Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ , 2005, с.

УДК 517+681

Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых

П. Г. Доля
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The method of compiling of uniform analytic formulas for piecewise smooth continuous functions are proposed. These functions are used for modelling of continuous curves composed of curvilinear segments with the given parametric equations.

При решении широкого круга инженерно-технических задач необходимо максимально строго учитывать геометрическую информацию. В аналитической геометрии это достигается с помощью уравнений. Однако, проблема “задан геометрический объект, требуется составить его уравнение”, называемая обратной задачей аналитической геометрии, получила развитие только в последнее время в связи с совершенствованием вычислительных методов и, особенно, с появлением систем символьных вычислений. Один из подходов к ее решению был предложен В.Л. Рвачевым [1,2], который дал метод построения неявных уравнений составных чертежей. Другой подход к решению таких задач дает теория сплайнов [3,4]. В работе [5] автор предложил иной способ и привел общие формулы для построения параметрических уравнений кусочно-гладких непрерывных кривых. В настоящей работе мы продолжаем это исследование и излагаем способ составления единых аналитических выражений для кусочно-гладких непрерывных функций. Они используются для моделирования непрерывных кривых, составленных из криволинейных отрезков с заданными параметрическими уравнениями.

1. Уравнения кусочно-гладких непрерывных функций.

Уравнение ломаной. Введем в рассмотрение следующую функцию [5]

$$P(t,a,w) = \frac{1}{2w}\left(w + |t-a| - |t-a-w|\right) \qquad (w \neq 0) \tag{1}$$

Она непрерывна по переменной t. Если w>0, то при $t<a$ функция равна 0, при $t>a+w$ она равна 1, а внутри интервала $a \le t \le a+w$ функция линейная.

Пусть дана возрастающая последовательность $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и последовательность $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Уравнение непрерывной ломаной, которая проходит через точки $\{x_k, y_k\}$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$, имеет следующий вид:

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\, P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y_b(x)$ на интервале $x_{p-1} \le x \le x_p$ при некотором фиксированном p $(1 \le p \le n)$. Все функции $P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1})$ в сумме (2) при $k<p$ будут равны единице, а при $k>p$ будут равны нулю. Поэтому сумма (2) принимает вид

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{p-1}(y_k - y_{k-1}) + (y_p - y_{p-1}) \cdot P(x, x_{p-1}, x_p - x_{p-1}) =$$
$$= y_{p-1} + (y_p - y_{p-1}) \cdot P(x, x_{p-1}, x_p - x_{p-1})$$

Учитывая (1) и то, что $x_{p-1} \le x \le x_p$, последнее выражение преобразуется к виду

$$y_b(x) = y_{p-1} + \frac{y_p - y_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}\left(x - x_{p-1}\right),$$

т.е. на любом отрезке $x_{p-1} \le x \le x_p$ функция $y_b(x)$ линейная и изменяется от значения y_{p-1} в точке x_{p-1} до значения y_p в точке x_p. Если $x \le x_0$, то в формуле (2) все функции $P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1})$ равны нулю и мы получаем, что $y_b(x) = y_0$. Если $x \ge x_n$, то в формуле (2) все функции $P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1})$ равны единице и мы получаем, что $y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = y_n$. Т.о., выражение (2) дает формулу для представления непрерывной кусочно-линейной функции, проходящей последовательно через точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Левее точки x_0 функция сохраняет постоянное значение y_0. Правее точки x_n функция сохраняет постоянное значение y_n.

Для добавления к ломаной бесконечно протяженных наклонных лучей нам потребуются следующие функции [5]

$$Q(t, a) = \frac{1}{2}((t-a) + |t-a|) \text{ и } Q_l(t, a) = -Q(-t, -a) = \frac{1}{2}((t-a) - |t-a|) \qquad (3)$$

Обе функции непрерывны. Функция $Q(t,a)$ равна 0 при $t \le a$ и равна $t - a$ при $t \ge a$. Функция $Q_l(t,a)$ равна 0 при $t \ge a$ и равна $t-a$ при $t \le a$.

Предположим, что непрерывную ломаную, проходящую через точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, нужно продлить влево бесконечным лучом, выходящим из точки (x_0,y_0), образующим с осью Ox угол α, и продлить вправо бесконечным лучом, выходящим из точки (x_n,y_n), образующим с осью Ox угол β. Уравнение непрерывной кусочно-линейной функции (ломаной), проходящей через точки (x_k,y_k) и имеющей наклонные прямолинейные лучи слева от точки x_0 и справа от точки x_n, имеет следующий вид:

$$y(x) = Q_l(x, x_0)\, tg\alpha + y_b(x) + Q(x, x_n)\, tg\beta\,, \qquad (4)$$

где функция $y_b(x)$ определяется формулой (2) и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Действительно, при $x<x_0$ имеем $y_b(x)=y_0$, $Q(x,x_n)=0$, $Q_l(x,x_0)=x-x_0$ и (4) принимает вид $y(x)=y_0+tg\alpha\cdot(x-x_0)$. При любом $x_0 \le x \le x_n$ функции $Q_l(x,x_0)$ и $Q(x,x_n)$ равны нулю и $y(x)=y_b(x)$. При $x>x_n$ имеем $Q_l(x,x_0)=0$, $y_b(x)=y_n$, $Q(x,x_n)=x-x_n$ и (4) принимает вид $y(x)=y_n+tg\beta\cdot(x-x_n)$. Т.о., график функции $y(x)$ при $x<x_0$ совпадает с прямолинейным лучом, образующим угол α с осью Ox. В промежутке $x_0 \le x \le x_n$ график функции $y(x)$ совпадает с ломаной, проходящей через точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. При $x>x_n$ график функции $y(x)$ имеет форму прямой, образующей угол β с осью Ox.

Уравнение криволинейной ломаной. Пусть задана возрастающая последовательность чисел $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ и последовательность гладких непрерывных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, определенных на отрезках вещественной оси $[x_{i-1},x_i]$ ($i=1,2,\ldots,n$). Положим также, что $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$ ($i=1,2,\ldots,n-1$). Уравнение непрерывной криволинейной ломаной, которая на отрезках $[x_{i-1},x_i]$ задана функциями $f_i(x)$, имеет следующий вид:

$$y_b(x)=f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_{i-1}+(x_i-x_{i-1})\cdot P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})\right)-f_i(x_{i-1})\right) \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y_b(x)$ на интервале $x_{p-1}\le x\le x_p$ при некотором фиксированном p ($1\le p\le n$). Все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в сумме (5) при $i<p$ будут равны единице, а соответствующие им слагаемые будут иметь вид $f_i\left(x_i\right)-f_i(x_{i-1})$. Все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в выражении (5) при $i>p$ будут равны нулю и соответствующие им слагаемые обращаются в ноль. Поэтому выражение (5) принимает вид

$$f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{p-1}\left(f_i\left(x_i\right)-f_i(x_{i-1})\right)+f_p\left(x_{p-1}+(x_p-x_{p-1})\cdot P(x,x_{p-1},x_p-x_{p-1})\right)-f_p(x_{p-1})$$

Учитывая, что $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$, имеем $f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{p-1}\left(f_i\left(x_i\right)-f_i(x_{i-1})\right)=f_{p-1}(x_{p-1})$. Для $x\in[x_{p-1},x_p]$ из (1) следует, что $(x_p-x_{p-1})\cdot P(x,x_{p-1},x_p-x_{p-1})=x-x_{p-1}$. Поэтому выражение (5) преобразуется к виду $y_b(x)=f_{p-1}(x_{p-1})+f_p(x)-f_p(x_{p-1})=$ $=f_p(x)$. Если $x<x_0$, то в формуле (5) все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$, и мы получаем, что $y_b(x)=f_1(x_0)$. Если $x>x_n$, то в (5) все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=1$, и мы получаем, что $y_b(x)=f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_i\right)-f_i(x_{i-1})\right)=f_n(x_n)$. Таким образом, функция $y_b(x)$ на каждом интервале $x_{p-1}\le x\le x_p$ совпадает с соответствующей функцией $f_p(x)$. Левее точки x_0 функция сохраняет постоянное значение $f_1(x_0)$. Правее точки x_n функция сохраняет постоянное значение $f_n(x_n)$.

Предположим, что непрерывную криволинейную функцию левее точки x_0 нужно определить с помощью функции $f_0(x)$, и правее точки x_n нужно определить с помощью функции $f_{n+1}(x)$ с сохранением условия непрерывности ($f_0(x_0)=f_1(x_0)$ и $f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)$). Уравнение непрерывной функции, которая на отрезках $[x_{i-1},x_i]$ совпадает с функциями $f_i(x)$, для $x\le x_0$ определяется функцией $f_0(x)$ и для $x\ge x_n$ определяется функцией $f_{n+1}(x)$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y(x)&=f_0(x_0+Q_l(x,x_0))+\left(f_{n+1}(x_n+Q(x,x_n))-f_{n+1}(x_n)\right)+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_{i-1}+(x_i-x_{i-1})\cdot P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})\right)-f_i(x_{i-1})\right) \end{aligned} \qquad (6)$$

Действительно, при $x<x_0$ из (1) и (3) имеем: $Q_l(x,x_0)=x-x_0$, $Q(x,x_n)=0$ и $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$ для любого i. Поэтому (6) преобразуется к виду

$$y(x)=f_0(x)+\left(f_{n+1}(x_n)-f_{n+1}(x_n)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_{i-1}\right)-f_i(x_{i-1})\right)=f_0(x)$$

При $x_0\le x\le x_n$ $Q_l(x,x_0)=0$, $Q(x,x_n)=0$ и формула (6) совпадает с (5). При $x>x_n$ $Q_l(x,x_0)=0$ и $P(x, x_{i-1}, x_i-x_{i-1})=1$ для любого i, а $Q(x,x_n)=x-x_n$. Поэтому (6) дает

$$y(x) = f_0(x_0) + \left(f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x_n)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_i) - f_i(x_{i-1})\right) = f_{n+1}(x)\,.$$

Т.о., построенная по формуле (6) функция $y(x)$ при $x<x_0$ совпадает с функцией $f_0(x)$. На отрезке $x_0 \le x \le x_n$ график функции $y(x)$ совпадает с графиком функции $y_b(x)$, которая составлена из криволинейных отрезков с уравнениями $\{f_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. При $x>x_n$ функция $y(x)$ совпадает с функцией $f_{n+1}(x)$.

Формулы (5) и (6) представляют уравнение кусочно-гладкой непрерывной функции (если функции $f_i(x)$ гладкие) даже если условие сопряжения соседних функций $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$ не выполняется. В этом случае начальная точка каждого следующего криволинейного отрезка $(x_i,f_{i+1}(x_i))$ пристыковывается к конечной точке предыдущего криволинейного отрезка $(x_i,f_i(x_i))$ так, что они образуют непрерывную криволинейную ломаную. Фактически каждый следующий криволинейный отрезок сдвигается вверх или вниз так, чтобы вместе с предыдущим криволинейным отрезком образовывать непрерывную кривую.

Рассмотрим случай, когда отрезки $[x_{i0},x_{i1}]$ на которых заданы функции $f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, не граничат друг с другом. Построим возрастающую последовательность $\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ следующим образом: x_0 – любое конечное число, $x_1=x_0+(x_{11}-x_{10})$, $x_2=x_1+(x_{21}-x_{20}),\ldots,x_n=x_{n-1}+(x_{n1}-x_{n0})$. Выберем также произвольное число y_0. Возьмем криволинейный отрезок с уравнением $f_1(x)$ $x\in[x_{10},x_{11}]$ и параллельно перенесем его в плоскости xy так, чтобы начальная точка отрезка совпала с точкой (x_0,y_0). Затем возьмем криволинейный отрезок с уравнением $f_2(x)$ $x\in[x_{20},x_{21}]$ и параллельно перенесем так, чтобы его начальная точка совпала с конечной точкой первого отрезка. Далее последовательно будем параллельно перемещать остальные отрезки $\{f_i(x),\ x\in[x_{i-1},x_i]\}$ так, чтобы они образовывали непрерывную криволинейную ломаную. Уравнение кусочно-гладкой непрерывной функции, график которой совпадает с этой ломаной, имеет вид:

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(x_{i0} + (x_{i1} - x_{i0}) \cdot P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})\right) - f_i(x_{i0})\right) \qquad (7)$$

Действительно, при $x \le x_0$ все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в сумме (7) равны 0 и функция $y_b(x)=y_0$. При $x_0 \le x \le x_1$ в сумме (7) все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ кроме первой равны 0. А в первом слагаемом первая функция будет равна $f_1\left(x_{10} + (x_{11} - x_{10}) \cdot \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$. Длины соответствующих интервалов $[x_{i-1},x_i]$ и $[x_{i0},x_{i1}]$ равны. Поэтому эта функция преобразуется к виду $f_1\left(x + (x_{10} - x_0)\right)$ и мы получаем $y_b(x)=y_0+f_1(x+(x_{10}-x_0))-f_1(x_{10})$. Т.е. на отрезке $x_0 \le x \le x_1$ график функции $y_b(x)$ совпадает со смещенным отрезком кривой с исходным уравнением $y=f_1(x)$ для $x\in[x_{10},x_{11}]$. Обозначим $y_1=y_b(x_1)=y_0+f_1(x_{11})-f_1(x_{10})$ и рассмотрим следующий интервал $x_1 \le x \le x_2$. В этом случае в сумме (7) все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$, кроме первых двух равны 0. При этом $P(x, x_0, x_1 - x_0) = 1$ и мы получаем

$$y_b(x) = y_1 + \left(f_2\left(x_{20} + (x_{21} - x_{20}) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) - f_2(x_{20})\right) =$$

$$= y_1 + f_2\big(x + (x_{20} - x_1)\big) - f_2(x_{20})$$

Это значит, что на отрезке $x_1 \le x \le x_2$ график функции $y_b(x)$ совпадает с параллельно перенесенным отрезком кривой, исходная форма которого определялась уравнением $y=f_2(x)$ при $x_{20} \le x \le x_{21}$. Аналогично получаем, что на отрезках $x_i \le x \le x_{i+1}$ график функции $y_b(x)$ совпадает со смещенными отрезками кривых, исходная форма которых определяется функциями $f_i(x)$, заданными на отрезках $x_{i0} \le x \le x_{i1}$. При $x \ge x_n$ все функции $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в сумме (7) равны 1 и мы получаем, что $y_b(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x_{i1}) - f_i(x_{i0})\big) = y_n$. Т.о., внутри отрезка $[x_0,x_n]$ функция $y_b(x)$ представляет уравнение непрерывной криволинейной ломаной, построенной по описанному выше правилу, и сохраняет постоянные значения y_0 и y_n вне этого отрезка.

Если функцию $y_b(x)$ при $x \le x_0$ и при $x \ge x_n$ надо определить с помощью функций $f_0(x)$ и $f_n(x)$, то это можно выполнить по аналогии с формулой (6). Пусть функция $f_0(x)$ задана при $x \le x_{00}$, а функция $f_{n+1}(x)$ задана при $x \ge x_{n+10}$. Требуется построить формулу для функции $y(x)$, которая в точке x_0 равняется y_0. Для $x_0 \le x \le x_n$ функция $y(x)$ должна совпадать с функцией $y_b(x)$, график которой представляет непрерывную криволинейную ломаную, составленную из смещенных кусков графиков функций $f_i(x)$, заданных на отрезках $[x_{i0},x_{i1}]$. При $x \le x_0$ функция должна совпадать со смещенной функцией $f_0(x)$, а при $x \ge x_n$ она должна совпадать со смещенной функцией $f_{n+1}(x)$. Все сдвиги криволинейных отрезков графиков функций $f_i(x)$ должны выполняться без поворотов так, чтобы результирующая функция $y(x)$ была непрерывной. Уравнение кусочно-гладкой непрерывной функции, график которой совпадает с такой криволинейной ломаной, имеет вид:

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 &+ \big(f_0(x_{00} + Q_l(x,x_0)) - f_0(x_{00})\big) + \big(f_{n+1}(x_{n+10} + Q(x,x_n)) - f_{n+1}(x_{n+10})\big) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\Big(f_i\big(x_{i0} + (x_{i1} - x_{i0}) \cdot P(x,x_{i-1},x_i - x_{i-1})\big) - f_i(x_{i0})\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

Проверка формулы (8) выполняется аналогично предыдущему.

Замечание 1. При построении формулы (7) в возрастающей последовательности $\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ расстояние между соседними числами x_{i-1} и x_i может не равняться длине интервалов $[x_{i1},x_{i0}]$, на которых заданы функции $f_i(x)$. В этом случае функция $y_b(x)$, построенная по формуле (7), будет представлять уравнение непрерывной криволинейной ломаной составленной из растянутых (сжатых) вдоль оси Ox криволинейных отрезков с коэффициентом растяжения $k_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{x_{i1} - x_{i0}}$. Эти отрезки последовательно пристраиваются друг к другу образуя непрерывную кривую.

Действительно, на отрезке $x_{p-1} \le x \le x_p$ функция $y_b(x)$ может быть представлена в виде

$$y_b(x) = y_{p-1} + \left(f_p(x_{p0} + (x - x_{p-1}) \cdot \frac{x_{p1} - x_{p0}}{x_p - x_{p-1}}) - f_p(x_{p0})\right),$$

где $y_{p-1} = y_0 + \sum_{i=1}^{p-1}\left(f_i(x_{i1}) - f_i(x_{i0})\right)$. Если $x_{p1} - x_{p0} \neq x_p - x_{p-1}$, то последняя формула означает, что график функции $y_b(x)$ на отрезке $[x_{p-1},x_p]$ совпадает со сдвинутым и растянутым с коэффициентом k_p вдоль оси Ox криволинейным отрезком, который до деформирования представлял график функции $f_p(x)$ на отрезке $[x_{p0},x_{p1}]$.

2. Параметрические уравнения кусочно-гладких непрерывных кривых.

Параметрические уравнения ломаных. Допустим, что нам требуется построить параметрическое уравнение $(x(t),y(t))$ ломаной, последовательно проходящей через точки $A_0(x_0,y_0), A_1(x_1,y_1),\dots,A_n(x_n,y_n)$. Назначим для этих точек произвольные возрастающие значения параметра $\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$. Для того, чтобы отрезок ломаной, соединяющий соседние точки A_{i-1} и A_i, был прямым, функции $x(t),y(t)$ на отрезке $[t_{i-1},t_i]$ могут быть линейными. Тогда в целом на отрезке $[t_0,t_n]$ они будут кусочно-линейными непрерывными функциями. Функция $x(t)$ должна строиться по точкам $(t_0,x_0),(t_1,x_1),\dots,(t_n,x_n)$, а функция $y(t)$ по точкам $(t_0,y_0),(t_1,y_1),\dots,(t_n,y_n)$. Для построения их уравнений можно использовать формулу (2). Т.о. параметрическое уравнение ломаной, последовательно проходящей через точки $A_0,A_1,\dots,A_n$ со значениями параметра $\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ в этих точках, будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\,P(t,t_{k-1},t_k - t_{k-1}) \\
y(t) &= y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})\,P(t,t_{k-1},t_k - t_{k-1})
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Для пространственной ломаной, когда точки $A_i(x_i,y_i,z_i)$ имеют три координаты, к формулам (9) надо присоединить аналогично построенную третью функцию $z(t)$.

Параметрические уравнения криволинейных ломаных. Допустим, что нам требуется построить параметрическое уравнение $(x(t),y(t))$ криволинейной непрерывной ломаной, последовательно составленной из криволинейных отрезков, параметрические уравнения которых $(x_i(t),y_i(t))$ $t\in[t_{i0},t_{i1}]$ $(i=1,2,\dots,n)$ заданы. Вначале строим первый отрезок, который параллельно переносим так, чтобы его начальная точка совпала с точкой (x_0,y_0). Затем к нему присоединяем второй отрезок, который параллельно переносим до совпадения его начальной точки с конечной точкой первого отрезка. Начало третьего отрезка присоединяем к концу второго и т.д. В результате получается непрерывная кусочно-гладкая кривая (если функции $x_i(t)$ и $y_i(t)$ гладкие). Назначим для начальной точки $A_0(x_0,y_0)$ и точек соединения криволинейных отрезков A_i возрастающие значения параметра $\{t_0,t_1,t_2,\dots,t_n\}$ такие, что $t_i - t_{i-1} = t_{i1} - t_{i0}$. Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют всем условиям, используемым при выводе формулы (7). Поэтому параметрические уравнения криволинейной ломаной, составленной из криволинейных отрезков, будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\big(t_{i0} + (t_{i1} - t_{i0})\cdot P(t, t_{i-1}, t_i - t_{i-1})\big) - x_i(t_{i0})\Big)\\
y(t) &= y_0 + \sum_{i=1}^{n}\Big(y_i\big(t_{i0} + (t_{i1} - t_{i0})\cdot P(t, t_{i-1}, t_i - t_{i-1})\big) - y_i(t_{i0})\Big)
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Пространственную криволинейную ломаную, составленную из пространственных криволинейных отрезков с уравнениями ($x_i(t),y_i(t),z_i(t)$) $t\in[t_{i0},t_{i1}]$, можно смоделировать, присоединив к уравнениям (10) аналогично построенную третью функцию $z(t)$. Учитывая замечание 1, при записи параметрических уравнений (10) в узловых точках криволинейной ломаной можно использовать произвольную возрастающую последовательность значений параметра $\{t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n\}$.

Кривые, построенные с использованием формул (9) или (10), имеют начальную и конечную точки $A_0(x_0,y_0)$ и $A_n(x_n,y_n)$. Действительно, обе функции $x(t)$ и $y(t)$ при $t\le t_0$ постоянны и равны x_0 и y_0 соответственно. Для $t\ge t_n$ они равны x_n и y_n. Это значит, что при любом $t\le t_0$ точка ломаной совпадает с точкой $A_0(x_0,y_0)$, а при любом $t\ge t_n$ совпадает с точкой $A_n(x_n,y_n)$. Использование формул (4) и (8) в параметрических уравнениях позволяет строить уравнения криволинейных ломаных с бесконечными ветвями.

3. Заключение.

С помощью введенных функций (1) и (3) и формул (2), (4)-(8) можно записывать единые аналитические выражения для уравнений кусочно-гладких непрерывных функций, графики которых состоят из кусков графиков гладких функций, аналитические выражения которых известны. Использование единых аналитических выражений таких функций позволяет составлять параметрические уравнения широкого класса кусочно-гладких непрерывных кривых (формулы (9) и (10)). Так, формула (9) позволяет составить параметрические уравнения треугольника, квадрата, n-угольника или любой замкнутой или незамкнутой ломаной. Использование этих формул в системах символьной математики позволяет генерировать уравнения непрерывных криволинейных ломаных практически любой формы. Чертежи в системах инженерной компьютерной графики также могут описываться с использованием параметрических уравнений, а не с помощью последовательности графических примитивов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982.-552с.
3. Фокс Ф., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001.

5. Доля П.Г. Параметрические уравнения кусочно-гладких непрерывных кривых. - Вестник Международного Славянского Университета. Харьков. Серія “Технічні науки”, т.5, 2002, №7.