О цилиндричности аффинных подмногообразий

Елена Алексеевна Шугайло

Аннотация В работе исследуются многомерные аффинные погружения с вырожденной аффинной фундаментальной формой. Сформулированы достаточные условия, при которых нуль-распределение параллельно и аффинное погружение является погружением цилиндра.

Ключевые слова аффинное погружение, аффинный цилиндр, нуль-распределение.

УДК 514.754

Введение

Пусть (M^n, ∇) – аффинное n-мерное многообразие со связностью ∇, $(\mathbb{R}^{n+k}, D)$ – стандартное (арифметическое) аффинное пространство с плоской связностью D. В соответствии с [4], погружение $f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ называется аффинным, если вдоль погружения определено k-мерное трансверсальное дифференцируемое распределение Q такое, что справедливо разложение $D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X,\ Y),\ h(X,\ Y) \in Q$, которое определяет *аффинную фундаментальную форму* $h(X, Y)$.

Для произвольного трансверсального векторного поля ξ записывается также аналогичное разложение $D_X\xi = -f_*(S_\xi X) + \nabla^{\perp}_X \xi$, которое определяет *оператор Вейнгартена* S_ξ относительно ξ и *трансверсальную связность* $\nabla^{\perp}$.

Данная работа посвящена аффинным погружениям с вырожденной аффинной фундаментальной формой. Такие погружения для случая гиперповерхностей изучались в [2], [3], [4], [5], а в случае более высокой коразмерности в [6], [7]. Такие подмногообразия являются линейчатыми. В лемме 1 мы вводим специальную систему координат вдоль прямолинейной образующей и исследуем ее свойства. Далее на основании этой леммы мы доказываем две теоремы, которые дают достаточные условия цилиндричности аффинного подмногообразия.

1 Предварительные сведения

Рассмотрим аффинное погружение $f : (M^n, \nabla) \to (\mathbb{R}^{n+k}, D)$. Пусть $\xi_1, \dots \xi_k$ – базис трансверсального распределения Q. Аффинные аналоги разложений Гаусса и Вейнгартена для погруженного многообразия записываются в виде

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h^\alpha(X,\ Y)\xi_\alpha, \tag{1}$$

$$D_X \xi_\alpha = -f_*(S_\alpha X) + \tau_\alpha^\beta(X)\xi_\beta, \tag{2}$$

где h^α – компоненты аффинной фундаментальной формы, S_α – операторы Вейнгартена, τ_α^β – формы трансверсальной связности относительно базиса $\xi_1, \dots, \xi_k$ трансверсального распределения. В дальнейшем, для упрощения обозначений, f_* будем опускать.

Напомним некоторые основные уравнения аффинных погружений:
уравнение Гаусса

$$R(X,\ Y)Z = h^\alpha(Y,\ Z)S_\alpha X - h^\alpha(X,\ Z)S_\alpha Y; \tag{3}$$

уравнения Кодацци для h

$$(\nabla_X h^\alpha)(Y,\ Z) + \tau_\beta^\alpha(X)h^\beta(Y,\ Z) = (\nabla_Y h^\alpha)(X,\ Z) + \tau_\beta^\alpha(Y)h^\beta(X,\ Z). \tag{4}$$

Эти уравнения в несколько других обозначениях можно найти в [2].

Ядро (нуль-пространство) $N(x)$ *аффинной фундаментальной формы в точке* $x \in M^n$ определяется формулой

$$N(x) = \ker h_x = \bigcap_{\alpha=1}^{k} \ker h_x^\alpha,$$

где $\ker h_x^\alpha = \{X \in T_x M^n : h_x^\alpha(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_x M^n\}$.

Нуль-индексом аффинной фундаментальной формы в точке x называется число $\mu_x = \dim \ker h_x$.

В работе [6] было доказана, что ядро аффинной фундаментальной формы в точке x не зависит от выбора трансверсального распределения.

Подпространства $\ker h_x$ образуют гладкое распределение на M^n, называемое *нуль-распределением аффинной фундаментальной формы* $\mathcal{N} : x \mapsto \ker h_x$. Под *нуль-распределением аффинного погружения* обычно подразумевают распределение ядер аффинной фундаментальной формы [2], [3], [4].

В работе [6] было доказано, что *распределение* $\mathcal{N} : x \mapsto \ker h_x$ *является интегрируемым и вполне геодезичным слоением на* M^n. Соответствующее слоение $\mathcal{FN}$ называется *нуль-слоением*.

Аффинное подмногообразие с индуцированной связностью ∇ называется полным, если каждая ∇-геодезическая бесконечно продолжается по аффинному параметру. Слоение $\mathcal{FN}$ называется *полным*, если каждый его лист L полный относительно ∇, то есть каждая ∇-геодезическая в L бесконечно продолжается относительно аффинного параметра. Индуцированная связность на каждом листе определяется независимо от выбора трансверсального распределения Q и, в частности, свойство полноты $\mathcal{FN}$ не зависит от выбора Q. Доказано также [6], что *если* M^n *– полное многообразие, то каждый лист* L *слоения* $\mathcal{FN}$ *полный.*

Подмногообразие $f(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ называется *аффинным* l*-линейчатым подмногообразием*, если оно расслаивается на l-мерные аффинные подпространства в

$\mathbb{R}^{n+k}$, которые называются *образующими*; трансверсальное слоению $(n-l)$-мерное подмногообразие в M^n называется *базой*.

Рассмотрим аффинное погружение $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ полного многообразия M^n. Пусть $\dim\ker h = \mu = \mathrm{const} \neq 0$. Рассмотрим разложение Гаусса (1), суженное на лист L нуль-слоения $\mathcal{FN}$: $D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y)$. Это означает, что $f(L)$ – вполне геодезическое подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+k}$. Поскольку слоение $\mathcal{FN}$ – полное [6] и $\dim N_x = \mu = \mathrm{const} = \dim L$, то $f(L)$ – просто μ-мерное аффинное подпространство $\mathbb{R}^{\mu}$. Следовательно, через каждую точку подмногообразия $f(M^n)$ проходит μ-мерное аффинное подпространство, принадлежащее подмногообразию, т.е. $f(M^n)$ является линейчатым аффинным подмногообразием с μ-мерной образующей (или, что то же самое, с μ прямолинейными образующими). Каждая ∇-геодезическая, выпущенная в направлении вектора из $\mathcal{N}$ остается в слое и соответствует прямолинейной образующей на $f(M^n)$.

В частности, линейчатое подмногообразие может быть *аффинным цилиндром с μ-мерной образующей*, то есть подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+k}$, образованным *параллельным* семейством μ-мерных подпространств в точках $(n-\mu)$-мерного подмногообразия, называемого *базой*. Это происходит в том случае, когда нуль-распределение параллельно. Напомним [4, 3], что распределение $\mathcal{N}$ называется *параллельным относительно* ∇, если для любой кривой из точки x в точку y, параллельное перенесение вдоль кривой относительно ∇ отображает $N(x)$ в $N(y)$. Это происходит тогда и только тогда, когда $\nabla_X Y \in \mathcal{N}$ для любого векторного поля X и любого векторного поля $Y \in \mathcal{N}$. Это условие не зависит от выбора трансверсального распределения и сохраняется для любой индуцированной связности. Таким образом, можно говорить о *параллельности нуль-распределения* аффинного погружения.

Аффинные гиперповерхности с параллельным нуль-распределением были изучены K. Nomizu, B. Opozda в [3]. Ими была доказана теорема о глобальном цилиндрическом представлении такой гиперповерхности. В случае аффинного погружения большей коразмерности имеет место аналогичная теорема. Доказательство почти дословно повторяет доказательство в случае гиперповерхности.

Теоремы 1 и 2 дают некоторые достаточные условия, при которых нуль-распределение параллельно и аффинное погружение является погружением цилиндра.

2 Основные результаты

Для доказательства основных теорем нам понадобится следующая

Лемма 1 *Пусть $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ аффинное погружение полного многообразия M^n. Пусть $x(t)$ – геодезическая с аффинным параметром t, $x'(t) = X \in \mathcal{N}$. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – линейно независимые векторные поля такие, что в точке $x_0 = x(0)$ векторы $\{e_{n-\mu+1}, \dots, e_n\}$ образуют базис $\ker h_{x_0}$ ($\dim\ker h_{x_0} = \mu$). Пусть $U_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ – параллельные вдоль $x(t)$ векторные поля такие, что $U_i(0) = e_i$ и $\nabla_{U_i} X = \mu_i^s U_s$. Тогда векторные поля $\{U_{n-\mu+1}(t),\ \dots,\ U_n(t)\}$ образуют базис $\ker h_{x(t)}$. Вещественный спектр матрицы $M(t)$, составленной из функций μ_i^s, при каждом значении t состоит только лишь из нуля.*

Доказательство Выберем такую параметризацию аффинного погружения $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ и базис в трансверсальном распределении [6], что

$$\tau_\beta^\alpha(Y) = 0 \ \forall\alpha,\ \beta = \overline{1,k},\ \forall Y \in \mathcal{N}. \tag{5}$$

Пусть $x_0 \in M^n$, $X_0 \in \mathcal{N}$. Пусть $x(t)$ – геодезическая, начинающаяся в точке x_0 и имеющая в этой точке направление X_0. Поскольку M^n – полное многообразие, то каждый лист слоения $\mathcal{FN}$ полный [6]. Пусть X – векторное поле, которое совпадает с касательным вектором $x'(t)$ в точке $x(t)$, тогда $\nabla_X X = 0$ и $X \in \mathcal{N}$.

Возьмем параллельные вдоль $x(t)$ векторные поля U_i $(i = \overline{1,n})$ такие, что в точке $x_0 = x(0)$ $\quad U_i(x_0) = e_i$. По условию в точке x_0 $\dim\ker h_{x_0} = \mu$ и $\{e_{n-\mu+1}, \dots, e_n\}$ – базис $\ker h_{x_0}$.

Рассмотрим функции $(\rho^\alpha)_{ij}(t)$ $(\alpha = \overline{1,k},\ i,j = \overline{1,n})$, которые определяются следующим образом $(\rho^\alpha)_{ij} = h^\alpha(U_i,\ U_j)$. В точке x_0, то есть при $t = 0$, составленная из функций $(\rho^\alpha)_{ij}(t)$ матрица $P^\alpha(t)$ имеет вид:

$$P_0^\alpha = P^\alpha(0) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_0^\alpha & O \\ O & O \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\tilde{P}_0^\alpha$ – некоторая матрица размера $(n-\mu)\times(n-\mu)$, O – нулевые матрицы соответствующих размеров, причем существует α такое, что $\det \tilde{P}_0^\alpha \neq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\det \tilde{P}_0^1 \neq 0$. Найдем производные функций $(\rho^\alpha)_{ij}(t)$ по направлению векторного поля X:

$$X(\rho^\alpha)_{ij} = (\nabla_X h^\alpha)(U_i, U_j) + h^\alpha(\nabla_X U_i, U_j) + h^\alpha(U_i, \nabla_X U_j) = (\nabla_X h^\alpha)(U_i, U_j).$$

Из уравнений Кодацци для h (4) и (5) следует, что

$$X(\rho^\alpha)_{ij} = (\nabla_{U_i} h^\alpha)(X,\ U_j) = U_i(h^\alpha(X,\ U_j)) - h^\alpha(\nabla_{U_i} X,\ U_j) - h^\alpha(X,\ \nabla_{U_i} U_j) = \\ = -h^\alpha(\nabla_{U_i} X,\ U_j).$$

Пусть $\nabla_{U_i} X = \mu_i^s U_s$, тогда $X(\rho^\alpha)_{ij} = -h^\alpha(\mu_i^s U_s,\ U_j) = -\mu_i^s(\rho^\alpha)_{sj} = -(\rho^\alpha)_{js}\mu_i^s$. Таким образом, получаем матричные уравнения

$$\frac{dP^\alpha(t)}{dt} = -P^\alpha(t)M(t), \tag{7}$$

где $M(t)$ – матрица, составленная из функций $\mu_i^s(t)$. Рассмотрим $\nabla_X(\nabla_{U_i} X) = \nabla_X(\mu_i^s U_s) = X(\mu_i^s)U_s + \mu_i^s \nabla_X U_s = X(\mu_i^s)U_s$. Из уравнения Гаусса (3) следует, что $\ker h \subset \ker R$ и $X \in \ker R$, то есть

$$R(X,\ U_i)X = \nabla_X(\nabla_{U_i} X) - \nabla_{U_i}(\nabla_X X) - \nabla_{[X,\ U_i]} X = 0 \quad \forall U_i.$$

Таким образом,

$$\nabla_X(\nabla_{U_i} X) = \nabla_{[X,\ U_i]} X = \nabla_{\nabla_X U_i - \nabla_{U_i} X} X = -\nabla_{\nabla_{U_i} X} X = -\nabla_{\mu_i^l U_l} X = -\mu_i^l \mu_l^s U_s.$$

Следовательно, $X(\mu_i^s) = -\mu_i^l \mu_l^s = -\mu_l^s \mu_i^l$. Получаем матричное уравнение

$$\frac{dM(t)}{dt} = -M^2(t), \tag{8}$$

Слоение $\mathcal{FN}$ вполне геодезично [6], то есть для любых векторных полей Y и Z принадлежащих $\mathcal{N}$, $\nabla_Y Z$ также принадлежит $\mathcal{N}$. Поскольку $\{e_{n-\mu+1}, \dots, e_n\}$ – базис $\ker h_{x_0}$, заключаем, что матрица $M_0 = M(0)$ имеет следующий вид

$$M(0) = M_0 = \begin{pmatrix} \tilde{M}_0^1 & O \\ * & \tilde{M}_0^2 \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{9}$$

где $\tilde{M}_0^1$ – матрица размера $(n-\mu)\times(n-\mu)$.

Рассмотрим систему из двух матричных уравнений (7), (8) с начальными условиями $P^\alpha(0) = P_0^\alpha$, $M(0) = M_0$ (6, 9). Предположим матрица $M(t)$ являющаяся решением задачи Коши (8, 9) найдена, тогда решениями (7, 6) являются $P^\alpha(t) = P_0^\alpha \cdot P(t)$ для всех $\alpha = \overline{1,k}$, где $P(t)$ – решение (7) с начальным условием $P(0) = E_n$ (E_n – единичная матрица размера $n\times n$).

Если матрица M_0 нулевая, то решением (8) является $M(t)\equiv 0$, и соответственно решениями (7) являются $P^\alpha(t)\equiv P_0^\alpha \quad \alpha = \overline{1,k}$.

Если матрица M_0 ненулевая, то преобразованием базиса касательного пространства в каждой точке при помощи постоянной матрицы

$$B_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{(n-\mu)\times(n-\mu)} & O_{(n-\mu)\times\mu} \\ D_{\mu\times(n-\mu)} & C_{\mu\times\mu} \end{pmatrix},$$

где $O_{(n-\mu)\times\mu}$ – нулевая матрица, можно привести матрицу M_0 к жордановой форме. При этом последние μ векторов базиса в точке x_0 останутся в ядре аффинной фундаментальной формы $\ker h_{x_0}$, уравнения (7), (8) и вид матриц P_0^α (6) не изменятся. Поскольку M_0 имеет клеточно-диагональный вид, то матрица $M(t)$ тоже имеет клеточно-диагональный вид с таким же размером клеток, каждая из которых сама является решением уравнения вида (8). Матрицу $P(t)$, являющуюся решением (7) также можно искать в клеточно-диагональном виде, где каждая клетка является решением (7) и при $t = 0$ является единичной матрицей. Найдем эти решения в зависимости от вида жордановых клеток матрицы M_0.

Для $J_s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}_{s\times s}$ и $J_1(a) = a$ (при $a\neq 0$), а также

для $J_s(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a \end{pmatrix}_{2s\times 2s}$, $J_1(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (при $b\neq 0$)

решения систем (8) и (7) имеют одинаковый вид:

$$M_J(t) = J(Jt+E)^{-1},\ P_J(t) = (Jt+E)^{-1},$$

где J обозначена соответствующая жорданова клетка, а E – единичная матрица соответствующего размера.

Для жордановой клетки $J_s(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s\times s}$

$$M_{J_s(0)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t^2 & -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-t)^{s-2} & (-t)^{s-3} & (-t)^{s-4} & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s\times s},$$

$$P_{J_s(0)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t^2 & -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-t)^{s-1} & (-t)^{s-2} & (-t)^{s-3} & \dots & -t & 1 \end{pmatrix}_{s\times s},$$

то есть $M_{J_s(0)}(t) = \sum\limits_{i=0}^{s-2} (-t)^i J_s^{i+1}(0),\ P_{J_s(0)}(t) = E_s + \sum\limits_{i=1}^{s-1} (-tJ_s(0))^i$.

Для $J_1(0) = 0$ имеем $M_{J_1(0)}(t) = 0,\ P_{J_1(0)}(t) = 1$.

Для жордановых клеток $J_i(a)$ $(a \neq 0)$ при $t = -\frac{1}{a}$ матрица $M_{J_i(a)}(t)$ имеет особенность, что противоречит тому, что подмногообразие гладкое и геодезическая $x(t)$ продолжается бесконечно по аффинному параметру t.

Таким образом, случай, когда собственное значение матрицы M_0 является вещественным ненулевым, исключен. Следовательно, спектр матрицы M_0 состоит из нуля и комплексно-сопряженных чисел.

Как мы видим, для всех жордановых клеток J соответствующие им матрицы $M_J(t)$ и $P_J(t)$ имеют нижне-треугольный вид. Следовательно, клеточно-диагональные матрицы $M(t)$ и $P(t)$ также имеют нижне-треугольный вид. Запишем матрицу $P(t)$ в виде

$$P(t) = \begin{pmatrix} \tilde{P}(t) & O \\ O & \hat{P}(t) \end{pmatrix}_{n\times n},$$

где $\tilde{P}(t)$ – матрица размера $(n-\mu)\times(n-\mu)$.

С учетом начальных условий (6), получаем

$$P^\alpha(t) = \begin{pmatrix} \tilde{P}_0^\alpha \cdot \tilde{P}(t) & O \\ O & O \end{pmatrix}, \alpha = \overline{1,k}.$$

Таким образом, $\{U_{n-\mu+1}(t),\ \dots,\ U_n(t)\}$ – базис $\ker h_{x(t)}$. Лемма доказана.

Известно, что нуль-распределение полного подмногообразия полное [6]. Предположим, что оно удовлетворяет условию параллельности. Покажем, что для двух различных листов L_1 и L_2 из $\mathcal{FN}$ подпространства $f(L_1)$ и $f(L_2)$ являются D-параллельными в $\mathbb{R}^{n+k}$ аффинными подпространствами. Пусть $x(t)$ – произвольная кривая из $x_1 \in L_1$ в $x_2 \in L_2$, $x_1 = x(t_1),\ x_2 = x(t_2)$ и пусть Y – произвольный вектор, касательный к слою L_1 в точке x_1. Перенесем его параллельно вдоль $x(t)$, получим $Y(t)$ – ∇-параллельное векторное поле вдоль кривой. Поскольку $\mathcal{N}$ – параллельно, тогда $Y(t) \in \mathcal{N}$ $\forall t$ и

$$D_t f_*(Y(t)) = f_*(\nabla_t Y(t)) + h^{\alpha}(\mathbf{x}_t,\ Y(t))\xi_{\alpha} = 0.$$

Что означает, что $f_*(Y(t))$ – D-параллельное векторное поле в $\mathbb{R}^{n+k}$. Следовательно, $f(L_1)$ и $f(L_2)$ – параллельные аффинные подпространства в $\mathbb{R}^{n+k}$.

Введем несколько несколько определений, аналогичных определениям, предложенным А.А. Борисенко для римановых подмногообразий [1].

Рангом аффинной фундаментальной формы называется

$$r(x) = \max_{\xi \in Q_x} r(x, \xi),$$

где Q_x – трансверсальное распределение в точке x, $r(x,\xi)$ – ранг аффинной фундаментальной формы относительно вектора ξ в точке x.

Пусть аффинная фундаментальная форма относительно трансверсального вектора ξ в точке x после приведения к диагональному виду имеет k_1 положительных и k_2 отрицательных членов. Положим

$$j(x,\xi) = \min(k_1, k_2).$$

Типом точки x называется число

$$j(x) = \min j(x,\xi),$$

где минимум берется по всем трансверсальным векторам в точке x, для которых $r(x,\xi) = r(x)$.

Подмногообразие состоит из точек нулевого типа, если существует векторное поле ξ в трансверсальном распределении, такое что соответствующая ему аффинная фундаментальная форма имеет максимальный ранг и собственные значения одного знака.

Следующая теорема является аффинным аналогом теоремы для многомерного подмногообразия в евклидовом пространстве, которая была доказана А.А. Борисенко [1].

Теорема 1 *Пусть дано аффинное погружение $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ полного многообразия M^n с непустым нуль-распределением аффинной фундаментальной формы. Если $j(x) = 0$ для всех $x \in M^n$, то есть аффинное подмногообразие состоит из точек нулевого типа, тогда нуль-распределение параллельно и подмногообразие является аффинным цилиндром.*

Доказательство Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in M^n$ и произвольное направление $X_0 \in N(x_0)$. Пусть $x(t)$ – геодезическая, начинающаяся в точке x_0 и имеющая в этой точке направление X_0, $x(0) = x_0$. Пусть $\dim\ker h_{x_0} = \mu > 0$. Осуществим построения аналогичные проведенным при доказательстве леммы 1. Пусть P_0 – матрица аффинной фундаментальной формы, соответствующей векторному полю ξ в точке x_0. Тогда

$$P_0 = \begin{pmatrix} \tilde{P}_0 & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

где $\tilde{P}_0$ – матрица размера $(n-\mu)\times(n-\mu)$, O – нулевые матрицы соответствующих размеров, причем $\tilde{P}_0$ невырожденная матрица и все ее собственные значения одного знака. Поскольку $P^\alpha(t)$ – симметричные матрицы, то из вида уравнений (7), заключаем, что

$$P^\alpha(t)\cdot M(t) = M^\top(t)\cdot P^\alpha(t)\ \forall\ t.$$

Этому же условию удовлетворяют матрицы P_0 и $M_0 = M(0)$. Исходя из блочного вида этих матриц (6, 9), заключаем, что этому же условию удовлетворяют матрицы $\tilde{P}_0$ и $\tilde{M}_0^1$. Таким образом

$$\tilde{P}_0\cdot\tilde{M}_0^1 = \tilde{M}_0^{1\top}\cdot\tilde{P}_0.$$

Поскольку $\tilde{P}_0$ – симметричная матрица, то ее можно привести к диагональному виду, т. е. существует ортогональная матрица $T_{(n-\mu)\times(n-\mu)}$ такая, что $\tilde{P}_0 = T^{-1}D_0T$, где D_0 – невырожденная диагональная матрица размера $(n-\mu)\times(n-\mu)$. Осуществим преобразование базиса касательного пространства в каждой точке при помощи постоянной матрицы $\begin{pmatrix} T & O\\ O & E\end{pmatrix}_{n\times n}$, где O и E – нулевая и единичная матрицы соответствующих размеров. При таком преобразовании координат $\tilde{M}_0^1 = T^{-1}\hat{M}_0^1T$, $\tilde{M}_0^{1\top} = T^{-1}\hat{M}_0^{1\top}T$, поскольку $T^{-1} = T^\top$. Следовательно,

$$T^{-1}D_0T\cdot T^{-1}\hat{M}_0^1T = T^{-1}(\hat{M}_0^{1\top})T\cdot T^{-1}D_0T,\ \Rightarrow\ \hat{M}_0^1 = D_0^{-1}(\hat{M}_0^{1\top})D_0.$$

Поскольку все собственные значения D_0 одного знака, то $D_0 = \pm\varLambda^2 = \pm\varLambda^\top\varLambda$, где $\varLambda$ – также диагональная невырожденная матрица.

$$\hat{M}_0^1 = \varLambda^{-1}(\varLambda^\top)^{-1}(\hat{M}_0^{1\top})\varLambda^\top\varLambda,\ \Rightarrow\ \hat{M}_0^1 = \varLambda^{-1}(\varLambda\hat{M}_0^1\varLambda^{-1})^\top\varLambda.$$

Таким образом, $\varLambda\hat{M}_0^1\varLambda^{-1} = (\varLambda\hat{M}_0^1\varLambda^{-1})^\top$, то есть существует система координат, в которой матрица $\tilde{M}_0^1$ симметрична. По доказанному выше вещественный спектр матрицы M_0 (9), а следовательно и $\tilde{M}_0^1$, состоит только лишь из нуля.

Таким образом, матрица $\tilde{M}_0^1$ нулевая. Жорданова форма M_0 имеет вид $\begin{pmatrix} O_{(n-\mu)\times(n-\mu)} & O\\ O & \hat{M}_0^2\end{pmatrix}_{n\times n}$, $M(t) = \begin{pmatrix} O_{(n-\mu)\times(n-\mu)} & O\\ O & \hat{M}(t)\end{pmatrix}_{n\times n}$. Таким образом, в точке x_0 и вдоль всей геодезической $x(t)$ $\nabla_{U_i}X\in \mathrm{Lin}\ \{U_{n-\mu+1}(t),\ \ldots,\ U_n(t)\} = \ker h_{x(t)}\ \forall\ i=\overline{1,n}$. Поскольку x_0 и X_0 были выбраны произвольно, то $\nabla_Y X\in\mathcal{N}$ для любого векторного поля Y и любого векторного поля $X\in\mathcal{N}$. Следовательно, нуль-распределение параллельно.

Поскольку векторные поля $\{U_{n-\mu+1}(t),\ \ldots,\ U_n(t)\}$ образуют базис $\ker h_{x(t)}$, то $\dim\ker h_x \geq \mu > 0$. Подмногообразие $f(M^n)$ является цилиндром с μ-мерной образующей.

На основании леммы 1 легко доказывается также следующая

Теорема 2 *Пусть дано аффинное погружение $f: M^n\to\mathbb{R}^{n+k}$ полного многообразия M^n. Если $\dim\ker h = n-1$, тогда $f(M^n)$ является аффинным цилиндром с $(n-1)$-мерной образующей.*

Таким образом, мы получили два достаточных условия цилиндричности аффинного погружения полного многообразия с вырожденной аффинной фундаментальной формой. Если не требовать полноты погружаемого многообразия, то можно говорить о локальном цилиндрическом представлении погружения.

Список литературы

1. Борисенко А.А. Внешняя геометрия сильно-параболических многомерных подмногообразий // УМН. – 1997. – Т.52, № 6(318). – с. 3-52.
2. Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of affine immersions // Mathematisce Zeitschrift. – 1987. – № 195. – p. 165-178.
3. Nomizu K., Opozda B. On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Japan, – 1992. – V. 44, № 4. – p. 693-699.
4. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
5. Opozda B. A Characterization of Affine Cylinders // Mh. Math. – 1996. – № 121. – p. 113-124.
6. Shugailo O.O. On affine immersions with flat connections // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – V. 8, № 1. – p. 90-105.
7. Shugailo O.O. Affine Submanifolds of Rank Two // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry (в печати).

Елена Алексеевна Шугайло
Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина
E-mail: lfisdi@gmail.com

Olena O. Shugailo
Department of Mechanics and Mathematics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61077, Ukraine
E-mail: lfisdi@gmail.com

On cylinder representation of affine immersions

The multi-dimensional affine immersion with degenerate affine fundamental form is considered. Sufficient conditions under which the nullity is the parallel and affine immersion is a cylinder were found.