В.А. Горькавый[1], *Е.Н. Невмержицкая*[1]

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КАК ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ

Abstract. Рассматриваются двумерные линейчатые поверхности в пространствах постоянной кривизны с точки зрения теории псевдосферических конгруэнций. Доказано, что линейчатые поверхности нулевой гауссовой кривизны в сферическом пространстве и только такие линейчатые поверхности представляют собой псевдосферические конгруэнции.

1 Введение.

В статье рассматриваются линейчатые поверхности в пространствах постоянной кривизны с точки зрения теории псевдосферических конгруенций и преобразований Беклунда-Бьянки псевдосферических поверхностей.

Следуя стандартному подходу, *псевдосферической конгруэнцией* в пространстве M_k^n постоянной секционной кривизны k называется регулярное отображение $\varphi : F^2 \mapsto \tilde{F}^2$ двумерных поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в M_k^n, обладающее следующими тремя свойствами (ср. [1],[2]):

C_1) для любой точки P поверхности F^2 геодезическая γ объемлющего пространства M_k^n, соединяющая точку P с ее образом $\varphi(P) = \tilde{P}$, касается поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$; иначе говоря, касательные векторы геодезической γ в точках P и $\tilde{P}$ лежат в касательных плоскостях поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ соответственно: $\dot{\gamma}_P \in T_P F^2$ и $\dot{\gamma}_{\tilde{P}} \in T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$;

C_2) длина отрезка геодезической γ от точки P до точки $\tilde{P}$ является величиной постоянной, $l\,(\gamma) \equiv l_0 > 0$;

C_3) угол между касательными плоскостями поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в точках P и $\tilde{P}$ является величиной постоянной, $\angle(T_p F^2, T_{\tilde{p}} \tilde{F}^2) \equiv \omega_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

2000 Mathematical Subject Classification. 53A07, 53B25.

Key words and phrases. псевдосферические конгруэнции; линейчатые поверхности.

Описанная конструкция соответствует классическому понятию псевдосферической конгруэнции для двумерных поверхностей в трехмерных пространствах постоянной кривизны, которое подробно изучалось в работах Бьянки, Беклунда, Дарбу. Одним из основных результатов классической теории является следующее утверждение: *поверхности в* M_k^3*, связанные псевдосферической конгруэнцией, являются псевдосферическими, т.е. имеют постоянную отрицательную внешнюю кривизну*. Более того, *для каждой заданной псевдосферической поверхности в* M_k^3 *можно построить двупараметрическое семейство различных псевдосферических конгруэнций* [1], [2]. Сформулированные наблюдения позволили создать содержательную теорию преобразований Бьянки-Беклунда псевдосферических поверхностей в M_k^3 как в рамках теории поверхностей, так и с точки зрения аналитической теории интегрируемых систем.

Классическая теория псевдосферических конгруэнций и преобразований Бьянки-Беклунда успешно обобщалась в работах Ю.А. Аминова, К. Тенеблат, Ч.-Л. Тернг, Л.А. Масальцева на случай n-мерных подмногообразий в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны [1], [2]. В настоящее время актуальным является вопрос о построении аналогичной теории для подмногообразий в пространствах постоянной кривизны при произвольных значениях размерностей, например – для двумерных поверхностей в n-мерных пространствах постоянной кривизны при $n \geq 4$. Первые результаты в этом направлении были получены в работах Ю.А. Аминова и А. Сыма [3], а затем эти вопросы изучались и в работах В.А. Горькавого [4-6]. В частности, было установлено, что если пара двумерных поверхностей в n-мерном пространстве постоянной кривизны M_k^n, $n \geq 4$, связаны псевдосферической конруэнцией, и при этом хотя бы одна из поверхностей является картановой, т.е. несет однозначно определенную сеть сопряженных линий, то тогда обе поверхности являются псевдосферическими. С другой стороны, в отличии от классического случая, уже не любая псевдосферическая поверхность в M_k^n, $n \geq 4$, допускает псевдосферическую конгруэнцию.

Отметим, что в классической теории имеется более общее понятие *геодезической конгруэнции*, которая определяется как отображение поверхностей, удовлетворяющее только требованию C_1 – условию двойного касания [2]. Кроме того, понятие геодезической конгруэнции часто определялось не как отображение, а как семейство геодезических линий в пространстве M_k^n, а поверхности F^2 и $\tilde{F}^2$ рассматривались как *фокальные поверхности* конгруэнции. С этой точки зрения естественно рассматривать линейчатые поверхности в M_k^n.

Действительно, рассмотрим двумерную ориентированную линейчатую поверхность F^2 в пространстве M_k^n. Зададим на поверхности F^2 некоторую функцию l и рассмотрим отображение $\Phi_l\colon F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на заданное расстояние l. Легко видеть, что такое отображение удовлетворяет требованию двойного касания. Можно ли добиться выполнения и других требований – о постоянстве расстояния (C_2) и угла (C_3)? Иначе говоря, какие линейчатые поверхности обладают следующим свойством: если каждую точку поверхности сдвинуть вдоль соответствующей образующей на постоянное расстояние l_0, то касательная плоскость поверхности повернется на постоянный угол ω_0?

В нижеследующих разделах мы отдельно рассматриваем двумерные линейчатые поверхности в евклидовом пространстве, в сфере и в пространстве Лобачевского. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1) в евклидовом пространстве E^n и в пространстве Лобачевского H^n линейчатые поверхности не могут представлять собой псевдосферические конгруэнции (Теоремы 1, 3);

2) в сферическом пространстве S_R^n линейчатые поверхности с нулевой гауссовой кривизной, и только такие линейчатые поверхности, могут представлять собой псевдосферическую конгруэнцию, при этом параметры l_0 и ω_0 связаны между собой соотношением $\cos^2 \frac{l_0}{R} = \cos^2 \omega_0$ (Теорема 2).

Заметим, что внутренне плоские поверхности в S_R^n являются псевдосферическими, их внешняя кривизна постоянна и отрицательна.

Если бы в требовании C_3 из определения псевдосферической конгруэнции мы допустили возможность того, что ω_0 может быть равной нулю, то тогда в пространствах E^n, H^n и S^n дополнительно выделились бы линейчатые поверхности с нулевой внешней кривизной, у которых касательная плоскость стационарна вдоль образующих.

Поскольку картановы поверхности в M_k^n, $n \geq 4$, не являются линейчатыми, доказанные утверждения можно рассматривать как дополнение результатов о картановых поверхностях из [4],[6].

2 Линейчатые поверхности в евклидовом пространстве

Рассмотрим линейчатую поверхность F^2 в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Радиус-вектор линейчатой поверхности можно представить локально в виде

$$r(u,v) = r_0(v) + ua(v), \tag{1}$$

здесь вектор-функция $r_0(v)$ представляет собой радиус-вектор направляющей базовой кривой, а $a(v)$ – единичное направляющее векторное поле прямолинейных образующих линейчатой поверхности F^2. Не уменьшая общности будем предполагать, что базовая кривая на поверхности F^2 ортогональна прямолинейным образующим:

$$\langle r_0', a\rangle = 0. \tag{2}$$

Также будем предполагать, не уменьшая общности, что параметр v на базовой кривой выбран натуральным, т.е. $|r_0'| \equiv 1$. В этом случае метрика на F^2 будет иметь вид $ds^2 = du^2 + g_{22}dv^2$, система координат u, v является полугеодезической, координата u является натуральным параметром на каждой из прямолинейных образующих $v = const$.

Легко проверить, что имеет место следующее

Утверждение 1. *Линейчатая поверхность F^2 в E^n имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда эта поверхность внутренне плоская, т.е. $K \equiv 0$. Линейчатая поверхность F^2 в E^n с радиус-вектором $r(u,v) = r_0(v) + ua(v)$, удовлетворяющим условиям $|a| = |r_0'| \equiv 1$ и $\langle r_0', a\rangle = 0$, имеет нулевую гауссову кривизну тогда и только тогда, когда $[r_0', a'] = 0$.*

Может ли линейчатая поверхность F^2 представлять собой псевдосферическую конгруэнцию? Для ответа на этот вопрос, зафиксируем положительную константу l_0 и и рассмотрим отображение $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку прямолинейной образующей на заданное расстояние l_0. Отображение Φ_{l_0} представляется радиус-вектором

$$\tilde{r} = r + l_0 a = r_0 + (u + l_0)a. \tag{3}$$

Рассматриваемое отображение удовлетворяет требованиям C_1, C_2 из определения псевдосферической конгруэнции. Проверим возможность выполнения требования C_3. Для этого возьмем произвольную точку P на F^2 и вычислим угол ω между касательными плоскостями поверхности F^2 в точках P и $\tilde{P} = \Phi_{l_0}(P)$.

Напомним, что для пары двумерных подпространств в n-мерном евклидовом пространстве выделяются две угловые величины, характеризующие взаимное расположение подпространств. В случае, когда подпространства пересекаются по прямой линии, один из углов равен нулю, а второй угол определяется как угол между прямыми в подпространствах, ортогональными к прямой пересечения. Именно такой случай имеет место в рассматриваемой ситуации: касательные плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ имеют общую прямую – прямолинейную образующую поверхности F^2, проходящую через точки P и $\tilde{P}$.

Касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на векторы

$$r_u = (r_0(v) + ua(v))'_u = a, \tag{4}$$

$$r_v = r'_0 + ua'. \tag{5}$$

Касательная плоскость $T_{\tilde{P}} F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = r_u + (l_0 a)_u = a, \tag{6}$$

$$\tilde{r}_v = r_v + (l_0 a)_v = r'_0 + ua' + l_0 a' = r'_0 + a'(u + l_0). \tag{7}$$

Отметим, что a ортогонален r_v и $\tilde{r}_v$ благодаря сделанному выбору координат.

Прямая $P\tilde{P}$ с направляющим вектором a принадлежит и $T_P F^2$, и $T_{\tilde{P}} F^2$. Поэтому угол ω между $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ определяется углом между векторами $z \in T_P F^2$ и $\tilde{z} \in T_{\tilde{P}} F^2$, ортогональными к a: угол ω будет постоянным, т.е. $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда, когда выполнено равенство

$$\langle z, \tilde{z} \rangle^2 = |z|^2 \, |\tilde{z}|^2 \cos^2 \omega_0. \tag{8}$$

В качестве z и $\tilde{z}$ мы можем взять r_v и $\tilde{r}_v$ соответственно. Тогда, принимая во внимание (5) и (7), условие (8) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}(1 + A(2u + l_0) + u(u + l_0)B)^2 = \\ = (1 + 2uA + u^2 B)(1 + 2Au + 2l_0 A + Bu^2 + 2Bl_0 + Bl_0^2) \cos^2 \omega_0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $A(v) = \langle r'_0, a' \rangle$, $B(v) = \langle a', a' \rangle$. Приводя подобные слагаемые и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях u в левой и правой частях (9), получаем систему из пяти соотношений:

$$1 + 2Al_0 + A^2 l_0^2 = (1 + 2Al_0 + Bl_0^2)\cos^2\omega_0, \quad (10)$$

$$4A + 4A^2 l_0 + 2Bl_0 + 2ABl_0^2 = (4A + 4A^2 l_0 + 2Bl_0 + 2ABl_0^2)\cos^2\omega_0, \quad (11)$$

$$4A^2 + 2B + 6ABl_0 + B^2 l_0^2 = (4A^2 + 2B + 6ABl_0 + B^2 l_0^2)\cos^2\omega_0, \quad (12)$$

$$4AB + 2B^2 l_0 = (4AB + 2B^2 l_0)\cos^2\omega_0, \quad (13)$$

$$B^2 = B^2\cos^2\omega_0. \quad (14)$$

Если $\cos^2\omega_0 \neq 1$, то $B = 0$ в виду (14). Тогда (12) примет вид $4A^2 = 4A^2\cos^2\omega_0$, откуда вытекает, что $A = 0$. Как следствие, (10) запишется в виде $1 = \cos^2\omega_0$, что противоречит условию $\omega_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Отметим, что если $\cos^2\omega_0 = 1$, то все соотношения, за исключением (10), будут выполнены, а (10) перепишется в виде $A^2 = B$, т.е. $\langle r_0', a'\rangle^2 = \langle a', a'\rangle$. Легко проверить, что данное равенство будет выполнено тогда и только тогда, когда $[r_0', a'] = 0$. А это условие в точности характеризует линейчатые поверхности в E^n, гауссова кривизна которых равна нулю. Таким образом, доказана

Утверждение 2. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в E^n. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет нулевую гауссову кривизну.*

Имеет место и обратное утверждение.

Утверждение 3. *Пусть F^2 – линейчатая поверхность с нулевой гауссовой кривизной в E^n. Касательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.*

Действительно, рассмотрим равенство (9), или эквивалентную ему систему (10)-(14), с произвольным переменным l_0. Если предположить, что гауссова кривизна равна нулю, то $B = A^2$ – подставляя в систему (10)-(14), получим, что $\cos^2\omega_0$ обязан быть равным 1, т.е. $\omega_0 = 0$, что и требовалось доказать. В качестве простейших примеров, иллюстрирующих полученный результат, можно рассмотреть цилиндрические или конические поверхности в E^n – касательные плоскости таких линейчатых поверхностей переносятся параллельно вдоль прямолинейных образующих.

Поскольку в определении псевдосферической конгруэнции параметр ω_0 не может быть нулевым, из Утверждения 2 вытекает следующее следствие.

Теорема 1. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в E^n. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Тогда отображение Φ_{l_0} не может задавать псевдосферическую конгруэнцию.*

Таким образом, никакая линейчатая поверхность в E^n не может представлять собой псевдосферическую конгруэнцию.

3 Линейчатые поверхности в сферическом пространстве

Рассмотрим ориентированную линейчатую поверхность F^2 в сферическом пространстве S^n_R кривизны $k = \frac{1}{R^2}$. Пространство S^n_R реализуем в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} как гиперсферу радиуса R с центром в начале координат. Поверхность $F^2 \subset S^n$ также будем рассматривать как поверхность в E^{n+1}. Тогда ее радиус-вектор можно представить в виде

$$r(u, v) = (a(v)\cos(u) + b(v)\sin(u))R, \tag{15}$$

где $a(v)$ и $b(v)$ – это вектор-функции, удовлетворяющие условиям: $|a| = 1$, $|b| = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$. При каждом фиксированном v векторы a и b определяют некоторую плоскость E^2_v в E^{n+1}, проходящую через начало координат поля – это подпространство пересекает сферу S^n_R по большой окружности. Изменяя параметр v, получаем однопараметрическое семейство больших окружностей, заметающих линейчатую поверхность в S^n_R. Заметим, что "подворачивая" ортонормированный базис a, b в каждом E^2_v, можно добиться того, что

$$\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0. \tag{16}$$

В дальнейшем будем считать, что эти дополнительные условия выполнены.

Благодаря сделанным предположениям, метрика поверхности F^2 будет иметь вид $ds^2 = R^2(du^2 + g_{22}dv^2)$; система координат (Ru, v)

является полугеодезической, координата Ru является натуральным параметром на каждой из геодезических $v = const$. Учитывая вид метрики, не составляет труда проверить, что имеет место

Утверждение 4. *Линейчатая поверхность F^2 в S^n_R имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда либо $K \equiv \frac{1}{R^2}$, либо $K \equiv 0$. Линейчатая поверхность F^2 в S^n_R с радиус-вектором $r(u,v) = (a(v)\cos(u)+b(v)\sin(u))R$, удовлетворяющим условиям $|a| = |b| = 1$, $\langle a,b\rangle = 0$ и $\langle a',b\rangle = \langle b',a\rangle = 0$ имеет гауссову кривизну $K \equiv \frac{1}{R^2}$ тогда и только тогда, когда $[a',b'] = 0$, $|a'|+|b'| \neq 0$; при тех же условиях поверхность имеет нулевую гауссову кривизну $K \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $|a'| = |b'|$, $\langle a',b'\rangle = 0$.*

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_l : F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей линейчатой поверхности F^2 на заданное расстояние $l(u,v)$. Это отображение представляется в следующем виде:

$$\tilde{r}(u,v) = (a(v)\cos(u+\alpha) + b(v)\sin(u+\alpha))R, \tag{17}$$

где $\alpha = \frac{l}{R}$. Может ли отображение Φ_l представлять собой псевдосферическую конгруэнцию? Требование C_1 очевидно выполнено. Для выполнения C_2 следует положить $l(u,v) \equiv l_0 > 0$, т.е. $\alpha(u,v) \equiv \alpha_0$. Остается проверить, в каких случаях будет выполняться и требование C_3.

Отметим сразу, что если $\alpha_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то каждая точка $P \in F^2$ переходит сама в себя, $\tilde{P} = P$, поэтому требование C_3 будет очевидно выполненным, но при $\omega_0 = 0$. Аналогично, если $\alpha_0 = 2\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, то каждая точка P переходит в диаметрально противоположную точку $\tilde{P}$ на сфере, а значит $\omega_0 = 0$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\alpha_0 \neq \pi k$.

Возьмем произвольную точку $P \in F^2$ и соответствующую ей точку $\tilde{P} \in F^2$. Рассмотрим касательные плоскости T_PF^2 и $T_{\tilde{P}}F^2$. Перенесем T_PF^2 параллельно вдоль геодезической γ на сфере S^n, соединяющей точки P и $\tilde{P}$ и являющейся образующей линейчатой поверхности F^2; как результат, получим двумерную плоскость $\widehat{T_PF^2}$ в $T_{\tilde{P}}S^n$. Поскольку, в силу требования двойного касания C_1, единичные касательные векторы большой окружности γ в точках P и $\tilde{P}$ принадлежат T_PF^2 и $T_{\tilde{P}}F^2$ соответственно, а при параллельном переносе $\dot{\gamma}_P$ переходит в $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, то плоскости $\widehat{T_PF^2}$ и $T_{\tilde{P}}F^2$ в $T_{\tilde{P}}S^n$ пересекаются по прямой η с направляющим вектором $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$.

Вычислим угол ω между $\widehat{T_P F^2}$ и $T_{\tilde{P}}F^2$ и проанализируем когда этот угол будет постоянным и равным некоторому $\omega_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Для этого рассмотрим прямые $\hat{\zeta} \in \widehat{T_P F^2}$ и $\tilde{\zeta} \in T_{\tilde{P}}F^2$, ортогональные к прямой η – угол между $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ как раз и будет равен ω. Обозначим $\hat{z}$ и $\tilde{z}$ направляющие векторы прямых $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$. Поскольку параллельный перенос вдоль большой окружности γ на сфере S^n порождается ортогональным преобразованием в E^{n+1}, сводящимся к повороту в плоскости Π_γ окружности γ и к тождественному отображению в ортогональном дополнении к Π_γ, то легко видеть, что при таком параллельном переносе вектор $\hat{z}$ переносится из точки $\tilde{P}$ в точку P параллельно как вектор в E^{n+1}. Поэтому для вычисления угла ω вместо $\hat{z}$ мы можем взять вектор $z \in T_P F^2$, ортогональный к $\dot{\gamma}_P$.

Касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на векторы

$$r_u = (-a \sin u + b \cos u)R, \tag{18}$$

$$r_v = (a' \cos u + b' \sin u)R. \tag{19}$$

Учитывая ортонормированность a, b, а также равенство (16), видим, что r_v ортогонален к $r_u = R\dot{\gamma}_P$, поэтому можем положить $z = r_v$.

Аналогично, касательная плоскость $T_{\tilde{P}}F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = (-a \sin(u + \alpha) + b \cos(u + \alpha))R, \tag{20}$$

$$\tilde{r}_v = (a' \cos(u + \alpha) + b' \sin(u + \alpha))R. \tag{21}$$

Поскольку $\tilde{r}_v$ ортогонален к $\tilde{r}_u = R\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, можем положить $\tilde{z} = \tilde{r}_v$.

Угол поворота ω будет постоянным, $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\langle z, \tilde{z}\rangle^2 - |z|^2\,|\tilde{z}|^2 \cos^2\omega_0 = 0$. Подставляя выражения для z, $\tilde{z}$ с учетом (19) и (21), получим равенство

$$P_0 + P_1 \cos 2u + P_2 \sin 2u + P_3 \cos 4u + P_4 \sin 4u = 0,$$

где P_i зависят от v, α_0 и ω_0. Это равенство должно выполняться тождественно, поэтому оно распадается в систему из пяти соотношений:

$$\begin{aligned} P_0 = \frac{1}{8}\sin^2\omega_0\left(X^2 + Z^2\right)\left(2\cos^2\alpha + 1\right) + \frac{1}{2}Y^2\left(1 - \cos^2\omega_0 \cos 2\alpha\right) + \\ + \frac{1}{4}XZ\left(2\cos^2\alpha_0 + 2\cos^2\omega_0\cos^2\alpha_0 - 3\cos^2\omega_0 - 1\right) = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\cos\alpha_0 \sin^2\omega_0 (X + Z)\left((X - Z)\cos\alpha_0 + 2Y\sin\alpha\right) = 0, \tag{23}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cos\alpha_0 \sin^2\omega_0 (X + Z)\left(-(X - Z)\sin\alpha_0 + 2Y\cos\alpha\right) = 0, \tag{24}$$

$$P_3 = \frac{1}{8}\sin^2\omega_0\left(((X-Z)^2-4Y^2)\cos 2\alpha_0 + 4(X-Z)Y\sin 2\alpha_0\right) = 0, \quad (25)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}\sin^2\omega_0\left(-((X-Z)^2-4Y^2)\sin 2\alpha_0 + 4(X-Z)Y\cos 2\alpha_0\right) = 0, \quad (26)$$

где $X = |a'|^2$, $Y = \langle a', b'\rangle$ и $Z = |b'|^2$. Из (25)-(26) следует, что либо $\omega_0 = 0$, либо $X = Z$, $Y = 0$. В первом случае (23)-(24) будут выполнены автоматически, а (22) сведется к равенству $(XZ - Y^2)\sin^2\alpha_0 = 0$; поскольку предполагается, что $\alpha_0 \neq \pi k$, получаем $XZ - Y^2 = 0$, т.е. $|a'|^2|b'|^2 - \langle a', b'\rangle^2 = 0$ – это в точности характеризует линейчатые поверхности в S^n с гауссовой кривизной $K \equiv \frac{1}{R^2}$, т.е. с нулевой внешней кривизной. Во втором случае, при $X = Z$, $Y = 0$, равенства (23)-(24) будут выполнены автоматически, а (22) сведется к

$$\cos^2\alpha_0 - \cos^2\omega_0 = 0. \quad (27)$$

Отметим, что условия $X = Z$, $Y = 0$, т.е. $|a'| = |b'|$, $\langle a', b'\rangle = 0$, характеризуют линейчатые поверхности с нулевой гауссовой кривизной в S^n. Таким образом, доказано

Утверждение 5. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в S^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 \neq R\pi k$. Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда либо $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет гауссову кривизну $K \equiv \frac{1}{R^2}$, либо $\cos^2\omega_0 = \cos^2\frac{l_0}{R}$, а поверхность F^2 имеет нулевую гауссову кривизну.*

Имеет место и обратное утверждение.

Утверждение 6.

1. Пусть F^2 – линейчатая поверхность с нулевой гауссовой кривизной в S^n_R. Пусть $\Phi_l : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние l_0. Тогда касательная плоскость поверхности F^2 при таком отображении поворачивается на постоянный угол ω_0 такой, что $\cos^2\omega_0 = \cos^2\frac{l_0}{R}$.

2. Пусть F^2 – линейчатая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv \frac{1}{R^2}$ в S^n_R. Rасательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.

В доказательстве нуждается лишь вторая часть сформулированного результата. Рассмотрим систему (22)-(26) с произвольным переменным α_0. Поскольку $K \equiv \frac{1}{R^2}$ по предположению, то $[a', b'] = 0$ в силу Утверждения 4 – это условие можно переписать в виде $XZ - Y^2 = 0$. Если $\omega_0 \neq 0$, то тогда из (25)-(26) получаем, что $X = Z$, $Y = 0$. Вместе с предположением $XZ - Y^2 = 0$ это приводит к тому, что $X = Z = Y = 0$, т.е. $|a'| = |b'| = 0$, что противоречит регулярности поверхности F^2.

Подводя итог, можем сделать следующее заключение, вытекающее из Утверждения 5.

Теорема 2. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в S^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние l_0. Отображение Φ_{l_0} задает псевдосферическую конгруэнцию с параметрами l_0, ω_0 тогда и только тогда, когда поверхность F^2 имеет нулевую гауссову кривизну и при этом $\cos^2 \omega_0 = \cos^2 \frac{l_0}{R}$.*

Таким образом, линейчатая поверхность в сферическом пространстве S^n_R представляет собой псевдосферическую конгруэнцию тогда и только тогда, когда эта поверхность является внутренне плоской, т.е. имеет постоянную отрицательную внешнюю кривизну $K_{ext} = -\frac{1}{R^2}$.

В качестве простейшего примера внутренне плоской линейчатой поверхности в сфере можно рассмотреть стандартный тор Клиффорда в S^3. Содержательный обзор результатов о внутренне плоских поверхностях в сфере можно найти в монографии [7].

4 Линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского

Рассмотрим, наконец, ориентированные двумерные линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского H^n_R кривизны $k = -\frac{1}{R^2}$. Пространство H^n_R реализуем стандартным образом как гиперповерхность в пространстве Минковского M^{n+1}, заданную в декартовых координатах в M^{n+1} уравнением $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + ... + (x^n)^2 = -R^2$, $x^0 > 0$.

Радиус-вектор произвольной линейчатой поверхности F^2 в $H^n_R \subset M^{n+1}$ можно представить в виде

$$r(u, v) = (a(v) \operatorname{ch} u + b(v) \operatorname{sh} u)R, \tag{28}$$

где вектор-функции $a(v)$ и $b(v)$ удовлетворяют условиям $|a|^2 = -1$, $|b|^2 = 1$, $\langle a, b \rangle = 0$. При каждом фиксированном v векторы a и b

определяют некоторую плоскость M_v^2 в M^{n+1}, проходящую через начало координат; это подпространство пересекает гиперповерхность $H_R^n \subset M^{n+1}$ по геодезической. Изменяя параметр v, получаем однопараметрическое семейство геодезических, заметающих линейчатую поверхность в H_R^n. Заметим, что "подворачивая"базис a, b в каждом M_v^2, можно добиться того, что

$$\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0. \tag{29}$$

Будем предполагать, что эти дополнительные условия выполнены.

Благодаря сделанным предположениям, метрика поверхности F^2 будет иметь вид $ds^2 = R^2(du^2 + g_{22}dv^2)$; система координат (Ru, v) является полугеодезической, координата Ru является натуральным параметром на каждой из геодезических $v = const$. Учитывая вид метрики, не составляет труда проверить, что имеет место

Утверждение 7. *Линейчатая поверхность F^2 в H_R^n имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда $K \equiv -\frac{1}{R^2}$. Линейчатая поверхность F^2 в H_R^n с радиус-вектором $r(u,v) = (a(v)\operatorname{ch} u + b(v)\operatorname{sh} u)R$, удовлетворяющим условиям $|a|^2 = -|b|^2 = -1$, $\langle a, b\rangle = 0$ и $\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0$ имеет гауссову кривизну $K \equiv -\frac{1}{R^2}$ тогда и только тогда, когда $|\,[a', b']\,| = 0$.*

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_l : F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей линейчатой поверхности F^2 на заданное расстояние $l(u,v)$. Это отображение представляется в следующем виде:

$$\tilde r(u,v) = (a(v)\operatorname{ch}(u+\alpha) + b(v)\operatorname{sh}(u+\alpha))R, \tag{30}$$

где $\alpha = \frac{l}{R}$. Выясним, для каких линейчатых поверхностей выполняются условия C_1-C_3 из определения псевдосферической конгруэнции. Очевидно, что условие C_1 выполнено автоматически, а требование C_2 сводится к постоянству функции $\alpha(u,v)$, поэтому положим $\alpha(u,v) \equiv \alpha_0$.

Проанализируем возможность выполнения требования C_3. Возьмем произвольную точку $P \in F^2$ и соответствующую точку $\tilde P \in F^2$. Рассмотрим касательные плоскости T_PF^2 и $T_{\tilde P}F^2$. Перенесем T_PF^2 параллельно вдоль геодезической γ на H^n, соединяющей точки P и $\tilde P$ и являющейся образующей линейчатой поверхности F^2; как результат, получим двумерную плоскость $\widehat{T_PF^2}$ в $T_{\tilde P}H^n$. Поскольку, в силу требования двойного касания C_1, единичные касательные векторы большой окружности γ в точках P и $\tilde{P}$ принадлежат T_PF^2 и $T_{\tilde{P}}F^2$ соответственно, а при параллельном переносе $\dot{\gamma}_P$ переходит в $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, то плоскости $\widehat{T_PF^2}$ и $T_{\tilde{P}}F^2$ в $T_{\tilde{P}}S^n$ пересекаются по прямой η с направляющим вектором $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$.

Вычислим угол ω между $\widehat{T_PF^2}$ и $T_{\tilde{P}}F^2$ и проанализируем когда этот угол будет постоянным и равным некоторому $\omega_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Для этого рассмотрим прямые $\hat{\zeta} \in \widehat{T_PF^2}$ и $\tilde{\zeta} \in T_{\tilde{P}}F^2$, ортогональные к прямой η; угол между $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ как раз и будет равен ω. Обозначим $\hat{z}$ и $\tilde{z}$ направляющие векторы прямых $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$. Поскольку параллельный перенос вдоль геодезической γ на гиперповерхности $H^n \subset M^{n+1}$ порождается псевдоортогональным преобразованием в M^{n+1}, сводящимся к псевдоортогональному преообразованию ("повороту") в плоскости Π_γ геодезической γ и к тождественному отображению в ортогональном дополнении к Π_γ, то легко видеть, что при таком параллельном переносе вектор $\hat{z}$ переносится из точки $\tilde{P}$ в точку P параллельно как вектор в M^{n+1}. Поэтому для вычисления угла ω вместо $\hat{z}$ мы можем взять вектор $z \in T_PF^2$, ортогональный к $\dot{\gamma}_P$.

Касательная плоскость T_PF^2 натянута на векторы

$$r_u = (a \operatorname{sh} u + b \operatorname{ch} u)R, \tag{31}$$

$$r_v = (a' \operatorname{ch} u + b' \operatorname{sh} u)R. \tag{32}$$

Учитывая ортонормированность вектор-функций a, b и равенства (29), легко видеть, что r_v ортогонален к $r_u = R\dot{\gamma}_P$, поэтому можем положить $z = r_v$.

Аналогично, касательная плоскость $T_{\tilde{P}}F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = (a \operatorname{sh}(u+\alpha) + b \operatorname{ch}(u+\alpha))R, \tag{33}$$

$$\tilde{r}_v = (a' \operatorname{ch}(u+\alpha) + b' \operatorname{sh}(u+\alpha))R. \tag{34}$$

Поскольку $\tilde{r}_v$ ортогонален к $\tilde{r}_u = R\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, можем положить $\tilde{z} = \tilde{r}_v$.

Угол поворота ω будет постоянным, т.е. $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\langle z, \tilde{z}\rangle^2 = |z|^2\,|\tilde{z}|^2 \cos^2\omega_0$. Подставляя выражения для z, $\tilde{z}$ с учетом (32) и (34), получим равенство

$$\begin{aligned} \Psi = {} & (X \operatorname{ch} u \operatorname{ch}(u+\alpha) + Y\,(\operatorname{sh}(2u+\alpha)) + Z \operatorname{sh} u \operatorname{sh}(u+\alpha))^2 - \\ & - \big(X \operatorname{ch}^2 u + 2Y \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + Z \operatorname{sh}^2 u\big) \cdot \big(X \operatorname{ch}^2(u+\alpha) + \\ & + 2Y \operatorname{ch}(u+\alpha) \operatorname{sh}(u+\alpha) + Z \operatorname{sh}^2(u+\alpha)\big) \cos^2\omega_0 = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где снова использованы обозначения $X = |a'|^2$, $Y = \langle a', b' \rangle$ и $Z = |b'|^2$. Данное равенство должно выполняться тождественно: по аналогии со сферическим случаем, можем расписать соотношение $\Psi = 0$, например, по степеням e^u, приравнять нулю коэффициенты, зависящие от v, α_0, ω_0, и затем проанализировать получившиеся уравнения.

Мы применим иной метод. А именно, рассмотрим асимптотику выражения Ψ при $u \to \pm\infty$: вычисляя пределы $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\Psi}{e^{4u}}$, $\lim\limits_{u\to-\infty} \frac{\Psi}{e^{-4u}}$, которые должны быть равны нулю ввиду (35), получаем:

$$e^{2\alpha_0}(2Y + X + Z)\sin^2\omega_0 = 0, \tag{36}$$

$$e^{-2\alpha_0}(-2Y + X + Z)\sin^2\omega_0 = 0. \tag{37}$$

Как следствие, если (35) выполнено, то тогда либо $\omega_0 = 0$, либо $X = -Z$, $Y = 0$. В первом случае, подставляя $\omega_0 = 0$ в (35), получаем

$$(XZ - Y^2)(\operatorname{ch} 2\alpha - 1) = 0.$$

Условие $XZ - Y^2 = 0$, т.е. $|a'|^2|b'|^2 - \langle a', b' \rangle^2 = 0$, эквивалентно условию $|[a', b']| = 0$, характеризующему линейчатые поверхности в H^n_R с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$, т.е. с нулевой внешней кривизной.

Во втором варианте, подставляя $Z = -X$, $Y = 0$ в (35), получаем

$$X^2\left(\operatorname{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\omega_0\right) = 0.$$

Поскольку выражение в скобках является положительным при $\alpha_0 > 0$, мы вынуждены положить $X = 0$, следовательно и $Z = 0$, что вместе с $Y = 0$ будет противоречить регулярности поверхности F^2.

Таким образом, доказано

Утверждение 8. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в H^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 \neq 0$. Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет гауссову кривизну $K \equiv -\frac{1}{R^2}$.*

Имеет место и обратное утверждение.

Утверждения 9. *Пусть F^2 – линейчатая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$ в H^n_R. Касательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.*

Для доказательства, рассмотрим равенство (35) при произвольном переменном α_0. Если воспользоваться условием $[a', b'] = 0$, характеризующим линейчатые поверхности в H^n_R с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$, и подставить $Y^2 = XZ$ в (35), получаем равенство, которое будет выполнено либо при $\omega_0 = 0$, либо при $Z = -X$, $XZ = 0$. Второй вариант приводит к $X = Z = 0$, следовательно и $Y = 0$, что противоречит регулярности поверхности F^2. Следовательно, $\omega_0 = 0$, что и требовалось доказать.

Подводя итог, можем сделать следующее заключение, вытекающее из Утверждения 8.

Теорема 3. *Пусть F^2 – регулярная линейчатая поверхность в H^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ – регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Тогда отображение Φ_{l_0} не может задавать псевдосферическую конгруэнцию.*

Таким образом, никакая линейчатая поверхность в H^n_R не может представлять собой псевдосферическую конгруэнцию.

Замечание 1. Как было отмечено Ю.А. Аминовым в ходе обсуждения данной статьи, полученные результаты о линейчатых поверхностях остаются верными, если в определении псевдосферической конгруэнции заменить требования о постоянстве расстояния $l \equiv l_0$ и угла $\omega \equiv const$ более слабым требованием их постоянства вдоль каждой образующей линейчатой поверхности, т.е. условиями $l = l(v)$ и $\omega = \omega(v)$.

Замечание 2. Также Ю.А. Аминовым был указан более простой путь доказательства Теоремы 1, основанный на следующем наблюдении: когда точка P на линейчатой поверхности $F^2 \subset E^3$ убегает вдоль соответствующей прямолинейной образующей на бесконечность, то касательная плоскость $T_P F^2$ будет стремиться к некоторому фиксированному предельному положению, [8]. Это делает невозможным последовательное движение точки P с шагом l_0 вдоль образующей, при котором касательная плоскость $T_P F^2$ поворачивалась бы на угол $\omega_0 \in (0, \pi/2]$, поскольку при таком движении касательная плоскость не могла бы принять никакого предельного положения.

Литература

[1] Аминов, Ю.А.: Геометрия подмногообразий. Київ, "Наукова думка", 2002, 468 стр.

[2] Борисенко, А.А.: Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. М., "Экзамен", 2003, 672 стр.

[3] Tenenblat, K.: Transformations of manifolds and applications to differential equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, V.93. Longman, 2000б 210 p.

[4] Aminov, Yu., Sym, A.: On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4. Mathematical Physics, Analysis, Geometry **3**(1), 75-89 (2000)

[5] Gorkavyy, V.: On pseudo-spherical congruencies in E^4. Математическая физика, анализ, геометрия **10** (4), 498-504 (2003)

[6] Горькавый, В.А.: Конгруенции Бьянки двумерных поверхностей в E^4. Математический сборник **196** (10), 79-102 (2005)

[7] Горькавый, В.А.: О псевдосферических конгруэнциях в пространствах постоянной кривизны. Доповіді НАН України **6**, 13-18 (2008)

[8] Рашевский, П.К.: Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956, 420 стр.

[1] *ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины (Харьков, Украина)*, `gorkaviy@ilt.kharkov.ua`