Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514 № 514 , 2001, с.129-141

# Аффинная классификация точек многомерных комплексных поверхностей

О.В. Лейбина

*Харьковский национальный университет, Украина*

В работе получена аффинная классификация точек многомерных неособых комплексных поверхностей, вложенных в комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ с произвольной коразмерностью. Выяснено, для каких комплексных поверхностей существует конечное число классов аффинно эквивалентных точек. *2000 Mathematics Subject Classification* 53B25.

## Введение

Вопрос о разбиении точек многомерной поверхности на классы, устойчивые относительно некоторой группы преобразований пространства рассматривался в работе [6].

Из работы [5] следует, что только группы аффинных и конформных преобразований сохраняют локально геометрические свойства поверхностей, а стало быть, только эти группы могут служить основой классификации точек многомерных поверхностей.

В работе [1] получена аффинная классификация точек регулярных поверхностей, вложенных в евклидово пространство $\mathbf{E}^n$ с произвольной коразмерностью.

Целью данной работы является аффинная классификация точек многомерных неособых комплексных поверхностей, вложенных в комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ с произвольной коразмерностью. Основной результат работы составляют теоремы 1 – 5.

## 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство. Локально она задаётся радиус-вектором $\mathbf{w} = \mathbf{w}(w^1, w^2, ...w^n)$, где $w^k = w^k(z^1, z^2, ...z^l)$ – голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ $(k = 1, ..., n,\ \ j = 1, ..., l)$ и $rg\,(\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^j}) = l$.

Поскольку комплексная поверхность $F^l$ – гладкое подмногообразие в $\mathbf{C}^n$, то в окрестности каждой своей точки она может быть задана явно, в виде

$z^{l+\alpha} = z^{l+\alpha}(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., n-l$. Тогда координаты радиус-вектора примут вид: $w^k = z^k$, $k = 1, ..., l$, $w^{l+\alpha} = z^{l+\alpha}(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., n-l$.

Пусть $\nu_\alpha$ – нормаль к $F^l$ в некоторой точке $q$, $\alpha = 1, ..., n-l$. Элементы матрицы второй квадратичной формы поверхности $F^l$ относительно нормали $\nu_\alpha$ определяются следующим образом [2]:

$$a^\alpha_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial z^i \partial z^j}, \nu_\alpha \right\rangle,$$

$<,>$ означает эрмитово скалярное произведение вида $< z_1, z_2 >= z_1^1 \bar{z}_2^1 + z_1^2 \bar{z}_2^2 + ... + z_1^n \bar{z}_2^n$, где $z_1 = (z_1^1, ..., z_1^n)$ и $z_2 = (z_2^1, ..., z_2^n)$ – векторы в $\mathbf{C}^n$, а $\bar{z}_2 = (\bar{z}_2^1, ..., \bar{z}_2^n)$– вектор, комплексно сопряженный к $z_2$.

Матрицу $A_\alpha = (a^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$ можно записать в виде $A_\alpha = C_\alpha + iD_\alpha$, где $C_\alpha = ({}^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$, $D_\alpha = (d^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$ – вещественные матрицы. Каждой комплексной нормали

$$\nu_\alpha = (a^1_\alpha + ib^1_\alpha, a^2_\alpha + ib^2_\alpha, ..., a^n_\alpha + ib^n_\alpha)$$

соответствуют две вещественные нормали

$$n_{\alpha_1} = (a^1_\alpha, a^2_\alpha, ..., a^n_\alpha, b^1_\alpha, b^2_\alpha, ..., b^n_\alpha),$$

$$n_{\alpha_2} = (-b^1_\alpha, -b^2_\alpha, ..., -b^n_\alpha, a^1_\alpha, a^2_\alpha, ..., a^n_\alpha),$$

если рассматривать комплексную поверхность $F^l$ как $2l$-мерное вещественное подмногообразие $F^{2l}$ в $\mathbf{E}^{2n}$, где $\mathbf{E}^{2n}$ – овеществленное комплексное пространство $\mathbf{C}^n$. Матрицы вторых квадратичных форм поверхности $F^{2l}$ относительно нормалей $n_{\alpha_1}$ и $n_{\alpha_2}$ будут иметь соответственно следующий вид:

$$A_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} C_\alpha & -D_\alpha \\ -D_\alpha & -C_\alpha \end{pmatrix}, \qquad B_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} D_\alpha & C_\alpha \\ C_\alpha & -D_\alpha \end{pmatrix}.$$

Если в пространстве $\mathbf{C}^n$ выбрать систему координат так, чтобы точка $q$ совпала с началом координат $O$, а касательное пространство $T_qF^l$ – с подпространством $z^1, z^2, ...z^l$, то уравнение соприкасающегося параболоида к поверхности $F^l$ в точке q будет следующим:

$$z^{l+\alpha} = a^\alpha_{ij} z^i z^j, \qquad \alpha = 1, ..., n-l. \tag{1}$$

Введем обозначение $A^\alpha(z, z) = a^\alpha_{ij} z^i z^j$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$z^{l+\alpha} = A^\alpha(z, z), \qquad \alpha = 1, ...n-l. \tag{2}$$

Определим вектор вторых квадратичных форм комплексной поверхности $F^l$ в точке $O$ следующим образом:

$$H = (A^1(z, z), A^2(z, z), ..., A^{n-l}(z, z)).$$

Всюду в дальнейшем будем отождествлять квадратичные формы $A^{\alpha}(z,z)$ с соответствующими им матрицами $A^{\alpha}$. Таким образом соприкасающийся параболоид полностью описывается вектором вторых квадратичных форм комплексной поверхности $F^l$ в точке $q$.

*Две точки неособой комплексной поверхности, вложенной в пространство $C^n$, называются аффинно эквивалентными, если соприкасающиеся параболоиды в этих точках можно отобразить друг на друга невырожденным аффинным преобразованием в объемлющем пространстве.*

Комплексной точечной коразмерностью комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$ в данной точке называется размерность пространства вторых квадратичных форм поверхности $F^l$ в этой точке. Очевидно, что точечная коразмерность не превышает $l(l+1)/2$ и, вообще говоря, не равна $n-l$.

Для комплексной поверхности $F^l$ определяется внешний нуль-индекс $\mu(q)$ в точке $q$. Он равен размерности максимального подпространства $L(q)$ касательного пространства $T_qF^l$, такого, что для любого $y \in L(q)$ выполняется условие $Ay = 0$, где $A$ – матрица второй квадратичной формы поверхности $F^l$ относительно произвольной нормали.

В теореме 1 показано для каких комплексных поверхностей существует конечное число классов аффинно эквивалентных точек:

**Теорема 1**. *Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство ($l \geq 2$). Тогда точки поверхности можно разбить на конечное число классов аффинной эквивалентности в следующих случаях:*

*1) для двумерных комплексных поверхностей произвольной комплексной точечной коразмерности,*

*2) для комплексных гиперповерхностей $F^l \subset \mathbf{C}^{l+1}$ и двойственного случая $F^l \subset \mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность $p = l(l+1)/2 - 1$,*

*3) для комплексных поверхостей $F^l \subset \mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность минимальна ($p = 0$) или максимальна ($p = l(l+1)/2$),*

*4) для трехмерных поверхностей, где комплексная точечная коразмерность равна 2 или 4.*

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ приведены в следующей теореме:

**Теорема 2**. *Для двумерных комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ комплексной точечной коразмерности p сущетвует 6 классов аффинно эквивалентных точек :*

*При $p = 0$ – один класс – точка уплощения.*

*При $p = 1$ – два класса; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:*

*а)*$z^3 = (z^1)^2 + (z^2)^2$,

*б)*$z^3 = (z^1)^2$.

*При $p = 2$ – два класса; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:*

*а)*$z^3 = (z^1)^2,\ \ z^4 = (z^2)^2,$

*б)*$z^3 = (z^2)^2,\ \ z^4 = 2z^1z^2.$

*При $p = 3$ – один класс; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к следующему каноническому виду:*

$z^3 = (z^1)^2,\ \ z^4 = (z^2)^2,\ \ z^5 = 2z^1z^2.$

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных гиперповерхностей приведены в следующей теореме:

**Теорема 3**. *Для комплексных гиперповерхностей $F^l \subset \mathbf{C}^{l+1}$ существует $l$ классов аффинно эквивалентных точек; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:*

$z^{k+1} = (z^1)^2 + (z^2)^2 + ... + (z^k)^2,\ \ k = 1, ..., l.$

Согласно теореме 1 аффинная классификация точек в случае, когда $F^l \subset \mathbf{C}^n$ и комплексная точечная коразмерность $p = l(l+1)/2 - 1$, сводится к классификации точек для гиперповерхностей.

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных поверхностей минимальной или максимальной комплексной точечной коразмерности приведены в следующей теореме:

**Теорема 4**. *Для комплексных поверхостей $F^l \subset \mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность минимальна ($p = 0$) или максимальна ($p = l(l+1)/2$) существует один класс аффинно эквивалентных точек:*

*При $p = 0$ – точка уплощения.*

*При $p = l(l+1)/2$ соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к следующему каноническому виду:*

$z^{l+1} = (z^1)^2,\ \ z^{l+2} = 2z^1z^2,\ \ z^{l+3} = 2z^1z^3, ...,$

$z^{2l} = 2z^1z^l,\ \ z^{2l+1} = (z^2)^2, ...,\ \ z^{l+p} = (z^l).$

Аффинные классы точек трехмерных комплексных поверхностей комплексной точечной коразмерности $p = 2$ приведны в следующей теореме:

**Теорема 5**. *Две точки неособой комплексной поверхности $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ с нулевым внешним нуль-индексом являются аффинно эквивалентными тогда и только тогда, когда пучки вторых квадратичных форм комплексной поверхности в этих точках имеют равные степени и числа элементарных делителей.*

*Существует 7 невырожденных классов аффинно эквивалентных точек:*

*В зависимости от элементарных делителей выделяются следующие канонические виды пучков вторых квадратичных форм:*

*1)* $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_2,\ \ \lambda - \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$(z^2)^2 + (z^3)^2,\ \ (z^1)^2 + (z^3)^2,$$

*2)* $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_3$

$$(z^3)^2,\ \ (z^1)^2 + (z^2)^2,$$

*3)* $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1$

$$0,\ \ (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2,$$

*4)* $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \ \lambda - \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_3$

$$(z^2)^2 + (z^3)^2,\ \ 2z^1z^2 - (z^3)^2,$$

*5)* $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \ \lambda - \lambda_1$

$$(z^2)^2,\ \ 2z^1z^2 + (z^3)^2,$$

*6)* $(\lambda - \lambda_1)^3$

$$2z^2z^3,\ \ (z^2)^2 + 2z^1z^3,$$

*где* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$,

*7)пучок вырожден*

$$2z^2z^3,\ \ 2z^1z^3.$$

Согласно теореме 1 аффинная классификация точек трехмерных комплексных поверхностей комплексной точечной коразмерности $p = 4$ сводится к классификации при $p = 2$, так как эти коразмерности являются двойственными для трехмерных поверхностей: их сумма равна $l(l+1)/2$ для $l = 3$.

## 2. Условия конечности числа аффинных классов точек

Для выяснения условий существования конечного числа аффинных классов точек неособых комплексных поверхностей проведем рассуждения аналогично работе [1].

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство, $\mathbf{H} = \{H\}$ – пространство всевозможных векторных вторых квадратичных форм рассматриваемой поверхности.Тогда фактор-пространство

$$\mathbf{H}/(GL(l,\mathbf{C}) \times GL(p,\mathbf{C}))$$

совпадает с пространством аффинных классов точек комплексной поверхности.

Действительно, пусть $p$ – комплексная точечная коразмерность неособой комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$. Это означает, что размерность пространства вторых квадратичных форм равна $p$. Значит, можно выбрать базис нормалей так, чтобы вторые квадратичные формы рассматриваемой поверхности относительно первых $p$ нормалей были ненулевыми, а вторые квадратичные формы относительно оставшихся $n-l-p$ нормалей были тождественно равны нулю. Таким образом, компексную поверхность $F^l$ можно рассматривать как $F^l$ в $\mathbf{C}^{l+p} \subset \mathbf{C}^n$.

Пусть $q$ и $q'$ точки на $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$,

$$H = (A^1(z,z), A^2(z,z), ..., A^p(z,z)),$$

$$H' = (A'^1(z,z), A'^2(z,z), ..., A'^p(z,z))-$$

векторы вторых квадратичных форм поверхности $F^l$ в точках $q$ и $q'$ соответственно.

Согласно (2) уравнение соприкасающегося параболоида к поверхности $F^l$ в точке $q$ будет иметь вид:

$$z^{l+\mu} = A^\mu(z,z), \qquad \mu = 1, ..., p.$$

После параллельного переноса на вектор $q'q$ и поворота в $\mathbf{C}^{l+p}$ так,чтобы $T_qF^l$ и $T'_qF^l$ совпали, уравнение соприкасающегося параболоида в точке $q'$ будет следующим:

$$z^{l+\mu} = A'^\mu(z,z), \qquad \mu = 1, ..., p.$$

Точки $q$ и $q'$ аффинно эквивалентны, если существует преобразование $\Lambda \in GL(l+p, \mathbf{C})$ такое, что $\Lambda H = H'$.

Аналогично [1] можно показать, что для наших целей достаточно ограничиться преобразованиями $\Lambda$, которые имеют блочный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

где $U \in GL(l, \mathbf{C})$ и $V \in GL(p, \mathbf{C})$ – аффинные преобразования в касательном $T_oF^l$ и нормальном $N_oF^l$ пространствах в точке $O$ к комплексной поверхности $F^l$. Иными словами, можно полагать, что $\Lambda \in GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C})$. Тогда

$$\Lambda H = V \begin{pmatrix} U^*A^1U \\ . \\ . \\ . \\ U^*A^pU \end{pmatrix}, \qquad \text{т. е.} \quad (\Lambda H)^\nu = U^*(v^\nu_\mu A^\mu)U, \tag{3}$$

где $v^\nu_\mu$ элементы матрицы $V$, $U^*$ – матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к $U$.

Таким образом, аффинными классами точек поверхности являются классы эквивалентности пространства $\mathbf{H} = \{H\}$ всевозможных векторов вторых квадратичных форм (т.е. $p$-мерных векторов симметрических $l \times l$ матриц) по действию группы

$$G = GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C}),$$

определенному формулой (3). Следовательно,

$$\mathbf{H}/G = \mathbf{H}/(GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C})) -$$

пространство аффинных классов.

**Лемма 1**. *Для того, чтобы число классов аффинно эквивалентных точек комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ было конечно, необходимо, чтобы*

$$p(l(l+1)/2 - p) \le l^2 - 1. \tag{4}$$

Доказательство. Для того, чтобы число аффинных классов было конечно, необходимо, чтобы

$$dim\mathbf{H}/G = 0, \tag{5}$$

т.к. в этом случае связная компонента группы $\mathbf{H}/G$ состоит из изолированных точек, а конечность размерности гарантирует конечность числа компонент. Фактор-пространство $\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C})$ – пространство всевозможных $p$-мерных плоскостей $l(l+1)/2$-мерного пространства $L$ симметрических $l \times l$ матриц, т.е.

$$\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) = G(p, l(l+1)/2),$$

где $G(m, n)$ – многообразие Грассмана m-мерных комплексных плоскостей в $\mathbf{C}^n$. Поэтому

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) = p(l(l+1)/2 - p),$$

Из (5) следует, что

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) \le dimGL(l, \mathbf{C}).$$

Усилим это неравенство, замечая, что подгруппа $\{\lambda I, \lambda \in C\backslash\{0\}\} \subset GL(l, \mathbf{C})$ ($I$ – единичная матрица порядка $l$) оставляет на месте $p$-мерную плоскость в пространстве $L$, натянутую на $(A^1, A^2, ...A^p)$ (это следует из формулы (3)). Поэтому множество аффинных классов совпадает с фактор-пространством

$$\mathbf{H}/(GL(p, \mathbf{C}) \times GL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\}_{\lambda \neq 0})$$

Нетрудно видеть,что $GL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\} = SL(l, \mathbf{C})$ и $dimGL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\} = l^2 - 1$.

Итак, чтобы число аффинных классов было конечно, необходимо, чтобы

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) \le dimSL(l, \mathbf{C}).$$

Значит,

$$p(l(l+1)/2 - p) \le l^2 - 1,$$

что и требовалось доказать.

## 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность комплексной точечной коразмерности $p$.

Неравенство (4) имеет следующие решения:

1) $l = 2$,

2) $p = 1$ или $p = l(l+1)/2 - 1$, $l \geq 2$,

3) $p = 0$ или $p = l(l+1)/2$, $l \geq 2$,

4) $l = 3$, $p = 2$ или $p = 4$.

Для вещественных поверхностей $F^l \subset \mathbf{E}^n$ точечной коразмерности $p$ в работе [1] доказано, что аффинная классификация точек поверхности при $p = l(l+1)/2 - q$ сводится к классификации при $p = q$. Дословно повторяя рассуждения можно показать, что это верно и для комплексных поверхностей $F^l \subset \mathbf{C}^n$ комплексной точечной коразмерности $p$.

Таким образом, получаем, что точки поверхности можно разбить на конечное число классов аффинной эквивалентности в случаях 1)-4), что и завершает доказательство теоремы 1.

## 4. Доказательство теоремы 2

Имеем двумерную комплексную поверхность $F^2 \subset \mathbf{C}^n$. Комплексная точечная коразмерность $0 \leq p \leq l(l+1)/2$, $l = 2$, следовательно $0 \leq p \leq 3$.

При $p = 0$ все точки аффинно эквивалентны. Получаем один аффинный класс – точки уплощения. Канонический вид соприкасающегося параболоида $z^3 = 0$.

При $p = 1$ имеем $F^2 \subset \mathbf{C}^3$. Получается два аффинных класса. Соприкасающийся параболоид приводится к одному из следующих канонических видов:

а)$z^3 = (z^1)^2 + (z^2)^2$,

б)$z^3 = (z^1)^2$.

При $p = 2$ имеем $F^2 \subset \mathbf{C}^4$. Вектор второй квадратичной формы $H = (A^1, A^2)$.

Оказывается, что элементарные делители пучка вторых квадратичных форм $A^1 - \lambda A^2$ полностью определяет аффинный класс точки в данном случае. Ход рассуждений аналогичен доказательству теоремы 5.

Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$ – корни уравнения $det(A^1 - \lambda A^2) = 0$. Тогда в зависимости от элементарных делителей получаем следующие канонические виды соприкасающихся параболоидов:

1)$\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_2,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \ \ \lambda_1, \lambda_2 \in C$

$$(z^3) = (z^1)^2,\ \ (z^4) = (z^2)^2,$$

2)$(\lambda - \lambda_1)^2,\ \ \lambda_1 \in C$

$$(z^3) = (z^2)^2,\ \ (z^4) = 2z^1 z^2.$$

Таким образом, получаем два аффинных класса.

При $p = 3$ (комплексная точечная коразмерность максимальна) вектор второй квадратичной формы $H = (A^1, A^2, A^3)$. Базис пространства вторых квадратичых форм будет следующим:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение соприкасающегося параболоида имеет вид $z^{\mu+2} = A^\mu(z, z)$, где $z = (z^1, z^2)$, $\mu = 1, 2, 3$. Следовательно получаем один аффинный класс:

$$z^3 = (z^1)^2, \;\; z^4 = (z^2)^2, \;\; z^5 = 2z^1z^2.$$

## 5. Доказательство теоремы 3

При $p = 1$ имеем $F^l \subset \mathbf{C}^{l+1}$ – комплексная гиперповерхность. Вектор второй квадратичной формы $H = (A^1)$. Значит, $\mathbf{H} = L$ – пространство симметрических $l \times l$ матриц. Группа $GL(p, \mathbf{C})$ является мултипликативной группой $C\backslash\{0\}$. Поэтому пространство аффинных классов есть $L/GL(l, \mathbf{C})$. Матрицу второй квадратичной формы поверхности $F^l$ в точке $q$ можно привести к диагональному виду, на главной диагонали будут находиться собственные числа. Количество аффинных классов будет определяться числом ненулевых собственных чисел. Следовательно, получаем $l$ аффинных классов. Канонический вид соприкасающихся параболоидов будет следующим:

$$z^{k+1} = (z^1)^2 + (z^2)^2 + ... + (z^k)^2, \qquad k = 1, ..., l.$$

## 6. Доказательство теоремы 4

При $p = l(l+1)/2$ уже $\mathbf{H}\ /GL(p, \mathbf{C})$ состоит из одного элемента. Получаем один аффинный класс. Выбирая базис $A^1, A^2, ..., A^p$ пространства вторых квадратичных форм, согласно (2) соприкасающийся параболоид приводится к такому каноническому виду:

$z^{l+1} = (z^1)^2, \;\; z^{l+2} = 2z^1z^2, \;\; z^{l+3} = 2z^1z^3, ...,$

$z^{2l} = 2z^1z^l, \;\; z^{2l+1} = (z^2)^2, ..., \;\; z^{l+p} = (z^l)^2$

При $p = 0$ все точки аффинно эквивалентны.

## 7. Доказательство теоремы 5

Пусть $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ неособая комплексность поверхность. Тогда вектор второй квадратичной формы $H = (A^1, A^2)$. Условимся обозначать $A = A^1$, $B = A^2$ и рассмотрим пучок $A - \lambda B$.

**Лемма 2**. [4] *Если $A$ и $B$ – симметрические комплексные $l \times l$ матрицы, причем $B$ невырожденная, то преобразованием $U \in GL(l, \mathbf{C})$ их можно одновременно привести к виду*

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}, \qquad U^*BU = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix},$$

*где $k$-число элементарных делителей $\lambda$-матрицы $A - \lambda B$. Каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ соответствуют блоки*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_i l_i \\ \cdot & & & & \cdot & l_i \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \lambda_i l_i & l_i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_i = \begin{pmatrix} 0 & & & & l_i \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ l_i & \cdot & & & 0 \end{pmatrix}$$

*размеров $r_i \times r_i$, $l_i = \pm 1$.*

**Лемма 3**. [3] *Два пучка симметрических комплексных $l \times l$ матриц $A - \lambda B$ и $A' - \lambda B'$ эквивалентны относительно преобразований $U \in GL(l, C)$ (т.е.$U^*AU = A'$ и $U^*BU = B'$) тогда и только тогда, когда элементарные делители $\lambda$-матриц совпадают.*

Лемма 3 в применении к нашему случаю даёт полную систему инвариантов пространства $\mathbf{H}$ относительно группы $GL(3, C)$ , т.е. полностью описывает $\mathbf{H}/GL(3, C)$, но так как аффинные классы являются элементами фактор-пространства $\mathbf{H}/(GL(3, \mathbf{C}) \times GL(2, \mathbf{C}))$, то следует дополнительно профакторизовать $\mathbf{H}/GL(3, \mathbf{C})$ по действию группы $GL(2, \mathbf{C})$ (описываемому формулой (3)).

При этом условие леммы 3 заменится более слабым, а именно: должны совпадать лишь степени и числа элементарных делителей.

Так как из аффинной эквивалентности точек следует совпадение степеней и чисел элементарных делителей, то доказательство теоремы 5 будем вести только в сторону достаточности.

Пучок $A - \lambda B$ называется невырожденным, если $det(A - \lambda B)$ не равен тождественно нулю. Для невырожденного пучка возможны только такие наборы элементарных делителей:

1)$\lambda_1, \ \lambda - \lambda_2, \ \lambda - \lambda_3, \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3,$

2)$\lambda - \lambda_1, \ \lambda - \lambda_1, \ \lambda - \lambda_3, \ \lambda_1 \neq \lambda_3,$

3)$\lambda - \lambda_1, \ \lambda - \lambda_1, \ \lambda - \lambda_1,$

4)$(\lambda - \lambda_1)^2, \ \lambda - \lambda_3, \ \lambda_1 \neq \lambda_3,$

5)$(\lambda - \lambda_1)^2, \ \lambda - \lambda_1,$

6)$(\lambda - \lambda_1)^3,$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$.

Проверим справедливость теоремы в случаях 1 и 4, остальные проверяются аналогично.

1) В соответствии с леммой 2 пучок $A - \lambda B$ приводится преобразованиями из $GL(3, \mathbf{C})$ в $T_q F^3$ к виду

$$A = \begin{pmatrix} l_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3\lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \quad l_i = \pm 1.$$

Преобразованиями

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} l_3/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & l_3/(\lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

в нормальном пространстве матрицы $A$ и $B$ приводятся к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l_2(\lambda_2 - \lambda_1))/(l_3(\lambda_3 - \lambda_1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} (l_1(\lambda_1 - \lambda_2))/(l_3(\lambda_3 - \lambda_2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве подействуем преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$l_1(\lambda_1 - \lambda_2)/l_3(\lambda_3 - \lambda_2)) = c''b^2, l_2(\lambda_2 - \lambda_1)/l_3(\lambda_3 - \lambda_1)) = c'a^2.$$

Получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} l'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от знаков $l'$, $l''$ имеются 4 варианта. Покажем, что все они описывают один и тот же афинный класс.

Действительно, пусть $l' = 1$, $l'' = -1$. Тогда, действуя в касательном пространстве преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а в нормальном – преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

сведем этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Аналогично действуем в случае $l' = -1, l'' = 1$ и сводим этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Если $l' = l'' = -1$, то действуя в касательном пространстве преобразованием

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

сведем этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Таким образом получаем один аффинный класс. Канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = (z^1)^2 + (z^3)^2, \;\; z^5 = (z^2)^2 + (z^3)^2.$$

4) В соответствии с леммой 2 пучок приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 l_1 & 0 \\ \lambda_1 l_1 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 l_3 k \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \qquad l_i = \pm 1.$$

Последовательно действуя в нормальном пространстве аффинными преобразованиями

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приводим матрицы $A$ и $B$ к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразованием в касательном пространстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приведем матрицы $A$ и $B$ к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $l_1 = 1$, $l_3 = -1$, тогда действуя преобразованием в касательном пространстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

сводим к случаю $l_1 = l_3 = 1$. Аналогично можно показать, что случаи $l_1 = l_3 = \pm 1$, $l_1 = l_3 = \pm 1$ эквивалентны.

Таким образом, имеем один аффинный класс. Канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = (z^2)^2 + (z^3)^2, \ \ z^5 = 2z^1 z^2 + (z^3)^2.$$

Если пучок $A - \lambda B$ вырожденный, т.е. $det(A - \lambda B) \equiv 0$, то естественно потребовать равенства нулю внешнего нуль-индекса $\mu(q)$ комплексной поверхности $F^3$ в точке $q$; в противном случае классификация сводится к аффинным типам точек двумерных поверхностей. Аналогично [1] в рассматриваемом случае получаем, что канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = 2z^2 z^3, \ \ z^5 = 2z^1 z^3.$$

Таким образом, теоремы 1 – 5 полностью доказаны.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи и руководство работой и А.Л. Ямпольскому за помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Борисенко А.А. Аффинная классификация точек многомерных комплексных поверхностей. // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31. – **3**. – С. 19-29.

2. Борисенко А.А. О поверхностях неположительной внешней кривизны. // Мат. сб. – 1981. – Т. 114(156). – **3**. – С. 339-354.

3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, – 1984. – 318 с.

4. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. – М.: Физматгиз, – 1961. – 464 с.

5. Шефель Г.С. Группы преобразований евклидова пространства. // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26. – **3**. – С. 197-215.

6. Шефель С.З. Поверхности в евклидовом пространстве. // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, – 1978. – С. 297-318.