Варіант 1

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – сімейство підмножин топологічного простору X. Довести, що $\partial\left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i\right)$ і $\partial\left(\bigcap\limits_{i=1}^n B_i\right)$ – підмножини $\bigcup\limits_{i=1}^n \partial B_i$. Чи вірно це для довільної кількості множин? Показати, що обернені включення, взагалі кажучи, невірні.

2. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x,y)|\ y = f(x)\}$ називається графіком відображення f. Довести, що графіки всіх неперервних відображень одного і того ж простору гомеоморфні між собою.

3. Довести, що топологічний простір X є T_0-простором тоді і тільки тоді, коли X не містить антидискретного підпростору, що складається більш ніж з однієї точки. Чи можна послабити цю умову, перевіряючи лише підпростори з певною кількістю точок? Скільки точок буде достатньо?

4. Нехай $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сімейство компактних підмножин хаусдорфового топологічного простору, U відкрите і містить $\bigcap\limits_{\alpha\in A} K_\alpha$. Довести, що існує скінченна підмножина $B \subset A$ така, що $\bigcap\limits_{\alpha\in B} K_\alpha \subset U$.

Варіант 2

1. Довести, що $\overline{A}\backslash\overline{B} \subset \overline{A\backslash B}$. Показати, що обернене включення, взагалі кажучи, невірне.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y)|x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x,y)|x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай X – відкритий квадрат на площині зі стандартною топологією, Y – одна з його сторін, $f\colon X \to Y$ – ортогональне проектування. Показати, що f неперервне, відкрите, але не замкнене.

4. Довести, що підмножина $\mathbb{R}^n$ компактна тоді і тільки тоді, коли будь-яка неперервна на ній функція обмежена.

Варіант 3

1. З'ясувати, при якій необхідній і достатній умові відкрита куля $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою є замкненою множиною. Те ж питання про замкнену кулю, що є відкритою множиною.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y)|y \in [0,1)\}$ і $Y = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1,\ y \neq 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай X – топологічний простір, $A \subset X$. Неперервне відображення $f\colon X \to A$ називається ретракцією, якщо обмеження f на A є тотожнім відображенням. Множина A в цьому випадку називається ретрактом X. Довести, що ретракт хаусдорфового простору замкнений.

4. Довести, що будь-які дві норми на $\mathbb{R}^n$ породжують однакові метричні топології.

Варіант 4

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = Int\,\overline{A}$. Довести, що внутрішність замкненої множини канонічно відкрита.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ і $Y = \{(x,y)|a < x^2 + y^2 < b\}$ $(0 \leqslant a < b)$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай $f, g\colon X \to Y$ – неперервні відображення, Y хаусдорфовий і $A \subset X$ всюди щільна. Довести, що якщо $f|_A = g|_A$, то $f = g$. Показати, що хаусдорфовість суттєва.

4. Довести, що замкнені підмножини паракомпактного простору паракомпактні. Показати, що замкненість суттєва.

Варіант 5

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X. Довести, що

$$\overline{\left(\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\right)} = \overline{\left(\bigcup_{\alpha\in A} \overline{B_\alpha}\right)}.$$

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y)|y \in [0,1)\}$ і $Y = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1,\, y>0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Довести, що в T_1-просторі будь-яка множина є перетином деякого сімейства відкритих множин.

4. Довести, що хаусдорфовий паракомпактний простір нормальний.

Варіант 6

1. Нехай $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сімейство топологій на множині X. Чи вірно, що $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$ – топологія на X? Те ж питання про $\bigcup\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$.

2. Довести, що підмножина точок S^n, для яких $(x^1)^2+\dots+(x^k)^2 \leqslant (x^{k+1})^2+\dots+(x^{n+1})^2$, гомеоморфна $S^{k-1}\times D^{n-k+1}$.

3. Нехай $f\colon X \to Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X\times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x,y)|\ y=f(x)\}$ називається графіком відображення f. Довести, що f неперервне тоді і тільки тоді, коли обмеження канонічної проекції $pr_X\colon X\times Y \to X$ на Γ_f є гомеоморфізмом.

4. Довести, що якщо у метричному просторі A замкнене і B компактне, то $\inf\{\rho(a,b)|a\in A,\, b\in B\} > 0$.

Варіант 7

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = Int\,\overline{A}$. Показати, що перетин двох канонічно відкритих множин канонічно відкритий, а об'єднання двох канонічно відкритих множин може не бути канонічно відкритим.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y)|x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Довести, що відображення $f\colon X\to Y$ замкнене тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A\subset X$ виконується рівність $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$.

4. Показати, що якщо Y компактний, то для будь-якого X канонічна проекція $pr_X\colon X\times Y \to X$ відкрита і замкнена.

Варіант 8

1. Нехай A відкрита і $A\cap B = \varnothing$. Довести, що $\overline{A}\cap Int\overline{B} = \varnothing$.

2. Довести, що підмножина $\{(x,y)|f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$ площини $\mathbb{R}^2$, де $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неперервні функції, $f<g$, гомеоморфна $\mathbb{R}\times[0,1]$.

3. Нехай X хаусдорфовий і $f\colon X\to X$ неперервне. Довести, що підмножина $A = \big\{x\in X \mid f(x)=x\big\}$ замкнена в X. Показати, що хаусдорфовіть суттєва.

4. Нехай K – компактна підмножина метричного простору, що міститься у відкритій U. Довести, що існує $\varepsilon>0$ таке, що U містить ε-окіл K (тобто множину $\{x|\rho(x,K)<\varepsilon\}$).

Варіант 9

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = Int\,\overline{A}$. Довести, що для канонічно відкритих A і B включення $A \subset B$ еквівалентне $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \mathbb{R}^2 \backslash ([0,1] \times 0)$ і $Y = \{(x,y) | x^2 + y^2 > 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай $f_1 \colon X_1 \to Y_1,\ f_2 \colon X_2 \to Y_2$ – відображення. Тоді відображення $f \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, визначене формулою $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, позначається $f_1 \times f_2$ і називається прямим добутком відображень, а самі відображення – множниками. Довести, що $f_1 \times f_2$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперерервні його множники.

4. Довести, що локально компактний простір зі зліченною базою паракомпактний.

Варіант 10

1. Навести приклад множини X і таких метрик ρ_1, ρ_2 на X, що добуток $\rho_1\rho_2$ не є метрикою на X.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y) | x \in [0,1)\}$ і $Y = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\} \backslash ([0,1] \times 0)$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Довести, що топологічний простір X є T_0-простором тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x \neq y$ з X $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

4. Довести, що будь-яке локально скінченне покриття секвенціально компактного простору є скінченним.

Варіант 11

1. Нехай $\{B_i\}_{i=1}^n$ – сімейство підмножин топологічного простору X. Довести, що $\left(\bigcup\limits_{i=1}^n B_i\right)' = \bigcup\limits_{i=1}^n B_i'$. Чи вірно це для довільної кількості множин?

2. Довести, що підмножина точок S^n, для яких $(x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 < (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$, гомеоморфна $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^{n-k}$.

3. Довести, що відображення $f \colon X \to Y$ відкрите тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ справедлива рівність $f(IntA) \subset Int\, f(A)$.

4. Нехай $f \colon X \to Y$ – відображення. Тоді підмножина $\Gamma_f \subset X \times Y$ вигляду $\Gamma_f = \{(x,y) |\ y = f(x)\}$ називається графіком відображення f. Довести, що якщо Y компактний і Γ_f замкнена в $X \times Y$, то f неперервне. Показати, що умова компактності суттєва.

Варіант 12

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно замкненою, якщо $A = \overline{Int\,A}$. Показати, що об'єднання двох канонічно замкнених множин канонічно замкнене, а перетин двох канонічно замкнених множин може не бути канонічно замкненим.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x,y) | x \geqslant 0\}$ і $Y = \{(x,y) | 0 < x < 1,\ 0 \leqslant y < 1\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай X – T_4-простір, $F_1, F_2, F_3 \subset X$ замкнені, $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \varnothing$. Довести, що існують відкриті $U_i \supset F_i$, $i = 1,2,3$ такі, що $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \varnothing$.

4. Довести, що будь-яке власне відображення хаусдорфового простору у хаусдорфовий локально компактний є замкненим.

Варіант 13

1. Нехай $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – сімейство підмножин топологічного простору X. Довести, що

$$Int\left(\bigcap_{\alpha\in A} B_\alpha\right) = Int\left(\bigcap_{\alpha\in A} Int(B_\alpha)\right).$$

2. Побудувати гомеоморфізм між $\mathbb{R}^n$ і факторпростором $\mathbb{R}^n/D^n$.

3. Довести, що бієктивне $f\colon X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-якої підмножини $A \subset X$ справедлива рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

4. Нехай K – компактна підмножина локально компактного хаусдорфового простору, що міститься у відкритому U. Довести, що існує відкрите $V \supset K$ таке, що $\overline{V}$ компактне і міститься в U.

Варіант 14

1. Навести приклад множини X і таких метрик ρ_1, ρ_2 на X, що $\min(\rho_1, \rho_2)$ не є метрикою на X.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y)|x > 0,\, y > 0\}$ і $Y = \{(x, y)|x > y > 0\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Нехай для будь-яких двох точок $a \neq b$ топологічного простору X існує неперервне відображення $f\colon X \to Y$ у T_i-простір таке, що $f(a) \neq f(b)$, $i = 0, 1, 2$. Довести, що тоді X – T_i-простір.

4. Нехай $f\colon X \to Y$ – замкнене і прообраз будь-якої точки Y компактний. Довести, що тоді з компактності Y випливає компактність X.

Варіант 15

1. Підмножина A топологічного простору називається канонічно відкритою, якщо $A = Int\,\overline{A}$, і канонічно замкненою, якщо $A = \overline{Int\,A}$. Показати, що множина канонічно замкнена тоді і тільки тоді, коли її доповнення канонічно відкрите.

2. Побудувати гомеоморфізм між підпросторами $X = \{(x, y)|0 < x^2 + y^2 < 1\}$ і $Y = \mathbb{R}^2\backslash\{(x, y)|x, y \in [0, 1]\}$ площини $\mathbb{R}^2$.

3. Показати, що бієктивне відображення $f\colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ є гомеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли виконано принаймні одну з умов:

- τ - найслабша з топологій в X, для яких відображення f неперервне;

- σ - найсильніша з топологій в Y, для яких відображення f неперервне.

4. Довести, що якщо X компактний, а Y паракомпактний, то $X \times Y$ паракомпактний.

Варіант 16

1. Показати, що наступні дві метрики породжують різні топології на $C([0, 1])$. Чи є якась із них сильнішою за іншу?

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx,\ \rho_2(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)||x \in [0, 1]\}.$$

2. Показати, що для будь-якого гомеоморфізму $f\colon X \to Y$ і для будь-якого $A \subset X$ факторпростори X/A і $Y/f(A)$ гомеоморфні.

3. Довести, що якщо $f\colon X \to Y$ – сюр'єктивне, неперервне і замкнене, а X – нормальне, то і Y нормальне.

4. Довести, що відкриті підмножини хаусдорфового локально компактного простору локально компактні. Показати, що хаусдорфовість суттєва.