Однозначная определенность комплексных подмногообразий по грассманову образу.

О.В. Лейбина (г. Харьков, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина)
E-mail: leybina@univer.kharkov.ua

The problem of determination (up to homothety and parallel transport) of complex submanifolds in Euclidean complex space by its Grassmann image is solved.

В работе А.А. Борисенко [1] получено решение задачи об однозначной определенности подмногообразий $F^l \subset E^n$ евклидова пространства по грассманову образу. В монографии [2] сформулирован аналог этого результата для комплексных подмногообразий $F^l \subset \mathbf{C}^n$ комплексного евклидова пространства, доказательству которого посвящена данная работа. Рассмотрен также вопрос однозначной определенности по грассманову образу комплексных подмногообразий с большой комплексной точечной коразмерностью.

Комплексным внешним нуль-индексом $\mu_{\mathbf{C}}(q)$ комплексного подмногообразия F^l в точке q называется максимальная размерность такого подпространства $L(q)$ касательного пространства T_qF^l, что $A_\nu y = 0$ для любого вектора $y \in L(q)$, где A_ν – комплексная вторая квадратичная форма относительно произвольной нормали $\nu \in N_qF^l$.

Комплексная поверхность называется *сильно k-параболической*, если в каждой точке q комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbf{C}}(q) \geq k$. Мы будем расматривать случай, когда $\mu_{\mathbf{C}} = 1$. Согласно работе А.А. Борисенко, С.А. Остроумова [3] через каждую точку q комплексной сильно 1-параболической поверхности F^{l+1} проходит одномерная комплексная образующая, вдоль которой касательное пространство стационарно. Плоскость $\mathbf{C}^n$, ортогональная этой образующей, пересекает F^{l+1} по комплексной поверхности F^l, которая называется базой комплексной сильно 1-параболической поверхности F^{l+1}.

Вопрос об однозначной определенности комплексного подмногообразия $F^l \subset \mathbf{C}^n$ по грассманову образу сводится к задаче нахождения условий, при выполнении которых комплексная сильно 1-параболическая поверхность $F^{l+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ с базой F^l есть конус или цилиндр.

Ненулевые подпространства $T_1^s, T_2^m \subset T_qF^l$ называются *сопряженными* в точке q, если $T_qF^l = T_1^s \oplus T_2^m$, $s + m = l$, и для любых $z \in T_1^s$, $w \in T_2^m$ выполнено условие $\langle A_\nu z, \bar{w}\rangle = 0$, где $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ – эрмитово скалярное произведение в касательном пространстве T_qF^l, A_ν – комплексная вторая квадратичная форма относительно произвольной нормали $\nu \in N_q F^l$, $\bar{w}$ – вектор, комплексно сопряженный к w. Направление $z \in T_q F^l$ называется *асимптотическим*, если $\langle A_\nu z, \bar{z} \rangle = 0$ для произвольной нормали $\nu \in N_q F^l$.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть F^l – комплексное подмногообразие в $\mathbf{C}^n$, в точках которого нет сопряженных подпространств и асимптотических направлений. Тогда комплексная сильно 1-параболическая поверхность $F^{l+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$ с базой F^l есть конус или цилиндр.*

Эквивалентной формулировкой этого результата является

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 комплексное подмногообразие однозначно с точностью до гомотетии и параллельного переноса определяется грассмановым образом.*

Комплексной точечной коразмерностью комплексного подмногообразия в данной точке называется размерность пространства комплексных вторых квадратичных форм в рассматриваемой точке.

Для комплексных подмногообразий с большой комплексной точечной коразмерностью имеет место

Теорема 3. *Если в каждой точке комплексного подмногообразия $F^l \subset \mathbf{C^n}$ комплексная точечная коразмерность $p > l(l-1)/2+1$, то комплексное подмногообразие однозначно с точностью до гомотетии и параллельного переноса определяется грассмановым образом.*

Список литературы

[1] *Борисенко А.А.* Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу // Математические заметки. – 1992 – Т. 51, вып.1. – С. 8-15.

[2] *Борисенко А.А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. М.:Экзамен, 2003. – 671 с.

[3] *Борисенко А.А., Остроумов С.А.* О цилиндричности полных сильно параболических кэлеровых подмногообразий в комплексном эрмитовом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1995. – Т. 2, № 3/4. – С. 284-295.