1. (Стереографические параметризации.) Пусть C – коника (эллипс, гипербола или парабола). Заметим, что любая прямая пересекает C не более чем в двух точках. Пусть (x, y) – аффинные координаты на плоскости (не обязательно канонические для C).

   - Фиксируем точку $O \in C$ и рассмотрим пучок прямых, проходящих через O. Для каждой прямой пучка выразить координаты $(x(\lambda), y(\lambda))$ второй точки $P \neq O$ ее пересечения с C (если эта точка существует) через некоторый параметр λ пучка. Показать, что этот параметр можно выбрать так, что x и y – рациональные функции от λ с общим знаменателем, причем степени их числителя и знаменателя не превосходят 2.
   - Заметим, что если в данной системе координат коэффициенты уравнения C и координаты O рациональны, то и функции x и y имеют рациональные коэффициенты. Таким образом, точка кривой имеет рациональные координаты тогда и только тогда, когда соответствует рациональному значению λ. Вывести отсюда формулы для вычисления пифагоровых троек целых чисел.
   - Решить аналогичную задачу для троек целых чисел, которые являются сторонами треугольника с углом $\pi/3$.

2. Снова рассмотрим конику C и фиксируем на ней точку O. Для произвольных точек P и Q из C проведем через O прямую l параллельно PQ (или касательной к C в P, если $P = Q$). Пусть R – вторая точка пересечения l и C ($R = O$, если точка пересечения единственная). Назовем R суммой точек P и Q: $R = P + Q$

   - Доказать, что множество C с такой операцией является абелевой группой (можно пользоваться частным случаем теоремы Паскаля: если две пары противоположных сторон вписанного в конику (возможно, самопересекающегося) шестиугольника параллельны, то и третья пара параллельна).
   - Доказать, что парабола изоморфна вещественной прямой с операцией сложения.
   - Доказать, что гипербола изоморфна группе ненулевых вещественных чисел с операцией умножения.
   - Доказать, что эллипс изоморфен группе комплексных чисел модуля 1 с операцией умножения.