

УНІКАЛЬНОСКЛАДЕНІСТЬ ФІГУР НА СФЕРІ

К.Д. Драч^{1,2}, Ю.В. Еременко¹, А.В. Кримова¹

ТЕЗИ

У цій статті розглядається поняття «рівноскладеність» та «унікальноскладеність» на одиничній сфері. Ми доводимо, що на сфері круг та лінза, тобто перетин двох кругів однакового радіусу, є унікальноскладеними фігурами.

Ключові слова: сферична геометрія, опуклі фігури, унікальноскладеність, рівноскладеність.

ВСТУП

На початку XIX століття великих математиків цікавило питання: чи будь-які два плоских багатокутники рівної площі рівноскладені, тобто такі, що один з них можна розрізати прямолінійними розрізами на скінченну кількість багатокутників, переклавши які, можна отримати інший багатокутник.

Відповідь була знайдена угорським математиком Фаркашем Бояї і, незалежно, німецьким математиком Паулем Гервінім у 1832 році. Теорема Бояї – Гервіна стверджує, що будь-які два *рівновеликі* багатокутники, тобто багатокутники рівної площі, рівноскладені.

З проблемою рівноскладеності тривимірних тіл пов'язана відома третя проблема Гільберта, що була запропонована відомим математиком Давідом Гільбертом у 1900 році як одна з 23 кардинальних проблем математики.

Третя проблема виявилася найпростішою з проблем Гільберта: приклад нерівноскладених тетраєдрів рівного об'єму був пред'явлений вже через рік, у 1901 році, у роботі учня Гільберта – 22-річного Макса Дена.

Разом із рівноскладеністю, математиків почало цікавити питання відшукування та класифікації *унікальноскладених* фігур, тобто таких фігур, які не можуть бути рівноскладені ні якій іншій фігурі. Так, в [1] було доведено, що круг на площині є унікальноскладеною фігурою. Повний опис плоских опуклих унікальноскладених фігур був отриманий А.М. Петруніним і С.Є.Рукшиним в [2].

У цій статті ми досліджуємо питання унікальноскладеності опуклих фігур на одиничній сфері. Зокрема, ми доводимо наступну теорему, яка складає основний результат роботи.

Теорема 1. *На сфері лінза, тобто перетин двох кругів однакового радіусу, є унікальноскладеною фігурою.*

З огляду на те, що круг є окремим випадком лінзи, із теореми 1 миттєво випливає

Наслідок 1. *На сфері круг є унікальноскладеною фігурою.*

¹ Харківський фізико-математичний ліцей №27

² Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна та Сумський державний університет

1.СФЕРИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Для того щоб довести анонсовані у вступі результати, ми повинні розглянути основні поняття сферичної геометрії. У нашому викладі ми будемо слідувати працям [4 - 6]. Скрізь далі, для спрощення, розглянемо сферу одиничного радіуса.

Прямою на сфері (див. рис. 1) називається *велике коло*, тобто перетин сфери площиною, що проходить через центр сфери. Через будь-які дві недіаметрально протилежні точки можна провести єдине велике коло.

Сферичний відрізок (див. рис. 1) – це дуга великого кола.

Відстанню між двома точками на сфері називають довжину більш короткого сферичного відрізка, що проходить через дані точки. При цьому, оскільки сфера одинична, довжина сферичного відрізка дорівнює величині кута, під яким відповідну дугу великого кола видно з центру сфери.

Коло на сфері (див. рис. 1) – це перетин сфери площиною, що не проходить через центр сфери. Центром кола на сфері є точка перетину сфери і перпендикуляра до даної площини через центр сфери. Ми вважаємо, що центр кола лежить у тій півкулі, у якій лежить коло. Інакше кажучи, коло на сфері є геометричним місцем усіх точок сфери, рівновіддалених від фіксованої точки сфери (центра кола).

Круг на сфері – це геометричне місце усіх точок, відстань від яких до заданої точки, що називається *центром* круга, не перевищує заданого числа.

Кутом між двома прямими на сфері називається кут між площинами, яким належать ці прямі. Зауважимо, що *вертикальні кути* на сфері рівні, оскільки вертикальні кути між площинами рівні.

Сферичний багатокутник (див. рис. 1) – це фігура на сфері, що представляє собою дві або більше точок на сфері, послідовно з'єднаних відрізками. Ці відрізки називаються *сторонами багатокутника*.

Опуклим багатокутником на сфері називається такий багатокутник, що всі його точки лежать в одній півсфері відносно будь-якої площини, що проходить через його сторону. На рис. 1 зображено опуклий п'ятикутник $ABCDE$.

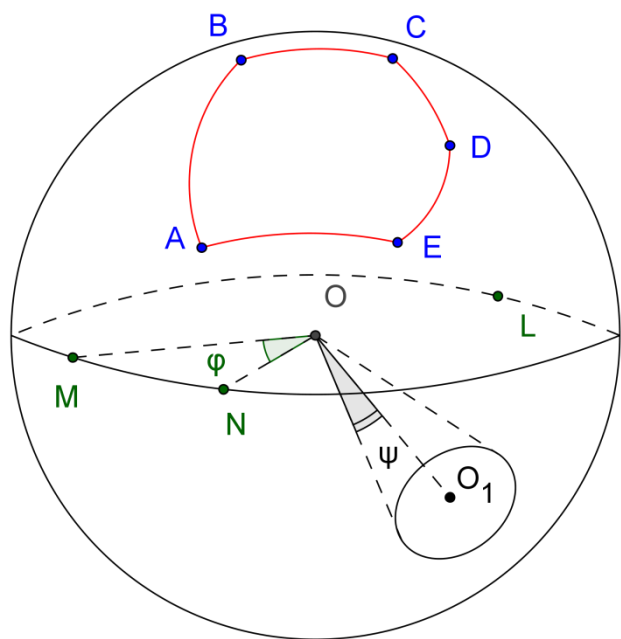


Рис. 1: Опуклий п'ятикутник $ABCDE$, пряма MNL , відрізок MN довжини φ , коло з центром у точці O_1 радіуса ψ .

Для трикутників на сфері виконуються сферичні аналоги класичних теорем косинусів та синусів. А саме, якщо ABC – трикутник на сфері з кутами A, B, C та довжинами сторін a, b, c (див. рис. 2³), то

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \text{ (сферична теорема синусів),}$$

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ (перша сферична теорема косинусів),

$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ (друга сферична теорема косинусів).

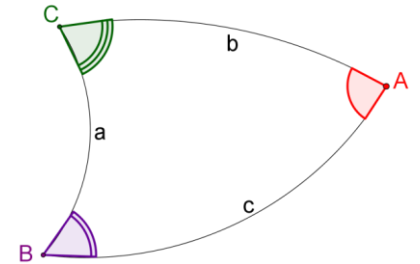


Рис. 2: Трикутник на сфері

Також зазначимо, що на сфері справедливі 3 ознаки рівності трикутників, які збігаються з ознаками рівностей трикутників на площині.

Визначення поняття *площі* фігури на сфері повністю збігається із визначенням на евклідовій площині, та може бути подано за допомогою списку аксіом площі (див. [3]). З цього підходу випливає, що на сфері, на відміну від площини, площа багатокутника однозначно задається його кутами. А саме, площа n -кутника на сфері дорівнює $\Sigma - \pi(n - 2)$, де Σ – сума усіх внутрішніх кутів багатокутника. В окремому випадку трикутника з кутами A, B та C , його площа S дорівнює $S = A + B + C - \pi$.

Разом з тим, добре відомо, що на евклідовій площині площа S трикутника зі сторонами a, b та кутом C між ними може бути обчислена за формулою $S = ab/2 \cdot \sin C$. У подальшому, нам знадобиться аналог цієї формули для трикутників на сфері. З огляду на те, що на сфері площа трикутника повністю визначається його кутами, отримання такого аналогу є нелегким заняттям. Проте формула, яка визначає площу трикутника за двома сторонами та кутом між ними, існує (див. [7]), хоч і має громіздкий вигляд:

$$\operatorname{tg} \frac{S}{2} = \frac{\sin a \sin b \sin C}{(1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b \cos C}. \quad (1)$$

Зауважимо, що формула (1) коректно визначена для трикутників, площа яких менша за π .

2. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ. КРИТЕРІЙ УНІКАЛЬНОСКЛАДЕНОСТІ

У цьому розділі ми введемо необхідні нам позначення для доведення двох теорем, анонсованих у вступі.

Нехай F – фігура⁴ на сфері. Нагадаємо, що *межею* ∂F фігури F називається множина усіх таких точок фігури, що у будь-якому проколотому ε -околі⁵ кожної з них знайдуться і точки, що належать цій фігурі, і точки, що не належать їй.

³ Тут і далі всі рисунки є схематичними зображеннями об'єктів на сфері.

⁴ Точне визначення поняття *фігури* на сфері, яке не відрізняється від поняття фігури на площині, можна знайти у чудовій книзі [8].

Визначення 1. Дві фігури F і G на сфері називаються *рівноскладеними* (будемо позначати $F \sim G$), якщо одну з них прямолінійними розрізами можна розрізати на скінченну кількість частин і скласти, тобто поєднати рухом, з цих частин іншу.

Визначення 2. Опукла фігура F на сфері називається *унікальноскладеною*, якщо будь-яка опукла сферична фігура, що рівноскладена F , є рівною F .

Нагадаємо також, що *опуклою* називається така фігура, яка разом із будь-якими двома своїми точками містить у собі й відрізок, що їх з'єднує. Зазначимо, що у класі неопуклих фігур унікальноскладених фігур не існує (див. рис.3).

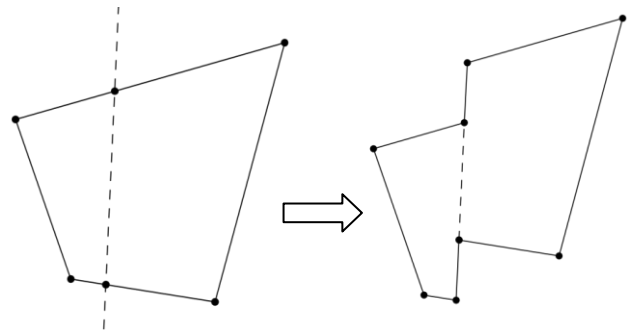


Рис. 3: Рівноскладені неопуклі фігури

Визначення 3. Дві криві (або два набори кривих) α і β на сфері називаються *рівноскладеними* (будемо позначати $\alpha \sim \beta$), якщо першу(ий) можна розбити на скінченну кількість дуг і скласти, тобто поєднати рухом, з них другу(ий)

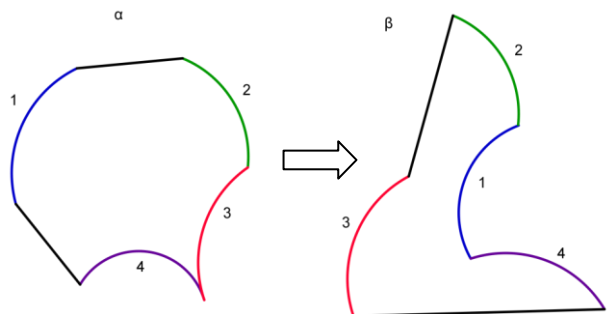


Рис. 4: Стабільно рівноскладені криві α та β

Визначення 4. Дві криві або два набори кривих називаються *стабільно рівноскладеними* (будемо позначати $\alpha \approx \beta$), якщо з них можна виключити скінченну кількість сферичних відрізків так, що залишаться два рівноскладених набори кривих (див. рис. 4).

Ми тепер можемо сформулювати основний критерій рівноскладеності.

Критерій рівноскладеності. Дві опуклі сферичні фігури F і G рівноскладені тоді і тільки тоді, коли їхні площі рівні, і криві, що їх обмежують, стабільно рівноскладені. Інакше,

$$F \sim G \Leftrightarrow S(F) = S(G) \text{ та } \partial F \approx \partial G.$$

Для доведення критерію ми будемо користуватися сферичним аналогом теореми Бояї – Гервіна (доведення якої можна знайти у [3]).

Теорема Бояї – Гервіна: На сфері будь-які два рівновеликих багатокутники, тобто багатокутники рівної площі, рівноскладені.

Доведення критерію рівноскладеності. Необхідність. Нехай F рівноскладена G . Зазначимо, що рівновеликість є необхідною умовою рівноскладеності двох фігур. Таким чином, $S(F) = S(G)$. Далі сукупність усіх кривих, що обмежують частини розбиття, складається з дуг кривої, що обмежує F , плюс якась кількість «внутрішніх» сферичних відрізків, та з дуг кривої, що обмежує G ,

⁵ Проколотим ε -околом точки називається круг на сфері радіуса ε з центром у цій точці, з якого цей центр видалено.

плюс якась кількість «внутрішніх» сферичних відрізків. Таким чином, якщо з межі F вирізати сферичні відрізки, які відповідають «внутрішнім» сферичним відрізкам розбиття ∂G , а з межі G вирізати сферичні відрізки, які відповідають «внутрішнім» сферичним відрізкам розбиття ∂F , то частини меж, що залишились, будуть рівноскладені. Значить, $\partial F \approx \partial G$.

Достатність. Розглянемо розбиття меж F і G , що фігурують у визначенні стабільної рівноскладеності. Будемо називати частини розбиття ∂F та ∂G дугами. Якщо з'єднати кінці дуг відрізками, то утворені сегменти для рівних дуг рівні. В силу опуклості фігур F і G , будь-який такий відрізок буде лежати всередині фігури. Оскільки $S(F) = S(G)$, то і площі сферичних багатокутників, що залишаються після видалення з F та G сегментів, утворених рівними дугами, будуть рівні. Отже, ці багатокутники рівноскладені теоремою Бояї - Гервіна на сфері. Таким чином, $F \sim G$.

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Назвемо перетин двох кругів радіуса r *лінзою* і будемо позначати її J .

Для доведення теореми 1 нам знадобиться наступна

Лема 1. *Якщо опукла фігура F на сфері має межу, що стабільно рівноскладена межі лінзи J , то $S(F) \geq S(J)$. Більше того, якщо $S(F) = S(J)$, то F дорівнює J .*

Спочатку покажемо, що з леми 1 випливає теорема 1. Дійсно, нехай F – це опукла фігура на сфері, така що $J \sim F$. Тоді, за критерієм рівноскладеності, $S(F) = S(J)$, і межа F стабільно рівноскладена межі лінзи J . Тобто, фігура F задовольняє лемі 1. Отже, F дорівнює J . Теорема 1, а разом із нею наслідок 1, доведені.

3.1. Доведення леми 1: центральносиметричний випадок

Наша основна стратегія у доведенні леми 1 полягає у знаходженні фігури, що обмежують найменшу площу серед усіх фігур F таких, що $\partial F \approx \partial J$. Зауважимо, що з $\partial F \approx \partial J$ за означенням стабільної рівноскладеності випливає, що межа F складається з дуг кіл радіуса r та, можливо, деякої кількості відрізків прямої. При цьому, якщо $r = \pi/2$, то легко побачити, що лема 1 виконується. Будемо вважати, що $r < \pi/2$.

Спершу доведемо лему 1 в окремому випадку, коли F – центральносиметрична фігура⁶. Нехай O – центр її симетрії.

Нам знадобиться наступне поняття.

Сферичний паралелограм – це такий опуклий сферичний чотирикутник, що його діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Зауважимо, що протилежні сторони паралелограма рівні.

⁶ Фігура F називається *центральносиметричною відносно точки O* , якщо для будь-якої точки $X \in F$ існує точка $X' \in F$ така, що точка O є серединою відрізка XX' . Це означення співпадає з означенням на площині. Точка O називається центром симетрії фігури F .

Нехай на межі фігури F є принаймні одна пара відрізків AB та $A'B'$, симетричних відносно точки O . Застосуємо метод «вирізання паралелограма» (див. рис. 5). А саме, замінимо фігуру F фігурою F_1 , яка будується шляхом видалення сферичного паралелограма $ABA'B'$ з фігури F з подальшим приклеюванням частин, що залишилися, уздовж відрізків AB та $A'B'$ (точки A та B' , B та A' співпадуть). Зауважимо, що F_1 залишиться центральносиметричною фігурою. Більше того, $\partial F_1 \approx \partial F$ (а значить $\partial F_1 \approx \partial J$), та $S(F_1) < S(F)$.

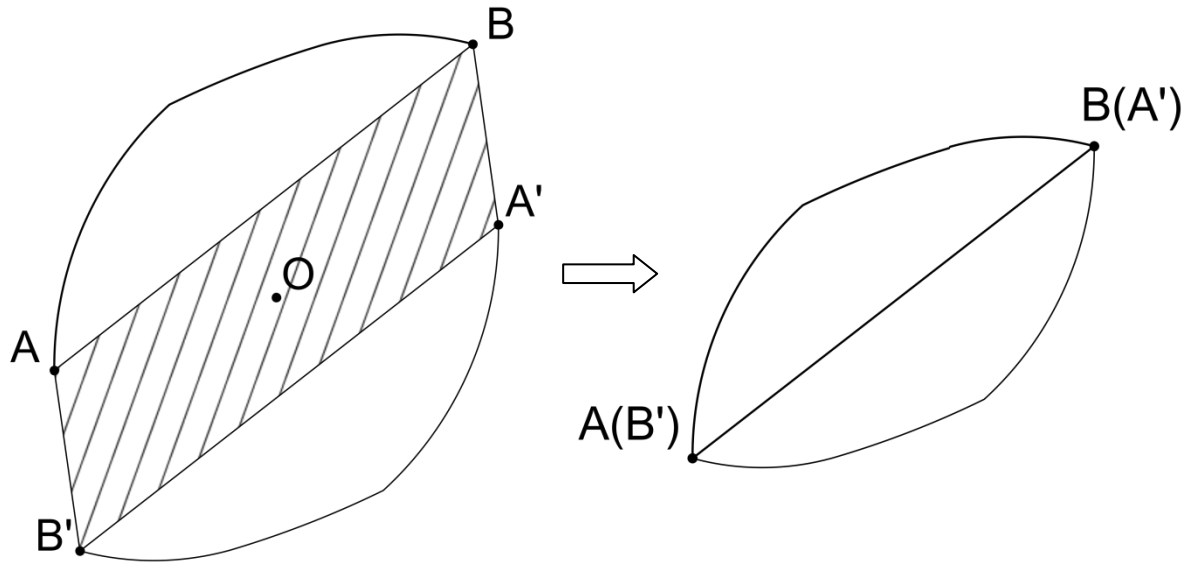


Рис. 5: Вирізання паралелограма

Застосовуючи метод «вирізання паралелограма» скінченну кількість разів, ми прийдемо до центральносиметричної фігури (для простоти, знову позначимо її F_1), з межею, що рівноскладена межі фігури F та лінзи J , але з меншою площею та без відрізків прямих на межі. Таким чином, у нашому пошуку фігури найменшої площі можемо замінити F на F_1 .

Межа центральносиметричної фігури F_1 складається з дуг кіл радіуса r , що з'єднуються одна з одною у кутових точках. Якщо таких точок рівно дві, то F_1 дорівнює лінзі J . Якщо ж таких точок більше двох, то виявляється, що площу фігури F_1 можна ще зменшити, застосувавши так званий «чотирьохшарнірний метод».

Суть цього методу полягає в наступному. Припустимо, що на межі F_1 є дві пари центральносиметричних кутових точок A, A' та B, B' (див. рис. 6 (а)). Тоді $AB'A'B'$ – сферичний паралелограм. З огляду на опуклість F_1 , сторони цього паралелограма лежать всередині F_1 . Якщо розрізати фігуру F_1 відрізками AB' , $B'A'$, $A'B$ і BA , ми отримаємо паралелограм $AB'A'B'$ і чотири «окрайця». Уявімо, що у вершини паралелограма вставлені шарніри, сторони паралелограма зроблені з жорсткого матеріалу, при цьому крайці жорстко прироблені до його сторін. Уявні шарніри роблять усю конструкцію рухомою. Тепер, оберемо будь-яку вершину паралелограма, скажімо, B , і нехай θ – зовнішній кут межі F_1 при вершині B (див. рис. 6 (а)). Обернемо сторону AB навколо вершини B на кут θ шляхом збільшення $\angle A'BA$ так, щоб точка B (і, відповідно, B')

перестали бути кутовими (див. рис. 6 (а та б)). Після такої операції площа фігури F_1 зміниться рівно настільки, наскільки зміниться площа паралелограма $AB'A'B$.

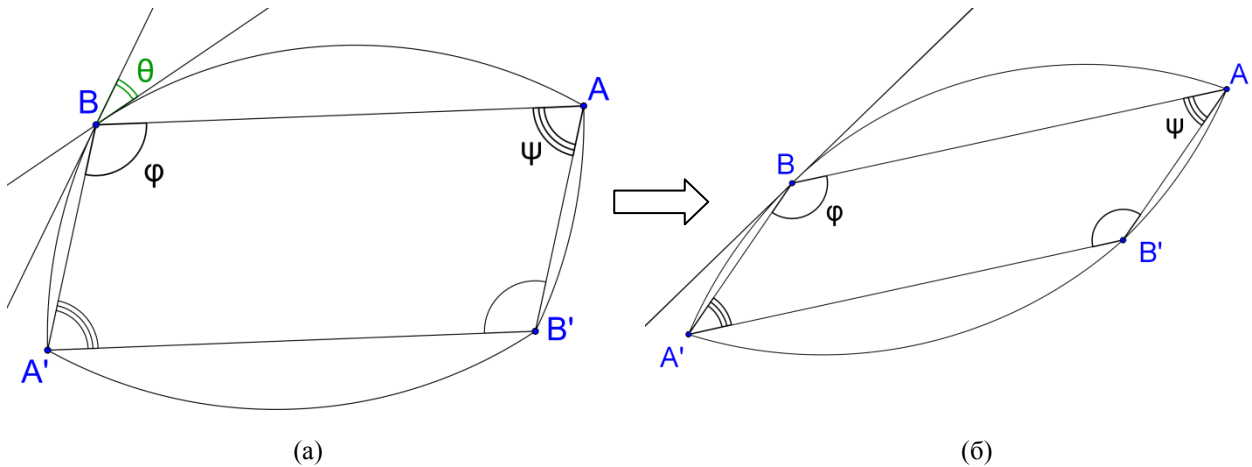


Рис. 6: Чотирьохшарнірний метод

Доведемо, що можна обрати одну з двох вершин (A чи B) так, щоб площа паралелограма $ABA'B'$ після описаної операції зменшилася. На евклідовій площині це твердження очевидне – треба лише взяти тупий кут. На сфері ситуація дещо складніша.

Позначимо довжини сторін $A'B = a$, $BA = b$, та кут між ними $\angle A'BA = \varphi$. Важливо зауважити, що площа сферичного паралелограма на одиничній сфері не перевищує 2π (площі півсфери). А в нашому випадку, через те, що $r < \pi/2$, площа $ABA'B'$ менша за 2π . Значить, площа S трикутника $\triangle ABA'$ менша за π , і ми можемо застосувати формулу (1). Маємо:

$$\operatorname{tg} \frac{S}{2} = \frac{\sin a \sin b \sin \varphi}{(1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b \cos \varphi}.$$

При застосуванні чотирьохшарнірного методу сторони a та b лишаються незмінними, тому площа S є функцією кута φ : $S = S(\varphi)$. Оскільки $0 \leq S(\varphi) < \pi$, то характер монотонності функції S співпадає з характером монотонності функції $g(\varphi) = \operatorname{tg} \frac{S(\varphi)}{2}$. Щоб з'ясувати цей характер, знайдемо похідну g' по змінній φ :

$$g'(\varphi) = \frac{\sin a \sin b (\cos \varphi (1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b)}{((1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b \cos \varphi)^2}. \quad (2)$$

З (2) випливає, що на інтервалі $[0; \pi]$ похідна $g'(\varphi)$ дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли $\cos \varphi = -\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}$. Останнє рівняння, з огляду на монотонність косинуса на $[0; \pi]$, має лише єдиний розв'язок $\varphi = \varphi_0$. Зауважимо, що оскільки a та b є сторонами сферичного паралелограма з площею, що менша за 2π , то $a + b < \pi$, а значить $a/2 < \pi/4$ та $b/2 < \pi/4$, з чого і випливає існування розв'язку φ_0 . Більше того, $g(0) = g(\pi) = 0$ і $g \geq 0$. Тому φ_0 – точка максимуму функції $g(\varphi)$, і разом з тим, функції площі $S(\varphi)$. При цьому ліворуч і праворуч від φ_0 функція $S(\varphi)$ строго монотонна.

Повертаючись до паралелограма $ABA'B'$, якщо позначити $\angle BAB' = \psi$, то матимемо $S(\varphi) = S(\psi)$ через те, що $2S(\triangle A'BA) = 2S(\triangle BAB') = S(ABA'B')$ і протилежні сторони паралелограма рівні. Отже, з огляду на характер монотонності функції S або $\varphi = \psi = \varphi_0$, або $(\varphi - \varphi_0)(\psi - \varphi_0) < 0$. У будь-якому випадку знайдеться кут (φ або ψ), при збільшенні якого площа паралелограма $ABA'B'$ зменшиться, що ми і хотіли довести.

Таким чином, застосування «чотирьохшарнірного методу» призводить до зменшення загальної площі фігури та зменшення кількості пар кутових точок на 1 (див. рис. 6(б)). Очевидно, фігура при цьому залишається центральносиметричною та опуклою.

Повторивши описану операцію скінченну кількість разів, вибираючи щоразу нову пару центральносиметричних кутових точок, ми отримаємо фігуру F_2 , таку що:

- 1) F_2 має не більше, ніж одну пару кутових точок;
- 2) $S(F_2) < S(F_1)$ (а значить, $S(F_2) < S(F)$);
- 3) $\partial F_2 \sim \partial F_1 \sim \partial J$ (це впливає з того, що шарнірні рухи не змінюють межі фігури).

З умов 1) і 3) випливає, що фігура F_2 дорівнює лінзі J . Тоді умова 2) доводить першу частину леми 1 у центральносиметричному випадку.

Зауважимо, що застосування хоча б одного з методів «вирізання паралелограма» чи «чотирьохшарнірного методу» призводить до строгого зменшення площі. Отже, у випадку $S(F) = S(J)$, ми зовсім не робили жодного кроку, тобто F має бути рівною лінзі J . Лема 1 у центральносиметричному випадку доведена.

3.2. Доведення леми 1: загальний випадок

Нехай F – довільна опукла фігура на сфері, що задовольняє умові леми 1.

Знайдемо відрізок максимальної довжини такий, що обидва його кінці лежать на межі F . Такий відрізок завжди існує⁷ і називається *діаметром* фігури. Доведемо, що перпендикуляри до цього відрізка в обох його кінцях – опорні⁸ до фігури F ⁹. При цьому, перпендикуляри можуть мати з межею F спільний відрізок.

⁷ Це випливає з огляду на *компактність* фігури F . Елементарне, але строге доведення цього факту – дивись у [8]. Усі міркування, що приводяться у цій книзі для площини, можуть бути легко перенесені на сферу.

⁸ Опорною прямою для фігури на сфері називається така сферична пряма, яка проходить через точку на межі фігури, та відносно якої фігура лежить в одній півсфері.

⁹ Це твердження доволі просто доводиться у випадку евклідової площини та у просторі (див. [9]). У той же час, на сфері його доведення є складнішим та ще раз демонструє відмінність сферичної геометрії від геометрії Евкліда.

Дійсно, нехай AB – відрізок максимальної довжини такий, що обидва його кінці лежать на ∂F , а пряма p – перпендикуляр до AB в точці B . Припустимо, що пряма p не є опорною до F і перетинає ∂F у точці K (див. рис. 7). Тоді на дузі BK межі ∂F існує точка C , що не належить прямій p . З огляду на опуклість фігури F , відрізки BK та AC лежать в F , та за побудовою AC пересікається з BK у деякій точці M . Нехай $\angle KBC = \gamma$. Тоді $\gamma < 90^\circ$ та $\angle ABC = 90^\circ + \gamma$. Для отримання бажаного протиріччя, нам достатньо

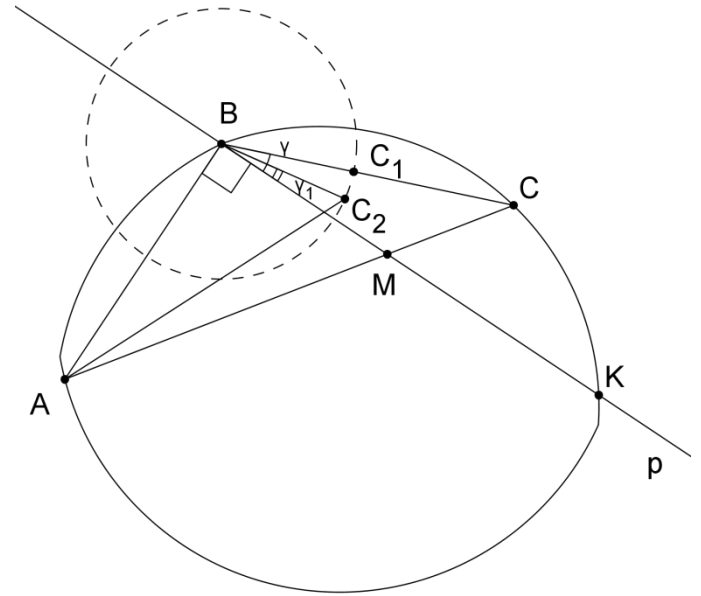


Рис. 7

побудувати відрізок, що лежить всередині фігури та за довжиною перевищує AB . Розглянемо два випадки:

- 1) $AB \leq \pi/2$. Тоді, за сферичною теоремою косинусів для $\triangle ABC$ маємо:

$$\begin{aligned} \cos AC &= \cos AB \cos BC + \sin AB \sin BC \cos(90^\circ + \gamma) \\ &= \cos AB \cos BC - \sin AB \sin BC \sin \gamma. \end{aligned}$$

Оскільки синус на відрізку $[0; \pi]$ набуває невід'ємних значень, з останньої рівності випливає $\cos AC < \cos AB \cos BC$. Використовуючи те, що $AB \leq \pi/2$, тобто $\cos AB \geq 0$, отримуємо $\cos AC < \cos AB \cos BC \leq \cos AB$. З цього витікає $AC > AB$, що суперечить максимальності AB .

- 2) $AB > \pi/2$. У цьому випадку ми не можемо оцінювати так, як це робили в пункті 1) через те, що $\cos AB < 0$. Будемо діяти більш охайніше. Нехай $C_1 \in BC$ – точка на відрізку BC така, що

$$\operatorname{tg} \frac{BC_1}{2} < \frac{\sin \gamma}{-\operatorname{ctg} AB}. \quad (3)$$

Таку точку завжди можна вибрати з огляду на те, що $-\operatorname{ctg} AB > 0$. Причому, зменшуючи BC_1 за потреби, ми завжди можемо обрати C_1 так, щоб коло з центром в точці B радіуса BC_1 не перетинало відрізок AC . Використовуючи (3), знайдемо такий гострий кут γ_1 , що задовольняє подвійну нерівність

$$\sin \gamma > \sin \gamma_1 > -\operatorname{tg} \frac{BC_1}{2} \operatorname{ctg} AB. \quad (4)$$

І зрештою, нехай C_2 така точка всередині $\triangle BCM$, що $BC_2 = BC_1$ та $\angle KBC_2 = \gamma_1$ (див. рис. 7). Зрозуміло, що C_2 можна отримати обертанням відрізка BC_1 навколо точки B . При цьому, за побудовою та з огляду на опуклість фігури F , відрізки BC_2 та AC_2 лежать всередині F . Тепер, за теоремою косинусів для $\triangle ABC_2$ та використовуючи нерівність (4) маємо:

$$\begin{aligned}
\cos AC_2 &= \cos AB \cos BC_2 + \sin AB \sin BC_2 \cos(90^\circ + \gamma_1) \\
&= \cos AB \cos BC_2 - \sin AB \sin BC_2 \\
&< \cos AB \cos BC_2 + \sin AB \sin BC_2 \operatorname{tg} \frac{BC_1}{2} \operatorname{ctg} AB = \cos AB.
\end{aligned}$$

Отже, $AC_2 > AB$. Протиріччя, що і доводить твердження у випадку 2).

Повернімося до доведення леми 1 у загальному випадку.

Нехай довжина межі фігури F без урахування прямих відрізків дорівнює L . Розіб'ємо відрізком AB фігуру F на дві фігури F_1 та F_2 . Межа кожної з цих фігур складається з відрізка AB та частини межі ∂F . Позначимо, відповідно, через L_1 та L_2 довжини цих частин без

урахування довжин можливих відрізків прямих. Маємо: $L = L_1 + L_2$ (див. рис. 8). Відобразимо фігуру F_1 симетрично відносно середини відрізка AB . Отримана фігура разом з F_1 складуть центральносиметричну фігуру \tilde{F}_1 . Аналогічно за допомогою F_2 побудуємо центральносиметричну фігуру \tilde{F}_2 . Оскільки перпендикулярні в точках A та B сферичні прями O_1AO_2 та O_1BO_2 (O_1 та O_2 – діаметрально протилежні точки сфери) – опорні для фігури F (див. рис. 8), то отримані фігури \tilde{F}_1 та \tilde{F}_2 будуть опуклими. Зауважимо, що довжини $\partial\tilde{F}_1$ та $\partial\tilde{F}_2$ без урахування відрізків прямих дорівнюють, відповідно, $2L_1$ та $2L_2$.

Як ми вже показали в центральносиметричному випадку: площа центральносиметричної фігури \tilde{F}_1 не менша за площу лінзи з межею довжини $2L_1$. Аналогічно для \tilde{F}_2 . Зауважимо, що при зафіксованому радіусі r площа лінзи однозначно визначається довжиною своєї межі. Позначимо через $\tilde{S} = \tilde{S}(L)$ функцію залежності площі лінзи від довжини L її межі.

За побудовою площа початкової фігури F - це є сума площ фігур F_1 та F_2 . А отже, отримуємо:

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) = \frac{1}{2}S(\tilde{F}_1) + \frac{1}{2}S(\tilde{F}_2) \geq \frac{1}{2}\tilde{S}(2L_1) + \frac{1}{2}\tilde{S}(2L_2). \quad (5)$$

Забігаючи наперед, ми хочемо довести $\frac{1}{2}\tilde{S}(2L_1) + \frac{1}{2}\tilde{S}(2L_2) \geq \tilde{S}(L)$. Це з урахуванням наших позначень та оцінки (5) і дасть нам твердження леми 1. Остання нерівність рівносильна тому, що

$$\frac{\tilde{S}(2L_1) + \tilde{S}(2L_2)}{2} \geq \tilde{S}(L_1 + L_2) \quad (6)$$

для будь-яких потенційно можливих значень L_1 та L_2 . З означення функції \tilde{S} випливає, що вона визначена на відрізку $[0; 2\pi \sin r]$ (оскільки, як неважко підрахувати, довжина кола радіуса r на

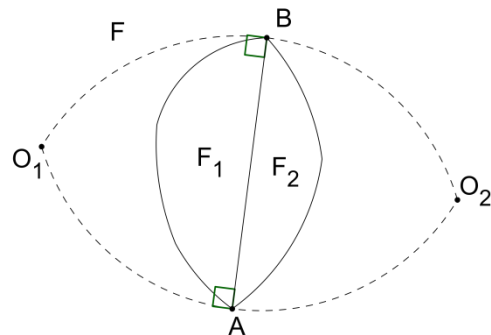


Рис. 8: Загальний випадок фігури F

сфері дорівнює $2\pi \sin r$). Тому (6) має виконуватись для будь-яких $L_1, L_2 \in [0; 2\pi \sin r]$.

Але, як відомо, функція задовольняє нерівність виду (6) на деякому відрізку тоді і тільки тоді, коли вона опукла вниз на цьому відрізку. З іншого боку, для двічі диференційованих функцій опуклість вниз рівносильна тому, що їхні другі похідні додатні. Покажемо, що саме це виконується в нашому випадку, тобто $\tilde{S}''(L) > 0$ для всіх $L \in (0; 2\pi \sin r)$.

Використовуючи формулу площі сферичного сегмента (див., наприклад, [4] або [9]) та формулу площі трикутника на сфері неважко показати, що

$$\tilde{S}(L) = 2\pi - L \operatorname{ctg} r - 4 \operatorname{arcctg} \left(\operatorname{tg} \frac{L}{4 \sin r} \cdot \cos r \right).$$

Бачимо, що \tilde{S} дійсно є двічі диференційованою на $(0; 2\pi \sin r)$ функцією. Знайдемо її другу похідну:

$$\tilde{S}''(L) = \frac{\cos r \cdot \sin \frac{L}{2 \sin r}}{4 \cdot \left(\cos^2 \frac{L}{4 \sin r} + \cos^2 r \cdot \sin^2 \frac{L}{4 \sin r} \right)^2}.$$

Зауважимо, що оскільки значення r лежить на інтервалі $(0; \pi/2)$, то $\tilde{S}''(L) > 0$ для будь-яких значень $L \in (0; 2\pi \sin r)$. З цього випливає, що функція $\tilde{S}(L)$ (строго) опукла вниз на інтервалі $[0; 2\pi \cdot \sin r]$. Отже, виконується рівність (6), а з нею і оцінка $S(F) \geq \tilde{S}(L) = S(J)$. Це доводить першу частину леми 1 у загальному випадку. Якщо ж $S(F) = S(J)$, то, з огляду на строгу опуклість функції \tilde{S} , у (5) має досягатись рівність. Але тоді, очевидно, фігури \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 та F рівні між собою, та співпадають з лінзою J .

Таким чином, лема 1 повністю доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dubins L., Hirsch M., Karush J. *Scissor congruence* // Israel J. Math., 1963. Vol. 1. P. 239– 247.
2. Петрунин А. М., Рукшин С. Е. *Уникальноставленные фигуры*. М.: МЦНМО, 2006. Библиотека «Математическое просвещение», сер.3, вып. 10, 161-175.
3. Болтянский В. Г. *Третья проблема Гильберта*. М.: Наука, 1977 – 208с.
4. Понарин Я.П. *Элементарная геометрия в 2 т. Т. 2 Стереометрия, преобразования пространства*. М.: МЦНМО, 2006.—256 с.
5. Степанов Н. Н. *Сферическая тригонометрия*. М.: ОГИЗ, 1948 – 155 с.
6. Прасолов В. В., Тихомиров В. М. *Геометрия*. М.: МЦНМО, 2007 – 328 с.
7. Walter R., *Polygons in hyperbolic geometry 2: Maximality of area*, arXiv:1008.3821 [math.MG].
8. Люстерник Л.А. *Выпуклые фигуры и многогранники*. М.: Гос. изд. технико-теоретической лит-ры, 1956 – 212 с.
9. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. *Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов*. – Висагинас, Alfa, 1998. – 576 с.