

Питання до іспиту з диференціальної геометрії многовидів 2019/20, зима

1. Топологічні многовиди. Карти і атласи. Гладкі многовиди і гладкі структури.
2. Приклади гладких многовидів.
3. Відкрита підмножина гладкого многовиду і добуток гладких многовидів як гладкі многовиди.
4. Гладкі відображення. Дифеоморфізми. Приклади.
5. Дотичні вектори і дотичний простір гладкого многовиду. Гладкі функції Урисона і властивості дотичних векторів.
6. Дотичний простір і локальні координати. Еквівалентність визначень дотичного простору. Дотичний вектор і регулярність кривої.
7. Диференціал і ранг гладкого відображення. Локальні дифеоморфізми. Занурення і вкладення. Підмноговиди.
8. Дотичне розшарування. Побудова структури гладкого многовиду на ньому.
9. Векторні поля. Векторне поле як диференціювання. Дужка Лі і її властивості. Інтегрування векторних полів.
10. Тензори в точці гладкого многовиду. Приклади.
11. Тензорні поля. Приклади. Форми на многовиді. Кодиференціал.
12. Симетричні і зовнішні форми. Симетричний і зовнішній добуток.
13. Диференціал зовнішньої форми. Перетворення зовнішньої p -форми при заміні координат.
14. Орієнтовність гладких многовидів. Дезорієнтуючі шляхи. Приклади.
15. Розбиття одиниці.
16. Кубовні множини. Інтегрування форм на орієнтованому многовиді.
17. Області з регулярною межею. Теорема Стокса.
18. Ріманова метрика, рімановий многовид. Перша фундаментальна форма підмноговиду. Приклади. Довжина кусково гладкої кривої на рімановому многовиді і її властивості. Кут між кривими. Форма об'єму і об'єм області.
19. Ізометрії. Конформні еквівалентності. Приклади.
20. Підйом і спуск індексу. Кометрика. Внутрішній добуток. Оператори векторного аналізу на рімановому многовиді. Тривимірний і багатовимірний випадки. Гармонійні функції.
21. Функціонал довжини на топологічному просторі. Внутрішня метрика. Компоненти досяжності. Найкоротші. Приклади.
22. Внутрішня метрика, що породжена рімановою метрикою, її властивості. Фінслерова метрика. Індукована метрика. Повнота внутрішньої метрики, приклади.
23. Афінна зв'язність. Ріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Формула Кошуля, існування і єдиність ріманової зв'язності.

- 24.Коваріантна похідна уздовж кривої. Паралельні поля. Геодезичні на рімановому многовиді.
- 25.Лагранжіан і варіаційна задача на многовиді. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Опис регулярних найкоротших на рімановому многовиді.
- 26.Експоненційне відображення в точці ріманового многовиду. Нормальні околиці. Лема Гауса. Опис кусково гладких найкоротших на рімановому многовиді.
- 27.Довжина кривої в метричному просторі. Випадок простору з внутрішньою метрикою. Опис спрямних найкоротших на рімановому многовиді.
- 28.Границя послідовності найкоротших. Теорема Арцела-Асколі для шляхів (без доведення). Обмежена компактність. Достатні умови існування найкоротших. Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена (ідея доведення). Геодезична повнота. Випадок ріманового многовиду.
- 29.Оператор кривини та його властивості. Тензор Рімана. Секційна кривина.
- 30.Тензор Річчі, кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди. Многовиди постійної секційної кривини. Теорема Шура. Модельні простори постійної кривини. Теореми Рімана та Картана-Кілінга (без доведень).
- 31.Варіації, перша та друга варіації довжини геодезичної. Теорема Майерса.
- 32.Геодезичні варіації та поля Якобі. Спряжені точки. Теорема Якобі (без доведення). Простори Адамара та теорема Картана-Адамара (ідея доведення). Теореми порівняння трикутників (без доведень). Простори з внутрішньою метрикою обмеженої кривини, узагальнення теорем Картана-Адамара та Майерса (без доведень).