Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 514.752.2, 517.977.52

Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной

А. А. Борисенко, К. Д. Драч

Для вложенных замкнутых кривых с кривизной, ограниченной снизу, мы доказываем изопериметрическое неравенство, оценивающее минимальную ограничиваемую такими кривыми площадь при фиксированном периметре.

Библиография: 2 названия.

1. Введение

Известно классическое изопериметрическое неравенство, равносильное тому, что среди всех замкнутых спрямляемых кривых постоянной длины L, ограничивающих область на плоскости, наибольшую площадь будет ограничивать окружность длины L и радиуса $\frac{L}{2\pi}$. При этом понятно, что наименьшая площадь будет равна 0.

Напомним, что локально выпуклая кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ называется *λ-выпуклой*, $\lambda > 0$, если в каждой точке $P \in \gamma$ существует окружность радиуса $\frac{1}{\lambda}$ такая, что в окрестности P кривая γ лежит со стороны выпуклости этой окружности.

Для регулярной класса $C^k, k \geqslant 2$ кривой γ ее λ-выпуклость равносильна тому, что кривизна кривой $k \geqslant \lambda > 0$.

Будем теперь рассматривать не произвольные кривые постоянной длины, а класс замкнутых вложенных λ-выпуклых кривых γ, длины которых равны $L \leqslant \frac{2\pi}{\lambda}$. Неравенство с необходимостью следует из λ-выпуклости.

Очевидно (и это следует из изопериметрического неравенства), что среди таких кривых наибольшую площадь будет ограничивать все та же окружность длины L и кривизны $\frac{2\pi}{L} \geqslant \lambda$. Но оказывается, что в таком классе кривых достигается ненулевой минимум ограничиваемой площади.

Будем называть *правильным криволинейным двуугольником* или *луночкой* выпуклую кривую γ_0 длины $L \leqslant \frac{2\pi}{\lambda}$, составленную из двух равных дуг окружности радиуса $\frac{1}{\lambda}$.

Тогда, справедливо следующее изопериметрическое неравенство.

Второй автор частично поддержан фондом им. Н. И. Ахиезера, 2011

© А. А. Борисенко, К. Д. Драч, 1966

Теорема 1. *Пусть $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ – замкнутая вложенная λ-выпуклая кривая. Пусть L и S – длина кривой и площадь области, ею ограниченной. Тогда*

$$S \geqslant \frac{L}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\sin\left(\frac{L\lambda}{2}\right), \tag{1.1}$$

причем равенство достигается только для луночки γ_0.

2. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности можем считать $\lambda = 1$. Если γ – локально выпуклая кусочно C^2-гладкая кривая, то ее кривизна в гладких точках $k \geqslant 1$. В негладких точках $P_i \in \gamma$ существуют $\overline{\lim}\, k(P) \geqslant 1$ и $\underline{\lim}\, k(P) \geqslant 1$ при $P \to P_i$, в том числе и бесконечные.

Как известно, положительность кривизны вложенной кривой γ влечет ее строгую выпуклость. Значит, γ можно однозначно задать опорной функцией $x(t) = \langle \gamma(t), n(t) \rangle$, $t \in [0; 2\pi]$ равной расстоянию от начала координат (точки O) до опорной прямой к γ в точке с единичной внешней нормалью $n(t)$, где t – угол между $n(t)$ и положительным направлением оси Ox (тут $\gamma(t)$ – радиус-вектор кривой, проведенный в соответствующую этой нормали точку). Заметим, что при наших ограничениях на γ, ее опорная функция x является $C^{1,1}$-гладкой 2π-периодической функцией.

Обозначим через $u(t) = \frac{1}{k(t)}$ – радиус кривизны кривой в точке $\gamma(t)$. Тогда, в силу того, что $k \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \tag{2.1}$$

Заметим, что значение $u = 0$ соответствует точкам кривой, в которой кривизна равна бесконечности. Существование таких точек допускается условием теоремы.

Для опорной функции известно, что почти для всех $t \in [0; 2\pi]$

$$\ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \tag{2.2}$$

Используя опорную функцию и радиус кривизны, выпишем выражения для длины L кривой и площади S, которую она ограничивает.

$$L = \int_0^{2\pi} ds(t) = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{dt} dt = \int_0^{2\pi} u(t) dt \tag{2.3}$$

(где под ds понимается элемент длины дуги кривой).

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t) ds(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t)\frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t)u(t) dt \tag{2.4}$$

Для доказательства неравенства (1.1) заметим, что площадь, ограничиваемая криволинейным двуугольником γ_0 длины L_{γ_0} как раз равна

$$S_{\gamma_0} = \frac{L_{\gamma_0}}{2} - \sin\left(\frac{L_{\gamma_0}}{2}\right) \tag{2.5}$$

А значит, в силу (2.5), утверждение теоремы равносильно тому, что наименьшую ограничиваемую площадь среди всех кривых γ кривизны $k \geqslant 1$ некоторой фиксированной длины L_0 имеет криволинейный двуугольник γ_0 той же длины. Будем доказывать теорему в этой равносильной формулировке. А для этого, найдем минимум функционала площади S.

Используя условия (2.1) – (2.4), приходим к следующей формализованной постановке задачи

$$\begin{cases} S_\gamma = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x(t)u(t)dt \to \min \\ L_\gamma = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} u(t)dt = L_0 \\ \ddot{x}(t) + x(t) = u(t) \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

Интерпретируем задачу (2.6) как задачу оптимального управления, где радиус кривизны $u(t)$ будет выступать в роли управления, а опорная функция $x(t)$ – в роли фазовой траектории. Исходя из того, что кривая γ вложена и выпукла, будем решать эту задачу по u в классе 2π-периодических ограниченных и измеримых функций, а по x в классе 2π-периодических $C^{1,1}$-гладких функций.

Добавим к задаче (2.6) начальные и граничные значения для опорной функции

$$x(0) = x(2\pi) = h_1, \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) = h_2$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [1, 2]). Сделаем замену

$$x(t) =: x_1(t), \dot{x}(t) =: x_2(t) \tag{2.7}$$

Тогда приходим к классической задаче оптимального управления

$$\begin{cases} S = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} x_1(t)u(t)dt \to \min \\ \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \left(u(t) - \frac{L_0}{2\pi} \right) dt = 0 \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t) \\ 0 \leqslant u(t) \leqslant 1 \\ x_1(0) = x_1(2\pi) = h_1, x_2(0) = x_2(2\pi) = h_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Для (2.8) запишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^{2\pi} L\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1\right) dt + l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)),$$

где

$$L\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1\right) = \\ = \frac{1}{2}\lambda_0 x_1 u + \lambda_1\left(u - \frac{L_0}{2\pi}\right) + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 + x_1 - u),$$

$$l(x_1(0), x_2(0), x_1(2\pi), x_2(2\pi)) = \\ = \lambda_3(x_1(0) - h_1) + \lambda_4(x_1(2\pi) - h_1) + \lambda_5(x_2(0) - h_2) + \lambda_6(x_2(2\pi) - h_2)$$

Тогда, для интегранта L на оптимальной фазовой траектории и оптимальном управлении (которые мы все так же будем обозначать $x(t)$ и $u(t)$) должны выполняться

1. Уравнение Эйлера по фазовым переменным x_i, $i = 1, 2$: $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_i} + L_{x_i} = 0$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1:&\ -\dot{p}_1 + \frac{1}{2}\lambda_0 u + p_2 = 0 \\ i = 2:&\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

2. Условие трансверсальности в точках 0 и 2π: $L_{\dot{x}_i}(0) = l'_{x_i(0)}(0)$, $L_{\dot{x}_i}(2\pi) = l'_{x_i(2\pi)}(2\pi)$, которое дает

$$\begin{aligned} i = 1:&\ p_1(0) = \lambda_3,\ \ p_1(2\pi) = \lambda_4 \\ i = 2:&\ p_2(0) = \lambda_5,\ \ p_2(2\pi) = \lambda_6 \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Условие минимума по переменной u

$$\min_{0\leqslant v\leqslant 1} L\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, v, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1\right) = \\ = L\left(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, u, p_1, p_2, \lambda_0, \lambda_1\right).$$

   Для нашей задачи (2.8), заметим, что мы можем отбросить ту часть интегранта L, в которую не входит управление. А значит, условие минимума запишется как

$$\min_{0\leqslant v\leqslant 1}\left(\frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2\right)v = \left(\frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2\right)u \tag{2.11}$$

Но тогда, из (2.11) следует, что

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 < 0 \\ 0, & \text{при } \frac{1}{2}\lambda_0 x_1 + \lambda_1 - p_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Проанализируем полученные условия. A) Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Тогда из уравнений (2.9) и условий (2.10) легко следует, что $p_2(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$,

$p_1(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$, $\lambda_5 = \lambda_6 = C_1$, $\lambda_4 = \lambda_3 = -C_2$ для некоторых констант C_1 и C_2. Но тогда для фиксированного множителя Лагранжа λ_1 функция u запишется

$$u(t) = \begin{cases} 1, \ C_1 \cos t + C_2 \sin t > \lambda_1 \\ 0, \ C_1 \cos t + C_2 \sin t \leqslant \lambda_1 \end{cases}$$

Представим выражение $C_1 \cos t + C_2 \sin t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t + \varphi)$, где угол φ такой, что $\sin \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$. Тогда видно, что оптимальное управление u, в силу периодичности, кусочно-постоянная функция на отрезке $[0, 2\pi]$ принимающая значения 0 и 1 с не более, чем двумя точками разрыва. Покажем, что такого быть не может, если $L_0 \neq 0$ или $L_0 \neq 2\pi$.

Действительно, заметим, что геометрический смысл функции $u(t)$ – радиус кривизны замкнутой строго выпуклой кривой γ в точке с внешней нормалью $n(t) = (\cos t, \sin t)$.

Предположим, что u не имеет разрывов на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда радиус кривизны кривой постоянен и равен либо 0, либо 1. Это отвечает случаям точки (когда $L_0 = 0$) и окружности радиуса 1 ($L_0 = 2\pi$). Если же длина кривой не равна этим крайним значениям, то $u(t)$ не может быть непрерывной функцией.

Пусть функция u на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет ровно две точки разрыва $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, $t_1 < t_2$. При этом, в силу 2π-периодичности u, можно считать, что на $[t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 0$, а на $[0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$ $u(t) \equiv 1$. Тогда, опорные прямые, соответствующие точкам $t \in [0, 2\pi] \setminus [t_1, t_2]$ будут огибающими замкнутой окружности радиуса 1, имеющей угловую точку с нормалью $n(t_1 - 0)$ к левой полукасательной и нормалью $n(t_2 + 0)$ к правой полукасательной, угол между которыми равен $t_2 - t_1$ (см. рис. 1). Чего быть не может. Значит, $\lambda_0 \neq 0$.

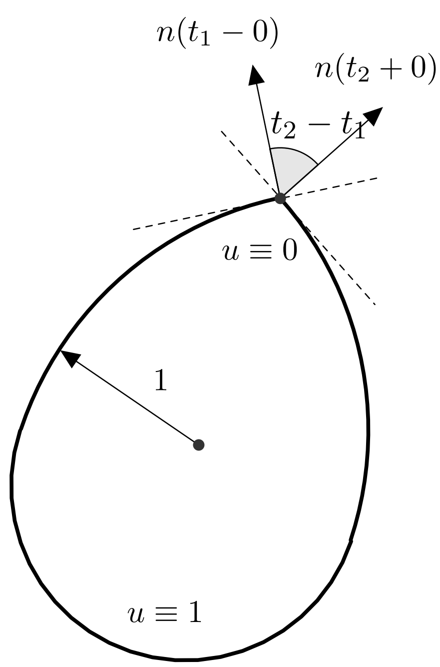

Рис. 1

Значит, можно считать, что $\lambda_0 = 2$.

Тогда из (2.9), (2.10), (2.12) и условия задачи, возвращаясь к исходной функции $x(t) = x_1(t)$ и обозначая $p(t) := p_2(t)$, получим, что для оптимального процесса с необходимостью должны выполняться следующие уравнения

$$\ddot{p} + p = -u \tag{2.13}$$

$$\ddot{x} + x = u \tag{2.14}$$

с соответствующими начальными и краевыми значениями, где управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x - p + \lambda_1 < 0 \\ 0, & \text{при } x - p + \lambda_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Сложим уравнения (2.13) и (2.14). Тогда новая функция $y := x + p$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2 \end{cases}$$

где начальные значения соответствующим образом зависят от множителей Лагранжа λ_i и начального положения кривой, задаваемого h_i. Решая его, получаем

$$y(t) = x(t) + p(t) = c_2 \sin t + c_1 \cos t. \tag{2.16}$$

Пусть $h(t)$ – опорная функция некоторой кривой $\delta(t)$. Сделаем замену системы координат путем переноса начала системы координат из точки O в точку $O_1(a_1, a_2)$ с сохранением направления и параллельности осей. Тогда опорная функция кривой $\delta(t)$ изменится следующим образом:

$$h_1(t) = h(t) - (a_1 \cos t + a_2 \sin t),$$

где $h_1(t)$ – опорная функция $\delta(t)$ в новой системе координат.

Запишем (2.16) в виде

$$x(t) - (\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t) = -(p(t) - (\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t)) \tag{2.17}$$

Если обозначить

$$\tilde{x}(t) := x(t) - (\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t)$$
$$\tilde{p}(t) := p(t) - (\frac{c_2}{2} \sin t + \frac{c_1}{2} \cos t)$$

то из сказанного выше будет следовать, что $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{p}(t)$ будут опорными функциями тех же кривых, что и $x(t)$ и $p(t)$, но взятые относительно системы координат с центром $O_1(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2})$. При чем, в силу (2.17), для них будет верно $\tilde{x}(t) = -\tilde{p}(t)$.

И так как вид условий (2.13) – (2.18) не зависит от выбора системы координат, то не ограничивая общности можно изначально считать, что $x(t) = -p(t)$. И тогда, получаем окончательную связь радиуса кривизны кривой γ с ее опорной функцией

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x(t) < \lambda \\ 0, & \text{при } x(t) \geqslant \lambda \end{cases} \tag{2.18}$$

где $\lambda = -\frac{\lambda_1}{2}$ некоторая константа.

Так как опорная функция непрерывна, из полученного условия следует, что γ состоит из дуг окружностей радиуса 1, состыковывающихся друг с другом в угловых точках. Причем, в силу выпуклости γ, в этих угловых точках угол между полукасательными, взятый с учетом направления нормалей кривой, меньше π.

Предположим, что $\lambda \leqslant 0$. Обозначим $x_{max} := \max\limits_{t\in[0,2\pi)} x(t)$ – максимальное значение опорной функции, а через A_{max} – точку на кривой γ, соответствующей этому значению опорной функции. Из максимальности следует, что $x_{max} \geqslant 0$ и равно 0 только если кривая – точка. Можем считать $x_{max} > 0$.

Но тогда из (2.18) следует, что в точке A_{max} радиус кривизны равен нулю, то есть A_{max} – угловая точка кривой. Рассмотрим полукасательные к кривой γ в этой точке. Соответствующее им значение опорной функции равно λ. И так как $\lambda \leqslant 0$, то обе полукасательные проходят через начало координат O_1. Следовательно, γ есть дважды покрытый отрезок. И в силу ограничений на кривизну, γ может быть только точкой $A_{\max}$, что возможно только при $L = 0$.

Значит, $\lambda > 0$. Допустим, что начало координат O_1 лежит вне области, ограниченной кривой, или на границе кривой.

Если $x_{max} < \lambda$, то кривая является окружностью радиуса 1, что возможно лишь при $L_0 = 2\pi$. Поэтому, будем считать, что $x_{max} \geqslant \lambda$.

Рассмотрим аналогичное значение $x_{min} := \min\limits_{t\in[0,2\pi)} x(t)$ и соответствующую ему точку A_{min} на γ. В силу минимальности и того, что начало координат лежит вне или на границе кривой, $x_{min} \leqslant 0 < \lambda$.

Это означает в силу (2.18) точка A_{min} будет лежать на некоторой дуге $\overset{\frown}{A_1A_2}$ окружности радиуса 1. Будем считать $\overset{\frown}{A_1A_2}$ максимальной дугой, лежащей на γ и содержащей точку A_{min}.

В силу выбора точки A_{min} касательная в ней к кривой γ параллельная оси O_1x. Тогда из (2.18) следует, что дуга $\overset{\frown}{A_1A_2}$ будет симметрична относительно прямой O_1A_{min}, а обе пары полукасательных к γ в точках A_1 и A_2 будут находиться на расстоянии λ от начала координат.

Пусть ω – окружность радиуса 1, содержащая дугу $\overset{\frown}{A_1A_2}$ (см. рис. 2). Пусть a_1 и a_2 – две полукасательные к кривой γ в точке A_1. Будем также считать, что a_1 – касательная к окружности ω в точке A_1. Пусть Q_1 и Q_2 – точки на кривой γ, в которых существует опорные прямые, проходящая через начало координат. Очевидно, что для таких прямых значение опорной функции $x(t)$ равно 0. Но в силу того, что в точке A_{min} опорная функция $x(t) \leqslant 0$, а в точках A_1 и A_2 ее значения $x(t) \geqslant \lambda > 0$, из непрерывности получаем, что Q_1 и Q_2 лежат на дуге $\overset{\frown}{A_1A_2}$. Заметим, что если точка O_1 не лежит на кривой γ, то $Q_1 \neq Q_2 \neq A_{min}$. Если же начало координат лежит на кривой, то $Q_1 \equiv Q_2 \equiv O_1 \equiv A_{min}$. Для определенности считаем, что $Q_1 \in \overset{\frown}{A_1A_{min}}$.

Обозначим угол между лучами a_1 и A_1O_1 через α. Так как $Q_1 \in \overset{\frown}{A_1A_{min}}$, то луч A_1O_1 пересекает дугу $\overset{\frown}{A_1A_{min}}$. Поэтому

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2}\, \overset{\frown}{A_1A_{min}}, \tag{2.19}$$

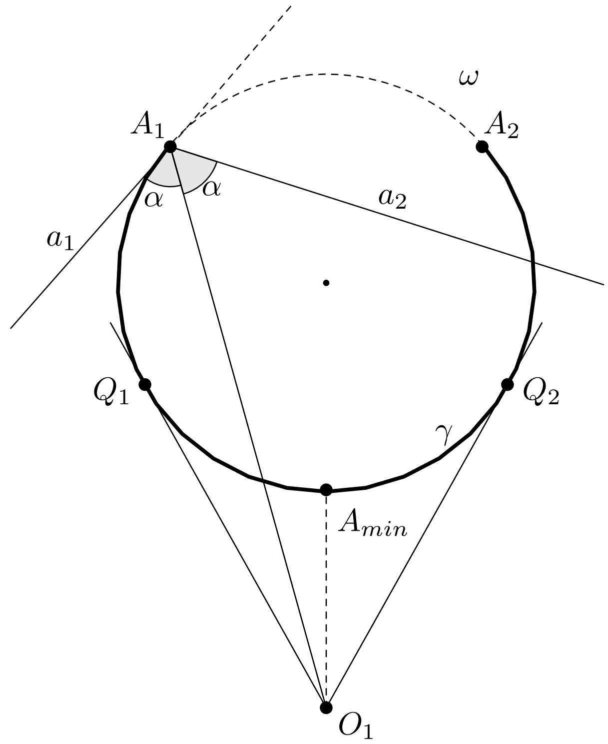

Рис. 2

где под $\overset{\frown}{A_1 A_{min}}$ мы понимаем градусную меру этой дуги.

Из (2.19) и симметричности дуги $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ относительно $A_{min}O_1$ следует, что

$$2\alpha \leqslant \overset{\frown}{A_1 A_{min}} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{A_1 A_2}$$

В силу того, что полукасательные a_1 и a_2 находятся на одинаковых расстояниях от начала координат, угол между ними равен 2α. Тогда из последнего неравенства следует, что полукасательная a_2, лежащая в тоже время и на опорной прямой, пересекает дугу $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ во внутренней точке или в точке A_2. Получили противоречие со строгой выпуклостью вложенной кривой γ. Значит, начало координат O_1 лежит внутри кривой.

Если начало координат лежит внутри кривой, то из ее выпуклости следует, что $x(t) > 0$. Причем, кривая не есть точка.

Аналогично, рассмотрим минимальное значение опорной функции $x_{min} > 0$ и одну из точек A_{min}, в которой оно достигается. Так как кривая в данном случае не может быть точкой, то $x_{min} < \lambda$. Поэтому, как и выше, построим максимальную дугу $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ окружности радиуса 1, содержащую точку A_{min}. Эта дуга будет симметричной относительно прямой O_1A_{min}, а точка A_{min} будет ее серединой. В силу максимальности дуги из (2.18), точки A_1 и A_2 будут угловыми точками кривой γ, обе пары полукасательных в которых находятся на расстоянии λ от начала координат.

Обозначим через φ угол между лучом A_1O_1 и дугой $\overset{\frown}{A_1A_2}$ в точке A_1 (то есть, угол между лучом и соответствующей полукасательной к дуге). В силу симметрии, угол между A_2O_1 и дугой $\overset{\frown}{A_1A_2}$ в точке A_2 также равен φ.

Заметим, что по углу φ, зная λ и положение точки O_1, дуга $\overset{\frown}{A_1A_2}$ восстанавливается однозначно с точностью до поворота вокруг точки O_1.

Как мы отмечали, из условия (2.18) следует, что кривая состоит из дуг единичной окружности, сходящихся в угловых точках. Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{A_2A_3}$ окружности радиуса 1 между двумя угловыми точками A_2 и A_3, которая состыковывается с дугой $\overset{\frown}{A_1A_2}$ в точке A_2. Так как обе полукасательные в точке A_2 равноудалены от начала координат на расстояние λ, то эти дуги образуют одинаковые углы (равные φ) с лучом A_2O_1. Так как A_3 – угловая точка, то в ней полукасательная к дуге $\overset{\frown}{A_2A_3}$ удалена от O_1 на расстояние λ.

Наконец, так как по углу φ дуга $\overset{\frown}{A_2A_3}$ единичной окружности восстанавливается однозначно с точностью до поворота, то длины дуг $\overset{\frown}{A_1A_2}$ и $\overset{\frown}{A_2A_3}$ равны и эти дуги симметричны относительно прямой O_1A_2.

Рассматривая следующую дугу $\overset{\frown}{A_3A_4}$ между двумя угловыми точками A_3 и A_4, и применяя аналогичные рассуждения, получим, что длины $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$ и углы в вершинах A_2, A_3 – равны. И так далее. Так как каждая следующая дуга имеет одну и ту же длину, то таких дуг будет конечное число. Более того, если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – соответствующие угловые точки, то углы между полукасательными в вершинах $A_2, \dots, A_n$ одинаковы и равны 2φ. Так как кривая γ – замкнута и вложена, то и угол в вершине A_1 тоже равен 2φ.

Таким образом, оптимальная кривая γ есть правильный криволинейный выпуклый n-угольник, составленный из равных дуг единичной окружности, вписанный в некоторую окружность σ радиуса $r < 1$. Будем считать, что его периметр $L \neq 0$, иначе кривая - точка, и $L \neq 2\pi$, иначе кривая – единичная окружность.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – вершины многоугольника γ. Так как его периметр равен L, то в силу правильности получаем, что длина любой стороны A_iA_{i+1}, $i = 1, \dots, n$ равна $\frac{L}{n}$.

Из построения γ следует, что O_1 – центр окружности σ. В силу правильности, $\angle A_iOA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда площадь S_i части γ, ограниченной углом $\angle A_iOA_{i+1}$ и дугой A_iA_{i+1} для любого $i = 1, \dots, n$ равна

$$S' := S_i = \frac{L}{2n} - r\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n}\right), \tag{2.20}$$

где для радиуса r справедливо

$$\sin\frac{L}{2n} = r\sin\frac{\pi}{n} \tag{2.21}$$

Учитывая (2.20) и (2.21), для площади S многоугольника γ получаем

$$S = S(n) = nS' = \frac{L}{2} - n\frac{\sin\frac{L}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} \tag{2.22}$$

Так как n – это число сторон криволинейного многоугольника, то в (2.22) $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$.

Покажем, что площадь $S(n)$ будет достигать своего минимального значения при $n = 2$, то есть когда γ – луночка. Для этого рассмотрим функцию

$$F(t) := \frac{L}{2} - \frac{\sin\left(\frac{Lt}{2}\right)\sin\left(\pi t - \frac{Lt}{2}\right)}{t\sin(\pi t)},$$

принимающую при $t = \frac{1}{n}$ значения $S(n)$.

Для доказательства того, что $S(n)$ принимает наименьшее значение при $n = 2$ достаточно показать, что $F(t)$ строго монотонно убывает при $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$.

Перепишем $F(t)$ в виде

$$F(t) = \frac{L}{2} - \frac{1}{t\left(\cot\left(\frac{Lt}{2}\right) + \cot\left(\pi t - \frac{Lt}{2}\right)\right)} \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что строгое монотонное убывание $F(t)$ при $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ равносильно строгому монотонному убыванию функции $f(t) := t\cot\left(\frac{Lt}{2}\right) + t\cot\left(\left(\pi - \frac{L}{2}\right)t\right)$ на том же промежутке. Заметим, что

$$0 < \frac{L}{2} < \pi \text{ и } 0 < \pi - \frac{L}{2} < \pi. \tag{2.24}$$

На промежутке $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ рассмотрим функцию $g(t) = t\cot(bt)$, где $0 < b < \pi$. Имеем

$$g' = \frac{\sin(2bt) - 2bt}{2\sin^2(bt)} < 0$$

так как $0 < 2bt \leqslant \pi$, а на $(0;\pi]$ мы знаем, что $\sin x < x$. Значит, на указанном промежутке $g(t)$ строго монотонно убывает. Из этого, с учетом замечания (2.24), следует, что тем же свойством и на том же промежутке обладает и $f(t)$ (как сумма монотонных). А значит, площадь $S(n)$ достигает своего минимума при $n = 2$.

Таким образом, с необходимостью, решением задачи (2.8) является правильный криволинейный двуугольник, составленный из двух равных дуг единичной окружности длины $\frac{L}{2}$.

При этом, решение задачи (2.8) существует в силу теоремы выбора Бляшке (см. [3]). А значит, правильный криволинейный двуугольник и есть решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006.

[2] А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский, *Принцип максимума в оптимальном управлении,*, Изд. Центра прикл. иссл. при мех.-мат. факульт. МГУ, М..

[3] В. Бляшке, *Круг и шар*, Наука, М., 1967.

А. А. Борисенко
Сумской государственный университет, Сумы,
Украина
E-mail: aborisenk@gmail.com

Поступило
24.05.2012

К. Д. Драч
Харьковский национальный университет им.
В. Н. Каразина, Харьков, Украина
Сумской государственный университет, Сумы,
Украина
E-mail: drach@karazin.ua; kostya.drach@gmail.com