

А. Д. Милка

ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАНУ, Харьков
E-mail: milka@ilt.kharkov.ua

В. А. Горькавый

ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАНУ, Харьков
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Изгибания правильных многогранников с увеличением объема

Linear bendings of right convex polyhedra, which increase the volume, are considered. Previous results on volume increasing linear bendings by A.D. Milka, D.D. Bleecker, V.A. Alexandrov are improved. For instance, the obtained relative volume increase for the right tetrahedron is 1.4400047...

Ключевые слова: *linear bending, right polyhedron, right pyramid, thin elastic shell*

ВВЕДЕНИЕ

А.В. Погореловым замечено, что тонкая упругая замкнутая выпуклая оболочка, нагруженная внутренним давлением, теряет устойчивость с последующим увеличением ограничиваемого ею объема [1]– [2]. Предложенный им геометрический подход основывается на оригинальном принципе изометрии: *большая закритическая деформация оболочки асимптотически точно приближается изометрическим преобразованием – изгибанием – ее срединной поверхности*. Так возникла актуальная для

© А. Д. Милка, В. А. Горькавый, 2009

геометров и механиков нетривиальная проблема: найти характерные примеры выпуклых поверхностей, непрерывно изгибающихся с увеличением объема; дать численные выражения параметров изгиба; для конкретных поверхностей найти максимум относительного увеличения объема. Первые исследования в этом направлении были выполнены для многогранников в работах [3], [4], [5].

В [3] рассматриваются *специальные линейные изгибания правильных многогранников*. Автором высказывается гипотеза, что такие изгибания соответствуют потере устойчивости оболочки под внутренним давлением. Численные выражения для увеличения объемов многогранников в [3] не приводятся. Независимо в [4] детально и в наглядной геометрической интерпретации излагаются те же специальные линейные изгибания правильных многогранников, устанавливаются аналитические выражения для объемов деформирующихся многогранников и находятся максимумы достижимых увеличений объемов. В [5] указывается специальный многогранник, возникающий при описанном в [3]–[4] линейном изгибании тетраэдра, объем которого близок к упомянутому максимуму. Геометрически этот специальный многогранник предельно просто связан с исходным тетраэдром (см. Рис. 9); аналогичные многогранники можно выделить в ходе линейных изгибаний других правильных многогранников — будем называть их *стандартными многогранниками*. В [6] к стандартным многогранникам применяется линейное изгибание, которое строится на основе описанного в [3] линейного изгибания тетраэдра; введенная конструкция имеет итерационный характер, выполнен первый шаг итерации — этого шага оказалось достаточно, чтобы существенно усилить результаты [4]; среди правильных многогранников наиболее значительное относительное увеличение объема было получено для тетраэдра и составило $\approx 1.41575\%$ [6] по сравнению с $\approx 1.37718\%$ [4] и $\approx 1.37714\%$ [5].

В данной работе, применяя упомянутый итерационный процесс, мы устанавливаем дальнейший рост относительного увеличения объемов правильных многогранников. В таблице приведены соответствующие численные результаты из [4], [6] и полученные нами новые результаты за 6 шагов итераций; мы полагаем, что для тетраэдра максимум относительного увеличения объема равняется 1.5:

| | <i>Бликер</i> | <i>Милка</i> | <i>Авторы</i> |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
| <i>Тетраэдр</i> | 1.37718257... | 1.41575603... | 1.44000470... |
| <i>Куб</i> | 1.21865263... | 1.23397824... | 1.24030167... |
| <i>Октаэдр</i> | 1.11580800... | 1.13233864... | 1.13589463... |
| <i>Додекаэдр</i> | 1.09339757... | 1.09733081... | 1.09723965... |
| <i>Икосаэдр</i> | 1.03631161... | 1.05274569... | 1.04272167... |

Эти и подобные им результаты, кроме математической их значимости, небезинтересны для инженерных приложений. Они могут подсказать возможные причины некоторых неожиданных и необъяснимых разрушений больших резервуаров-хранилищ, корпусов авиалайнеров и глубоководных подводных лодок. Такие аварии хорошо известны в истории техники [7]. Да и природа не может отказаться от увеличения объема тела, если в критической ситуации эта возможность предусмотрена геометрически; примеры — накапливающиеся напряжения в коре Земли, приводящие к внезапным и катастрофическим землетрясениям и извержениям вулканов, в частности — с образованием кальдер [6].

1. ЛИНЕЙНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

1.1. Геометрическая конструкция. Рассмотрим телесную правильную пирамиду Λ , в основании которой лежит правильный n -угольник Σ . Основными параметрами, определяющими метрические свойства пирамиды Λ , являются $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ — центральный угол основания, β — угол боковой грани при вершине пирамиды, a — длина стороны основания, b — длина бокового

ребра, h – высота пирамиды, r – радиус окружности, описанной вокруг основания. Объем пирамиды обозначим V . Между указанными величинами имеются следующие элементарные соотношения:

$$\begin{aligned} a &= 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \\ b &= r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\ h &= \sqrt{b^2 - r^2} = r \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \end{aligned}$$

$$(1) \quad V(\Lambda) = \frac{1}{6} n h r^2 \sin \alpha = \frac{\pi}{3} r^3 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Пирамида Λ однозначно определяется заданием угла $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, угла $0 < \beta < \alpha$ и радиуса $r > 0$.

Вершины n -угольника Σ обозначим P_k , вершину пирамиды – P . Расположим пирамиду Λ таким образом, чтобы начало O располагалось в центре основания Σ , вершина P располагалась на оси z , а точка P_0 лежала на оси x . Тогда рассматриваемые точки будут иметь следующие координаты:

$$(2) \quad P = (0, 0, h); \quad P_k = (r \cos(k\alpha), r \sin(k\alpha), 0), \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Построим линейное изгибание пирамиды Λ по схеме, предложенной для тетраэдра в [3]. На каждом наклонном ребре $P_i V$ пирамиды отметим точку S_i на расстоянии $s \in [0, b]$ от вершины P . На грани $P_0 P_1 P$ восстановим перпендикуляры к сторонам $P_0 P$ и $P_1 P$ в точках S_0 и S_1 , и на каждом перпендикуляре отложим отрезки фиксированной длины t , которые обозначим $S_0 Q_0$ и $S_1 T_1$ соответственно. Соединим отрезком точки Q_0 и

T_1 , затем проведем отрезки P_0Q_0 , Q_0P , P_1T_1 и T_1P . В результате получим разбиение исходной треугольной грани P_0P_1P на 5 треугольников и трапецию.

Специализируем выбор параметра t таким образом, чтобы длина отрезка Q_0T_1 равнялась удвоенной длине отрезка S_0Q_0 , т.е. $2t$:

$$(3) \quad t = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

Такой выбор величины t возможен при любом значении параметра s в пределах от 0 до $\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; в предельном случае при $s = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ точки Q_0 и T_1 будут располагаться в точности на стороне основания P_0P_1 .

Вращая пирамиду на углы $k\alpha$, $1 \leq k \leq n-1$, получим аналогичные разбиения граней $P_kP_{k+1}V$, обозначая соответствующие точки через Q_k и T_{k+1} . На Рис. 1 указана "измельченная" развертка треугольной пирамиды.

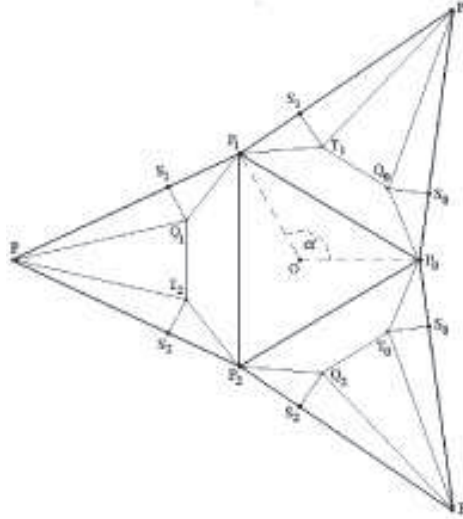


Рис. 1

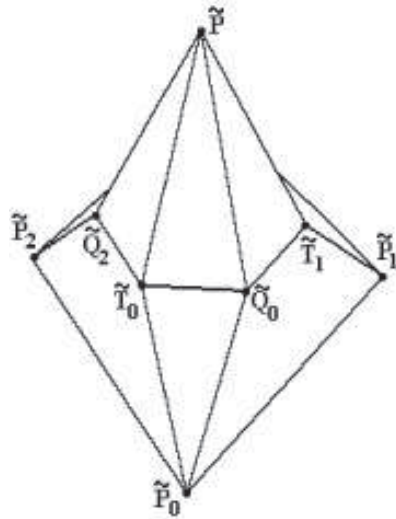


Рис. 2

Развертка пирамиды Λ с отмеченными дополнительными вершинами и ребрами допускает реализацию не только в виде пирамиды Λ с формально проведенными дополнительными ребрами, но и иную реализацию, которую мы сейчас построим. Это многогранник $\tilde{\Lambda}$, внешний вид которого для случая $n = 3$ представлен на Рис. 2. Определяется многогранник $\tilde{\Lambda}$ следующим образом. Будем обозначать соответствующие вершины $\tilde{\Lambda}$, добавляя к их прежним буквенным обозначениям символ "тильда". Многогранник $\tilde{\Lambda}$ имеет то же основание, что и пирамида Λ , т.е. $\tilde{P}_k = P_k$. Вершина \tilde{P} многогранника $\tilde{\Lambda}$ расположена на оси z , ее координаты представим в виде

$$(4) \quad \tilde{P} = (0, 0, \zeta).$$

Точки \tilde{S}_k , \tilde{Q}_k и \tilde{T}_k зададим следующим образом:

$$(5) \quad \tilde{S}_k = (\rho \cos(k\alpha), \rho \sin(k\alpha), \mu),$$

$$(6) \quad \tilde{Q}_k = (\rho \cos(k\alpha) - t \sin(k\alpha), \rho \sin(k\alpha) + t \cos(k\alpha), \mu),$$

$$(7) \quad \tilde{T}_k = (\rho \cos(k\alpha) + t \sin(k\alpha), \rho \sin(k\alpha) - t \cos(k\alpha), \mu)$$

Заметим, что точка \tilde{S}_k является серединой отрезка $\tilde{T}_k\tilde{Q}_k$, поэтому замкнутый многоугольник $\tilde{S}_0\tilde{Q}_0\tilde{T}_1\tilde{S}_1\tilde{Q}_1\dots\tilde{S}_0$, лежащий в горизонтальной плоскости $z = \mu$, представляет собой на самом деле $2n$ -угольник $\tilde{Q}_0\tilde{T}_1\tilde{Q}_1\tilde{T}_2\dots\tilde{Q}_0$. Из (5)–(7) следует, что многогранник $\tilde{\Lambda}$ имеет те же симметрии, порожденные вращениями вокруг оси z и отражениями в вертикальных плоскостях, что и исходная пирамида Λ .

Завершая построение $\tilde{\Lambda}$, подберем величины ζ , ρ , μ так, чтобы многогранник $\tilde{\Lambda}$ был изометричен пирамиде Λ . Длины отрезков $\tilde{T}_k\tilde{S}_k$ и $\tilde{S}_k\tilde{Q}_k$ равны длине t отрезков T_kS_k и S_kQ_k – это прямо следует из (5)–(7). Длины ребер $\tilde{Q}_k\tilde{T}_{k+1}$ должны равняться длине $2t$ отрезков Q_kT_{k+1} . Определяя расстояние между \tilde{Q}_k и \tilde{T}_{k+1} с помощью (6)–(7), получаем уравнение

$$(8) \quad \rho^2 \sin \frac{\alpha}{2} - 2pt \cos \frac{\alpha}{2} - t^2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Длины отрезков $\tilde{S}_k\tilde{P}$ должны равняться длине s отрезков S_kP . Определяя расстояние между \tilde{S}_k и \tilde{P} с помощью (4), (5), получаем уравнение

$$(9) \quad \rho^2 + (\zeta - \mu)^2 = s^2.$$

Длины отрезков $\tilde{S}_k\tilde{P}_k$ должны равняться длине $b - s$ отрезков S_kP_k . Определяя расстояние между \tilde{S}_k и \tilde{P}_k с помощью (2) и (5), получаем уравнение:

$$(10) \quad (r - \rho)^2 + \mu^2 = (b - s)^2.$$

Наконец, длины ребер $\tilde{Q}_k\tilde{P}_k$, $\tilde{T}_k\tilde{P}_k$, $\tilde{Q}_k\tilde{P}$, $\tilde{T}_k\tilde{P}$ должны равняться длинам отрезков Q_kP_k , T_kP_k , Q_kP , T_kP соответственно – эти равенства вытекают из (8)–(10).

Таким образом, многогранник $\tilde{\Lambda}$ будет изометричен пирамиде Λ , если ρ, ζ, μ удовлетворяют системе уравнений (8)–(10), где s играет роль параметра.

Изменяя s , получаем семейство многогранников $\tilde{\Lambda}$, изометричных пирамиде Λ . Этому семейству многогранников, представляющих непрерывное линейное изгибание пирамиды Λ , отвечает решение системы уравнений (8)–(10) в виде непрерывных функций $\rho(s), \mu(s), \zeta(s)$, удовлетворяющих начальным условиям $\rho(0) = 0, \mu(0) = h, \zeta(0) = h$. Такое решение имеет следующий вид:

$$(11) \quad \rho = t(s) \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + 1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$(12) \quad \mu = \sqrt{(b-s)^2 - (r - \rho(s))^2},$$

$$(13) \quad h = \mu(s) + \sqrt{s^2 - \rho(s)^2}.$$

При этом параметр $s \in [0, \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}]$ подчиняется неравенству $(b-s)^2 - (\rho(s) - c)^2 \geq 0$. Анализ этого неравенства с учетом (3), (11) показывает, что параметр s может изменяться лишь в интервале $0 \leq s \leq s_l$, где $\frac{s_l}{b} = \frac{\cos \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{\alpha+\beta}{4}$; поэтому, чем меньше α (а значит и β), тем ближе предельное значение s_l к b .

С геометрической точки зрения, многогранник $\tilde{\Lambda}$ образован $2n$ равными (согласно с (3)) гранями $\tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}$ и $\tilde{T}_k \tilde{Q}_{k+1} \tilde{P}$, n равными гранями $\tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}_k$, n равными гранями – трапециями $\tilde{P}_k \tilde{Q}_k \tilde{T}_k \tilde{P}_{k+1}$ и основанием Σ .

Для определения объема, тело, ограниченное многогранником $\tilde{\Lambda}$, естественно разделить на две части, проведя горизонтальную плоскость $z = \mu$ через точки \tilde{Q}_k, \tilde{T}_k ; см. Рис. 3 для $n = 3$.

Нижняя часть тела ограничена правильным n -угольным основанием Σ снизу, правильным $2n$ -угольным основанием

$$\Sigma' = \tilde{Q}_0 \tilde{T}_0 \tilde{Q}_1 \dots \tilde{T}_{n-1} \tilde{Q}_0$$

сверху и многогранником-пояском Ω' , составленным из n треугольных $\tilde{T}_k\tilde{Q}_{k+1}\tilde{P}_k$ и n четырехугольных $\tilde{P}_k\tilde{Q}_k\tilde{T}_k\tilde{P}_{k+1}$ боковых граней. Расстояние между плоскостями оснований Σ и Σ' равно $\mu(s)$. В предельном случае при $s = s_l$ все точки \tilde{S}_k и \tilde{Q}_k , \tilde{T}_k будут лежать в плоскости основания Σ ; как следствие, пояс Ω' укладывается в плоскость основания, образуя вместе с Σ и Σ' дважды покрытый $3n$ -угольник.

Верхняя часть тела — правильная $2n$ -угольная пирамида Λ' , ограниченная правильным $2n$ -угольным основанием Σ' снизу и $2n$ равными треугольными боковыми гранями $\tilde{Q}_k\tilde{T}_k\tilde{P}$ и $\tilde{T}_k\tilde{Q}_{k+1}\tilde{P}$.

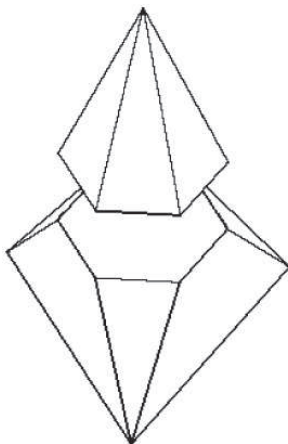


Рис. 3

Предложение 1. Величины, характеризующие размеры пирамиды Λ' , вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{2}, \quad r' = s \frac{tg \frac{\beta}{4}}{\sin \frac{\alpha}{4}},$$

$$a' = 2s tg \frac{\beta}{4}, \quad b' = s \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{4}}, \quad h' = s \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\beta}{4}}}{\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\beta}{4}}$$

Приведенные формулы являются аналитическим следствием предложенной геометрической конструкции линейного изгибания.

1.2. Анализ объема. Вычислим теперь объем тела $V(\tilde{\Lambda})$, ограниченного многогранником $\tilde{\Lambda}$. Используя смешанное произведение векторов, проведенных из начала координат в соответствующие вершины многогранника $\tilde{\Lambda}$, с учетом симметрии $\tilde{\Lambda}$, находим:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\Lambda}) &= \frac{n}{6}(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{Q}_0) + \frac{n}{6}(\tilde{Q}_0, \tilde{P}_1, \tilde{T}_1) + \frac{n}{6}(\tilde{P}_0, \tilde{Q}_0, \tilde{T}_0) + \\ &+ \frac{2n}{6}(\tilde{Q}_0, \tilde{P}, \tilde{T}_0) = \\ (14) \quad &= \frac{n}{6}(r^2\mu \sin \alpha + r\mu(\rho \sin \alpha + t(1 - \cos \alpha)) + 4h\rho t). \end{aligned}$$

По формулам (3), (11)–(13) объем $V(\tilde{\Lambda})$ является функцией переменной s и параметров α , β и r . Будем использовать обозначение $V(\tilde{\Lambda}) = V(s; \alpha, \beta, r)$. Достаточно простая и очевидная схема аналитического построения функции $V(s; \alpha, \beta, r)$ допускает эффективное применение компьютерных программ символьных вычислений и элементарных средств математического анализа для всестороннего изучения этой функции.

- Предложение 2.** (1) $V(\tilde{\Lambda}) = r^3V(\sigma, \alpha, \beta)$, где $\sigma = \frac{s}{b}$.
 (2) Функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ является строго возрастающей по σ при достаточно малых $\sigma \geq 0$.
 (3) Функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ является строго убывающей по σ , достаточно близким к

$$\sigma_l = \frac{s_l}{b} = \frac{\cos \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{\alpha + \beta}{4}.$$

Доказательство. Первый пункт Предложения устанавливается вычислением функции $V(\tilde{\Lambda}) = V(s; \alpha, \beta, r)$ с учетом формул

(3), (11)–(13) и подстановкой в полученное выражение значения $s = b\sigma$. Возникающая в результате функция $V(\sigma, \alpha, \beta)$ имеет вид

$$V = A_0\sigma^3 + (A_1\sigma^2 + A_2\sigma + A_3)\sqrt{A_4\sigma^2 + A_5\sigma + A_6},$$

где коэффициенты A_i зависят от α и β .

Второй и третий пункты Предложения устанавливаются вычислением производной $\frac{dV}{d\sigma}$ при значениях $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_l$. Функция $\frac{dV}{d\sigma}(0, \alpha, \beta)$ является положительной, каковы бы ни были $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, $0 < \beta < \alpha$, а функция $\frac{dV}{d\sigma}(\sigma_l, \alpha, \beta)$ является отрицательной при тех же значениях α и β . \square

Прямым следствием Предложения 2 является

Теорема 1. *Объем пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$ на начальном этапе (при достаточно малых $s \geq 0$) увеличивается.*

Поэтому можно подобрать значение $s \in (0, s_l)$, при котором объем $V(\tilde{\Lambda})$ будет максимальным. Указанное критическое значение параметра s , которое будем обозначать s_c , является корнем уравнения $\frac{dV}{ds} = 0$; учитывая, что $V(\tilde{\Lambda}) = r^3V(\sigma, \alpha, \beta)$, задача сводится к отысканию корня $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ уравнения $\frac{dV}{d\sigma} = 0$. Второй и третий пункты Предложения 2 гарантируют наличие хотя бы одного такого корня σ_c внутри интервала $(0, \sigma_l)$.

Уравнение $\frac{dV}{d\sigma} = 0$ имеет вид

$$A_7\sigma^3 + A_8\sigma^2 + A_9\sigma + A_{10} + \sigma^2\sqrt{A_{11}\sigma^2 + A_{12}\sigma + A_{13}} = 0,$$

где коэффициенты A_i являются тригонометрическими полиномами относительно $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$. Переместив последнее слагаемое в уравнении в правую часть и возведя обе части в квадрат,

получим алгебраическое уравнение *четвертой* степени относительно σ :

$$(15) \quad B_1 \left(\frac{s}{b}\right)^4 + B_2 \left(\frac{s}{b}\right)^3 + B_3 \left(\frac{s}{b}\right)^2 + B_4 \left(\frac{s}{b}\right)^1 + B_5 = 0.$$

Коэффициенты B_i также являются тригонометрическими полиномами от $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$. Искомая величина $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ является корнем уравнения (15). Анализ, проведенный средствами компьютерных программ символьных вычислений, показывает, что из четырех корней уравнения (15) только один является вещественным корнем уравнения $\frac{dV}{d\sigma} = 0$, лежащим внутри интервала $(0, \sigma_l)$. График σ_c как функции от $\frac{\alpha}{4}$ и $\frac{\beta}{4}$ приведен на Рис. 4.

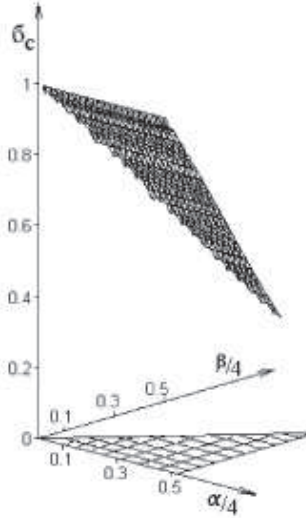


Рис. 4

Мы не выписываем здесь уравнение (15) в явном виде; выражения для коэффициентов B_i громоздки; громоздким является и явное выражение $\sigma_c = \frac{s_c}{b}$ как функции от α , β . Приведем лишь оценки для s_c .

Предложение 3. *Справедливы неравенства*

$$0 < b - s_c < r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}} < \frac{1}{\sqrt{3}} r \alpha.$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Проанализируем поведение производной $\frac{dV}{d\sigma}$ как функции от σ , α , β при

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_l, \quad 0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

С одной стороны, при $\sigma = \sigma_l$ функция $\frac{dV}{d\sigma}(\sigma_l, \alpha, \beta)$ является отрицательной, каковы бы ни были значения $0 < \beta < \alpha < \frac{2\pi}{3}$. С другой стороны, при

$$\sigma = 1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}$$

функция

$$\frac{dV}{d\sigma} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}, \alpha, \beta \right)$$

является положительной при тех же значениях α , β . Отсюда получаем оценку

$$\left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4} \right) < \sigma_c < \frac{s_l}{b} < 1,$$

из которой следует, что

$$0 < b - s_c < 2b \sin \frac{\beta}{4},$$

а значит

$$0 < b - s_c < r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}}.$$

Так как при $0 < \beta < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ справедливы неравенства

$$\cos \frac{\beta}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2},$$

то мы и приходим к Предложению 3. □

Полученные оценки позволяют качественно представить поведение критического значения s_c . А именно, чем меньше $\alpha > 0$, тем ближе s_c к b . Иначе говоря, чем больше граней имеет пирамида Λ , тем меньше будет поясok Ω' у многогранника $\tilde{\Lambda}$ с максимальным объемом.

Из Предложения 1 и приведенных оценок прямо вытекают и другие неравенства, демонстрирующие поведение параметров пирамиды при максимизации объема.

Предложение 4. *Если $s = s_c$, то величины, характеризующие размеры пирамид Λ и Λ' , связаны следующими соотношениями:*

$$\frac{a'}{a} > \frac{1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}}{2 \cos^2 \frac{\beta}{4}}, \quad \frac{b'}{b} > \frac{1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}}, \quad \frac{r'}{r} > \frac{(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}) \cos \frac{\alpha}{4}}{\cos^2 \frac{\beta}{4}},$$

$$\frac{h'}{h} > \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}\right) \frac{\cos \frac{\alpha}{4} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\beta}{4}}}{\cos \frac{\beta}{4} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}.$$

Отсюда заключаем, что при малых значениях углов α и β , т.е. при большом числе граней n , длины ребер боковых граней, радиусы окружностей, описанных вокруг оснований, и высоты пирамид Λ и Λ' соответственно достаточно близки, а отношение длин сторон оснований близко к $1 : 2$, что обусловлено удвоением количества боковых граней при переходе от Λ к Λ' .

Еще одно полезное следствие приведенных оценок — возможность аппроксимировать критическое значение s_c величиной

$$s_a = b - r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{4}}$$

(в том смысле, что $s_a < s_c < b$). Данное приближение будет тем точнее, чем меньше $\alpha > 0$. Более грубой аппроксимацией для s_c является

$$s_a^\# = b - \frac{1}{\sqrt{3}} r \alpha.$$

Предложенная аппроксимация позволяет установить следующую оценку относительного увеличения объема пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$.

Предложение 5. *Максимальный объем, достигаемый в ходе линейного изгибания $\tilde{\Lambda}$ при $s = s_c$, превосходит объем исходной пирамиды Λ более чем в*

$$\chi = 1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 - \frac{11}{4} \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \frac{\beta}{4}$$

раз.

Указанная оценка является содержательной при условии $\beta < \frac{16}{11}$. Поскольку $\beta < \alpha = \frac{2\pi}{n}$, то условие $\beta < \frac{16}{11}$ выполняется для всех пирамид при $n \geq 5$ и для достаточно высоких пирамид при $n = 3$ или 4.

Доказательство. Приведем схему доказательства. Максимальный объем многогранника $\tilde{\Lambda}$, достигаемый при $s = s_c$, превосходит объем $\tilde{\Lambda}$, который получается при $s = s_a$. Подставим значение s_a , которое можно записать в виде

$$s_a = r \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{4}\right),$$

в выражение для функции объема $V(s; \alpha, \beta, r)$ и разделим полученное значение $V(s_a; \alpha, \beta, r)$ на объем исходной пирамиды Λ . Результирующее выражение

$$\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$$

будет зависеть только от α и β , его график приведен на Рис.5.

Используя разложение Тейлора для $\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$ по α и β , мы и находим представленную в Предложении величину χ , позволяющую оценить снизу выражение $\frac{V(s_a; \alpha, \beta, r)}{V(0; \alpha, \beta, r)}$. Полученное значение χ дает оценку снизу и для максимального относительного увеличения объема, достигаемого в ходе линейного изгибания $\tilde{\Lambda}$. \square

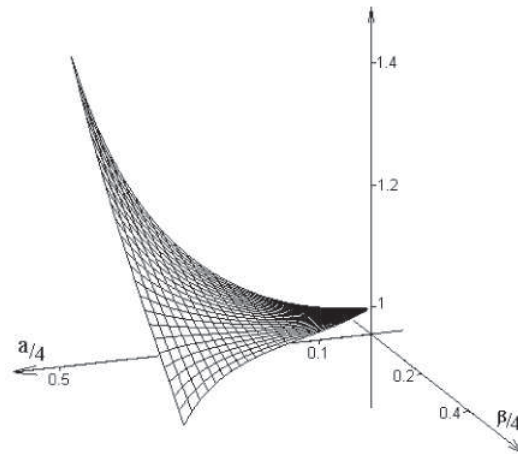


Рис. 5

Анализ Рисунка 5 позволяет предположить, что наилучшее относительное увеличение объема будет наблюдаться в случае достаточно высоких пирамид с небольшим числом граней.

2. Комбинированные линейные изгибания пирамиды

Конструкция, описанная в предыдущей части – итерационная. На первом шаге в процессе рассмотренного выше линейного изгибания правильной n -угольной пирамиды Λ возникает многогранник $\tilde{\Lambda}$, составленный из основания Σ , пояски Ω' и боковой поверхности правильной $2n$ -угольной пирамиды Λ' ,

размеры которых определяются значением параметра $s = s_1$ – высоты боковой грани пирамиды Λ' .

На втором шаге рассматриваем пирамиду Λ' и строим ее линейное изгибание по описанной схеме – в ходе изгибания будет получен многогранник $\tilde{\Lambda}'$, на котором естественным образом выделяются $4n$ -угольная пирамида Λ'' и поясок Ω'' , форма и размеры которых зависят от соответствующего параметра s_2 – высоты боковой грани пирамиды Λ'' . В результате, мы получаем изометричный пирамиде Λ многогранник, обозначим его $\hat{\Lambda}''$, который составлен из основания Σ , двух поясков Ω' , Ω'' и боковой поверхности пирамиды Λ'' .

Продолжая эту процедуру, на k -ом шаге строим линейное изгибание правильной $2^k n$ -гранной пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$ и получаем изометричный исходной пирамиде Λ многогранник $\hat{\Lambda}^{(k)}$, составленный из основания Σ , k поясков $\Omega', \dots, \Omega^{(k)}$ и боковой поверхности правильной $2^{k+1}n$ -гранной пирамиды $\Lambda^{(k+1)}$ – размеры многогранника зависят от k параметров s_1, \dots, s_k .

Таким образом, возникает последовательность семейств изометричных пирамиде многогранников:

$$\begin{aligned} & \Lambda, \\ & \hat{\Lambda}^{(1)} = \tilde{\Lambda} = \Sigma \cup \Omega' \cup (\Lambda' \setminus \Sigma'), \\ & \hat{\Lambda}^{(2)} = \Sigma \cup \Omega' \cup \Omega'' \cup (\Lambda'' \setminus \Sigma''), \\ & \hat{\Lambda}^{(k)} = \Sigma \cup \Omega' \cup \dots \cup \Omega^{(k)} \cup (\Lambda^{(k)} \setminus \Sigma^{(k)}), \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Если на каждом шаге фиксировать значение соответствующего параметра s_i , то получим последовательность конкретных многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, изометричных пирамиде Λ . Поскольку s_k – это высота боковой грани пирамиды $\Lambda^{(k)}$, а сама пирамида $\Lambda^{(k)}$ возникает при линейном изгибании пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$, то $s_k \leq s_{k-1}$. Иначе говоря, последовательность положительных чисел $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ является невозрастающей, а значит – всегда

сходится к некоторому s^\sharp . Предельная поверхность Λ^\sharp соответствующей последовательности многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ будет представлять собой либо многогранник с бесконечным числом граней, подходящих к одной вершине (случай $s^\sharp = 0$), либо поверхность, составленную из кругового конуса и многогранника с бесконечным числом граней, подходящих к граничной окружности конуса (случай $s^\sharp \neq 0$).

Важнейшим свойством многогранников $\hat{\Lambda}^{(k)}$ является возрастание объема, по крайней мере – при достаточно малых значениях параметров $s_k > 0$:

$$V(\Lambda) < V(\hat{\Lambda}') < V(\hat{\Lambda}'') < \dots < V(\hat{\Lambda}^{(k-1)}) < V(\hat{\Lambda}^{(k)}) < \dots$$

Очевидно, что объемы многогранников $\hat{\Lambda}^{(k)}$ ограничены сверху некоторой константой, зависящей от размеров исходной пирамиды Λ . Например, любой $\hat{\Lambda}^{(k)}$ помещается внутрь шара, диаметр которого превосходит внутренний диаметр пирамиды Λ .

Весьма сложной представляется задача одновременного нахождения оптимальных значений параметров s_k , при которых последовательность изометричных тетраэдру многогранников $\{\hat{\Lambda}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ дает максимально возможное относительное увеличение объема. Чему равна точная верхняя грань для $V(\hat{\Lambda}^{(k)})$? Каким в этом случае будет асимптотическое поведение оптимизирующей последовательности $\hat{\Lambda}^{(k)}$? Что будет представлять собой предельная поверхность Λ^\sharp ?

Один из возможных способов оценки для максимально возможного относительного увеличения объема, достижимого в ходе рассматриваемых линейных изгибаний пирамиды, состоит в том, чтобы на k -шаге в качестве s_k выбирать значение, дающее максимальное увеличение объема в ходе линейного изгибания соответствующей пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$. Более простой способ, допускающий простую реализацию численными методами, состоит в том, чтобы на каждом шаге вместо s_c брать аппроксимирующее значение s_a . Сходимость такой простой процедуры описывается следующим утверждением.

Предложение 6. Убывающая последовательность положительных величин

$$s_a^{(1)} > s_a^{(2)} > s_a^{(3)} > \dots$$

сходится к величине

$$s^\# > b \frac{\frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{2^{j+2}} \right).$$

Соответствующая последовательность многогранников

$$\hat{\Lambda}^{(1)}, \hat{\Lambda}^{(2)}, \hat{\Lambda}^{(3)}, \dots$$

сходится к поверхности, содержащей круговой конус, при этом длина образующей конуса будет не меньше, чем

$$b \frac{\frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - 2 \sin \frac{\beta}{2^{j+2}} \right).$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Каждое $s_a^{(k)}$ вычисляется через соответствующие углы $\alpha^{(k-1)}$, $\beta^{(k-1)}$ и длины сторон $b^{(k-1)}$, $a^{(k-1)}$ пирамиды $\Lambda^{(k-1)}$. Последовательное применение результатов Предложения 4 и приводит к искомой оценке. \square

3. ЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБАНИЯ ТЕТРАЭДРА

Как применение геометрической конструкции, описанной в предыдущем разделе, построим специальные линейные изгибания тетраэдра, приводящие к существенному – более, чем на 44 % - увеличению объема.

Пусть M – тетраэдр с ребрами длины 1, его объем равен $V(M) = \frac{\sqrt{2}}{12}$. Вершины тетраэдра обозначим F_1, \dots, F_4 .

Построим сначала линейное изгибание тетраэдра M , описанное в работах [3] и [4]. На каждом ребре $F_i F_j$ отметим середины A_{ij} . На грани $F_1 F_3 F_4$ восстановим серединные перпендикуляры от точек A_{13} , A_{14} , A_{34} , и отложим на этих перпендикулярах отрезки равной длины u , зафиксированной в пределах от 0

до $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Концы отложенных отрезков обозначим соответственно D_2 , D_3 и D_1 . Соединяя эти точки между собой, получим правильный треугольник $D_1D_2D_3$. Кроме того, соединим отрезками точки D_1 с F_3 и с F_4 , D_2 с F_1 и с F_3 , а D_3 с F_1 и с F_4 . Получим симметричное разбиение грани $V_1V_3V_4$ на 10 треугольников, см. Рис. 6. Повторим аналогичную процедуру с тем же самым значением u и для остальных трех граней тетраэдра. Развертка тетраэдра с проведенными дополнительными ребрами показана на Рис. 7.

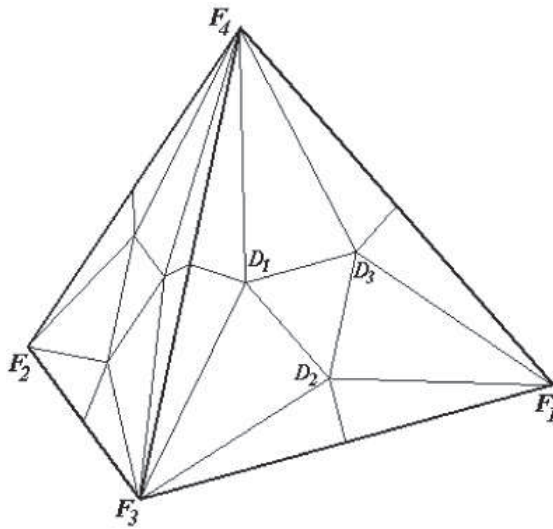


Рис. 6

Эта “измельченная”, развертка допускает реализацию не только в виде тетраэдра, как на Рис. 6, но и другую реализацию в виде многогранника, изометричного исходному тетраэдру, но

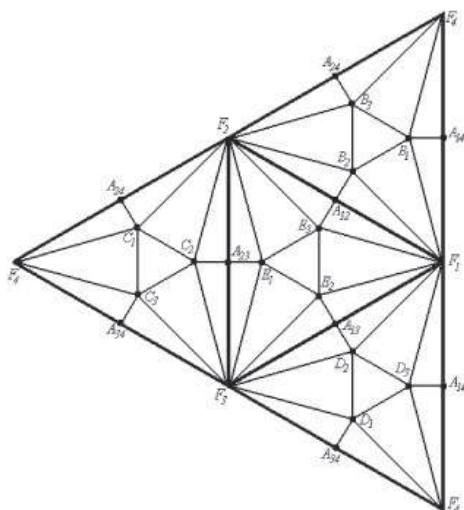


Рис. 7

не конгруэнтному ему. Такая реализация, сохраняющая свойства пространственной симметрии тетраэдра, представлена на Рис. 8.

Строится упомянутый многогранник, который обозначим M_* , следующим образом. Будем обозначать вершины многогранника M_* , соответствующие вершинам исходного тетраэдра M , теми же буквами, добавляя символ *. Расположим исходный тетраэдр M таким образом, чтобы его вершины находились в точках

$$F_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), F_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$F_3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right), F_4 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right).$$

Вершины F_i^* многогранника M_* расположены на тех же лучах, что и соответствующие вершины F_i тетраэдра M , и равноудалены от начала O . Координаты этих вершин записываются

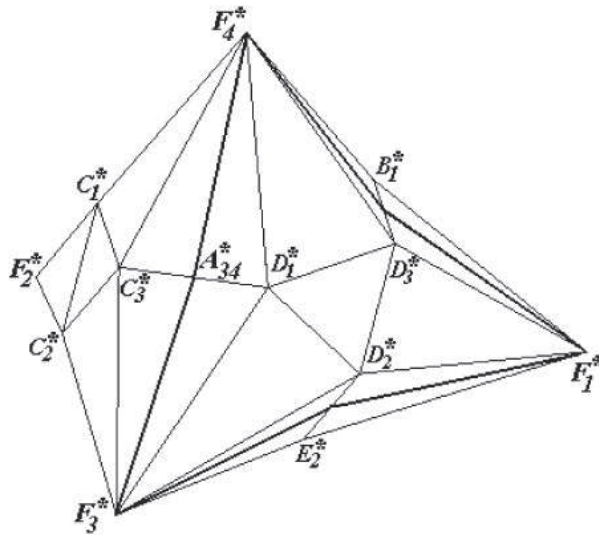


Рис. 8

следующим образом:

$$(16) \quad F_1^* = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(17) \quad F_2^* = \lambda \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(18) \quad F_3^* = \lambda \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{6}} \right),$$

$$(19) \quad F_4^* = \lambda \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right).$$

Точки A_{ij}^* расположены на тех же лучах, что и соответствующие точки A_{ij} , и тоже равноудалены от начала O . Координаты точек A_{ij}^* получаются умножением координат A_{ij} на одну и ту

же величину ξ . В частности, имеем:

$$(20) \quad \begin{aligned} A_{14} &= \frac{1}{2}(F_1 + F_4) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{6}} \right), \\ A_{14}^* &= \xi \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{6}} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что вершины F_i^* совмещаются друг с другом симметриями тетраэдра. Аналогичным свойством обладают и точки A_{ij}^* .

Проведем через точку A_{14}^* прямую l , перпендикулярную плоскости, проходящей через точки F_1^* , F_4^* и O — эта прямая параллельна оси y . На прямой l от точки A_{14}^* отложим в обе стороны отрезки равной длины u . Концы построенных отрезков обозначим B_1^* и D_3^* :

$$(21) \quad B_1^* = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\xi, u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right),$$

$$(22) \quad D_3^* = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\xi, -u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right).$$

Применяя к B_1^* и D_3^* симметрии тетраэдра, получим остальные точки B_i^* , C_j^* , D_k^* и E_m^* многогранника M_* , соответствующие точкам B_i , C_j , D_k и E_m исходного тетраэдра M . В частности, применяя к точке B_1^* вращение вокруг оси z на угол $\frac{2}{3}\pi$, получим точку D_1^* :

$$(23) \quad D_1^* = \left(-\frac{1}{4\sqrt{3}}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}u, -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}u, \frac{1}{2\sqrt{6}}\xi \right).$$

Аналогично, применяя к точке D_3^* вращение на угол $\frac{2}{3}\pi$ по часовой стрелке вокруг оси, проходящей через начало O перпендикулярно к грани $F_1F_3F_4$, получим точку D_2^* :

$$(24) \quad D_2^* = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\xi + \frac{\sqrt{3}}{6}u, -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}u, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\xi + \frac{\sqrt{6}}{3}u \right).$$

Подберем величины $\lambda \geq 0$ и $\xi \geq 0$ таким образом, чтобы многогранник M_* был изометричен тетраэдру M . Длины отрезков $F_i^*A_{ij}^*$ и $A_{ij}^*F_j^*$ должны равняться длинам соответствующих отрезков F_iA_{ij} и $A_{ij}F_j$, которые все равны $\frac{1}{2}$. Чтобы записать соответствующее условие, ввиду симметрии достаточно рассмотреть, например, только точки F_1^* , F_4^* и A_{14}^* . Используя координаты этих точек, представленные в (16), (19) и (20), найдем длины отрезков $F_1^*A_{14}^*$ и $A_{14}^*F_4^*$. Легко проверить, что длины указанных отрезков будут равны $\frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда будет выполнено равенство

$$(25) \quad 3\lambda^2 - 2\lambda\xi + \xi^2 = 2.$$

Длины равных отрезков $B_i^*B_j^*$, $C_j^*C_j^*$, $D_i^*D_j^*$ и $E_i^*E_j^*$ должны равняться длинам соответствующих отрезков B_iB_j , C_iC_j , D_iD_j и E_iE_j , которые равны $(4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right)$. Ввиду симметрии, указанное равенство достаточно проверить для одной пары точек, например — для D_1^* и D_3^* . Используя координаты этих точек, представленные в (22), (23), и находя расстояние между D_1^* и D_3^* , получаем, что длина отрезка $D_1^*D_3^*$ будет равна $(4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right)$ тогда и только тогда, когда будет выполнено равенство

$$\frac{1}{4}\xi^2 - \xi u + u^2 = (4u^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arctg 2u\right),$$

которое преобразуется к виду

$$(26) \quad \left(\frac{1}{2}\xi - u\right)^2 = \left(\frac{1 - 2\sqrt{3}u}{2}\right)^2.$$

Равенство длин оставшихся соответствующих ребер на многогранниках M и M_* будет выполнено по построению и в силу симметрии. Таким образом, многогранники M и M_* будут изометричны тогда и только тогда, когда λ и ξ удовлетворяют уравнениям (25)–(26) при заданном фиксированном u .

Изменяя u от 0 до $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, мы получаем семейство многогранников M_* , изометричных исходному тетраэдру. Это семейство будет представлять линейное изгибание тетраэдра, если мы сможем найти решение уравнений (25)–(26) в виде двух непрерывных функций $\lambda(u)$ и $\xi(u)$, удовлетворяющих начальному условию $\lambda(0) = 1$ и $\xi(0) = 1$. Решение, соответствующее рассматриваемому семейству многогранников M_* , имеет вид

$$(27) \quad \xi = 2 \left(u + \frac{1 - 2\sqrt{3}u}{2} \right),$$

$$(28) \quad \lambda = \frac{1}{3} \left(\xi + \sqrt{2}\sqrt{3 - \xi^2} \right).$$

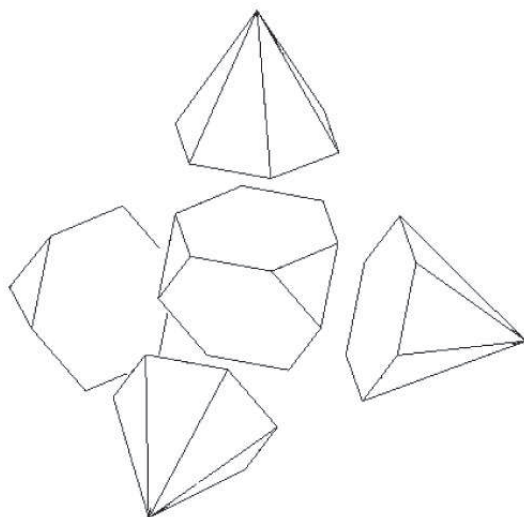


Рис. 9

Для вычисления объема, тело, ограниченное многогранником M_* , естественно разделить на 5 частей, см. Рис. 9. Четыре части ограничены равными пирамидами с шестиугольными основаниями:

- пирамида Λ_1 с вершиной F_1^* и основанием $B_1^*B_2^*E_3^*E_2^*D_2^*D_3^*$,
- пирамида Λ_2 с вершиной F_2^* и основанием $B_2^*B_3^*C_1^*C_2^*E_1^*E_3^*$,
- пирамида Λ_3 с вершиной F_3^* и основанием $E_2^*E_1^*C_2^*C_3^*D_1^*D_2^*$,
- пирамида Λ_4 с вершиной F_4^* и основанием $B_1^*B_3^*C_1^*C_3^*D_1^*D_3^*$.

Оставшаяся часть (остов) ограничена многогранником Λ_0 , который представляет собой либо усеченный тетраэдр (при $0 < u < \frac{1}{2\sqrt{3}}$), либо просто тетраэдр (при $u = \frac{1}{2\sqrt{3}}$).

Вычислим объем многогранника M_* . Используя смешанное произведение векторов, проведенных из начала координат в соответствующие вершины многогранника M_* , и учитывая симметрии M_* , можем записать:

$$V(M_*) = 4\frac{1}{6}(D_1^*, D_2^*, D_3^*) + 12\frac{1}{6}(D_1^*, D_3^*, F_4^*) + 12\frac{1}{6}(D_3^*, B_1^*, F_4^*).$$

Подставляя значения векторов из (19), (21)–(24), получаем:

$$V(M_*) = \frac{1}{24\sqrt{2}}(\xi^3 - 12\xi u^2 + 16u^3 + 3\lambda\xi^2 - 36\lambda u^2 + 36\lambda\xi u).$$

С учетом (27)–(28) величина $V(M_*)$ представляет собой функцию от u . График $V(M_*)$ представлен на Рис. 10; горизонтальной пунктирной линией отмечено значение объема исходного тетраэдра $V(M) = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

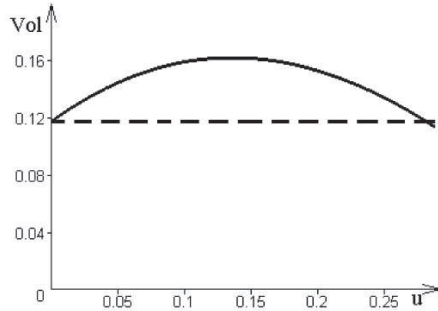


Рис. 10

Наибольшее увеличение объема достигается при $u \approx u_c = 0.1354198$, когда $V(M_*) \approx 0.1623025$; относительное увеличение объема в этом случае равно $\frac{V(M_*)}{V(M)} \approx 1.3771825$, т.е. составляет более 37%. Именно этот результат получен Д. Д. Бликером в [4].

Обратим внимание на следующий удивительный факт. В основании равных пирамид Λ_i будут лежать правильные шестиугольники в том и только в том случае, когда $u = u_r = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12}$ — это можно получить, приравняв длины ребер $D_1^* D_3^*$ и $D_3^* B_1^*$. Величина $u_r = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12} \approx 0.1339746$ очень близка к найденному выше экстремальному значению $u_c = 0.1354198$. Объем многогранника M_* в этом случае равен $V(M_*) \approx 0.1622977$, а относительное увеличение объема равно $\frac{V(M_*)}{V(M)} \approx 1.3771421$ — это значение указано В. А. Александровым в [5], разница с найденным Д. Д. Бликером увеличением объема имеет порядок 10^{-5} .

Построим теперь новое линейное изгибание тетраэдра M со сторонами длины 1. Рассмотрим сначала линейное изгибание M_* , проанализированное выше, и зафиксируем $u = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{12}$. К каждой вершине F_i^* многогранника M_* примыкает 6 равных равнобедренных треугольников — граней, образующих боковую поверхность пирамиды Λ_i , см. Рис. 8–9. Эти четыре пирамиды конгруэнтны правильной пирамиде Λ с шестиугольным основанием ($n = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$), угол при вершине боковой грани равен $\beta = \frac{\pi}{6}$, длина ребер основания равна $a = 2u = \tan \frac{\pi}{12}$, длина наклонных ребер равна

$$b = \sqrt{\frac{1}{4} + u^2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{12}}.$$

Объем пирамиды Λ равняется

$$\frac{1}{24} n a^2 \sqrt{4b^2 - \frac{a^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \approx 0.0275370.$$

Применим теперь к пирамиде Λ линейное изгибание по схеме, изложенной в разделе 2. Получим семейство неконгруэнтных невыпуклых многогранников $\tilde{\Lambda}$, изометричных пирамиде Λ . Максимальное увеличение объема рассматриваемой пирамиды Λ при линейном изгибании $\tilde{\Lambda}$ достигается при $s = 0.4267783$ и составляет $V(\tilde{\Lambda}) \approx 0.0290564$.

Линейное изгибание пирамиды Λ , одновременно реализованное на каждой из пирамид Λ_i , порождает линейное изгибание многогранника M_* , а значит – и линейное изгибание исходного тетраэдра M . При указанном выше значении s мы получаем новый многогранник M'_* , объем которого равен

$$V(M'_*) = V(M_*) - 4 * V(\Lambda) + 4 * V(\tilde{\Lambda}) \approx .1683713.$$

Объем указанного многогранника M'_* превосходит объем исходного тетраэдра M в 1.4286783 раз, иначе говоря – более чем на 42 %, ср. [6]. Таким образом, уже на первом шаге итерации достигнутое Бликером в [4] увеличение объема тетраэдра улучшается более чем на 5 %.

Многогранник M'_* имеет более сложную структуру, чем M_* . Вместо каждой из шестигранных пирамид Λ_i появляется многогранник-поясок, составленный из 6 треугольных и 6 трапециевидных граней, и 12-гранная правильная пирамида. К каждой из этих 12-гранных пирамид тоже можно одновременно применить линейное изгибание по схеме из раздела 2 – получим новый многогранник M''_* , изометричный тетраэдру Λ , с увеличенным объемом.

Как указано в разделе 3, описанный процесс является итерационным. На k -ом шаге рассматривается многогранник $M_*^{(k-1)}$, содержащий четыре конгруэнтные $(2^{k-1} \cdot 6)$ -гранные правильные пирамиды. С помощью линейного изгибания этих пирамид по схеме из раздела 2 строится новый многогранник $M_*^{(k)}$, изометричный тетраэдру M , с увеличенным объемом.

В нижеследующей таблице приведены результаты численного анализа указанного процесса. В первой колонке указан

номер шага k , во второй, третьей и четвертой – количество боковых граней и характерные размеры соответствующей 2^{k-1} -6-гранной пирамиды, принадлежащей $M_*^{(k-1)}$ и подвергаемой линейному изгибанию на k -ом шаге, в пятой – экстремальное значение s_c , в шестой – максимальное относительное увеличение объема $V(M_*^{(k)})/V(M)$, достигаемое на k -ом шаге.

| k | n | a | b | s_c | $V(M_*^{(k)})/V(M)$ |
|-----|-----|-----------|-----------|-----------|---------------------|
| 1 | 6 | 0.2679492 | 0.5176381 | 0.4267783 | 1.4286783 |
| 2 | 12 | 0.1123728 | 0.4304609 | 0.3942073 | 1.4375726 |
| 3 | 24 | 0.0516754 | 0.3950532 | 0.3788093 | 1.4394450 |
| 4 | 48 | 0.0248015 | 0.3790065 | 0.3713158 | 1.4398758 |
| 5 | 96 | 0.0121522 | 0.3713599 | 0.3676075 | 1.4399793 |
| 6 | 192 | 0.0060154 | 0.3676378 | 0.3654378 | 1.4400047 |

Сходимость рассматриваемого процесса является достаточно высокой, и уже на 6 шаге получается многогранник $M_*^{(6)}$, изометричный исходному тетраэдру M , объем которого превосходит объем тетраэдра более чем на 44 %.

Предельная поверхность M^\sharp рассматриваемой последовательности многогранников $M_*^{(k)}$, как утверждалось в Предложении 6, будет содержать четыре конгруэнтных круговых конуса с вершинами в точках, соответствующих вершинам исходного тетраэдра M , при этом длина образующих конусов приближенно равняется 0.36. Оставшаяся часть M^\sharp – это многогранная поверхность с бесконечным числом граней, край которой составлен из четырех окружностей.

Аналогичную конструкцию можно применить к каждому выпуклому правильному многограннику M . Сначала M линейно изгибается с увеличением объема по схеме из [3]– [4]. В процессе построения получается невыпуклый многогранник M_* , включающий несколько конгруэнтных правильных пирамид (8 шестигранных пирамид в случае, когда M – куб; 6

восьмигранных пирамид в случае, когда M — октаэдр; 20 шестигранных пирамид в случае, когда M — додекаэдр; 12 десятигранных пирамид в случае, когда M — икосаэдр). К каждой из правильных пирамид итерационно применяется описанное в разделе 2 линейное изгибание, приводящее к последовательному увеличению объема. В нижеследующей таблице в третьей колонке приведены соответствующие численные результаты относительного увеличения объема правильных многогранников с помощью описанной процедуры (6 шагов итерации), в первой и второй колонках указаны соответствующие результаты из [4], [6].

| | <i>Бликер</i> | <i>Милка</i> | <i>Авторы</i> |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
| <i>Тетраэдр</i> | 1.37718257... | 1.41575603... | 1.44000470... |
| <i>Куб</i> | 1.21865263... | 1.23397824... | 1.24030167... |
| <i>Октаэдр</i> | 1.11580800... | 1.13233864... | 1.13589463... |
| <i>Додекаэдр</i> | 1.09339757... | 1.09733081... | 1.09723965... |
| <i>Икосаэдр</i> | 1.03631161... | 1.05274569... | 1.04272167... |

Как видим, наиболее существенное усиление результатов из [4]– [6] достигается для тетраэдра. В то же время, для икосаэдра и додекаэдра полученная добавка является весьма незначительной, что возможно обусловлено пологостью правильных пирамид Λ , возникающих при линейном изгибании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Погорелов А.В., Геометрическая теория устойчивости оболочек. - М.: Наука, 1966.
- [2] Погорелов А.В., Геометрическая методы в нелинейной теории упругих оболочек. - М.: Наука, 1967.
- [3] Милка А.Д., Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников // Математическая физика, анализ, геометрия. - 1994. - Т.1, В.1. - С.116-130.
- [4] Bleecker D.D., Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // Journal of Differential Geometry. - 1996. - V.43, N.3. - P.505-526.

- [5] Александров В.А., Как смять пакет от молока, чтобы в него вошло больше // Соросовский образовательный журнал. - Т.6, В.2. (2000). - С.121-127
- [6] Милка А.Д., Решение проблемы Бликера // Тезисы докладов 4-ой международной конференции по геометрии и топологии, Черкассы, 2001, с.64-65.
- [7] Финкель В.М., Портрет трещины. - М.: Металлургия, 1981, 160 с.