

Варіант 1

1. Нехай $A = \{(x, y) | x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$ і $B = \{(x, y) | x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$ – підмножини площини $\mathbb{R}^2$. Встановити, чи зв'язні A , B і $A \cup B$.

2. Нехай відображення $f, g: GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2n, \mathbb{R})$ задані формулами

$$f(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad g(A, B) = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де E – одинична матриця порядку n . Довести, що $f \sim g$.

Варіант 2

1. Довести, що функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли її графік замкнений і зв'язний. Показати, що кожної з цих двох умов окремо недостатньо для неперервності f .

2. Говорять, що топологічний простір X має властивість нерухомої точки, якщо для будь-якого неперервного $f: X \rightarrow X$ існує така $x \in X$, що $f(x) = x$. Довести, що якщо X має властивість нерухомої точки, то таку властивість має і будь-який його ретракт. За допомогою цього факту вивести теорему про барабан з теореми Брауера.

Варіант 3

1. Нехай $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ – спадаюча послідовність компактних непустих зв'язних підмножин хаусдорфового топологічного простору. Довести, що перетин $\bigcap_{i=1}^n K_i$ непустий і зв'язний.

2. Знайти фундаментальну групу простору $S^2 \vee S^1$ за допомогою універсального накриття.

Варіант 4

1. Довести, що функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли її графік зв'язний і локально зв'язний. Показати, що кожної з цих двох умов окремо недостатньо для неперервності f .

2. Нехай X – топологічний простір, $f \in C(I, X)$ – шлях, $r \in I$. Визначимо шляхи $f_1, f_2 \in C(I, X)$ наступним чином: $f_1(t) = f(rt)$, $f_2(t) = f((1-r)t + r)$. Довести, що $f \sim f_1 * f_2$ (як шляхи).

Варіант 5

1. Довести, що у гомотопічно еквівалентних просторів рівна кількість компонент зв'язності.

2. Нехай X – топологічний простір, $x, y \in X$, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(0) = g(0) = x$, $f(1) = g(1) = y$. Довести, що ізоморфізми фундаментальних груп $\pi_1(X, x)$ і $\pi_1(X, y)$, що визначені шляхами f і g , збігаються тоді і тільки тоді, коли $[f * \bar{g}]$ належить до центру $\pi_1(X, x)$.

Варіант 6

1. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X одночасно відкриті або замкнені, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ лінійно зв'язні, то A і B лінійно зв'язні. Показати, що це, взагалі кажучи, не так для довільних A і B .

2. Нехай X – топологічний простір, $f, g: X \rightarrow S^n$ неперервні, $f(x) \neq -g(x)$ для будь-якого $x \in X$. Довести, що $f \sim g$.

Варіант 7

1. Довести, що якщо в компактному метричному просторі $\overline{B_\varepsilon(x)} = D_\varepsilon(x)$ для будь-яких x і ε , то всі кулі $B_\varepsilon(x)$ зв'язні.

2. Довести, що комплексний проективний простір $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1$ однозв'язний. Тут S^{2n+1} – одинична сфера у просторі $\mathbb{C}^{n+1}$, що отождествлюється з $\mathbb{R}^{2n+2}$, і група S^1 комплексних чисел модуля 1 діє обертаннями: $\lambda \cdot x = \lambda x$.

Варіант 8

1. Довести, що топологічний простір X зв'язний тоді і тільки тоді, коли з $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ випливає, що $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ або $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

2. Нехай $p: X \rightarrow Y$ – накриття з компактним хаусдорфовим Y . Довести, що X компактний тоді й тільки тоді, коли p скінченнолистне (тобто шар над будь-якою точкою скінченний). Для якої з двох імплікацій тут використовується хаусдорфовість?

Варіант 9

1. Встановити, чи зв'язна підмножина $\mathbb{R}^2$, що складається з усіх точок, хоча б одна координата яких раціональна.

2. Нехай лінійно зв'язний топологічний простір X можна представити у вигляді об'єднання $U \cup V$, де U і V відкриті і однозв'язні, а $U \cap V$ – лінійно зв'язна. Довести, що X однозв'язний.

Варіант 10

1. Довести, що об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 1 \leq y \leq 2\}$ гомотопічно еквівалентне, але негомеоморфне S^1 .

2. Встановити, чи існує ретракція проективної площини на проективну пряму.

Варіант 11

1. Нехай A – підмножина зв'язного топологічного простору X . Довести, що якщо ∂A зв'язна, то $\overline{A}$ також зв'язна.

2. Нехай X – топологічний простір, $f, g \in C(I, X)$ – шляхи, $f(1) = g(0)$. Нехай $r \in (0, 1)$. Визначимо шлях $h \in C(I, X)$ наступним чином:

$$h(t) = \begin{cases} f\left(\frac{t}{r}\right), & t \in [0, r]; \\ g\left(\frac{t-r}{1-r}\right), & t \in [r, 1]. \end{cases}$$

Довести, що $h \sim f * g$ (як шляхи).

Варіант 12

1. Довести, що замкнений ε -окіл замкненої зв'язної підмножини $\mathbb{R}^n$ лінійно зв'язний.
2. Знайти фундаментальну групу об'єднання кола $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ і відрізка $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, -1 < y < 1\}$.

Варіант 13

1. Довести, що у гомотопічно еквівалентних просторів рівна кількість компонент лінійної зв'язності.
2. Нехай $p: X \rightarrow Y$ і $q: Y \rightarrow Z$ – накрыття з лінійно зв'язними базами і просторами. Довести, що якщо q – скінченнолистне (тобто шар над будь-якою точкою скінченний) то і $q \circ p: X \rightarrow Z$ – накрыття.

Варіант 14

1. Довести, що для будь-якого зв'язного $A \subset \mathbb{R}^n$, що міститься у відкритому U , існує відкрите лінійно зв'язне V таке, що $A \subset V \subset U$.
2. Нехай $p: X \rightarrow Y$ – накрыття, простір Z зв'язний і локально зв'язний, $f, g: Z \rightarrow X$ – неперервні, f і g збігаються в деякій точці і $p \circ f = p \circ g$. Довести, що $f = g$.

Варіант 15

1. Довести, що якщо підмножини A і B топологічного простору X одночасно відкриті або замкнені, причому $A \cap B$ і $A \cup B$ зв'язні, то A і B зв'язні. Показати, що це, взагалі кажучи, не так для довільних A і B .
2. Довести, що будь-яке неперервне відображення $f: S^n \rightarrow S^n$, що не має нерухомих точок (тобто $f(x) \neq x$ для будь-якого x), гомотопне центральній симетрії $x \mapsto -x$.

Варіант 16

1. Довести, що функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли її графік зв'язний і локально компактний. Показати, що кожної з цих двох умов окремо недостатньо для неперервності f .
2. Знайти фундаментальну групу простору $S^n \setminus S^m$.