (14) запишется в виде:

$$W^{(1)} = \operatorname{Vol}(M_{t_m}^*) - \operatorname{Vol}(M^{(1)}) = \frac{4}{3} n R^3 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}}$$

Заметим, что на следующих шагах итерации увеличивается только объем центральной части $\operatorname{Vol}(M^{(1)})$, тогда как $W^{(1)}$ остается неизменным.

Аналогичную формулу можно выписать для объема поясков, возникающих на k -ом шаге итерации

$$W^{(k)} = \frac{4}{3} n^{(k-1)} (R^{(k-1)})^3 \sin^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}} \frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}} - 1)^2}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}}}.$$

Применяя формулы (12), получаем:

$$W^{(k)} = \frac{1}{2^k} \frac{8}{3} n R^3 \sin^3 \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2^k n} - 1)^2}{2^k \sin \frac{\pi}{2^{k-1} n} (1 + \cos \frac{\pi}{2^{k-1} n}) \sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2^k n}}} \right).$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, является возрастающим по переменной k , оценка снизу для него получается подстановкой $k = 1$, а оценка сверху — при $k \rightarrow \infty$. Как следствие, получаем:

$$\frac{1}{2^k} \frac{4}{3} n R^3 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{(1 + \cos \frac{\pi}{n}) \sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} \leq W^{(k)} \leq \frac{\sqrt{6}}{2^k \pi} n^2 R^3 \sin^3 \frac{\pi}{n}.$$

Суммарный объем всех поясков оценивается так:

$$\frac{4}{3} n R^3 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{(4 \cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{(1 + \cos \frac{\pi}{n}) \sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} \leq \sum_{k=1}^n W^{(k)} \leq \frac{\sqrt{6}}{\pi} n^2 R^3 \sin^3 \frac{\pi}{n}.$$

Осталось оценить объем центральной части — цилиндра C . С учетом (17)-(18), получаем следующую оценку для объема цилиндра:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} n^2 R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(H - \frac{3}{\sqrt{6 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}}} R \sin \frac{\pi}{n} \right) &< Vol(C) < \\ &< \frac{2}{\pi} n^2 R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(H - \frac{3}{\sqrt{6}} R \sin \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Суммарный объем поясков и цилиндра дает полный объем предельной поверхности, что и приводит к указанным оценкам.

На Рис. 10 приведены графики функций, оценивающих $\frac{Vol(M_\infty^*)}{Vol(M)}$ в Предложении 3, с учетом $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Пример 2 В случае треугольной призмы ($n = 3$, т.е. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$) относительное увеличение объема в ходе итерационного линейного изгибания может составлять от 1.18... до 1.65... В частности, если $\frac{R}{H} \rightarrow \infty$, то относительное увеличение объема составит более 65%.

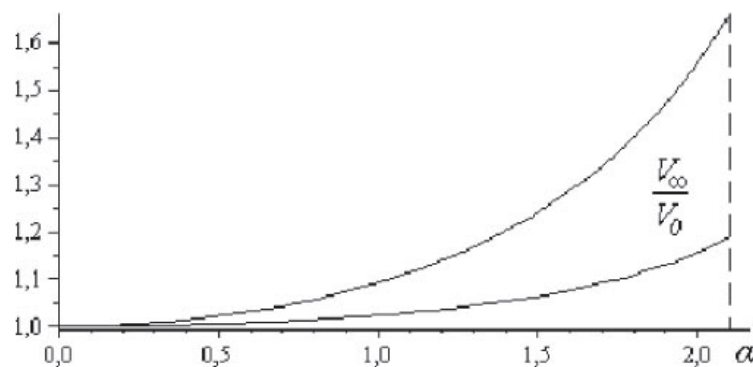


Рис. 10 Оценочные функции.

Список литературы

1. Александров, А.Д.: Выпуклые многогранники. М.-Л., Гостехиздат, 1950, 428 стр.
2. Кон-Фоссен, С.Э.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., Физматгиз, 1959, 304 стр.
3. Сабитов, И.Х.: Объем многогранника как функция его метрики. Фунд. прикл. мат. **2**(4), 1235–1246 (1996)
4. Сабитов, И.Х.: Объемы многогранников. М., Из-во МЦНМО, 2002, 32 стр.
5. Милка, А.Д.: Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников. Математическая физика, анализ, геометрия **1**(1), 116–130 (1994)
6. Бурого, Ю.Д., Залгаллер, В.А.: Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с плоской метрикой в R^3 . Алгебра и анализ **7**(3), 76–95 (1995)
7. Bleecker, D.D.: Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra. J. Diff. Geom. **43**, 505–526 (1996)
8. Погорелов, А.В.: Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., "Наука" 1966, 296 стр.
9. Милка, А.Д.: Линейные изгибания звездчатых бипирамид. Proceedings of the International Geometry Center **1**(1–2), 71–96 (2008)
10. Милка, А.Д.: Решение проблемы Бликера. Тез. докл. 4-й междунар. конф. по геометрии и топологии (13–20 сентября 2001, Черкассы), 64–65 (2001)
11. Горькавый, В.А., Милка, А.Д.: Изгибания правильных многогранников с увеличением объема. Труды международной конференции "Геометрия в Одессе-2008" (19–24 мая 2008, Одесса). Киев, Институт математики НАН Украины (2009) (В печати)
12. Самарин, Г.А.: Изометрические деформации многогранников, увеличивающие содержащийся в них объем. Материалы IX межд. семин. "Дискретная математика и ее приложения". М., Из-во МГУ, 406–409 (2007)
13. Вольмир, А.С.: Устойчивость упругих систем (цилиндрические оболочки). М.: Физматгиз, 1963, 880 стр.
14. Штогрин, М.И.: Изометрические погружения конуса и цилиндра. Изв. РАН. Сер. матем. **73**(1), 187–224 (2009)

В. А. Горькавый

ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

А. Д. Милка

GST Joint Stock Company, Харьков, Украина

E-mail: gst@nti.com.ua, milka@ilt.kharkov.ua

А. Н. Соболева

ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

V. A. Gorkavyu, A. D. Milka, A. N. Soboleva

Linear bendings of prisms with increasing volume

We construct volume increasing piece-linear isometric deformations of right prisms.

Mathematics Subject Classification (2000) 52B10 · 52A38