Диференціальна геометрія.
Базовий курс лекцій.

Ямпольський О.Л.

Зміст

Розділ 1

Теорія кривих

1.1 Основні положення теорії кривих.

1.1.1 Поняття регулярної параметризованої кривої.

Нехай M довільна точка в $I\!R^n$ з Декартовими координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Вектор $\vec{r}(M)$, початок якого збігається з початком координат, а кінець - з точкою M *називається радіус-вектором* точки M. Його координати чисельно рівні координатам точки M

$$\vec{r}(M) = \{x^1, \ldots, x^n\}.$$

Нехай I – (відкритий, напіввідкритий або замкнений) проміжок на числовій прямій. Вектор-функцією *вектор-функцією*, що визначена на проміжку I, називається відображення $\vec{r} : I \to I\!R^n$ виду

$$\vec{r}\,(t) = \{x^1(t), \ldots, x^n(t)\} \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Функціїї $x^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ називаються координатними функціями. *Кривою* в $I\!R^n$ називається неперервне відображення

$$\gamma\ : I \to I\!R^n,$$

що визначається неперервною вектор-функцією $\vec{r}\,(t)(t \in I)$. Підмножина $\gamma\,(I) \subset I\!R$ називається носієм кривої або *годографом* вектор-функції $\vec{r}\,(t)$. При цьому сама вектор-функція $\vec{r}\,(t)$ називається параметризацією підмножини кривої. Вектор-функція $\vec{r}\,(t)$ є *неперервною* тоді і тільки тоді, коли неперервні її компоненти, тобто координатні функції $x^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Вектор-функція $\vec{r}\,(t)$ є *диференційованою*, якщо координатні функції $x^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ є диферецийованими. Якщо координатні функції $x^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ належать класу регулярності C^m $(m \geq k)$, C^∞ або C^ω, то говорять, що вектор-функція $\vec{r}\,(t)$ є регулярною класу C^k, C^∞ або аналітичною, відповідно. Якщо $I = [a, b]$ – замкнений проміжок, то $\gamma\,(a)$ і $\gamma\,(b)$ називаються кінцевими точками кривої. Якщо ж $\gamma\,(a) = \gamma\,(b)$, то крива називається *замкненою*.

На загал, годограф неперервної вектор-функції не визначає криву в інтуїтивному розумінні. Приклад кривої Пєано показує, що існує неперервне відображення відрізку $[0, 1]$ на одиничний квадрат на площині. Стала вектор-функція $\vec{r}\,(t) = \Big\{0, \ldots, 0\Big\}$ дає приклад аналітичної вектор-функції, годографом якої є точка. Наступні означення знімають цю суперечність.

Означення 1.1.1 *Елементарною кривою в* $I\!R^n$ *називається гомеоморфний образ інтервалу числової прямої.*

Отже, елементарна крива є такою, що годограф її вектор-функції гомеоморфний до певного інтервалу.

Означення 1.1.2 *Простою кривою в* $I\!R^n$ *називається зв'язна підмножина в* $I\!R^n$*, кожна точка якої має окіл (в індукованій топології), що гомеоморфний інтервалу числової прямої.*

Отже, проста крива є локально елементарною.

Означення 1.1.3 *Загальною кривою в* $I\!R^n$ *називається образ простої кривої при неперервному відображенні, що є локальним гомеоморфізмом.*

Наочне уявлення про елементарну криву дають графіки неперервних функцій на площині. Найпростішим прикладом простої, але не елементарної кривої є коло на площині. Декартів лист має самоперетин і є загальною, але не простою кривою.

Наведені означення мають топологічний характер і не можуть бути основою для застосування методів математичного аналізу для вивчення властивостей таких кривих. Для цього треба звузити клас кривих, що розглядаються. Головним об'єктом досліджень класичної диференціальної геометрії є регулярні параметризовані криві.

Означення 1.1.4 *Зв'язна підмножина* $\gamma \subset I\!R^n$ *називається регулярною параметризованою кривою класу* C^k $(k \geq 1)$*, якщо для кожної точки* $p \in \gamma$ *існує окіл* $W \subset I\!R^n$ *такий, що*

- *для* $\gamma \cap W$ *існує параметризація* $\vec{r} : (\alpha\ , \beta) \to \gamma \cap W$ *така, що* $\vec{r} \in C^k$*;*
- $\vec{r}\,'_t \neq \vec{0}$ *для всіх* $t \in (\alpha\ , \beta)$*.*

Зазначена параметризація називається регулярною параметризацією кривої γ*.*

Вибір регулярної параметризації регулярної кривої в значній мірі довільний.

Твердження 1.1.1 *Якщо крива* γ *допускає регулярну параметризацію, то* γ *допускає нескінченно багато інших регулярних параметризацій.*

Доведення. Нехай $\vec{r}(t)$ – регулярна параметризація γ, причому $\vec{r} : (a,b) \to I\!R^n$, $\vec{r}\,'_t|_{(a,b)} \neq \vec{0}$. Розглянемо довільний інтервал (c,d). Всі інтервали гомеоморфні між собою. Розглянемо сюр'єктивну гладку функцію $g(\theta) : (c,d) \to (a,b)$, таку що $g \in C^k$ і $g'_\theta \neq 0$, для будь-якого $\theta \in (c,d)$. Тоді вочевидь $t = g(\theta)$ і вектор–функція $\vec{\rho} = \vec{r}(g(\theta))$ є такою, що $\vec{\rho}(c,d) = \vec{r}(a,b) = \gamma$. При цьому $\vec{\rho}\,'_\theta = \vec{r}\,'_t g'_\theta \neq \vec{0}$. Тому $\vec{\rho}(\theta)$ – нова регулярна параметризація γ.

■

Важливим випадком регулярної кривой є крива, що параметризована явно – у вигляді графіку гладкого відображення. Докладніше, підмножина

$$\gamma = \{(t, y^2, \ldots, y^n) \in I\!R^n \,|\, y^2 = f_2(t), \ldots, y^n = f_n(t)\}$$

називається *явно заданою кривою* в $I\!R^n$.

Очевидно, що якщо $f_i \in C^k$ $(k \geq 1)$, то γ – регулярна крива і

$$\vec{r}(t) = \big\{t, f_2(t), \ldots, f_n(t)\big\}$$

її регулярна параметризація на спільному інтервалі визначення функцій f_i.

Явна параметризація *плоскої* кривої має вигляд $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, y = f(x)\}$. Явно задану криву на площині можно подати параметричним рівнянням виду $\vec{r}(t) = \{t, f(t)\}$ або в координатній параметричній формі $(x = t, y = f(t))$. Якщо $f \in C^k$ $(k \geq 1)$, то крива γ – регулярна класу C^k $(k \geq 1)$, оскільки $\vec{r}\,'_t = \{1, f'\} \neq \{0, 0\}$ при всіх припустимих значеннях параметру t.

В просторі, явна параметризація регулярної кривої має вигляд $\vec{r}(t) = \{t, f(t), g(t)\}$ або в координатній параметричній формі $(x = t, y = f(t), z = g(t))$. Якщо $f, g \in C^k$ $(k \geq 1)$, то крива γ – регулярна класу C^k $(k \geq 1)$, оскільки $\vec{r}\,'_t = \{1, f', g'\} \neq \{0, 0, 0\}$ при всіх припустимих значеннях параметру t.

Теорема 1.1.1 *В околі кожної своєї точки регулярна параметризована кривая класу C^k $(k \geq 1)$ може бути параметризована явно за допомогою вектор-функції того ж класу регулярності.*

Доведення. Простий наслідок теореми про обернену функцію.

■

1.1.2 Поняття регулярної неявно заданої кривої.

Неявно заданою кривою на площині називається множина розв'язків рівняння $F(x, y) = 0$, для деякої функції $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$.

Сформульоване означення є зашироким щоб відповідати інтуїтивним уявленням про криву на площині. Наприклад, множина розв'язків рівняння $\big(x^2 + y^2\big)\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big)\big((x+1)^2 + (y+1)^2\big) = 0$ складається із трьох точок $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$. Таких прикладів можна навести безліч. Більше того, має місце наступна теорема.

Теорема 1.1.2 *(Уїтні) Для будь-якої замкненої підмножини $A \subset \mathbb{R}^n$ існує C^∞ функція $F : \mathbb{R}^n \to R^1$ така, що $F(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x \in A$.*

Відповідним звуженням класу кривих, що розглядаються в диференціальній геометрії є клас регулярних неявно заданих плоских кривих.

Означення 1.1.5 *Кожна зв'язна компонента підмножини $\gamma = \{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = 0\}$ називається регулярною класу C^k $(k \geq 1)$ неявно заданою кривою на площині, якщо*

- *$F \in C^k$ $(k \geq 1)$;*
- *її градієнт $\{F_x(p), F_y(p)\} \neq \{0, 0\}$ в кожній точці $p \in \gamma$.*

Твердження 1.1.2 *В околі будь-якої точки $p \in \gamma$ регулярна неявно задана крива класу C^k може бути параметризована явно за допомогою вектор-функції того ж класу регулярності.*

Доведення. Нехай
$$\gamma = \{(x,y) \subset I\!\!R^2 \,|\, F(x,y) = 0\}$$
неявно задана регулярна крива, причому $F \in C^k$. Нехай точка $p \in \gamma$ і $(F_x^2 + F_y^2)|_p \neq 0$. Тоді існує окіл U_p в якому $(F_x^2 + F_y^2)|_{U_p} \neq 0$. Припустимо, що $F_y|_{U_p} \neq 0$. За теоремою про неявну функцію, в околі U_p визначена функція $y = f(x) \in C^k$, така, що
$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$
Це означає, що в околі U_p
$$\gamma = \{(x,y) \in I\!\!R^2 \,|\, y = f(x)\},$$
що і завершує доведення.

■

Неявно заданою кривою в просторі називається множина розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
для деяких функцій $F : I\!\!R^3 \to I\!\!R^1$ та $\Phi : I\!\!R^3 \to I\!\!R^1$.

Сформульоване означення знову є заширoким щоб відповідати інтуїтивним уявленням про криву в просторі. Відповідним звуженням класу кривих у просторі, що розглядаються в диференціальній геометрії є клас регулярних неявно заданих кривих у просторі.

Означення 1.1.6 *Нехай $F : I\!\!R^3 \to I\!\!R^1$ та $\Phi : I\!\!R^3 \to I\!\!R^1$ дві функціїї класу C^m $(m \geq k \geq 1)$. Нехай $grad\ F = \{F_x, F_y, F_z\}$ та $grad\ \Phi = \{\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z\}$ відповідні векторні поля градієнтів заданих функцій. Ргулярною неявно заданою кривою в $I\!\!R^3$ називається кожна зв'язна компонента множини розв'язків системи рівнянь*
$$\Gamma = \big\{(x,y,z) \;\big|\; F(x,y,z) = 0,\ \Phi(x,y,z) = 0\big\} \tag{1.2}$$
за умови, що $grad\ F \times grad\ \Phi \neq \vec{0}$ на відповідній компоненті.

Твердження 1.1.3 *В околі будь-якої своєї точки регулярна неявно задана крива є регулярною парметризованою кривою класу регулярності C^k $(k \geq 1)$, де k то є менший з показників регулярності функцій, що її задають.*

Доведення. Нехай $\gamma = \big\{(x,y,z) \;\big|\; F(x,y,z) = 0,\ \Phi(x,y,z) = 0\big\}$ – регулярна неявно задана крива. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $F, \Phi \in C^k$ $(k \geq 1)$. Тоді $grad\ F$ та $grad\ \Phi$ є векторними полями в $I\!\!R^3$ класу регулярності C^{k-1}. Векторне поле $\vec{T}(x,y,z) = grad\ F \times grad\ \Phi$ є невиродженим $(\vec{T} \neq \vec{0})$ векторним полем на спільній області визначення функцій F та Φ, що лежить в $I\!\!R^3$, і має клас регулярності C^{k-1}. Система звичайних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = T_1(x(t), y(t), z(t)), \\[2mm] \frac{dy}{dt} = T_2(x(t), y(t), z(t)), \\[2mm] \frac{dz}{dt} = T_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases} \tag{1.3}$$

є автономною системою з щонайменше неперервними правими частинами. Нехай точка $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$. Додамо до системи (1.3) початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, z(0) = z_0.$$

Позначимо через $\{x(t), y(t), z(t)\}$ розв'язок отриманої задачі Коші. Розглянемо функції

$$f(t) = F(x(t), y(t), z(t)), \quad \varphi(t) = \Phi((x(t), y(t), z(t)).$$

Маємо

$$f(0) = 0, \quad \frac{df}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} = F_x T_1 + F_y T_2 + F_z T_3 = 0$$

з огляду на систему (1.3) і будову поля $\vec{T}$. Отже $f(t) \equiv 0$. Аналогічно, $\varphi(t) \equiv 0$. Отже, розв'язок задачі Коші системи (1.3) є параметризованою кривою $\gamma \subset \Gamma$, що параметризована вектор функцією

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

класу регулярності C^k, причому γ лежить у компоненті (лінійної) зв'язності Γ, що містить точку $\vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

■

Спостереження. *Відображення $f : R^k \to I\!R^m$ називається регулярним, якщо ранг матриці Якобі відображення максимальний, тобто дорівнює $min(k, m)$. Якщо $k < m$, то відображення називається іммерсією (вкладанням). Якщо $k > m$, то відображення називається субмерсією (накладанням). Якщо $k = m$, то відображення називається дифеоморфізмом.*

Умова регулярності параметризованої кривої означає існування регулярної параметризації $\vec{r} : (a, b) \to I\!R^n$, що має максимальний ранг. Тобто регулярна параметризація визначає іммерсію інтервалу в $I\!R^n$.

Умова регулярності неявно заданої кривої на площині означає, що функція $F(x, y) = 0$ задає відображення $F : I\!R^2 \to I\!R^1$ рангу 1, бо градієнт $F(x, y)$ є матрицею Якобі відображення F. Умова регулярності неявно заданої кривої в просторі означає, що функції $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$ задають відображення $G : I\!R^3 \to I\!R^2$ рангу 2, бо умова $grad\, F \times grad\, \Phi \neq \vec{0}$ означає, що ранг відображення $G = \big(F(x, y, z), \Phi(x, y, z)\big)$ дорівнює 2. В обох випадках регулярна неявно задана крива підмножиною множини розв'язків рівняння $F(x, y) = 0$ або $G(x, y, z) = (0, 0)$ для відображень, що є субмерсіями.

Регулярна заміна параметризації параметризованої кривої, про яку йдеться в Твердженні 1.1.1 означає, що така заміна є дифеоморфізмом.

Твердження 1.1.3 дозволяє в подальшому обмежуватися розглядом лише параметризованих регулярних кривих.

1.1.3 Дотична до регулярної кривої.

Нехай γ параметризована крива, а $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – її параметризація. Нехай $P \in \gamma$, причому точці P відповідає значення параметру $t = t_0$. Визначимо лівий U_- і правий U_+

півоколи точки P наступним чином

$$U_- = \{t : t_0 - \epsilon < t \le t_0\}, \quad U_+ = \{t : t_0 < t \le t_0 + \epsilon\}.$$

Лівою (правою) *січною* γ в точці P називається промінь $\overrightarrow{PQ}_-$ (відповідно, $\overrightarrow{PQ}_+$), де $Q_- \in U_-$ (відповідно, $Q_+ \in U_+$). Якщо існує границя

$$l_- = \lim_{Q_- \to P} \overrightarrow{PQ}_- \ ,$$

то граничний промінь l_- називається *лівою півдотичною* кривої γ в точці P. Аналогічно, якщо існує границя

$$l_+ = \lim_{Q_+ \to P} \overrightarrow{PQ}_+ \ ,$$

то граничний промінь l_+ називається *правою півдотичною* кривої γ в точці P.

- Якщо об'єднання $l = l_- \cup l_+$ є прямою, то ця пряма l називається *дотичною* до γ в точці P.
- Якщо $l_- = l_+ = l$, то точка P називається *точкою повернення* на γ, а відповідний промінь l називається *півдотичною* в точці P.
- В інших випадках точка P називається кутовою.

Твердження 1.1.4 *В будь-якій точці P регулярної кривої $\gamma \in C^1$, що параметризована регулярною вектор-функцією $\vec{r}(t)$, існує єдина дотична, напрямним вектором якої є $\vec{r}\,'(P)$.*

Доведення. Нехай $P \in \gamma$ і нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярна параметризація γ в околі точки P. Нехай точці P відповідає значення параметра $t = t_0$. Тоді точкам Q_- лівого півоколу будуть відповідати значення параметра виду $t_0 + \Delta t_- \quad (\Delta t_- < 0)$, а правого Q_+ – значення параметру виду $t_0 + \Delta t_+ \quad (\Delta t_+ < 0)$. Тоді вектори

$$\overrightarrow{PQ}_- = \vec{r}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{r}(t_0) \quad \text{та} \quad \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_-}$$

колінеарні і протилежно напрямлені, а вектори

$$\overrightarrow{PQ}_+ = \vec{r}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{r}(t_0) \quad \text{та} \quad \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_+}$$

колінеарні і однаково напрямлені. Оскільки $\vec{r}(t) \in C^1$, то

$$\lim_{Q_\pm \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_\pm) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_\pm} = \vec{r}\,'(t_0),$$

а значить граничні положення променів $\overrightarrow{PQ}_+ \upuparrows \vec{r}\,'(P)$ і $\overrightarrow{PQ}_- \uparrow\downarrow \vec{r}\,'(P)$ доповнюють один одного до прямої, що є дотичною до γ в точці P.

∎

Наслідок 1.1.1 *Нехай γ регулярна параметризована крива і $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – її регулярна параметризація. Нехай $P \in \gamma$ – точка на кривій, що відповідає значенню параметра $t = t_0$. В такому разі*

- *векторне параметричне рівняння дотичної має вигляд $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0)$;*
- *канонічне рівняння дотичної має вигляд $\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$.*

Нехай $\gamma : F(x, y) = 0$ *неявно* задана регулярна крива на площині, причому точці P відповідає точка (x_0, y_0), тоді вектор $\vec{N} = \left\{F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)\right\}$ ортогональний вектору дотичної до γ. Дійсно, якщо $x = x(t), y = y(t)$ параметричне рівняння кривої γ в околі точки P, то має місце тотожність $F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Диференціюючи, знайдемо $F_x\, x'_t + F_y\, y'_t \equiv 0$ і оскільки $\left\{x'_t, y'_t\right\}$ є вектором дотичної до γ, то вектор $\vec{N} = \left\{F_x, F_y\right\}$ є вектором нормалі дотичної. Значить, рівняння дотичної в точці P можно записати у вигляді

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Для неявно заданої кривої в просторі з доведення Твердження 1.1.3 випливає, що напрямний вектор дотичної такої кривої колінеарний векторному добутку градієнтів функцій, що задають криву. Тому, для неявно заданої кривої

$$\gamma = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0, \Phi(x, y, z) = 0\}$$

напрямний вектор дотичної в довільній точці кривої γ може бути обраний у вигляді

$$\vec{T} = grad\,(F) \times grad\,(\Phi),$$

що дозволяє написати рівняння дотичної в точці $P(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ у вигляді

$$\begin{cases} F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) + F_z(P)(z - z_0) = 0, \\ \Phi_x(P)(x - x_0) + \Phi_y(P)(y - y_0) + \Phi_z(P)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

1.1.4 Натуральна параметризація

Нехай $\gamma \in C^1$ регулярна кривая і $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1$ її регулярна параметризація на проміжку (a, b). В цьому випадку крива спрямна і довжина дуги кривої на проміжку $(t_0, t) \subset (a, b)$ визначається інтегралом

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\theta)| d\,\theta.$$

Розглянемо цей інтеграл як інтеграл із змінною верхньою межею. Тоді, як відомо, функція $s(t)$ буде гладкою, причому

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)| > 0, \quad t \in (a, b).$$

Отже, $s(t)$ монотонна гладка функція на (a, b), а значить існує обернена функція $t = t(s)$, причому $t'_s \neq 0$.

Таким чином, s можна прийняти в якості нового регулярного параметру на кривій і вона може бути параметризована вектор-функцією виду

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}\,(t(s)).$$

Означення 1.1.7 *Параметризація кривої параметром "довжина дуги" називається натуральною параметризацією кривої.*

Натуральний параметр за своїм означенням є геометричною властивістю кривої, бо зміна параметру призводить до формули заміни змінних у визначеному інтегралі, що не впливає на результат інтегрування.

Вправа 1.1.1 *Параметр t на регулярній кривій $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ є натуральним тоді і тільки тоді, коли*

$$|\vec{r}\,'(t)| \equiv 1.$$

З механічної точки зору, дотичний вектор до параметризованої кривої є вектором швидкості руху матеріальної точки. Тому натурально параметризовані криві ще називають *кривими одиничної швидкості.*

Використовуючи натуральний параметр, в околі точки $P \in \gamma$ можна ввести внутрішню локальну координату. Точці $Q_- \in U_-$ поставимо у відповідність довжину дуги PQ_- зі знаком "$-$ а точці $Q_+ \in U_+$ поставимо у відповідність довжину дуги PQ_+ зі знаком "$+$". Тоді точці P буде відповідати значення параметра $s = 0$.

Означення 1.1.8 *Властивість кривої називається геометричною, якщо вона не залежить від її параметризації.*

Головна задача диференціальної геометрії кривих полягає в знаходженні геометричних властивостей регулярних кривих. Натуральний параметр є дуже зручним для дослідження геометричних властивостей регулярної кривої. Однак на практиці натурально параметризувати криву досить складно. Наприклад, спроба обчислити довжину дуги еліпса призводить до еліптичних інтегралів, що не можна подати через елементарні функції. Тим більш ускладнене знаходження оберненої функції $t = t(s)$. Тому в подальшому, поруч з тим, що ми будемо знаходити необхідні вирази для геометричних величин використовуючи натуральну параметризацію, будемо знаходити відповідні вирази для випадку довільної регулярної параметризації або для випрадку неявного завдання кривої, що є доцільними для практичних обчислень.

1.2 Кривина кривої.

Нехай γ регулярна крива на площині чи в просторі. Обравши натуральну параметризацію, отримаємо на кривій одиничне дотичне векторне поле $\vec{\tau}\,(s)$. При зміщенні вздовж кривої поле $\vec{\tau}\,(s)$ може змінюватися тільки у напрямку, бо довжина його фіксована. "Відстежуючи" цю зміну, можна отримати кількісну міру викривленості лінії. Така кількісна міра називається кривиною.

Означення 1.2.1 *Нехай γ регулярна крива і точка $P \in \gamma$. Розглянемо точку Q близьку до P. Позначимо через Δs довжину дуги PQ і розглянемо в точці P і Q одиничні вектори дотичної $\vec{\tau}\,(P)$ і $\vec{\tau}\,(Q)$. Кут між цими одиничними векторами позначимо через $\Delta\theta$. Якщо існує границя*

$$\lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = k,$$

то величина k називається кривиною[1] *кривої в точці P.*

Кривина кривої є геометричною величиною, бо її означення містить лише кути між векторами і натуральний параметр, що є геометричними величинами. Очевидно, що за означенням *кривина прямої лінії* дорівнює 0. *Для кола* радіусу R має місце очевида формула $|\Delta s| = R\Delta\theta$, а тому його *кривина є сталою* величиною і дорівнює $\frac{1}{R}$.

Твердження 1.2.1 *В кожній точці регулярної кривої $\gamma \in C^2$ існує кривина. Причому*

- $k(s) = |\vec{r}''(s)|$ *для випадку натуральної параметризації;*
- $k(t) = \dfrac{|\vec{r}'_t \times \vec{r}''_t|}{|\vec{r}'_t|^3} = \dfrac{\sqrt{|\vec{r}'_t|^2|\vec{r}''_t|^2 - \langle\vec{r}'_t, \vec{r}''_t\rangle^2}}{|\vec{r}\,'_t|^3}$ *для випадку довільної регулярної параметризації.*

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація γ в околі точки P, якій відповідає значення параметра $s = s_0$. Тоді $\vec{\tau}(P) = \vec{r}'(s_0)$. Нехай точці Q відповідає значення параметра $s_0 + \Delta s$. Тоді $\vec{\tau}(Q) = \vec{r}'(s_0 + \Delta s)$. Позначимо через $\Delta\theta$ кут між векторами $\vec{\tau}(P)$ і $\vec{\tau}(Q)$. Легко бачити, що

$$|\vec{\tau}(Q) - \vec{\tau}(P)| = |\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Зауважимо, що в силу регулярності вектор-функції $\vec{r}(s)$, в точці P існує дотична. Значить $\vec{\tau}(Q) \to \vec{\tau}(P)$ при $|\Delta s| \to 0$, тобто

$$\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) \underset{|\Delta s| \to 0}{\longrightarrow} \vec{\tau}(s_0).$$

Отже, $|\Delta\theta| \to 0$ при $|\Delta s| \to 0$.

Розглянемо граничну рівність

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)|}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}.$$

Оскільки $\gamma \in C^2$, то границя зліва існує і дорівнює $|\vec{\tau}\,'(s)| = |\vec{r}\,''(s)|$. Значить існує і границя справа, причому

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = k(s_0).$$

Таким чином, якщо $\vec{r}(s)$ натуральна параметризація кривої, то

$$k(s) = |\vec{r}\,''(s)|.$$

[1]Означення кривини не прив'язане до вимірності простору, в якому розташована крива. Тому означення кривини переноситься в незмінному вигляді на криві в n-вимірному евклідовому просторі.

Нехай $\vec{r}(t) \in C^2$ довільна регулярна параметризація кривої. Перейдемо до натурального параметру і зауважимо, що $\vec{r}'_s \perp \vec{r}''_s$. Тому вираз для $k(s)$ можна подати у вигляді $k(s) = |\vec{r}'_s \times \vec{r}''_s|$. Покладемо $\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$. Тоді

$$\vec{r}'_s = \vec{r}'_t \frac{dt}{ds}, \quad \vec{r}''_s = \vec{r}''_t \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}'_t \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Отже

$$k(t) = k(s(t)) = |\vec{r}'_t \times \vec{r}''_t| \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = \frac{|\vec{r}'_t \times \vec{r}''_t|}{|\vec{r}'_t|^3}.$$

Зауважимо, що вираз у чисельнику можна подати у вигляді $|\vec{r}'_t \times \vec{r}''_t| = \sqrt{|\vec{r}'_t|^2|\vec{r}''_t|^2 - \langle\vec{r}'_t, \vec{r}''_t\rangle^2}$ і записати формулу для обчислення кривини як

$$k(t) = \frac{\sqrt{|\vec{r}'_t|^2|\vec{r}''_t|^2 - \langle\vec{r}'_t, \vec{r}''_t\rangle^2}}{|\vec{r}\,'_t|^3}.$$

Остання формула може бути застосована для обчислення кривини кривої в n-вимірному просторі.

■

Наслідок 1.2.1 *Кривина плоскої кривої класу C^2, що параметризована вектор-функцією $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ обчислюється за формулою*

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Кривина кривої γ класу C^2 в E^3, що параметризована вектор-функцією $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ обчислюється за формулою

$$k = \frac{|[\vec{r}'_t, \vec{r}''_t]|}{|\vec{r}'_t|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Кривина є функцією, що дійсно відрізняє прямі лінії від викривлених.

Твердження 1.2.2 *Регулярна крива $\gamma \in C^2$ є (частиною) прямої тоді і тільки тоді, коли $k \equiv 0$.*

Доведення. Необхідність очевидна. Якщо ж $k \equiv 0$, то параметризував криву натурально на інтервалі (s_1, s_2), отримаємо $k(s) = |\vec{r}''_s| \equiv 0$. Тому $\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$, где $\vec{a}, \vec{b}$ постійні вектори, а це рівняння прямої на інтервалі (s_1, s_2).

■

З механічної точки зору, кривина є швидкістю зміни швидкості (за напрямком), тобто інтерпретується як центральне прискорення.

Формулу для обчислення кривини неявно заданої кривої можна отримати з інших міркувань, що мають далекосяжні узагальнення. Нехай $\vec{\xi} = \{\xi^1(x, y), \xi^2(x, y)\}$

– одиничне векторне поле на площині. *Дивергенцією* векторного поля ξ називається функція
$$div(\xi) = \partial_x \xi^1 + \partial_y \xi^2.$$
Інтегральною траєкторією поля $\vec{\xi}$ називається крива, що є рішенням системи диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x'_t = \xi^1(x(t), y(t)), \\ y'_t = \xi^2(x(t), y(t)). \end{cases}$$
При фіксуванні початкових даних, інтегральна траєкторія визначена однозначно. Отже, рішення вказаної системи становить сімейство інтегральних траєкторій, що не перетинаються, кожна з яких визначається вибором початкових даних задачі Коші.

Для одиничного векторного поля $\vec{\xi}$, поле $\vec{\xi}^{\perp} = \{-\xi^2, \xi^1\}$ ортогональне до $\vec{\xi}$ і так само є одиничним. Його інтегральні траєкторії утворюють *сімейство ортогональних траєкторій* поля $\vec{\xi}$. Нехай $\{x(t), y(t)\}$ параметризація інтегральних траєкторій векторного поля $\xi^{\perp}$. В силу одиничності поля $\xi^{\perp}$, параметр t є для цих траєкторій натуральним. Ці траєкторії є розв'язком системи диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} x'_t = -\xi^2(x(t), y(t)), \\ y'_t = \xi^1(x(t), y(t)). \end{cases}$$
Для других похідних отримуємо вирази
$$\begin{cases} x''_t = -\partial_x \xi^2 x' - \partial_y \xi^2 y' = \xi^2 \partial_x \xi^2 - \xi^1 \partial_y \xi^2, \\ y''_t = \partial_x \xi^1 x' + \partial_y \xi^1 y' = -\xi^2 \partial_x \xi^1 + \xi^1 \partial_y \xi^1. \end{cases}$$
Тоді
$$\begin{aligned} x'_t y''_t - x''_t y'_t = -\xi^2(-\xi^2 \partial_x \xi^1 + \xi^1 \partial_y \xi^1) - \xi^1(\xi^2 \partial_x \xi^2 - \xi^1 \partial_y \xi^2) = \\ (\xi^2)^2 \partial_x \xi^1 - \xi^2 \xi^1 \partial_y \xi^1 - \xi^1 \xi^2 \partial_x \xi^2 + (\xi^1)^2 \partial_y \xi^2 = \\ (1 - (\xi^1)^2) \partial_x \xi^1 - \xi^2 \xi^1 \partial_y \xi^1 - \xi^1 \xi^2 \partial_x \xi^2 + (1 - (\xi^2)^2) \partial_y \xi^2 = \\ div\,(\vec{\xi}) - \xi^1(\xi^1 \partial_x \xi^1 + \xi^2 \partial_x \xi^2) - \xi^2(\xi^1 \partial_y \xi^1 + \xi^2 \partial_y \xi^2) = \\ div\,(\vec{\xi}) - \xi^1 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Big(\underbrace{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}_{1} \Big) - \xi^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Big(\underbrace{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}_{1} \Big) = div\,(\vec{\xi}). \end{aligned}$$
В силу натуральності параметра, отримуємо *вираз для кривини ортогональних траєкторій поля* $\vec{\xi}$ у вигляді
$$k = |div\,(\vec{\xi})|.$$
В якості наслідка, знаходимо, що для неявно заданої кривої $F(x, y) = 0$, формула для обчислення її кривини приводиться до вигляду
$$k = \left| div\, \left(\frac{grad\, F}{|grad\, F|} \right) \right| = \left| \partial_x \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) \right|.$$

В якості приклада, розглянемо коло радіуса R з центром на початку координат. Її неявне рівняння має вигляд $F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Для такої кривої $grad\, F = \{2x, 2y\}$. Нормований градієнт має вигляд

$$\xi = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

Тоді

$$\frac{d\xi^1}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\xi^2}{dy} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

і як наслідок

$$k = div\,(\xi) = \frac{x^2+y^2-x^2+x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

В точках кола $\sqrt{x^2+y^2} = R^2$, а значить $k = div\,(\xi)|_{x^2+y^2=R^2} = \frac{1}{R}$.

Вправа 1.2.1 Покажіть, що формулу для обчислення кривини регулярної кривої $F(x,y) = 0$ можна подати у вигляді

$$k = \frac{|F_{xx}{F_y}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}{F_x}^2|}{({F_x}^2 + {F_y}^2)^{3/2}}.$$

Вказівка: Покажіть, що криву γ можна параметризувати так, що $\vec{r}\,'_t = \{-F_y, F_x\} := \vec{T}$. Покажіть, далі, що $\vec{r}^{\,(p)}(t) = \nabla_{\vec{T}}^{(p-1)}\vec{T}$, де $\nabla_{\vec{T}}\vec{T} = T^1\partial_x\vec{T} + T^2\partial_y\vec{T}$.

Сферична індикатриса кривої.

Нехай γ – крива в E^n $(n \geq 2)$. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – її натуральна параметризація, $\vec{\tau}\,(s) = \vec{r}\,'(s)$ — одиничне дотичне векторне поле на γ.

Розглянемо криву γ^*, радіус-вектор якої $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,(s)$ задається вектор - функцією $\vec{\tau}$, а саме:

$$\gamma^* : \vec{\rho} = \vec{\tau}\,(s).$$

Оскільки $|\vec{\tau}\,| = 1$, то $\gamma^* \subset S^n$.

Зауважимо, що s в загальному випадку не є натуральним на кривій γ^*, Оскільки

$$\vec{\rho}\,'_s = \vec{\tau}\,'_s = k\vec{\nu},$$

а значить $|\vec{\rho}\,'_s| = k$.

Означення 1.2.2 *Підмножина $\gamma^* \subset S^n$, утворена годографом одиничної векторфункції дотичних кривої $\gamma \subset E^n$ називається сферичним образом або сферичною індикатрисою кривої γ.*

Порівняння довжин нескінченно малого відрізка кривої і його сферичного образу призводить до природнього геометричного опису кривини кривої.

Твердження 1.2.3 *Нехай $\gamma \in \mathcal{C}^2$ – регулярна крива. В околі кожної точки, в якій кривина $k > 0$, сферичний образ γ^* кривої γ є регулярною кривою. Якщо s^* – натуральний параметр на γ^*, а s – натуральний параметр на γ, то*

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s^*}{\Delta s}.$$

Доведення. Оскільки γ^* задається вектор-функцією $\vec{\rho}(s) = \vec{\tau}(s)$, то

$$\vec{\rho}\,'_s = k\,\vec{\nu}(s) \neq 0,$$

Оскільки $k > 0$. Значить крива γ^* регулярна і s – регулярний параметр на γ^*.

Нехай деякій точці P на кривій γ відповідає значення параметра $s = s_0$. Розглянемо окіл точки P, точкам якого відповідають значення параметра параметра $s = s_0 + \Delta s$. Тоді,

$$\Delta s = \int\limits_{s_0}^{s_0+\Delta s} ds, \quad \Delta s^* = \int\limits_{s_0}^{s_0+\Delta s} kds = k(\sigma)\Delta s, \quad \sigma \in (s_0, s_0 + \Delta s).$$

Звідси негайно отримуємо,

$$\frac{\Delta s^*}{\Delta s} = k(\sigma).$$

Перейшовши до границі, отримаємо

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s^*}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} k(\sigma) = k(s_0) = k(P).$$

■

Ремарка 1.2.1 *Твердження 1.2.3 може бути сформульоване дослівно для нормального сферичного образу $\gamma^* : \vec{\rho} = \vec{\nu}(s)$, бо $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}$ взаємно ортогональні. Фактично йдеться про границю відношення міри сферичного образу малого околу точки до міри самого околу. Означення Гаусової кривини поверхні дослівно повторює результат Твердження 1.2.3.*

Задачі.

- Нехай γ – регулярна замкнена крива в E^3 з кривиною $k > 0$. Тоді крива γ^* не вміщується в жодній відкритій півсфері. Якщо γ^* вміщується в замкненій півсфері, то γ – плоска крива.
- (Нерівність Фенхеля) Нехай γ – регулярна замкнена крива в E^3. Довести, що

$$\int\limits_{\gamma} k\,ds \geq 2\pi,$$

  причому рівність досягається для плоскої кривої, що гомеоморфна колу.
- Нехай γ^* – крива на сфері $\mathcal{S}^2$, що не вміщується в жодній відкритій півсфері. Тоді існує замкнена регулярна крива $\gamma \subset E^3$ така, що γ^* – її сферична індикатриса дотичних.

1.3 Репер Френе, тригранник Френе.

Нехай $\gamma \in C^2$ регулярна, натурально параметризована крива в E^3 і нехай в точці $P \in \gamma$ кривина $k(P) \neq 0$. Тоді $|\vec{r}''(P)| \neq 0$ і можна в єдиний спосіб визначити вектор

$$\vec{\nu}(P) = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}\,''|}(P).$$

Вектор $\vec{\nu}$ визначений в усіх точках кривої де $k \neq 0$ і називається *одиничним вектором головної нормалі*. Сукупність усіх одиничних векторів головних нормалей утворює векторне поле $\vec{\nu}(s)$ вздовж кривої, що називається *полем векторів головних нормалей.* Очевидно, що

$$\vec{\nu}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}\,''(s)|}.$$

Одиничні вектори дотичної $\vec{\tau}$ і головної нормалі $\vec{\nu}$ визначають одиничне векторне поле

$$\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}.$$

Векторне поле $\vec{\beta}$ називається *одиничним векторним полем бінормалей*[2] кривої.

Означення 1.3.1 *Трійка одиничних взаємно перпендикулярних векторних полів* $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ *називається* ***репером Френе*** *регулярної кривої.*

У кожній точці регулярної кривої з ненульовою кривиною, вектори репера Френе визначають три прямі, що називаються **ребрами** тригранника Френе. А саме, це

- **дотична** – пряма з напрямним вектором $\vec{\tau}$;
- **головна нормаль** – пряма з напрямним вектором $\vec{\nu}$;
- **бінормаль** – пряма з напрямним вектором $\vec{\beta}$;

Вектори репера Френе також визначають три площини:

- площина з базисом $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ називається **щільнодотичною площиною**;
- площина з базисом $(\vec{\tau}, \vec{\beta})$ називається **спрямною площиною**;
- площина з базисом $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$ називається **нормальною площиною**;

Щільнодотична, спрямна і нормальна площини утворюють **тригранник Френе**, або *супровідний тригранник* вздовж кривої. Не становить труднощів написати рівняння ребер і граней тригранника Френе для натурально параметризрваної кривої.

[2]Термін бінормаль означає друга, або побічна нормаль.

Ребра тригранника:

- $\vec{\rho} = \vec{r}\,(s) + \lambda\,\vec{\tau}\,(s)$ – дотична;
- $\vec{\rho} = \vec{r}\,(s) + \lambda\,\vec{\nu}(s)$ – головна нормаль;
- $\vec{\rho} = \vec{r}\,(s) + \lambda\,\vec{\beta}(s)$ – бінормаль.

Тут $\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки на відповідній прямій, λ – параметр на прямій.

Грані тригранника:

- $\left\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}\,(s), \vec{\beta}(s)\,\right\rangle = 0$ – щільнодотична площина;
- $\left\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}\,(s), \vec{\nu}(s)\,\right\rangle = 0$ – спрямна площина;
- $\left\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}\,(s), \vec{\tau}\,(s)\,\right\rangle = 0$ – нормальна площина.

Тут $\vec{\rho} = \{x, y, z\}$ – радіус вектор точки на відповідній площині.

Щоб написати рівняння ребер і граней тригранника Френе для *довільної регулярної параметризації*, скористаємося наступним спостереженням.

Твердження 1.3.1 *Нехай $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ регулярна параметризація кривої γ. Тоді в точках з ненульовою кривиною*

$$\vec{T} = \vec{r}'_t \upuparrows \vec{\tau}\,, \quad \vec{B} = \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t \upuparrows \vec{\beta}, \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} \upuparrows \vec{\nu}.$$

Доведення. Нехай s – натуральний параметр на даній кривій. Тоді $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'_t| > 0$. Звідси,

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'_s \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\,\frac{ds}{dt} \upuparrows \vec{\tau}\,.$$

Далі,

$$\vec{r}\,''_t = \vec{\tau}\,'_s \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2} = \vec{\nu}\,k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

а значить вектор $\vec{r}''_t$ лежить у щільно-дотичній площині кривої. Більш того, розглянемо формули переходу від базису $(\vec{\tau},\ \vec{\nu})$ до пари векторів $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$. В матричному записі

$$(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t) = (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \begin{pmatrix} \dfrac{ds}{dt} & \dfrac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці переходу

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{ds}{dt} & \dfrac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & k\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = |\vec{r}''_s|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 > 0,$$

а значить вектори $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$ лінійно незалежні і орієнтовані узгоджено з базисом $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$. Тому $\vec{B} \upuparrows \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t$. Тепер очевидно, що $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} \upuparrows \vec{\nu}$.

∎

Ремарка 1.3.1 *При заміні параметра $t = t(\theta)$ вектори репера Френе $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ змінюються наступним чином:*

$$\vec{T}(t) = \vec{T}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right), \quad \vec{N}(t) = \vec{N}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^4, \quad \vec{B}(t) = \vec{B}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3$$

Дійсно,

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'_\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right), \quad \vec{r}''_t = \vec{r}''_\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \vec{r}'_\theta\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

Значить,

$$\vec{T}(t) = \vec{T}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right), \quad \vec{B}(t) = \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t = \vec{r}'_\theta \times \vec{r}''_\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 = \vec{B}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3.$$

Нарешті,

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \vec{B}(\theta) \times \vec{T}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^4 = \vec{N}(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^4.$$

Зокрема, при заміні внутрішньої орієнтації (напрямки обходу) на кривій, що відповідає умові

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) < 0,$$

напрямки векторів $\vec{T}$ і $\vec{B}$ змінюється на протилежні, в той час як напрямок вектора $\vec{N}$ залишається незмінним (інваріантним).

З огляду на результат Твердження 1.3.1, для довільної регулярної параметризації кривої отримуємо:

Твердження 1.3.2 *Нехай $\vec{r} = \vec{r}(t)$ довільна регулярна параметризація регулярної кривої γ. Тоді рівняння ребер и граней триганника Френе можна записати у вигляді:*

Ребра триганника.

- $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda\vec{T}(t)$ – *дотична;*
- $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda\vec{N}(t)$ – *головна нормаль;*
- $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda\vec{B}(t)$ – *бінормаль.*

Тут $\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки на відповідній прямій, λ – параметр на прямій.

Грані триганника:

- $\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}(t), \vec{B}(t)\,\rangle = 0$ – *щільнодотична площина;*
- $\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}(t), \vec{N}(t)\,\rangle = 0$ –*спрямна площина;*
- $\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}(t), \vec{T}(t)\,\rangle = 0$ – *нормальна площина.*

Тут $\vec{\rho} = \{x, y, z\}$ – радіус вектор точки на відповідній площині.

Геометричні властивості щільнодотичної площини.

Геометрична властивість одиничного вектора бінормалі, а заодно і щільнодотичної площини, міститься в наступному твердженні.

Твердження 1.3.3 *Регулярна крива класу C^2 з кривиною $k \neq 0$ лежить в деякій площині (є плоскою) тоді і тільки тоді, коли $\vec{\beta}$ стала вектор-функція на кривій.*

Доведення. Нехай γ плоска крива і $\vec{r} = \vec{r}(s)$ її натуральна параметризація. Зафіксуємо на γ довільну точку P, що відповідає параметру $s = s_0$. Тоді γ лежить в площині $\left\langle \vec{\rho} - \vec{r}(s_0), \vec{n} \right\rangle = 0$, де $\vec{\rho} = \{x, y, z\}$ і вектор $\vec{n}$ є сталою вектор-функцією ($|\vec{n}| = 1$). Значить,

$$\langle \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{n} \rangle \equiv 0.$$

Диференціюючи двічі за параметром s, отримаємо

$$\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle \equiv 0, \qquad k\langle \vec{\nu}, \vec{n} \rangle \equiv 0.$$

Оскільки $k \neq 0$, то $\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{\nu}$. Тоді $\vec{n} = \pm\vec{\beta}$, а значить $\vec{\beta}$ стала вектор-функція на кривій.

Навпаки, нехай $\vec{\beta}\,' \equiv 0$. Зафіксуємо деяку точку $P \in \gamma$ і нехай точці P відповідає значення параметру $s = s_0$. Розглянемо площину

$$\langle \vec{\rho} - \vec{r}(s_0), \vec{\beta} \rangle = 0.$$

Відхилення $h(s)$ точки кривої від цієї площини є наступна величина

$$h(s) = \langle \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{\beta}\, \rangle.$$

Тоді

$$h'_s = \langle \vec{\tau}, \vec{\beta}\, \rangle \equiv 0,$$

бо $\vec{\tau}$ і $\vec{\beta}$ є вектори реперу Френе за умовою. Значить $h(s) = const$. Але $h(s_0) = 0$, отже $h \equiv 0$, а значить крива лежить у цій площині.

■

Щільнодотична площина "щільно прилягає" до точок кривої в наступному розумінні.

Твердження 1.3.4 *Нехай $\pi(P)$ щільнодотична площина кривої $\gamma \in C^2$ в точці $P \in \gamma$. Позначимо через $h(Q)$ відхилення точки $Q \in \gamma$ від площини $\pi(P)$, а через d – відстань від Q до P. Тоді*

$$\lim_{Q \to P} \frac{h}{d^2} = 0.$$

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація кривої і точці P відповідає значення параметру $s = s_0$. Рівняння щільнодотичної площини в точці P має вигляд $\langle \vec{\rho} - \vec{r}(s_0), \vec{\beta}(s_0) \rangle = 0$. Тоді

$$h(s) = \left\langle\, \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{\beta}(s_0)\, \right\rangle, \quad d = |\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)|.$$

Розкладаючи вектор-функцію $\vec{r}\,(s)$ за формулою Тейлора, отримаємо

$$\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0) = \vec{r}\,'(s_0)\Delta s + \frac{1}{2}\vec{r}\,''(s_0)\Delta s^2 + \vec{o}(\Delta s^2) = \Delta s\, \vec{\tau}(s_0) + \frac{1}{2}k\Delta s^2\, \vec{\nu} + \vec{o}(\Delta s^2).$$

$$d = |\vec{r}\,'(s_0)\Delta s + \vec{o}(\Delta s)| = |\vec{\tau}\,(s_0)\Delta s + \vec{o}(\Delta s)|.$$

Тому, $h(s) = o(\Delta s^2)$, а $d^2 \sim \Delta s^2$, отже, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{h}{d^2} = 0$.

■

Вправа 1.3.1 Доведіть, що

- Якщо всі щільнодотичні площини регулярної кривої проходять через фіксовану точку, то крива лежить в деякій площині.
- Якщо все нормальні площини даної кривої проходять через фіксовану точку, то крива лежить на деякій сфері з центром в цій точці.
- Крива, всі спрямні площини яких проходять через фіксовану точку, називається спрямною (rectifying)[3]. Покажіть, що спрямні криві описуються наступною теоремою.

  Нехай $\vec{\rho}\,(t)$ – натурально параметризована крива на одиничній сфері $S^2 \subset E^3$ з центром у початку координат, що не містить дуги великого кола сфери. Крива $\vec{r}\,(t) = f(t)\vec{\rho}\,(t)$ є спрямною, тоді і тільки тоді, коли $f(t) = \frac{a}{\cos(t+t_0)}$ для певних констант a і t_0.

1.4 Крутіння кривої в E^3. Формули Френе.

Означення 1.4.1 *Нехай $\gamma \subset E^3$ регулярна крива і P, Q — дві близькі точки на γ. Позначимо через $\Delta\theta$ кут між щільнодотичними площинами $\pi(P)$ і $\pi(Q)$. Якщо існує границя*

$$\lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = \varkappa(P),$$

то $\varkappa(P)$ називається крутінням кривої в точці P.

Означення крутіння містить лише геометричні величини, тому крутіння є геометричною функцією на кривій. Плоска крива має нульове крутіння, бо $\Delta\theta \equiv 0$.

Твердження 1.4.1 *У кожній точці P регулярної кривої $\gamma \in C^3$, в якій кривина $k(P) \neq 0$, існує крутіння. Причому*

- $\varkappa(s) = |\vec{\beta}\,'| = \dfrac{|(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')|}{k^2}$, *для натуральної параметризації $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$;*
- $\varkappa = \dfrac{|(\vec{r}\,'_t, \vec{r}_t\,'', \vec{r}_t\,''')|}{|[\vec{r}_t\,', \vec{r}_t\,'']|^2} = \dfrac{|(\vec{r}_t\,', \vec{r}_t\,'', \vec{r}_t\,''')|}{|\vec{r}_t\,'|^2|\vec{r}_t\,''|^2 - \left\langle \vec{r}_t\,', \vec{r}_t\,'' \right\rangle^2}$ *для довільної регулярної параметризації $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$.*

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$ натуральна параметризація γ, причому $P \leftrightarrow s = s_0, \quad Q \leftrightarrow s_0 + \Delta s$. Тоді кут між щільнодотичними площинами в точках P і Q дорівнює кут між бінормалями в цих точках. Тому,

$$|\vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}(s_0)| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

[3] S. Deshmukh, B.-Y. Chen, S. H. Alshammari *On rectifying curves in Euclidean 3-space.* Turk. J. Math. (2018) 42: 609 – 620.

Оскільки крива $\gamma \in C^3$ і $k(P) \neq 0$, то в точці P існує едина щільнодотична площина. Тому якщо $\Delta s \to 0$, то $\Delta\theta \to 0$, а значить маємо,

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{|\vec\beta(s_0+\Delta s) - \vec\beta(s_0)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Якщо границя зліва існує, то у такому випадку отримаємо $|\vec\beta\,'| = \varkappa(s_0)$. Покажемо, що якщо $k(P) \neq 0$ і $\gamma \in C^3$, то границя зліва існує. Дійсно,

$$\vec\beta(s) = [\vec\tau(s), \vec\nu(s)] = \left[\vec r\,', \frac{1}{k}\,\vec r\,''\right].$$

Зауважимо, що $k = |\vec r\,''|$ і отже існує $k' = \dfrac{\langle\, \vec r\,'', \vec r\,'''\,\rangle}{|\vec r\,''|}$. Оскільки $\vec r \in C^3$ і $k \neq 0$, то існує

$$\vec\beta\,' = \left[\vec r\,'', \frac{1}{k}\,\vec r\,''\right] + \left[\vec r\,', \frac{1}{k}\,\vec r\,'''\right] + \left[\vec r\,', -\frac{k'}{k^2}\,\vec r\,''\right].$$

Отже, $\varkappa = |\vec\beta\,'|$. Знайдемо вираз $\varkappa$ через радіус-вектор кривої γ. З огляду на те, що $\vec\beta_s\,' \perp \vec\beta$, запишемо розкладання $\vec\beta_s\,' = a\vec\tau + b\vec\nu$. З іншого боку,

$$\vec\beta\,' = [\vec\tau, \vec\nu\,]\,' = [\vec\tau\,', \vec\nu\,] + [\vec\tau, \vec\nu\,'] = [k\vec\nu, \vec\nu\,] + [\vec\tau, \vec\nu\,'] = [\vec\tau, \vec\nu\,'],$$

а значить $\vec\beta\,' \perp \vec\tau$. Отже, $a \equiv 0$ і, як наслідок, $\vec\beta\,' = \pm\varkappa\,\vec\nu$. Таким чином,

$$\varkappa = |\langle\, \vec\beta\,', \vec\nu\,\rangle| = |\langle\, [\vec\tau, \vec\nu_s\,'], \vec\nu\,\rangle\,| = \left|\left\langle \left[\vec r\,', \left(\frac{1}{k}\,\vec r\,''\right)'\right], \frac{1}{k}\,\vec r\,''\right\rangle\right| = \frac{|(\vec r\,', \vec r\,'', \vec r\,''')|}{k^2}.$$

Якщо параметризація не натуральна, то переходячи до натуральної параметризації $\vec r\,(s) = \vec r\,(t(s))$, отримаємо

$$\vec r\,'_s = \vec r\,'_t \frac{dt}{ds}; \quad \vec r\,''_s = \vec r\,''_t \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec r\,'_t \frac{d^2t}{ds^2};$$
$$\vec r\,'''_s = \vec r\,'''_t \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2\vec r\,''_t \frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec r\,''_t \frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec r\,'_t \frac{d^3t}{ds^3}.$$

З огляду на те, що $|\vec r_t\,'| = \frac{ds}{dt}$, прямим обчисленням знаходимо

$$(\vec r\,'_s, \vec r\,''_s, \vec r\,'''_s) = (\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = (\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)\,\frac{1}{|\vec r\,'_t|^6}.$$

Для ненатуральної параметризації $k = \frac{|[\vec r\,'_t, \vec r\,''_t]|}{|\vec r\,'_t|^3}$, тому

$$\varkappa(t) = \frac{|(\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)|}{|[\vec r\,'_t, \vec r\,''_t]|^2}.$$

■

Крутіння є функцією, що розрізняє плоскі і просторові криві.

Твердження 1.4.2 *Регулярна крива $\gamma \in C^3$ є плоскою тоді і тільки тоді, коли $\varkappa \equiv 0$.*

Доведення. Припустимо, що $\varkappa \equiv 0$. Тоді для натуральної параметризації γ, отримаємо $|\vec{\beta}\,'| = 0$. Отже, $\vec{\beta}$ – стала вектор-функція. За Пропозицією 1.3.3 γ – плоска крива. Обернене твердження тривіальне.

∎

Наслідок 1.4.1 *Регулярна класу C^3 крива є плоскою тоді і тільки тоді, коли $(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''') = 0$ для будь-якої її регулярної параметризації $\vec{r} = \vec{r}(t)$.*

Орієнтоване крутіння кривої.

Нагадаємо, що для крутіння ми отримали вираз $\varkappa = |\langle \vec{\beta}\,', \vec{\nu} \rangle|$. З'ясуємо геометричний зміст величини під знаком модуля. Похідна $\vec{\beta}'$ визначає напрямок і швидкість миттєвого повороту $\vec{\beta}$ в площині $\vec{\nu}, \vec{\beta}$. Припишемо знак крутіння, користуючись правилом

$$\varkappa_{or} = \begin{cases} \varkappa & \text{если} \quad \vec{\beta}' \uparrow\downarrow \vec{\nu}; \\ -\varkappa & \text{если} \quad \vec{\beta}' \uparrow\uparrow \vec{\nu}. \end{cases}$$

Геометрично це означає, що ми вважаємо крутіння додатним, якщо миттєвий поворот вектора $\vec{\beta}$ здійснюється проти ходу годинникової стрілки в площині $\vec{\nu}, \vec{\beta}$, якщо спостерігати цей поворот з кінця вектора $\vec{\tau}$. Таким чином, $\varkappa_{or} = -\langle \vec{\beta}\,', \vec{\nu} \rangle$. Звідси знаходимо,

$$\vec{\beta}\,' = -\varkappa_{or}\, \vec{\nu}.$$

Твердження 1.4.3 *Нехай γ – регулярна крива класу C^3 і $\vec{r}(t)$ – її регулярна параметризація. Тоді*

$$\varkappa_{or} = \frac{(\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t, \vec{r}\,'''_t)}{|[\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t]|^2}.$$

Доведення. Нехай крива параметризована натурально. Оскільки $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$, то $\vec{\beta}' = [\vec{\tau}\,', \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \vec{\nu}\,'] = [\vec{\tau}, \vec{\nu}\,']$. Отже, при натуральній параметризації $\varkappa_{or} = -(\vec{\tau}, \vec{\nu}\,', \vec{\nu}) = (\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\nu}\,')$. Перейдемо до довільного параметру t. Тоді

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'_t|, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'_t}{|\vec{r}\,'_t|},$$

$$\vec{\nu} = \frac{1}{k}\,\vec{\tau}\,'_t \frac{dt}{ds} = \frac{1}{k}\, \frac{\vec{r}\,''_t |\vec{r}\,'_t| - \vec{r}\,'_t \dfrac{\langle \vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t \rangle}{|\vec{r}\,'_t|}}{|\vec{r}\,'_t|^2} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{k}\, \frac{\vec{r}\,''_t}{|\vec{r}\,'_t|^2} + Lin(\vec{r}\,');$$

$$\vec{\nu}\,' = \frac{1}{k}\, \frac{\vec{r}\,'''_t}{|\vec{r}\,'_t|^2} \frac{dt}{ds} + Lin(\vec{r}\,', \vec{r}\,'') = \frac{1}{k}\, \frac{\vec{r}\,'''_t}{|\vec{r}\,'_t|^3} + Lin(\vec{r}\,', \vec{r}\,''),$$

де Lin означає лінійну комбінацію відповідних векторів. Для довільного параметру

$$k = \frac{|[\vec{r}_t, \vec{r}\,''_t]|}{|r'_t|^3}.$$

Отже

$$\varkappa_{or} = \frac{(\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)}{k^2\, |\vec r\,'_t|^6} = \frac{(\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)}{\frac{|[\vec r\,'_t, \vec r\,''_t]|^2}{|\vec r\,'_t|^6} |\vec r\,'_t|^6} = \frac{(\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t)}{|[\vec r\,'_t, \vec r\,''_t]|^2}.$$

■

Такий вибір знака крутіння узгоджується з орієнтацією простору в наступному розумінні.

Наслідок 1.4.2 *Орієнтоване крутіння $\varkappa_{or} > 0$ тоді і тільки тоді, коли $(\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t) > 0$, тобто якщо трійка векторів $\vec r\,'_t, \vec r\,''_t, \vec r\,'''_t$ орієнтована додатно.*

Умовимось надалі використовувати крутіння зі знаком.

Твердження 1.4.4 ***(Формули Френе)*** *Нехай $\gamma \in C^3$ регулярна крива, параметризована натурально. Позначимо через $\vec\tau, \vec\nu$ і $\vec\beta$ одиничні векторні поля дотичної, головної нормалі і бінормалі. Тоді мають місце формули*

$$\begin{cases} \vec\tau\,' = k\vec\nu \\ \vec\nu\,' = -k\vec\tau + \varkappa\vec\beta \\ \vec\beta' = -\varkappa\vec\nu \end{cases} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} \vec\tau \\ \vec\nu \\ \vec\beta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec\tau \\ \vec\nu \\ \vec\beta \end{pmatrix}.$$

Доведення.

Оскільки γ – натурально параметризована крива, то за визначенням $\vec\tau\,' = k\vec\nu$. за вибором знака крутіння, $\vec\beta' = -\varkappa\vec\nu$. Оскільки $|\vec\nu| = 1$, то $\vec\nu' \perp \vec\nu$ і значить

$$\vec\nu\,' = a\vec\tau + b\beta.$$

Коефіцієнти a і b знайдемо, використовуючи тотожності $\left\langle \vec\nu, \vec\tau \right\rangle = 0$, $\left\langle \vec\nu, \vec\beta \right\rangle = 0$. А саме,

$$a = \left\langle \vec\nu\,', \vec\tau \right\rangle = -\left\langle \vec\nu, \vec\tau\,' \right\rangle = -k, \quad b = \left\langle \vec\nu\,', \vec\beta \right\rangle = -\left\langle \vec\nu, \vec\beta' \right\rangle = \varkappa.$$

■

Якщо крива плоска, то $\varkappa \equiv 0$ і формули Френе запишуться простіше.

Твердження 1.4.5 ***(Формули Френе для плоскої кривої)*** *Нехай γ – регулярна натурально параметризована крива класу C^2 з кривиною $k > 0$. Для похідних одиничних векторів дотичній $\vec\tau(s)$ і головної нормалі $\vec\nu(s)$ мають місце формули*

$$\begin{cases} \vec\tau\,' = k\,\vec\nu, \\ \vec\nu\,' = -k\,\vec\tau\,. \end{cases}$$

Формули Френе дозволяють визначити локальну структуру регулярної кривої в термінах проекції кривої на грані супроводжуючого тригранника.

Твердження 1.4.6 *В околі кожної своєї точки загального положення ($k > 0, \varkappa \neq 0$), проекції кривої на площині репера Френе з точністю до нескінченно малих порядку $m \geq 2$ мають вигляд:*

- $y = \frac{1}{2}k\,x^2$ *в проекції на щільнодотичну площину*

- $z = \frac{1}{6}k\varkappa x^3$ *в проекції на спрямну площину;*
- $\begin{cases} y = \frac{1}{2}k\, s^2 \\ z = \frac{1}{6}k\varkappa\, s^3 \end{cases}$ *в проекції на нормальну площину,*

де k і $\varkappa$ – величини кривини і крученні обчислені в точці, що розглядається.

Доведення. Нехай γ – регулярна класу C^2 крива, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – її натуральна параметризація. Обраній точці P поставимо у відповідність значення параметра $s = 0$. Зв'яжемо з точкою P декартову прямокутну систему координат, направивши вісь Ox вздовж $\vec{\tau}$, вісь Oy – вздовж $\vec{\nu}$, вісь Oz – вздовж $\vec{\beta}$. Тоді з розкладання за формулою Тейлора, в околі точки P маємо:

$$\vec{r}(s) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{=\vec{0}} + \vec{r}\,'(0)s + \frac{1}{2}\vec{r}\,''(0)s^2 + \frac{1}{6}\vec{r}\,'''(0)s^3 + \vec{o}(s^2).$$

Використовуючи формули Френе, обчислимо

$$\vec{r}\,'(0) = \vec{\tau}(0), \quad \vec{r}\,''(0) = \vec{\tau}\,'(0) = k(0)\,\vec{\nu}(0),$$
$$\vec{r}\,'''(0) = k'(0)\,\vec{\nu}(0) + k(0)(-k(0)\vec{\tau}(0) + \varkappa(0)\vec{\beta}(0)).$$

Таким чином,

$$\vec{r}(s) = s\vec{\tau}(0) + \frac{1}{2}k(0)s^2\,\vec{\nu}(0) + \frac{1}{6}(k'(0)\,\vec{\nu}(0) - k^2(0)\vec{\tau}(0) + k(0)\varkappa(0)\vec{\beta}(0))\,s^3 + \vec{o}(s^2).$$

Отже, з точністю до малих більш сокого порядку, проекції кривої на площини реперу Френе мають вигляд:

- $\begin{cases} x = s \\ y = \frac{1}{2}k(0)\, s^2 \end{cases}$ в проекції на щільнодотичну площину;
- $\begin{cases} x = s \\ z = \frac{1}{6}k(0)\varkappa(0)\, s^3 \end{cases}$ в проекції на спрямну площину;
- $\begin{cases} y = \frac{1}{2}k(0)\, s^2 \\ z = \frac{1}{6}k(0)\varkappa(0)\, s^3 \end{cases}$ в проекції на нормальну площину.

що і завершує доведення.

■

Наслідок 1.4.3 *Вектор головної нормалі кривої спрямований всередину опуклості проекції кривої на щільнодотичну площину. Зокрема, якщо крива* ***плоска****, то в околі кожної точки $P \in \gamma$, в якій $k(P) > 0$, регулярна крива γ класу C^2* ***є локально опуклою****. Вектор головної нормалі завжди спрямований всередину опуклості кривої.*

Доведення. Досить зауважити, що проекція кривої на щільнодотичну площину є параболою з додатним старшим коефіцієнтом, при цьому $\vec{\nu}$ спрямований якраз в сторону додатної піввісі Oy.

Якщо крива плоска, то її щільнодотична площина в точності збігається з площиною, що містить цю криву. Незалежно від параметризації (див. Пропозицію 1.3.1), вектор головної нормалі спрямований всередину області, що обмежена параболою.

■

1.5 Основна теорема теорії кривих в E^3.

Будь-яка регулярна крива класу C^3 має визначені кривину і крутіння. Виявляється, що ці функції утворюють повний набір інваріантів кривої в тому розумінні, що повністю її визначають.

Теорема 1.5.1 *Нехай $k(s) > 0$ і $\varkappa(s)$ – неперервні функції параметру s. Тоді в E^3 існує едина з точністю до руху крива γ, така, що*

a) s – її натуральний параметр,

b) $k(s)$ і $\varkappa(s)$ – її кривина і крутіння.

Доведення. [2] Позначимо через $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ – три невідомі вектор-функції. Оскільки $k(s)$ і $\varkappa(s)$ задані функції, то можемо скласти систему

$$\begin{cases} \vec{\xi}\,' = & k\,\vec{\eta}, \\ \vec{\eta}\,' = & -k\,\vec{\xi} + \varkappa\,\vec{\zeta}, \\ \vec{\zeta}\,' = & -\varkappa\,\vec{\eta}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Це автономна лінійна система диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами і, як відомо, при фіксованих початкових умовах, ця система має єдиний розв'язок. Покажемо, що цей розв'язок складається з трьох одиничних, взаємно-ортогональних вектор-функцій, орієнтація яких може бути обрана додатною.

Введемо в розгляд 6 функцій:

$$f_1 = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle; \quad f_2 = \langle \vec{\eta}, \vec{\eta} \rangle; \quad f_3 = \langle \vec{\zeta}, \vec{\zeta} \rangle;$$
$$g_1 = \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle; \quad g_2 = \langle \vec{\xi}, \vec{\zeta} \rangle; \quad g_3 = \langle \vec{\eta}, \vec{\zeta} \rangle,$$

де $\vec{\xi}, \vec{\zeta}, \vec{\eta}$ – розв'язок системи (1.4). Тоді знайдемо

$$\begin{cases} f_1' = 2\langle \vec{\xi}, \vec{\xi}' \rangle = 2k\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = 2kg_1; \\ f_2' = 2\langle \vec{\eta}, \vec{\eta}\,' \rangle = 2\langle \vec{\eta}, -k\vec{\xi} + \varkappa\vec{\zeta} \rangle = -2kg_1 + 2\varkappa g_3; \\ f_3' = 2\langle \vec{\zeta}, \vec{\zeta}\,' \rangle = -2\varkappa\langle \vec{\zeta}, \vec{\eta} \rangle = -2\varkappa g_3; \\ g_1' = \langle \vec{\xi}\,', \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\xi}, \vec{\eta}\,' \rangle = \langle k\vec{\eta}, \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\xi}, -k\vec{\xi} + \varkappa\vec{\zeta} \rangle = k(f_2 - f_1) + \varkappa g_2; \\ g_2 = \langle \vec{\xi}\,', \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\xi}, \vec{\zeta}\,' \rangle = \langle k\vec{\eta}, \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\xi}, -\varkappa\vec{\eta} \rangle = kg_3 - \varkappa g_1; \\ g_3' = \langle \vec{\eta}\,', \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\eta}, \vec{\zeta}\,' \rangle = \langle -k\vec{\xi} + \varkappa\vec{\zeta}, \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\eta}, -\varkappa\vec{\eta} \rangle = -kg_2 + \varkappa(f_3 - f_2). \end{cases} \tag{1.5}$$

Це знову автономна система диференціальних рівнянь і вона також має єдиний розв'язок при фіксованих початкових даних. Покладемо

$$\begin{cases} f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1, \\ g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = 0. \end{cases}$$

А тепер зауважимо, що ці функції задовольняють і самій системі (1.5). Отже, вони і визначають її єдиний розв'язок. Таким чином, для всіх s

$$\begin{cases} |\vec{\xi}|^2 = |\vec{\eta}|^2 = |\vec{\zeta}|^2 = 1, \\ \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \langle \vec{\xi}, \vec{\zeta} \rangle = \langle \vec{\eta}, \vec{\zeta} \rangle = 0. \end{cases}$$

Більш того, $(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}) = const$ на розв'язках. Дійсно,

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta})' = (\vec{\xi}', \vec{\eta}, \vec{\zeta}) + (\vec{\xi}, \vec{\eta}', \vec{\zeta}) + (\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}') \equiv 0.$$

Виберемо $(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta})|_{s=0} = +1$.

Якщо тепер $\vec{\xi}(s)$ – розв'язок, то вектор-функція

$$\vec{r}(s) = \int\limits_0^s \vec{\xi}(t)dt + \vec{r}_0$$

визначає криву, що задовольняє умовам

- $|\vec{r}\,'_s| = 1$, а значить s – натуральний параметр на кривій, а поле $\vec{\xi}$ – одиничне дотичне векторне поле на кривій;
- $\vec{r}\,''_s = \vec{\xi}'_s = k\vec{\eta}$, а значить k – кривина і $\vec{\eta}$ – поле головних нормалей, а поле $\vec{\zeta} = \vec{\xi} \times \vec{\eta}$ – поле векторів бінормалі кривої;
- крутіння цієї кривої $\tilde{\varkappa} = -\langle \vec{\eta}', \vec{\zeta} \rangle = -\langle -k\vec{\xi} + \varkappa\vec{\zeta}, \vec{\zeta} \rangle = \varkappa$.

Таким чином, крива з заданими початковими умовами визначена в єдиний спосіб.

Нехай є два набори початкових умов: $\{P_1, \vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\zeta}_1\}$ та $\{P_2, \vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2, \vec{\zeta}_2\}$. Кожна з цих умов визначає криву – або γ_1, або γ_1 відповідно.

Сумістимо P_1 і P_2 паралельним перенесенням, а репери $\vec{\xi}_1, \vec{\eta}_1, \vec{\zeta}_1$ і $\vec{\xi}_2, \vec{\eta}_2, \vec{\zeta}_2$ сумістимо за допомогою повороту і, можливо, симетрії. В силу єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь, криві γ_1 і γ_2 також суміщуються.

■

Доведена теорема дозволяє визначати криві в просторі, наперед задаючи їх кривину і крутіння.

Означення 1.5.1 *Задання кривої неперервними функціями $k = k(s) > 0$, $\varkappa = \varkappa(s)$ називається натуральним рівнянням кривої в просторі.*

Очевидно, що плоска крива визначиться функціями $k(s)$ і $\varkappa(s) \equiv 0$.

Ремарка 1.5.1 *Менш вживаним в геометрії кривих є так званий репер Бішопа.*[4] *Він складається з одиничного вектору дотичної $\vec{\tau}(s)$ та двох векторів $\vec{\xi}(s)$ та $\vec{\eta}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{\xi}(s)$, що розташовані в нормальній площині кривої та задовольняють умовам $\vec{\xi}' \parallel \vec{\tau}$, $\vec{\eta}' \parallel \vec{\tau}$. Аналоги формул Френе для реперу Бішопа мають вигляд*

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_1 & 0 & 0 \\ -\mu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

де $\mu_1 = \mu_1(s)$ та $\mu_2 = \mu_2(s)$ деякі функції. Покажіть, що нормаль $\vec{\xi}$ реперу Бішопа розкладається за репером Френе у вигляді $\xi = \cos\phi\,\vec{\nu} + \sin\phi\,\vec{\beta}$, де $\phi = -\int \varkappa(s)ds$.

[4] L. R. Bishop. *There is More Than One Way to Frame a Curve*, Amer. Math. Monthly, 82 (3) (1975), 246-251.

1.6 Елементи геометрії кривих на площині

1.6.1 Орієнтована кривина плоскої кривої.

Оскільки напрямок вектору головної нормалі кривої в загальній точці не залежить від параметризації, то на орієнтованій площині кривині кривої можна природним чином приписати знак.

Означення 1.6.1 *Нехай γ плоска крива з кривиною $k > 0$. Орієнтованою кривиною k_{or} кривої γ називається функція*

$$k_{or} = \begin{cases} +k, & \text{якщо репер } (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \text{ орієнтований додатно,} \\ -k, & \text{якщо репер } (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \text{ орієнтований від'ємно.} \end{cases}$$

Для з'ясування знаку орієнтованої кривини не обов'язково переходити до натурального параметру, оскільки згідно з Пропозицією 1.3.1 (див. доведення) в точках кривої γ з кривиною $k > 0$ вектори $(\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t)$ лінійно незалежні і орієнтація реперу $(\vec{\tau}\,, \vec{\nu})$ співпадає з орієнтацією базису $(\vec{r}\,'_t, \vec{r}\,''_t)$. В якості наслідку цього спостереження, отримуємо наступне.

Твердження 1.6.1 *Нехай $\gamma \in C^2$ регулярна плоска крива, параметризована вектор-функцією $\vec{r} = \{x(t), y(t)\}$. Орієнтована кривина кривої γ обчислюється за формулою*

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Доведення. Обчислимо $\vec{r}\,'_t = \{x', y'\}$, $\vec{r}\,''_t = \{x'', y''\}$. Кривина кривої обчислюється за формулою

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Значить, в точках з ненульовою кривиною вектори $\vec{r}\,'$ і $\vec{r}\,''$ лінійно незалежні і утворюють базис, орієнтація якого узгоджена з орієнтацією репера $(\vec{\tau}\,, \vec{\nu})$. Цей базис орієнтований додатно, якщо

$$\det \begin{pmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{pmatrix} > 0.$$

Значить, $k_{or} = +k$ якщо $x'y'' - y'x'' > 0$ і $k_{or} = -k$ якщо $x'y'' - y'x'' < 0$. Отже, використовуючи результат Наслідку1.2.1, отримаємо

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad \text{якщо} \quad (x'y'' - y'x'') > 0;$$
$$k_{or} = -\frac{-(x'y'' - x''y')}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad \text{якщо} \quad (x'y'' - y'x'') < 0.$$

Таким чином,

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

■

Розглянемо на орієнтованій площині регулярну криву γ і введемо в розгляд *кутову функцію* $\alpha(s)$ як *орієнтований кут* між одиничним вектором дотичної $\vec{\tau}(s)$ в кожній точці γ і фіксованим напрямом на площині. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що цей напрям збігається з додатним напрямком осі Ox декартовій прямокутної системи координат xOy. Якщо γ параметризована параметром $t \in (a, b)$, то $\alpha : (a, b) \to I\!R$ так само є функцією цього параметру.[5]

Твердження 1.6.2 *Нехай γ це C^2-регулярна крива на орієнтованій площині, що параметризована натурально. Якщо $\alpha(s)$ – кутова функція, то*

$$k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|, \quad k_{or} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація γ. Тоді $\vec{r}\,' = \vec{\tau}$ – одиничний напрямний вектор дотичної. За означенням кутової функції,

$$\vec{r}\,' = \{\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)\}.$$

Тоді

$$\vec{r}\,'' = \{-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)\}\frac{d\alpha}{ds}.$$

Звідси,

$$k = |\vec{r}\,''| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Орієнтована кривина

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

■

Ремарка 1.6.1 *Додатність орієнтованої кривини означає зростання кутової функції і навпаки. Тому, на ділянках з додатною кривиною дотичний вектор закручується в* у напрямі вектора головної нормалі*, а в точках з від'ємною кривиною - в протилежний бік.*

При зміні внутрішньої орієнтації на кривій або зміні орієнтації на площині знак орієнтованої кривини змінюється на протилежний. Це дає можливість локально *узгодити* внутрішню орієнтацію на кривій з орієнтацією площини, що призводить до наступного визначення.

Означення 1.6.2 *Внутрішня локальна орієнтація на регулярній кривій називається індукованою, якщо орієнтація репера $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ додатна.*

Індукована орієнтація завжди існує і, в разі вибору на кривій індукованої орієнтації, можна не розрізняти кривину і орієнтовану кривину. На кривій з індукованою орієнтацією $k_{or} = k \geq 0$.

[5] Функція α є багатозначною, оскільки орієнтований кут між напрямами визначається з точністю до цілого кратного кута 2π. Вибором початкового значення визначається неперервна гілка цієї функції, яка і бере участь в подальших розглядах.

Інтегральна кривина плоскої кривої.

Означення 1.6.3 *Нехай γ – регулярна плоска крива класу C^2. Величина*

$$\omega(\gamma) = \int\limits_\gamma k_{or}\, ds,$$

називаєтьсяя орієнтованою (або відносною) інтегральною кривиною γ, а величина

$$|\omega|(\gamma) = \int\limits_\gamma k\, ds,$$

називаєтьсяя абсолютною інтегральною кривиною γ.

Геометричний зміст інтегральної кривини проясняє наступне твердження.

Твердження 1.6.3 *Нехай γ – крива на площині, причому A – початкова точка кривої, B – кінцева точка. Тоді*

$$\omega(\gamma) = \alpha(B) - \alpha(A).$$

Доведення. Нехай γ параметризована натурально так, що $A \leftrightarrow (s = 0)$, $B \leftrightarrow (s = l)$, де l – довжина кривої (на заданому проміжку). Тоді

$$\omega(\gamma) = \int\limits_\gamma k_{or}\, ds = \int\limits_0^l \frac{d\alpha}{ds} ds = \int\limits_0^l d\alpha = \alpha(l) - \alpha(0) = \alpha(B) - \alpha(A).$$

■

Геометрично, це означає, що *відносна інтегральна кривина плоскої кривої дорівнює сумарному орієнтованому куту повороту дотичній при обході даної ділянки кривої.*

Що ж стосується абсолютної інтегральної кривини, то вона може бути виражена через відносну в наступному вигляді.

Твердження 1.6.4 *Нехай γ – регулярна плоска крива класу C^2 з заданим напрямком обходу (внутрішньою орієнтацією). Тоді*

$$\gamma = \left(\bigcup_i \gamma_i^+\right) \bigcup \left(\bigcup_k \gamma_k^-\right),$$

де γ_i^+ – дуги з індукованою орієнтацією, а γ_k^- – дуги з орієнтацією, що протилежна до індуковані. Абсолютна інтегральна кривина кривої γ дорівнює

$$|\omega|(\gamma) = \sum_i \omega(\gamma_i^+) - \sum_i \omega(\gamma_k^-).$$

Доведення тривіальне. Геометрично, *абсолютна інтегральна кривина кривої дорівнює сумарному куту повороту дотичній при обході кривої без урахування орієнтації*, тобто знака приросту кутової функції.

Зазначені геометричні інтерпретації інтегральної кривини дозволяють *визначити* інтегральну кривину плоскої кривої навіть *для кусково-регулярної кривої.*

Означення 1.6.4 *Нехай* $\gamma = \bigcup_i \gamma_i$ *кусково-регулярна крива на площині з фіксованим напрямом обходу. Інтегральною відносною кривиною* γ *називається величина*

$$\omega(\gamma) = \sum_i \omega(\gamma_i) + \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

де $\omega(\gamma_i)$*— інтегральні кривини регулярних частин кривої, а* α_i *– орієнтовані кути між півдотичними в кутових точках.*

Наприклад, якщо γ є трикутник, то $\omega(\gamma) = 3\pi - \pi = 2\pi$.

1.6.2 Основна теорема теорії кривих на площині.

Теорема існування 1.5.1 допускає спрощення та уточнення для випадку плоскої кривої та використання орієнтованої кривини.

Твердження 1.6.5 *Нехай* $k(s)$ *– неперервна функція параметру* $s \in [a, b]$*. Тоді на площині існує єдина, з точністю до руху, крива для якої* k *– функція її орієнтованої кривини, а* s *– її натуральний параметр.*

Доведення. Нехай $k(s)$ – задана функція. Введемо в розгляд функцію

$$\alpha(s) = \int_a^s k(t)dt + \alpha_0. \tag{1.6}$$

Тоді, очевидно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s).$$

Будемо шукати на площині криву для якої $\alpha(s)$ – то кутова функція для вектору дотичної.

Нехай $\vec{r} = \{x(s), y(s)\}$ – радіус-вектор шуканої кривої. Тоді за постановкою завдчі

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha(s), \\ y' = \sin\alpha(s). \end{cases}$$

Значить, функції $x(s)$ і $y(s)$ можуть бути легко знайдені інтегруванням

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_0^s \cos\alpha(s)\, ds + x_0, \\ y(s) = \displaystyle\int_0^s \sin\alpha(s)\, ds + y_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

При цьому, крива визначається з точністю до паралельного переносу на вектор $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ е формулі (1.7) і повороту на кут α_0 у формулі (1.6), тобто власного руху.

■

Радіусом кривини R плоскої кривої називається функція $R = \frac{1}{k}$, де k – кривина цієї кривої. Використовуючи радіус кривини, рівняння (1.7) можуть бути переписані відносно параметра α у вигляді

$$\begin{cases} x(\alpha) = \int\limits_0^\alpha R(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha + x_0, \\ x(\alpha) = \int\limits_0^\alpha R(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha + y_0, \end{cases}$$

Для цього достатньо зауважити, що $ds = \frac{ds}{d\alpha}\, d\alpha = R\, d\alpha$. Наприклад, якщо $R(\alpha) = R_0 = const$, то крива зі сталою кривиною $k = 1/R_0$ є колом радіуса R_0.

1.6.3 Овали.

Локальна опуклість кривої не гарантує її опуклості. Тобто локальна опуклість не гарантує того, що дана крива обмежує опуклу фігуру на площині. Але при додатковій вимозі до кривої, бути гомеоморфної до кола, опуклість кривої можна забезпечити. Такі криві називаються *овалами.*

Означення 1.6.5 *Овалом називається плоска регулярна замкнута крива без самоперетинів, з кривиною* $k > 0$.

Вправа 1.6.1 *Покажіть, що овал обмежує опуклу фігуру, тобто є опуклою кривою "в цілому".*

Найпростішим прикладом овалу є еліпс. Овали мають ряд характерних глобальних геометричних властивостей, тобто властивостей "в цілому". Деякі з них ми розглянемо в цьому розділі.

Означення 1.6.6 *Вершиною овалу класу* C^3 *називається точка локального екстремуму функції* $k(s)$.

Теорема 1.6.1 *Нехай* γ *– овал класу* C^3, *тоді він має принаймні чотири вершини.*

Доведення. Нехай γ – овал, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ його натуральна параметризація. Тоді $k(s)$ – неперервна функція на колі $k : S^1 \to \mathbb{R}$. Коло компактне і за теоремою Вейєрштрасса функція $k(s)$ досягає свого найбільшого і найменшого значень. Нехай $M_1, M_2 \in S^1$ такі, що

$$k(M_1) = \min k(s), \quad k(M_2) = \max k(s).$$

Оскільки $\gamma \in C^3$, то $k(s) \in C^1$, а значить в точках екстремуму

$$k'(M_1) = 0, \quad k'(M_2) = 0.$$

Так що на овалі маємо принаймні дві вершини.

Якщо точки локального максимуму і локального мінімуму не є ізольованими, то $k' = 0$ на деякому інтервалі. Отже, вершин нескінченно багато і доводити нічого. Тому будемо вважати, що вершини овалу ізольовані, тобто в точках M_1 і M_2 відбувається зміна знаку похідної.

Нехай в точці M_1 відбувається зміна знаку похідної з$(-)$ на $(+)$, а в точці M_2 з $(+)$ на $(-)$. Припустимо, що інших точок зі зміною знаку немає. Тоді на відповідних дугах

$$k'(M_1 \overset{\frown}{} M_2) \geq 0, \quad k'(M_2 \overset{\frown}{} M_1) \leq 0.$$

Розглянемо пряму $M_1 M_2$. Оскільки овал обмежує опуклу фігуру, то ця пряма перетинає овал тільки в точках M_1 і M_2. Отже, точки дуг $(M_1 \overset{\frown}{} M_2)$ і $(M_2 \overset{\frown}{} M_1)$ знаходяться в різних півплощинах відносно прямої $M_1 M_2$. Запишемо рівняння прямої $M_1 M_2$ у вигляді

$$\langle \vec{\rho}, \vec{a} \rangle + D = 0 \quad (|\,\vec{a}\,| = 1,\ \vec{\rho} = \{x, y\}).$$

Тоді функція відхилення точок овалу від цієї прямої буде мати вигляд

$$h(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle + D.$$

Припустимо, що для всіх точок дуги $(M_1 \overset{\frown}{} M_2)$ відхилення $h(s) > 0$. Тоді для точок дуги $(M_2 \overset{\frown}{} M_1)$ відхилення $h(s) < 0$.

Розглянемо функцію

$$f(s) = k'(s)\, h(s).$$

Тоді $f(s) \geq 0$ для усіх точок овалу, причому $f(s) = 0$ тільки в ізольованих точках, а значить

$$\int_0^l f(s)\, ds > 0,$$

де l — довжина овалу.

З іншого боку,

$$\int_0^l f(s)\, ds = \int_0^l \Big(\langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle + D \Big) k'(s)\, ds =$$

$$\int_0^l \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle k'(s)\, ds + D \int_0^l k'(s)\, ds = \int_0^l \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle k'(s)\, ds + k(s)\Big|_0^l =$$

$$k \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle \Big|_0^l - \int_0^l k \langle \vec{\tau}, \vec{a} \rangle\, ds = \int_0^l \langle -k\vec{\tau}, \vec{a} \rangle\, ds = \int_0^l \langle \vec{\nu}\,', \vec{a} \rangle\, ds =$$

$$\int_0^l \langle \vec{\nu}, \vec{a} \rangle'\, ds = \langle \vec{\nu}, \vec{a} \rangle \Big|_0^l = 0.$$

У цих обчисленнях ми використовували періодичність (з періодом l) функцій $k(s)$, $\langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle$, $\langle \vec{\nu}, \vec{a} \rangle$ і другу формулу Френе.

Ми прийшли до суперечності припустивши, що у функції $k'(s)$ немає іншик точок зміни знаку. Отже, на якійсь дузі існує як мінімум дві точки зі зміною знаку $k'(s)$, тобто є ще дві вершини.

■

Наслідок 1.6.1 *Якщо число вершин овалу скінченне, то воно парне.*

Позначимо через $\alpha(s)$ – кут між дотичною до овалу і віссю Ox. Тоді, обравши на овалі індуковану орієнтацію, отримаємо

$$k = \frac{d\alpha}{ds} > 0$$

для усіх точок овалу. Це означає, що овал може бути параметризований в цілому параметром α.

Опорною функцією овалу називається відхилення початку координат відносно дотичної до овалу. Справедлива наступна лема.

Лема 1.6.1 *Нехай $h(\alpha)$ – опорна функція овалу класу C^4, параметризованого кутовим параметром α. Тоді для радіуса кривини овалу $R(\alpha)$ справедлива формула*

$$R(\alpha) = h(\alpha) + h''(\alpha),$$

де похідна обчислюється за параметром α.

Доведення. Оберемо на овалі індуковану орієнтацію. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$ – параметризація овалу кутовим параметром α. За формулами Френе,

$$\vec{\tau}\,'_s = k\vec{\nu} = \frac{d\alpha}{ds}\vec{\nu}, \quad \vec{\nu}\,'_s = k\vec{\tau} = -\frac{d\alpha}{ds}\vec{\tau}\,.$$

Відносно параметру α формули Френе набувають простішого вигляду, а саме,

$$\vec{\tau}\,'_\alpha = \vec{\nu}, \quad \vec{\nu}\,'_\alpha = -\vec{\tau}\,.$$

Для опорної функції h отримаємо вираз $h(\alpha) = -\langle\, \vec{r}, \vec{\nu}\,\rangle$. Тоді

$$h' = -\langle\, \vec{r}\,'_\alpha, \vec{\nu}\,\rangle - \langle\, \vec{r}, \vec{\nu}\,'_\alpha\,\rangle = \langle\, \vec{r}, \vec{\tau}\,\rangle,$$

$$h'' = \langle\, \vec{r}\,'_\alpha, \vec{\tau}\,\rangle + \langle\, \vec{r}, \vec{\tau}\,'_\alpha\,\rangle = \langle\, \vec{r}\,'_s\frac{ds}{d\alpha}, \vec{\tau}\,\rangle + \langle\, \vec{r}, \vec{\nu}\,\rangle = R + \langle\, \vec{r}, \vec{\nu}\,\rangle = R - h.$$

Звідки $h'' + h = R$.

■

Шириною овалу називається відстань між його паралельними дотичними. Нехай γ – натурально параметризований овал і нехай $\omega(\alpha)$ — ширина овалу, подана як функція параметру α.

Твердження 1.6.6 *Якщо γ – овал класу C^4, то його довжина може бути знайдена за формулою*

$$l = \int\limits_0^\pi \omega(\alpha)\, d\alpha.$$

Доведення. Нехай γ – овал і l – його довжина. Для спрощення міркувань, розмістимо овал так, щоб він охоплював початок координат і оберемо на ньому індуковану орієнтацію. Тоді початок координат виявиться у "верхній" півплощині відносно кожною дотичною, а значить $h(\alpha) > 0$ для усіх точок овалу і більш того, $\omega(\alpha) = h(\alpha) + h(\alpha + \pi)$. Виконаємо наступне нескладне обчислення.

$$l = \int_0^l ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\alpha}\, d\alpha = \int_0^{2\pi} R(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \Big(h(\alpha) + h''(\alpha)\Big)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} h(\alpha)\, d\alpha +$$

$$\int_0^{2\pi} h''(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} h(\alpha)\, d\alpha + h'(\alpha)\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} h(\alpha)\, d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} h(\alpha)\, d\alpha =$$

$$\int_0^{\pi} h(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{\pi} h(\alpha + \pi)\, d\alpha = \int_0^{\pi} \Big(h(\alpha) + h(\alpha + \pi)\Big)\, d\alpha = \int_0^{\pi} \omega(\alpha)\, d\alpha.$$

■

Задачі.

- Довести, що регулярна крива класу C^2 яка гомеоморфна колу і має кривину $k > 0$ є опуклою кривою.
- Доведіть теорему про довжину овалу для овалів класу C^2.
  Вказівка: Покажіть, що $\omega(\alpha) = \left\langle\, \vec{\rho}\,(\alpha + \pi) - \vec{\rho}\,(\alpha), \vec{\nu}\,(\alpha \,\right\rangle$.
- Точки овалу, в яких дотичні до овалу паралельні називаються *протилежними*. Доведіть, що відрізок, що з'єднує протилежні точки на овалі *сталої ширини* ортогональний відносно дотичних в цих точках.
- Нехай γ — овал і $\vec{\tau}$ — одиничне дотичне векторне поле на γ. Доведіть, що $\vec{\tau}\,'' \parallel \vec{\tau}$ принаймні в 4-х точках.
- Нехай γ – плоска крива яка гомеоморфна колу. Нехай $L(\gamma\,)$ – її довжина, $Q(\gamma\,)$ – площа області, що обмежена кривою γ . Тоді $L^2 \geq 4\pi Q$.

1.6.4 Обгортка сімейства плоских кривих.

З наочної точки зору, обгортка сімейства кривих на площині — це крива, що в кожній своїй точці є дотичною хоча б до однієї кривої сімейства і кожним своїм відрізком дотична до нескінченної кількості кривих сімейства. Таке означення потребує певної формалізації і уточнення об'єкту що розглядається.

Означення 1.6.7 *Регулярним параметризованим сімейством плоских регулярних неявно заданих кривих називається множина*

$$\{\gamma_{\,\alpha}\}_{\alpha\in I\!R} = \Big\{(x, y) \in I\!R^2 \;\Big|\; F(x, y; \alpha) = 0,\; F_x^2 + F_y^2 \neq 0\Big\}_{\alpha\in I\!R}, \tag{1.8}$$

де $F : I\!R^2(x, y) \times I\!R^1(\alpha) \to I\!R^1$ *– гладка функція класу* $C^k(k \geq 1)$ *на своїй області визначення. Змінна* α *називається параметром сімейства.*

Тлумачення означення полягає в тому, що при кожному фіксованому значенні параметру $\alpha = \alpha_0$ рівняння $F(x, y; \alpha_0) = 0$ визначає неявно задану регулярну криву на площині.

Означення 1.6.8 *Нехай* $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *– регулярне сімейство регулярних кривих на площині, що задане рівнянням* $F(x, y; \alpha) = 0$. *Регулярна крива* $\Gamma = \{x(t), y(t)\}$ *називається локальною обгорткою сімейства* $\{\gamma_\alpha\}$, *якщо існує функція* $\alpha = \alpha(t)$ *така, що виконуються наступні умови:*

(1) $F(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0$;

(2) $grad\ F\ \perp \Gamma'$ *в кожній точці, що задовольняє (1);*

(3) $\alpha'_t \neq 0$ *на всьому інтервалі зміни параметру* t.

Умова (1) означає, що обгортка і певна крива сімейства мають спільну точку, умова (2) означає, що в спільній точці обгортка і крива сімейства мають спільну дотичну, умова (3) означає, що обгортка має єдину спільну точку з кожною з кривих сімейства. Умоіва (3) означає також, що обгортку можна параметризувати параметром сімейства.

Означення 1.6.9 *Дискримінантною множиною сімейства плоских регулярних кривих називається множина*

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; F(x, y; \alpha) = 0,\ F_\alpha(x, y; \alpha) = 0\right\},$$

де $F(x, y; \alpha)$ *– функція, що визначає сімейство.*

Твердження 1.6.7 *Якщо обгортка* $\Gamma(t) = \{x(t), y(t)\}$ *регулярного сімейства регулярних кривих існує, то з необхідністю* $\Gamma \subset \mathcal{D}$.

Доведення. Дійсно, нехай обгортка існує. Тоді з умови (1) означення 1.6.8 випливає, що $F_x x'_t + F_y y'_t + F_\alpha \alpha'_t = 0$. З умови (2) означення випливає, що $F_x x'_t + F_y y'_t = 0$. А з умови (3) означення випливає, що $F_\alpha = 0$. Значить $\Gamma \subset \mathcal{D}$.

■

На загал, дискримінантна множина не співпадає з обгорткою. Має місце наступна достатня умова існування обгортки.

Твердження 1.6.8 *Нехай* $F(x, y; \alpha) = 0$ *– рівняння щонайменше* C^2 *- регулярного сімейства регулярних кривих. Відкрита підмножина дискримінантної множини, що визначається умовою*

$$\det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ F_{x\alpha} & F_{y\alpha} \end{pmatrix} \neq 0$$

є локальною обгорткою сімейства.

Доведення. Система рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y; \alpha) = 0, \\ F_\alpha(x, y; \alpha) = 0, \end{cases}$$

що визначає дискримінантну множину, визначає відображення $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ з матрицею Якобі

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_\alpha \\ F_{x\alpha} & F_{y\alpha} & F_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

За умовою, ранг цієї матриці досягається на перших стовпцях. Тож за теоремою про неявне відображення, існує локальний розв'язок системи у вигляді гладких функцій

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha = t. \end{cases}$$

Очевидно, що в цьому випадку функція прикріплення $\alpha(t)$, має вигляд $\alpha = t$, а значить $\alpha'_t = 1 > 0$ і розв'язок системи задовольняє умовам (1) – (3) означення обгортки. ■

Ремарка 1.6.2 *Назагал, означення сімейства плоских кривих не включає умови регулярності кожної кривої сімейства. Тож у дискримінантній множині можуть міститися і особливі точки кривих сімейства. Сімейства плоских кривих виникають також як інтегральні траєкторії розв'язку диверенціального рівняння виду* $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. *В такому разі обгортка сімейства складається з точок, в яких порушуються умови единості розв'язку задачі Коші. В дискримінантну множину входять і точки нерегулярності інтегральних траєкторій, тобто точки в яких похідна від вектор-функції, що парметризує траєкторію, дорівнює нульовому вектору. Докладніше про обгортки*[6] *та їх зв'язок з теорією катастроф*[7].

Дискримінантна множина (і обгортка, якщо існує) містить точки перетину нескінченно близьких кривих сімейства. Дійсно, розглянемо систему рівнянь для знаходження точок перетину кривих γ_α і $\gamma_{\alpha+\Delta\alpha}$, а саме,

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0, \\ F(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Припустимо, що (x, y) є розв'язком системи. Тоді, як наслідо системи

$$F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha) = 0.$$

Перейшовши до границі

$$0 = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = F_\alpha(x, y, \alpha)$$

приходимо до висновку, що граничний розв'язок (x, y) задовольняє двом рівнянням, а саме $\{F(x, y, \alpha) = 0, F_\alpha(x, y, \alpha) = 0\}$. Це означає, що $(x, y) \in \mathcal{D}$.

---

[6] Залгаллер А.А. *Теория огибающих.* М.: Наука, 1975.

[7] Брус Дж., Джиблин П. *Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей.* М.: Мир, 1988.

Обгортка однопараметричного сімейства прямих.

Твердження 1.6.9 *Сімейство прямих на площині*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - h(\alpha) = 0,$$

що параметризоване параметром α, має регулярну обгортку на всіх інтервалах де її радіус кривини $R(\alpha) = h + h'' \neq 0$. Параметричне рівняння обгортки має вигляд

$$\vec{r}(\alpha) = h\vec{n}(\alpha) + h'\vec{t}(\alpha),$$

де $\vec{n}(\alpha) = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ поле одиничних нормалей сімейства, $\vec{t}(\alpha) = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$.

Доведення.

Покладемо $\vec{r} = \{x, y\}$. Тоді рівняння сімейства запишеться у вигляді

$$F(x, y; \alpha) = \langle\vec{r}, \vec{n}(\alpha)\rangle - h(\alpha) = 0.$$

Задане сімейство задовольняє достатній умові з Твердження 1.6.8, тому обортку знайдемо з системи

$$\begin{cases} F(x, y; \alpha) = \langle\vec{r}, \vec{n}\rangle - h(\alpha) = 0, \\ F_\alpha(x, y; \alpha) = \langle\vec{r}, \vec{t}\rangle - h'(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\langle\vec{n}, \vec{t}\rangle = 0$, то $\vec{r}$ легко знаходиться з отриманої системи, а саме

$$\vec{r}(\alpha) = h\vec{n} + h'\vec{t}.$$

Вектор швидкості обгортки

$$\vec{r}'_\alpha = h'\vec{n} + h\vec{t} - h'\vec{n} + h''\vec{t} = (h + h'')\vec{t}.$$

Якщо позначити через s натуральний параметр на обгортці, то ми маємо

$$\vec{r}(s)\frac{ds}{d\alpha} = (h + h'')\vec{t}.$$

Зауважимо, що $h(\alpha)$ не що інше як опорна функція обгортки, а з геометричного тлумвчення параметру α випливає, що $|\frac{d\alpha}{ds}| = k$, де k – кривина обгортки. Звідси

$$R(\alpha) = |h + h''|$$

Всюди де $R(\alpha) \neq 0$ параметризація обгортки параметром α є регулярною.

∎

Твердження 1.6.10 *Обгортка сімейства прямих, що задана рівнянням*

$$A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha) = 0.$$

існує на кожному проміжку зміни параметру α де вектор-функції $\vec{N} = \{A, B\}$ і $\vec{N}' = \{A', B'\}$ не колінеарні. Параметричне рівняння обгортки має вигляд:

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\left(\dfrac{C}{B}\right)' \Big/ \left(\dfrac{A}{B}\right)' \\ y(\alpha) = -\left(\dfrac{C}{A}\right)' \Big/ \left(\dfrac{B}{A}\right)' \end{cases}$$

Доведення. Задане сімейство задовольняє достатній умові з Твердження 1.6.8, тому обортку знайдемо з системи

$$\begin{cases} A(\alpha)x + B(\alpha)y = -C(\alpha), \\ A'(\alpha)x + B'(\alpha)y = -C'(\alpha). \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\frac{CB'-C'B}{AB'-A'B} = -\left(\frac{C}{B}\right)'/\left(\frac{A}{B}\right)', \\ y(\alpha) = -\frac{AC'-A'C}{AB'-A'B} = -\left(\frac{C}{A}\right)'/\left(\frac{B}{A}\right)', \end{cases}$$

що і завершує доведення.

■

Каустіка, еволюта і евольвента.

Поняття каустики виникло в оптиці і означає місце згущення світлових променів. Нехай γ – плоска регулярна крива. Тоді t-еквідистантою кривої γ називється крива γ^*, точки якої знаходяться на відстані t від точок γ вздовж нормалей до γ. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація γ, то параметризація γ^* запишеться у вигляді

$$\vec{\rho} = \vec{r}(s) + t\vec{\nu}(s), \tag{1.9}$$

де $\vec{\nu}(s)$ – поле одиничних векторів головних нормалей кривої γ. В оптиці t-еквідистанта інтерпретується як хвильовий фронт в момент часу t, що був згенерований джерелом γ. Вектор-функцію 1.9 можна інтерпретувати як сімейство прямих (променів), що виходять з точок заданої кривої у напрямку нормалі до неї. Дискримінінтна множина цього сімейства (або обгортка, якщо існує) містить точки перетину нескінченно близьких променів, тобто каустіку. В геометрії обгортка сімейства нормалей плоскої кривої називається *еволютою.*

Твердження 1.6.11 *На кожній дільниці регулярної кривої де кривина $k \neq 0$ існує еволюта. Параметричне рівняння еволюти має вигляд*

- $\vec{\rho} = \vec{r}(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$ *для натурально параметризованої кривої;*

- $\vec{\rho} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k_{or}}\vec{n}(t)$, *де k_{or} – орієнтована кривина кривої і $\vec{n}(t) = \frac{\{-y'(t),x'(t)\}}{\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}}$ одиничний додатно орієнтований вектор нормалі кривої $\vec{r}(t)$;*

- *в координатному виразі $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ рівняння еволюти запишеться у вигляді*

$$\begin{cases} \tilde{x} = x(t) - \dfrac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}\, y', \\ \tilde{y} = y(t) + \dfrac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}\, x', \end{cases}$$

Доведення. Запишемо рівняння сімейства нормалей кривої у вигляді:

$$F(x,y;s) = \left\langle\, \vec\rho - \vec r(s), \vec\tau\ (s)\,\right\rangle = 0,$$

де $\vec\rho = \{x,y\}$ радіус-вектор точки на нормалі. Зауважимо, що $grad\ F = \vec\tau$, а $\frac{d}{ds}\, grad\ F = k\vec\nu$, де k – кривина кривої. Це означає, що на проміжках де $k \neq 0$ виконані умови Твердження 1.6.8. Тож дискримінінтна множина збігається з дискримінантною і може бути знайдена з системи

$$\begin{cases} \left\langle\, \vec\rho - \vec r(s), \vec\tau\ (s)\,\right\rangle = 0, \\ -1 + k\left\langle\, \vec\rho - \vec r(s), \vec\nu(s)\,\right\rangle = 0. \end{cases}$$

З огляду на те, що вектори $\vec\tau$ і $\vec\nu$ одиничні і взаємно ортогональні, знаходимо

$$\vec\rho = \vec r(s) + \frac{1}{k}\,\vec\nu(s).$$

Нехай тепер $\vec r = \vec r(t)$ довільна регулярна параметризація кривої. Позначимо

$$\vec T = \{x'_t, y'_t\}, \quad \vec N = \{-y'_t, x'_t\}$$

додатно орієнтований рухливий репер вздовж кривої. Тоді

- $\vec N \upuparrows \vec\nu$ якщо репер $(\vec T, \vec N)$ орієнтований однаково з репером $(\vec\tau\,, \vec\nu)$;
- $\vec N \uparrow\downarrow \vec\nu$ якщо репер $(\vec T, \vec N)$ орієнтований протилежно до реперу $(\vec\tau\,, \vec\nu)$.

У першому випадку $k_{or} = k$, у другому $k_{or} = -k$. Але тоді в будь-якому випадку $\dfrac{1}{k_{or}}\vec N \upuparrows \dfrac{1}{k}\vec\nu$. Нормуючи вектор $\vec N$, отримаємо $\dfrac{1}{k_{or}}\vec n = \dfrac{1}{k}\vec\nu$, що і було потрібно.

Для виводу координатного виразу рівняння еволюти лостатньо скористатися виразом для орієнтованої кривини кривої у випадку не натуральної регулярної параметризації.

■

Вектор-функцію (1.9) ще можна розглядати як відображення

$$\vec\rho\,:\ I\!R^2(s,t) \to I\!R^2(x,y).$$

В такій інтерпретпції рівняння (1.9) задають так зване *нормальне експоненціальне відображення.* Критичною точкою нормального експоненціального відображення називається точка, в якій ранг цього відображення не є максимальним. Матриця Якобі відображення (1.9) складається із стовбчиків $(\vec\rho_{\,s}, \vec\rho_{\,t})$. Докладніше,

$$\Big(\ (1-kt)\vec\tau\,,\ \vec\nu\ \Big).$$

Це відображення є локальним дифеоморфізмом якщо $t < \dfrac{1}{k}$, а значить для $t < \dfrac{1}{k}$ параметри (s,t) визначають локальну систему координат на площині, яка називається локальною *напівгеодезичною системою координат на площині з базовою кривою* γ. Якщо ж $t = \frac{1}{k}$, то настає падіння рангу цього відображення. Отже, множина точок нерегулярності нормального експоненціального відображення описується рівнянням $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \dfrac{1}{k}\,\vec{\nu}(s)$ і співпадає з еволютою.

Поставимо зворотне запитання: *яким має бути джерело випромінювання, щоб задана крива була каустікою сімейства мипромінених променів*? Геометрично ця задача полягає у знаходженні кривої еволютою якої є задана крива.

Означення 1.6.10 *Евольвентою*[8] *плоскої кривої γ называється крива Γ для якої γ є її еволютою.*

Твердження 1.6.12 *Для даної регулярної кривої γ, параметризованої вектор-функцією $\vec{r}$, існує однопараметричне сімейство її евольвент, що параметризуються вектор-функцією*

- $\vec{\rho}(s,c) = \vec{r}(s) + (c-s)\vec{\tau}(s)$, *якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – натуральна параметризація;*
- $\vec{\rho}(t,c) = \vec{r}(t) + \left(c - \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'(\theta)|\,d\theta\right) \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$, *якщо $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – довільна регулярна параметризація,*

c – довільний параметр.

Доведення. Позначимо через $\vec{\rho}(s)$ радіус-вектор евольвенти, прийнявши в якості параметру натуральний параметр кривої γ. За означенням евольвенти,

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \lambda(s)\vec{\tau}(s),$$

де $\vec{\tau}(s)$ — одиничний вектор дотичної до γ і $\lambda(s)$ – деяка функція. Диференціюючи, знаходимо

$$\vec{\rho}\,' = \vec{\tau} + \lambda'\vec{\tau} + \lambda k\vec{\nu} = (1+\lambda')\vec{\tau} + \lambda k\vec{\nu}.$$

Оскільки напрямний вектор дотичної до Γ колінеарний до вектору нормалі кривої γ, то функція $\lambda(s)$ має задовольняти рівнянню

$$\lambda' + 1 = 0.$$

Звідси знаходимо $\lambda(s) = c - s$, где c – константа інтегрування. Аналіз випадку довільної регулярної параметризації кривої γ є легкою вправою.

■

Катакаустікою[9] кривої на площині називається обгортка сімейства променів, віддзеркалених від кривої за законом геометричної оптики: *кут падіння дорівнює куту віддзеркалення.*

[8] В англомовній літературі евольвенту називають інволютою (involute).

[9] Термін "катакаустіка" ймовірно походить від назви праці Евкліда "Катоптрика де він вперше сформулював відомий принцип: *кут падіння дорівнює куту віддзеркалення.* Геометрична оптика отримала подальший розвиток в працях Аполлонія з Перги, Діокла, Птолемея і Анфемія.

Твердження 1.6.13 *На плоску регулярну криву γ с кривиною $k > 0$, падає жмуток паралельних променів, які мають напрямок вектора $\vec{a}$ ($|\vec{a}| = 1$). Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація γ , то параметричне рівняння катакаустіки має вигляд*

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{2k}\big(- \langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle \vec{\tau} + \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle \vec{\nu}\big), \tag{1.10}$$

де $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ – вектори реперу Френе кривої γ .

Доведення. Позначимо кут між падаючим променем і вектором головної нормалі через φ. Тоді

$$\cos\varphi = \langle -\vec{a}, \vec{\nu}\rangle, \quad \sin\varphi = \langle -\vec{a}, \vec{\tau}\rangle,$$

тобто напрямний вектор сімейства падаючих променів розкладеться по векторах репера Френе у вигляді

$$-\vec{a} = \sin\varphi\vec{\tau} + \cos\varphi\vec{\nu}.$$

За законами оптики, відбитий промінь має напрямок

$$\vec{b} = -\sin\varphi\vec{\tau} + \cos\varphi\vec{\nu}.$$

Вектори нормалі сімейства відбитих променів запишуться у вигляді

$$\vec{n} = \cos\varphi\vec{\tau} + \sin\varphi\vec{\nu},$$

а саме сім'ю буде задано рівнянням

$$F(x, y; s) = \langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s)\rangle = 0,$$

де $\vec{\rho} = \{x, y\}$ – радіус-вектор точок на відбитому промені. Обгортку будемо шукати з системи

$$\begin{cases} \langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s)\rangle = 0, \\ \frac{d}{ds}\langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s)\rangle = 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\frac{d}{ds}\langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s)\rangle = -\langle\vec{\tau}, \vec{n}\rangle + \langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \frac{d\vec{n}(s)}{ds}\rangle.$$

В свою чергу,

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\vec{b} + \cos\varphi(k\vec{\nu}) + \sin\varphi(-k\vec{\tau}) = \left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{b}.$$

Таким чином знаходимо, що

$$\left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)\langle\vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{b}\rangle = \cos\varphi$$

Оскільки $\vec{n}$ і $\vec{b}$ одиничні і взаємно ортогональні, то рівняння обгортки знаходиться в вигляді

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\cos\varphi}{\left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)}\vec{b} = \vec{r} + \frac{\cos\varphi}{\left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)}(-\sin\varphi\vec{\tau} + \cos\varphi\vec{\nu}). \tag{1.11}$$

Зауважимо тепер, що φ – це кут між головною нормаллю і фіксованим напрямком $\vec{a}$, а значить $\frac{d\varphi}{ds} = k$. Тоді

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{2k} (-\langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle \vec{\tau} + \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle \vec{\nu}),$$

що і було потрібно довести.

■

Твердження 1.6.14 *З початку координат на плоску регулярну криву γ с кривиною $k > 0$ падає жмуток променів. Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральна параметризація γ, то параметричне рівняння катакаустіки має вигляд*

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{r \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{2kr + \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle} \big(- \langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle \vec{\tau} + \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle \vec{\nu} \big), \tag{1.12}$$

де $r = |\vec{r}|$, $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$, а $\vec{\tau}$ та $\vec{\nu}$ – вектори репера Френе кривої γ.

Доведення. Позначимо $r = |\vec{r}|$. Тоді напрям променів, що виходять з початку координат визначатиметься ортом $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$. Подальша логіка і обчислення ідентичні логіці і обчисленням в доведенні Твердження 1.10 до формули (1.11). Для обчислення $\frac{d\varphi}{ds}$ зауважимо, що $-\cos\varphi = \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle$, а тому

$$\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} = \langle \frac{d\vec{a}}{ds}, \vec{\nu} \rangle - k \langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle = \langle \frac{d\vec{a}}{ds}, \vec{\nu} \rangle + k \sin\varphi.$$

Після нескладного обчислення, знаходимо, що $\dfrac{d\vec{a}}{ds} = \frac{1}{r}\Big(\vec{\tau} + \sin\varphi\, \vec{a}\Big)$. Як наслідок,

$$\frac{d\varphi}{ds} = k + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{r},$$

що і завершує доведення.

■

Задачі.

- Запишіть рівняння каустик (1.10) та (1.12) для довільної регулярної параметризації кривої.
- Нехай $\{\gamma_\alpha\}$ – сімейство плоских кривих. Позначимо через G – підмножину на площині, що покривається сімейством $\{\gamma_\alpha\}$. Тоді $\partial G \subset \mathcal{D}$.
- Нехай сімейство плоских кривих задано рівнянням

  $$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta) = 0. \end{cases}$$

  Покажіть, що точки дискримінантної множини цього сімейства задовольняють системі рівнянь

  $$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta) = 0, \\ \dfrac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \end{cases}$$

- Нехай γ – регулярна крива, γ^* – її еволюта. Знайти криві, що задовольняють властивості $(\gamma^*)^* = \gamma$.

1.7 Дотик кривих і поверхонь.

Нехай γ_1 і γ_2 – дві регулярні плоскі криві, які мають загальну точку, тобто $\gamma_1 \cap \gamma_2 = P$. В силу регулярності, в околиці точки P мають місце локальні завдання кривих γ_1 і γ_2 у вигляді

$$\begin{aligned} &\gamma_1 : \ \vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\} && P \leftrightarrow t = t_0, \\ &\gamma_2 : \ \varphi(x, y) = 0 && P \leftrightarrow (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Розглянемо функцію

$$f(t) = \varphi(x(t), y(t)),$$

Тоді, очевидно, $f(t_0) = 0$.

Означення 1.7.1 *Криві $\gamma_1 \in C^\infty$ і $\gamma_2 \in C^\infty$ мають в точці P дотик порядку m, якщо для функції $f(t) = \varphi(x(t), y(t))$ мають місце рівності*

$$f(t_0) = f'(t_0) = \ldots = f^{(m)}(t_0) = 0, \ f^{(m+1)}(t_0) \neq 0.$$

Вправа 1.7.1 *Покажіть, що регулярна крива має зі своєю дотичною дотик порядку $m \geq 1$.*

Вправа 1.7.2 *Покажіть, що регулярна крива має зі своєю дотичною площиною дотик порядку $m \geq 2$.*

Вид регулярної плоскої кривої в околиці точки з ненульовою кривиною моделюється певною параболою в наступному вигляді.

Твердження 1.7.1 *Нехай γ – C^2 регулярна плоска крива і $P \in \gamma$, причому кривина $k(P) > 0$. Тоді існує парабола з вершиною в точці P, яка має з γ дотик порядку $m \geq 2$.*

Доведення. В околиці точки P введемо наступну систему координат. Нехай $\vec{r}(s)$ натуральна параметризація кривої. Виберемо її так, що $P \leftrightarrow s = 0$. Паралельним перенесенням початку координат можна добитися виконання умови $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Спеціалізуємо додатково систему координат так, що вісь Ox направимо уздовж $\vec{\tau}(0)$, вісь Oy уздовж $\vec{\nu}(0)$. Тоді параметричне рівняння

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s) \end{cases}$$

кривої γ, будуть відповідати умовам

$$\begin{aligned} &x(0) = 0, && y(0) = 0, \\ &x'(0) = 1, && y'(0) = 0, \\ &x''(0) = 0, && y''(0) = k(0). \end{aligned}$$

Розглянемо параболу $\tilde{\gamma}$ яка задана параметрично у вигляді

$$\tilde{\gamma} \,:\, \begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{2}\, k(0)\, t^2. \end{cases}$$

Запишемо її рівняння в неявній формі

$$y = \frac{1}{2}\, k(0) x^2$$

та складемо функцію $f(s) = y(s) - \frac{1}{2}\, k(0)\, x^2(s)$. Тоді, очевидно,

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \\ &f'(0) = (y' - kxx')|_{s=0} = 0, \\ &f''(0) = (y'' - k(x')^2 - kxx'')|_{s=0} = 0, \end{aligned}$$

що і означає дотик порядку $m \geq 2$

■

Дотична коло плоскої кривої

Нехай γ – плоска крива і $\vec{r} = \vec{r}(s)$ її натуральна параметризація.

Означення 1.7.2 *коло, яка проходить через точку P на кривій, і яка має з кривою в точці P дотик порядку $m \geq 2$ називається дотичною колом кривої в точці P. Її центр називається центром кривини кривої, а радіус — радіусом кривини кривої в точці P.*

Твердження 1.7.2 *Геометричне місце центрів кривини плоскої кривої збігається з еволютою.*

Доведення. Рівняння кола на площині має вигляд

$$\left\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0 \right\rangle = a^2,$$

де r_0 – координати центру кола і a – її радіус.

Нехай точці P на кривій відповідає значення параметра $s = s_0$. Розглянемо функцію

$$f(s) = \left\langle \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{r}(s) - \vec{r}_0 \right\rangle - a^2$$

Умова дотику *нульового* порядку запишеться у вигляді

$$f(s_0) = 0$$

і означає, що коло проходить через точку P. Положення центру і радіус такої кола не визначені.

Умова дотику *першого* порядку запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f'_s(s_0) = \left\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \right\rangle = 0 \end{cases}$$

означає, що коло, що має дотик з кривою порядку $m \geq 1$ розташована так, що її центр знаходиться на головній нормалі кривої в точці P, але її радіус не визначений.

Умова дотику *другого* порядку запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f'_s(s_0) = \left\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \right\rangle = 0, \\ \frac{1}{2} f''_s(s_0) = k(s_0) \left\langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \right\rangle + 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що коло, що має з кривою дотик порядку $m \geq 2$ визначається однозначно. Її центр розташований на головній нормалі, а радіус дорівнює $\frac{1}{k}$. Більш того, $\vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 = -\frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0)$ або

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \vec{\nu}(s_0).$$

Це означає, що центр кривини лежить на еволюті кривої яку ми розглядаємо. В силу довільного вибору точки P, значення s_0 можна замінити на довільний параметр s точок кривої і ми отримаємо рівняння всієї еволюти, а саме,

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{\nu}(s),$$

де $\vec{\rho}(s)$ – координата центру дотичної кола для поточного значення параметра s.

■

Дотична сфера.

Означення 1.7.3 *Нехай γ – регулярна крива. Сфера S^2 називаеться дотичною сферою γ в точці $P \in \gamma$, якщо S^2 і γ мають в точці P дотик порядку $m \geq 3$.*

Твердження 1.7.3 *Якщо в декій точці $P \in \gamma$ кривина $k(P) > 0$ і крутіння $\varkappa \neq 0$, то дотична сфера існує і едина. Її центр знаходиться в точці*

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(P) + \frac{1}{k} \vec{\nu}(P) - \frac{k'}{k^2 \varkappa} \beta(P),$$

а радіус дорівнює

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k'}{k^2 \varkappa}\right)^2}$$

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – натуральна параметризація кривої γ, а сфера задана у такому вигляді:

$$\left\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0 \right\rangle = R^2.$$

Припустимо, що точці $P \in \gamma$ відповідає значення параметру $s = s_0$. Складемо функцію

$$f(s) = \left\langle \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{r}(s) - \vec{r}_0 \right\rangle - R^2.$$

Крива і сфера мають в точці P дотик порядку $m \geq 0$, якщо

$$f(s_0) = 0,$$

тобто $P = \gamma \cap S^2$.

Крива і сфера мають в точці P дотик порядку $m \geq 1$, якщо

$$\begin{cases} f(s_0) = 0; \\ \dfrac{1}{2} f'(s_0) = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \big\langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle - R^2 = 0 \\ \big\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0. \end{cases}$$

Це означає, що *сфера проходить через точку P і її центр лежить в нормальній площині.*

Крива і сфера мають в точці P дотик порядку $m \geq 2$, якщо

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ f'(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f''(s_0) = 0, \end{cases} \sim \begin{cases} \big\langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle - R^2 = 0 \\ \big\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0 \\ 1 + \dfrac{1}{k} \big\langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \big\langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle - R^2 = 0 \\ \big\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0 \\ \big\langle \vec{\nu}, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = -\dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Це значить, що центр сфери знаходиться на прямій, перпендикулярній до дотичної площини, і яка проходить через точку на головній нормалі кривої, яка знаходиться на відстані $\dfrac{1}{k}$ від точки P.

Нарешті, в разі дотика порядку $m \geq 3$, маємо

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f'(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f''(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f'''(s_0) = 0. \end{cases} \sim \begin{cases} \big\langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle - R^2 = 0, \\ \big\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0, \\ \big\langle \vec{\nu}, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = -\dfrac{1}{k}, \\ \big\langle -k\vec{\tau} + \varkappa\beta, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle + \big\langle \vec{\nu}, \vec{\tau} \big\rangle - \dfrac{k'}{k^2} = 0. \end{cases}$$

або, остаточно,

$$\begin{cases} \big\langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle - R^2 = 0, \\ \big\langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = 0, \\ \big\langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = -\dfrac{1}{k}, \\ \big\langle \beta(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \big\rangle = \dfrac{k'}{k^2\varkappa}. \end{cases}$$

Ми отримали розкладання вектора $\vec{r}(s_0)-\vec{r}_0$ за трьома векторами $\vec{\tau},\vec{\nu},\beta$ з коефіцієнтами 0, $-\frac{1}{k}$, $\frac{k'}{k^2\varkappa}$, тобто ми можемо записати

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(s_0)-\vec{r}_0=-\frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0)+\frac{k'}{k^2\varkappa}\beta(s_0),\\
&\vec{r}_0=\vec{r}(s_0)+\frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0)-\frac{k'}{k^2\varkappa}\beta(s_0),\\
&R=\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{k'}{k^2\varkappa}\right)^2}.
\end{aligned}$$

■

Вправа 1.7.3 *Доказати, що крива, у якої* $k\neq 0,\varkappa\neq 0$ *лежить на сфері тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{\varkappa}{k}=\left(\frac{k'}{k^2\varkappa}\right)'.$$

Як наслідок, для будь-якої замкнутої кривої на сфері

$$\int\frac{\varkappa}{k}ds=0.$$

Вправа 1.7.4 *Геометричне місце центрів дотичних сфер називається еволютою просторової кривої. Запишіть рівняння еволюти просторової кривої для випадку довільної регулярної параметризації.*

1.8 Формулы Френе для кривой у E^n.

Репер Френе і формули Френе для кривої на площині і в просторі мають природне узагальнення на випадок достатньо регулярної кривої в E^n.

Теорема 1.8.1 *Нехай* γ *– крива у* E^n *класу* $\mathcal{C}^\infty$. *Нехай* $\vec{r}=\vec{r}(s)$ *– її натуральна параметризація. Тоді уздовж* γ *існує поле ортонормованих векторів* $(\vec{\xi}_1,\dots,\vec{\xi}_n)$, *яке задовольняє формулам виду*

$$\begin{cases}
\vec{\xi}_1{}'=k_1\vec{\xi}_2,\\
\vec{\xi}_i{}'=-k_{i-1}\,\vec{\xi}_{i-1}+k_i\,\vec{\xi}_{i+1},\quad i=2,\dots,n-1;\\
\vec{\xi}_n{}'=-k_{n-1}\vec{\xi}_{n-1}.
\end{cases}$$

Функції k_i *називаються кривинами кривої, а вектори* $\vec{\xi}_1,\dots,\vec{\xi}_n$ *називаються векторами реперу Френе.*

Доведення. Розглянемо на кривій γ одиничне векторне поле дотичних векторів $\vec{r}\,'_s$ і покладемо $\xi_1=\vec{r}\,'_s$. Обчислимо $\vec{\xi}_1{}'$ і припустимо, що $\vec{\xi}_1{}'\neq 0$. Тоді покладемо

$$k_1=|\vec{\xi}_1{}'|;\quad \xi_2=\frac{1}{k_1}\,\vec{\xi}_1{}'.$$

Отримаємо першу формулу Френе, а саме
$$\vec{\xi_1}\,' = k_1\vec{\xi_2}.$$
Здійснимо подальшу побудову реперу Френе індуктивно. Обчислимо $\vec{\xi_2}\,'$. В силу одиничності вектору $\vec{\xi_2}$, маємо
$$\vec{\xi_2}\,' = a\,\vec{\xi_1} + \vec{\eta},$$
де $\vec{\eta} \perp Lin(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2})$. Легко побачити, що
$$a = \langle\, \vec{\xi_2}\,', \vec{\xi_1}\,\rangle = -\langle\, \vec{\xi_2}, \vec{\xi_2}\,'\,\rangle = -k_1.$$
Припустимо, що $\vec{\eta} \neq 0$. Тоді покладемо
$$|\vec{\eta}| = k_2; \quad \vec{\xi_3} = \frac{1}{k_2}\,\vec{\eta}.$$
Отже,
$$\vec{\xi_2}\,' = -k_1\vec{\xi_1} + k_2\vec{\xi_3}.$$
Обчислимо $\vec{\xi_3}\,'$.
$$\vec{\xi_3}\,' = a_1\vec{\xi_1} + a_2\vec{\xi_2} + \vec{\eta},$$
де $\vec{\eta} \perp Lin(\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}, \vec{\xi_3})$. Тоді
$$\begin{aligned}
&a_1 = \langle\, \vec{\xi_3}\,', \vec{\xi_1}\,\rangle = -\langle\, \vec{\xi_3}, \vec{\xi_1}\,'\,\rangle = -k\langle\, \vec{\xi_3}, \vec{\xi_2}\,\rangle = 0,\\
&a_2 = \langle\, \vec{\xi_3}\,', \vec{\xi_2}\,\rangle = -\langle\, \vec{\xi_3}, \vec{\xi_2}\,'\,\rangle = -k_2,\\
&\vec{\xi_3}\,' = -k_2\vec{\xi_2} + \vec{\eta}.
\end{aligned}$$
Покладемо,
$$k_3 = |\vec{\eta}|, \quad \vec{\xi_4} = \frac{1}{k_3}\,\vec{\eta}.$$
Тоді
$$\vec{\xi_3}\,' = -k_2\vec{\xi_2} + k_3\vec{\xi_4}.$$
Продовжуючи цей процес, ми знайдемо всі вектори реперу Френе. Остання формула буде мати вигляд
$$\vec{\xi_n}\,' = -k_{n-1}\vec{\xi}_{n-1} + \vec{\eta},$$
де $\vec{\eta} \perp Lin(\vec{\xi_1}, \dots, \vec{\xi_n})$, а значить $\eta = 0$.

■

Ремарка 1.8.1 *Крива у E^n не зобов'язана мати всі кривини нерівні 0. Можна показати, що якщо деяка кривина $k_m = 0$ $(m \leq n)$, то крива лежить у площині E^m. Так само, зауважимо, що кривина k_1 відповідає кривині кривої у E^3, а кривина k_2 відповідає крутінню кривої у E^3.*

Вправа 1.8.1 *Покажіть, що вищі кривини кривої, параметризовані довільним регулярним параметром t, обчислюються за формулою*
$$k_i = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\frac{B_{i-1}B_{i+1}}{B_i^2},$$
де $B_i = \sqrt{Gram\,(\vec{r}\,'(t), \dots, \vec{r}\,^{(i)}(t))}$ – квадратний корінь з визначника матриці Грама, яка побудована за похідними вектор-функції $\vec{r}\,(t)$ до порядку $i \geq 1$, а $B_0 := 1$ за визначенням.

Розділ 2

Локальна теорія поверхонь Евклідова простору E^3.

2.1 Способи задання поверхонь. Дотична площина.

Позначимо через $I\!R^3(x, y, z)$ – афінний простір з Декартовими афінними координатами (x, y, z). Через $E^3(x, y, z)$ будемо позначати Евклідів простір з зафіксованим ортонормованим базисом. Нехай $\mathcal{D} \subset I\!R$ область (відкрита зв'язна підмножина) на площині $I\!R^2$ з Декартовими координатами (u, v), що в подальшому називаються параметрами. Вектор-функцією параметрів (u, v) називається неперервне відображення $\vec{r} : \mathcal{D}(u, v) \to I\!R^3$, що задане у вигляді

$$\vec{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}. \tag{2.1}$$

Функції $x(u, v)$, $y(u, v)$ і $z(u, v)$ називаються координатними функціями. Область $\mathcal{D}(u, v)$ що міститься в області визначення координатних функцій, називається областю параметрів. Вектор-функція є неперервною тоді і тільки тоді, коли неперервні її координатні функції. Вектор-функція $\vec{r}(u, v)$ називається регулярною класу C^k, C^∞ або C^ω, якщо координатні функції є регулярними класу C^m $(m \geq k)$, C^∞ або аналітичними, відповідно. Частинними похідними від регулярної вектор-функції (2.1) називаються вектор-функції

$$\partial_u \vec{r} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}, \quad \partial_v \vec{r} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}.$$

Для скорочення, частинні похідні вектор-функції також позначають як $\vec{r}_u$ та $\vec{r}_v$.

Розглянемо неперервне відображення $f : \mathcal{D} \to I\!R^3$, що задане неперервною вектор-функцією (2.1). Образ $f(\mathcal{D}) = F \subset I\!R^3$ називається параметризованою поверхнею в $I\!R^3$ і співпадає з годографом вектор-функції $\vec{r}(u, v)$, а сама вектор-функція $\vec{r}(u, v)$ називається параметризацією поверхні. Різні вектор-функції можуть мати один і той же годограф. Наприклад, $\vec{r} = \{u, v, uv\}$ і $\vec{r} = \{u, v, u^2 - v^2\}$ є відображеннями $I\!R^2 \to I\!R^3$, що мають годографом поверхню гіперболічного параболоїду. Тож параметризація поверхні визначена неоднозначно.

Подібно до кривих, поверхні розділяються на елементарні, прості і загальні.

Означення 2.1.1 *Елементарною параметризованою поверхнею в* $I\!R^3$ *називається гомеоморфний образ відкритого диску в* $I\!R^2$.

Оскільки йдеться про гомеоорфізм, то замість відкритого диску в означенні можна взяти будь-яку гомеоморфну диску підмножину. Наприклад, всю площину $I\!R^2$.

Означення 2.1.2 *Простою поверхнею в* $I\!R^3$ *зв'язна підмножина в* $I\!R^3$*, кожна точна якої має окіл (в індукованій з* $I\!R^3$ *топології), що гомеоморіфний до відкритого диску в* $I\!R^2$.

Таким чином, проста поверхня є локально елементарною.

Означення 2.1.3 *Загальною поверхнею в* $I\!R^3$ *називається неперервний образ простої поверхні, що є локальним гомеоморфізмом.*

Наведена класифікація має топологічну природу і потребує звуження для можливості застосування методів математичного аналізу. Головним об'єктом досліджень диференціальної геометрії поверхонь є регулярні параметризовані поверхні.

Означення 2.1.4 *Регулярною параметризованою поверхнею в* $I\!R^3$ *класу регулярності* C^k *називається зв'язна підмножина* $F \subset I\!R^3$*, для кожної точки якої*

(1) існує окіл $U = W \cap F^2$ *в індукованій топології, що гомеоморфний відкритому диску в* $\mathcal{D} \subset I\!R^2$*;*

(2) існує C^k $(k \geq 1)$ *регулярна параметризація* $\vec{r} : \mathcal{D} \to W$*, така що* $\vec{r}(\mathcal{D}) = U$ *і вектори* $\vec{r}_u$ *та* $\vec{r}_v$ *лінійно незалежні для всіх* $(u, v) \in \mathcal{D}$.

Умова (2) в означенні регулярної поверхні еквівалентна тому, що ранг матриці Якобі

$$\partial \vec{r} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

відображення (2.1) є максимальним і дорівнює 2 на всій області визначення. В Евклідовому просторі E^3 з Декартовими прямокутними координатами умова (2) регулярності може бути записана у вигляді $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

Регулярна парметризована поверхня має безліч регулярних параметризацій. Для доведення ми скористаємося нерівністю Сільвестра.

Твердження 2.1.1 *Якщо матриця* A *має розмір* $m \times k$*, а матриця* B *має розмір* $k \times p$*, тоді для рангу їх добутку має місце нерівність*

$$\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - k \leq \mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)). \tag{2.3}$$

Твердження 2.1.2 *Нехай* $\vec{r} : \mathcal{D}(u, v) \to I\!R^3$ *регулярна парметризація регулярної поверхні. Нехай* $\varphi : \mathcal{D}(\alpha, \beta) \to \mathcal{D}(u, v)$ *– дифеоморфізм.*[1] *Тоді вектор-функція* $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi$ *є регулярним відображенням* $\vec{\rho} : \mathcal{D}(\alpha, \beta) \to I\!R^3$*, причому годографи вектор -функцій* $\vec{r}$ *і* $\vec{\rho}$ *співпадають.*

[1] гладку сю'єктивне відображення зі всюди невиродженою матрицею Якобі.

Доведення. З огляду на те, що φ – дифеоморфізм, вектор-функції $\vec{r}$ і $\vec{\rho}$ мають однакові годографи. Згідно з правилами диференціювання складеної функції, матриця Якобі $\partial\vec{\rho}$ вектор-функції $\vec{\rho}$ пов'язана з матрицями Якобі $\partial\vec{r}$ і $\partial\varphi$ вектор-функції $\vec{r}$ і відображення φ формулою[2]

$$\partial\vec{\rho} = \partial(\vec{r} \circ \varphi) = \partial\vec{r} \cdot \partial\varphi. \tag{2.4}$$

Оскільки $\operatorname{rg}\varphi = 2$, то з нерівності Сільвестна (2.3) негайно випливає, що $\operatorname{rg}\vec{\rho} = \operatorname{rg}\vec{r}$, що і завершує доведення.

■

Явно заданою поверхнею називається графік функції $z = f(x, y)$. Явно задана поверхня параметризується вектор-функцією

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$$

і є регулярною параметризованою поверхнею, клас регулярності якої дорівнює класу регулярності функції $f(x, y)$. Відповідна параметризація називається явною.

Твердження 2.1.3 *В околі будь-якої своєї точки регулярна параметризована поверхня може бути параметризована явно.*

Доведення. Нехай q – довільна точка регулярної параметризованої поверхні $F \subset \mathbb{R}^3$ і $\vec{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ – регулярна параметризація її околу U_q. Оскільки ранг матриці (2.2) дорівнює 2, то не зменшуючи загальності будемо вважати, що

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}(q) \neq 0.$$

За неперервністю, існує певний окіл $V_q \subset U_q$ такий, що

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}(V_q) \neq 0.$$

За цієї умови, за теоремою про обернене відображення, відображення

$$h : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

має на околі V_q обернене того ж класу регулярності. Після підстановки оберненого відображення $(u = u(x, y), v = v(x, y))$ до початкової параметризації, отримаємо вектор-функцію

$$\vec{r} = \{x, y, z(u(x, y), v(x, y)\} = \{x, y, f(x, y)\},$$

визначену на області значень[3] $E(h)$ відображення h, яка визначає явну параметризацію поверхні над областю $E(h)$.

■

[2]Так званим, ціпним правилом диференціювання складеної функції.

[3]Зауважимо, що відображення f є дифеоморфізмом $V_q \overset{f}{\approx} E(h)$, де $E(f)$ – область значень відображення f. Тож $E(h)$ дійсно є областю, тобто відкритою і зв'язною множиною.

Поверхнею в $I\!R^3(x,y,z)$, що *задана неявно* називається множина точок, координати яких задовольняють рівнянню

$$\Phi(x,y,z)=0$$

для де-якої функції змінних (x,y,z). Сформульоване означення є заширoким в тому розумінні, що без додаткових обмежень навіть для аналітичної функції рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ не визначає поверхню в $I\!R^3$. Наприклад, множина розв'язків рівняння $x^2+y^2+z^2+1=0$ є порожньою, хоча сама функція є поліномом. Відповідне уточнення міститься в означенні *регулярної* неявно заданої поверхні.

Означення 2.1.5 *Регулярною класу C^k неявно заданою поверхнею в $I\!R^3(x,y,z)$ називається кожна зв'язна компонента множини точок, координати яких задовольняють рівнянню $\Phi(x,y,z)=0$, де функція Φ задовольняє умовам*

(1) $\Phi(x,y,z)$ є регулярною функцією класу C^k;

(2) $grad\ \Phi=\{\Phi_x,\Phi_y,\Phi_z\}\neq\{0,0,0\}$ для всіх точок розв'язку.

В інших термінах, умова (2) означення 2.1.5 означає, що для всіх точок повного прообразу $\Phi^{-1}(0)$ ранг матриці Якобі відображення $\Phi: I\!R^3\to I\!R^1$, що задається функцією $\Phi(x,y,z)$, є максимальним і дорівнює 1. Точка $0\in I\!R^1$ при цьому називається регулярним значенням відображення Φ.

Твердження 2.1.4 *Для будь-якої точки регулярної неявно заданої поверхні класу C^k існує окіл, що є годографом C^k – регулярної явної параметризації.*

Доведення. Позначимо $F=\Phi^{-1}(0)$ і нехай $q\in F$ – довільна точка з F. Позначио через F_q зв'язну компоненту точки q. Тоді існує окіл $W_q\subset I\!R^3$ такий, що[4]

$$W_q\cap F=W_q\cap F_q.$$

Обмеження $\Phi|_q: W_q\to I\!R^1$ відображення Φ на окіл W_q є C^k - гладкою функцією, що задовольняє умовам існування неявної функції. Позначимо через $(x_q,y_q,z_q)\in I\!R^3$ координати точки q. Оскільки $(grad\ \Phi|_q)(q)\neq\vec{0}$, то не зменшуючи загальності будемо вважати, що $(\Phi|_q)_z(q)\neq 0$. За теоремою по неявну функцію, існують околи $U_{(x_q,y_q)}\subset I\!R^2$ і $V_{z_q}\subset I\!R^1$ і функція $\varphi: U_{(x_q,y_q)}\to V_{z_q}$ такі, що $U_{(x_q,y_q)}\times V_{z_q}\subset W_q$ і

$$\Phi|_q(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0$$

для всіх $(x,y)\in U_{(x_q,y_q)}$. Причому $\varphi\in C^k$. Отже, множина розв'язків рівняння $\Phi|_q(x,y,z)=0$ співпадає з годографом C^k- регулярної вектор-функції

$$\vec{r}: U_{(x_q,y_q)}\to U_{(x_q,y_q)}\times V_{z_q}\subset I\!R^3$$

виду $\vec{r}=\{x,y,\varphi(x,y)\}$, що і завершує доведення.

■

Як висновок, *дослідження локальної геометрії регулярних поверхонь зводиться до дослідження геометрії елементарних параметризованих поверхонь*, більше того – явно заданих.

[4]Якщо будь-який окіл точки q має непустий перетин з іншою зв'язною компонентою, то q є для неї межовою. Але зв'язні компоненти замкнені. Отже точка q є спільною для двох різних зв'язних компонент, що неможливо.

Ремарка 2.1.1 *Аналогічно випадку регулярних кривих, регулярні поверхні в $I\!R^3$ задаються регулярними відображеннями. Так, регулярна параметризована поверхня задається відображенням $\vec{r} : I\!R^2 \to I\!R^3$ ранг матриці Якобі якого дорівнює 2 (умова $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$). А регулярна неявно задана поверхня задається відображенням $\Phi : I\!R^3 \to I\!R^1$, ранг матриці якого дорівнює 1 (умова $grad\ \Phi = \{\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z\} \neq \vec{0}$)*

Означення 2.1.6 *Нехай $F \subset I\!R^3$ регулярна параметризована поверхня і $\vec{r} : \mathcal{D}(u,v) \to I\!R^3(x,y,z)$ її локальна параметризація. Параметризованою кривою на поверхні називається годограф складеної вектор-функції $\vec{\gamma} : I \to I\!R^3$, а саме*

$$\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma = \{x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\} \tag{2.5}$$

де $\gamma : I \to \mathcal{D}(u,v)$ парметризація кривої в області параметрів, а саме

$$\gamma = \{u(t), v(t)\}\ (t \in I). \tag{2.6}$$

Будемо говорити, що вектор-функція (2.5) визначає *зовнішню парметризацію* кривої на поверхні, а вектор-функція (2.6) визначає *внутрішню параметризацію* цієї кривої. За ціпним правилом

$$\vec{\gamma}\,' = \partial\vec{r} \cdot \gamma\,'$$

і з нерівності Сільвестра (2.3) випливає, що $\vec{\gamma}\,' \neq \{0,0,0\}$ за умови $\gamma\,' \neq \{0,0\}$. Тож регулярним кривим в області параметрів відповідають регулярні криві на поверхні і навпаки.

Означення 2.1.7 *Нехай $F \subset I\!R^3$ – регулярна параметризована поверхня і $q \in F$ – фіксована точка. Дотичною площиною до поверхні F в точці q називається площина, що містить всі дотичні вектори до всіх регулярних кривих які лежать на поверхні і проходять через точку q.*

Дотична площина до поверхні F в точці $q \in F$ позначається як T_qF. Коректність означення дотичної площини міститься в наступному твердженні.

Твердження 2.1.5 *В кожній точці регулярної параметризованої поверхні дотична площина існує. Базис дотичної площини складають вектори $\vec{r}_u(q)$ та $\vec{r}_v(q)$, де $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ будь-яка регулярна параметризація поверхні.*

Доведення. Нехай q – точка на поверхні F і нехай точці q відповідають параметри $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}(u,v)$ при регулярній параметризації $\vec{r} : \mathcal{D}(u,v) \to I\!R^3$. Нехай $\gamma : I \to \mathcal{D}(u,v)$ – регулярна крива в області параметрів, що походить через точку (u_0, v_0). Припустимо, $\gamma(t_0) = (u_0, v_0)$. Для відповідної кривої на поверхні $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ маємо

$$\vec{\gamma}\,'(t_0) = (\partial\vec{r} \cdot \gamma\,')|_{t=t_0} = \left(\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)\right) \begin{pmatrix} u_t'(t_0) \\ v_t'(t_0) \end{pmatrix} = \vec{r}_u(q)u'(t_0) + \vec{r}_v(q)v'(t_0).$$

Це означає, що дотичний вектор до кривої на поверхні в точці $q \in F$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{r}_u(q)$ і $\vec{r}_v(q)$.

Тепер покажимо, що будь-який вектор, що є лінійною комбінацією векторів $\vec{r}_u(q)$ і $\vec{r}_v(q)$ є дотичним до де-якої регулярної кривої на поверхні. Нехай $\vec{a} = a^1\vec{r}_u(q) + a^2\vec{r}_v(q)$.

Розглянемо в області параметрів криву $\gamma = \{u_0 + a^1 t, v_0 + a^2 t\}$. Тоді крива на поверхні $\vec{\gamma} = \vec{r}(u_0 + a^1 t, v_0 + a^2 t)$ проходить через точку q при $t = 0$, причому

$$\vec{\gamma}'(q) = a^1 \vec{r}_u(q) + a^2 \vec{r}_v(q) = \vec{a}.$$

Таким чином, $T_q F$ існує її напрямний простір співпадає з лінійною оболонкою векторів $\vec{r}_u(q)$ та $\vec{r}_v(q)$.

■

Наслідок 2.1.1 *Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ регулярна параметризація поверхні $F \subset I\!R^3$. В точці з параметрами (u, v)*

- *параметричне рівняння дотичної площини має вигляд*

$$\vec{\rho} = \vec{r}(u, v) + \lambda \vec{r}_u(u, v) + \mu \vec{r}_v(u, v);$$

- *загальне рівняння дотичної площини має вигляд*

$$\det\big(\vec{\rho} - \vec{r}(u, v), \vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)\big),$$

де $\vec{\rho} = \{x, y, z\}$ – радіус-вектор точок на дотичній площині.

В Евклідовому просторі E^3 вектор $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ є вектором нормалі до дотичної площин. Тому загальне рівняння дотичної площини можна записати у вигляді *мішаного добутку*

$$\big(\vec{\rho} - \vec{r}(u, v), \vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v)\big) = 0.$$

Заміна параметризації поверхні в околі точки призводить до лінійного перетворення базису дотичної площини, матрицею якого є матриця Якобі перетворення координат.

Твердження 2.1.6 *Нехай $\vec{r} = \mathcal{D}(u, v) \to I\!R^3$ – регулярна параметризація поверхні $F \subset I\!R^3$. Тоді*

(1) якщо $\varphi : \mathcal{D}(\alpha, \beta) \to \mathcal{D}(u, v)$ дифеоморфізм заміни параметрів і $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi$ – вектор-функція нової параметризації, то в кожній точці поверхні базисні вектори дотичної площини $T_q F$ пов'язані перетворенням

$$(\vec{\rho}_\alpha, \vec{\rho}_\beta) = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) \cdot \partial\varphi,$$

де $\partial\varphi$ – матриці Якобі перетворення координат;

(2) для будь-якої точки $q \in F$ і пари лінійно незалежних векторів $\vec{a}, \vec{b} \subset T_q F$ існує така регулярна парметризація $\vec{\rho} : \mathcal{D}(\alpha, \beta) \to I\!R^3$ в околі точки q, що

$$\vec{r}_\alpha(q) = \vec{a}, \quad \vec{r}_\beta(q) = \vec{b}.$$

Доведення. Твердження (1) є геометричною інтерпретацією формули (2.4). Нехай тепер q – довільна точка поверхні F і нехай (u_0, v_0) – парметри, що відповідають цій точці. Нехай $\vec{a} = a^1\vec{r}_u(q) + a^2\vec{r}_v(q)$ і $\vec{b} = b^1\vec{r}_u(q) + b^2\vec{r}_v(q)$ два лінійно незалежних вектори на T_qF. Розглянемо лінійне перетворення координат $\varphi : \mathcal{D}(\alpha, \beta) \to \mathcal{D}(u, v)$ виду

$$\varphi : \begin{cases} u = \alpha a^1 + \beta b^1 + u_0, \\ v = \alpha a^2 + \beta b^2 + v_0. \end{cases}$$

Тож маємо $\varphi(0, 0) = (u_0, v_0)$ і

$$\partial\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}, \quad \det\partial\varphi = \det\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} \neq 0$$

з огляду на лінійну незалежність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Як висновок, в точці q

$$(\vec{\rho}_\alpha, \vec{\rho}_\beta)(q) = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)(q)\begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} = \big(\vec{r}_u(q)a^1 + \vec{r}_v(q)a^2, \vec{r}_u(q)b^1 + \vec{r}_v(q)b^2\big) = \big(\vec{a}, \vec{b}\,\big).$$

■

Наслідок 2.1.2 *В околі будь-якої точки $q \in F$ регулярної поверхні $F \subset E^3$ існує така регулярна параметризація $\vec{r} : \mathcal{D}(u, v) \to E^3$, що*

$$|\vec{r}_u(q)| = 1, \quad |\vec{r}_v(q)| = 1, \quad \big\langle\, \vec{r}_u, \vec{r}_v \,\big\rangle(q) = 0.$$

Твердження 2.1.7 *Нехай $F \subset E^3$ – регулярна неявно задана поверхня в Евклідовому просторі і $\Phi(x, y, z) = 0$ її рівняння. Тоді*

- *вектор $grad\ \Phi$ є вектором нормалі до дотичної площини в кожній точці F;*
- *рівняння дотичної площини в точці $(x_0, y_0, z_0) \in F$ має вигляд*

$$\big\langle\, \vec{\rho} - \vec{r}_0, grad\ \Phi \,\big\rangle = 0,$$

де $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – радіус-вектор точки на поверхні і $\vec{\rho} = \{x, y, z\}$ – радіус-вектор точок на дотичній площині.

Доведення. Нехай $q(x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка на F і нехай $\vec{\gamma}\,(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ – довільна регулярна крива, що проходить через точку q. Нехай точці q відповідає значення параметру $t = t_0$. Тоді маємо

$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0,$$

а значить

$$\Phi_x x'_t + \Phi_y y'_t + \Phi_z z'_t \equiv 0.$$

Тож в точці q

$$\big\langle\, grad\ \Phi(q), \vec{\gamma}\,'(t_0) \,\big\rangle = 0.$$

З огляду на довільність кривої, вектор $grad\ \Phi(q)$ ортогональний до дотичної площини поверхні, що проходить через точку q.

■

Згідно з висновками розділу 2.1, в подальшому переважно будемо розглядати регулярні параметризовані поверхні в Евклідовому просторі E^3 з фіксованим ортонормованим базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і декартовою прямокутною системою координат.

Деякі відомості з лінійної алгебри.

Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в E^3 розкладені за ортонормованим базисом

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3. \tag{2.7}$$

Тоді їх скалярний добуток обчислиться за формулою $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$. Поставимо у відповідність векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ матриці-стовбчики

$$\vec{a} \to \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = a, \quad \vec{b} \to \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = b.$$

Тоді скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ може бути записаний у вигляді матричного добутку, а саме

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (b^1, b^2, b^3) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = b^t a = a^t b,$$

де $(\cdot)^t$ означає транспонування.

Матрицею Грама пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається матриця, що складається з попарних скалярних добутків векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто матриця

$$g = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & |\vec{b}\,|^2 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці Грама

$$\det \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & |\vec{b}\,|^2 \end{pmatrix} = |\vec{a}|^2|\vec{b}\,|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a} \times \vec{b}\,|^2.$$

Тому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли їх матриця Грама *невироджена.*

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні. Складемо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix},$$

стовбчики якої складаються з координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у розкладанні (2.7). З очевидністю,

$$Q^tQ = \begin{pmatrix} a^1 & a^1 & a^3 \\ b^2 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & |\vec{b}\,|^2 \end{pmatrix} = g.$$

Нехай

$$\vec{X} = X^1\vec{a} + X^2\vec{b}, \quad \vec{Y} = Y^1\vec{a} + Y^2\vec{b} \tag{2.8}$$

два вектори, що розкладені за базисом $(\vec{a}, \vec{b})$. Введемо в розгляд матриці-стовбчики

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix},$$

що утворені з "внутрішніх" координат векторів $\vec{X}$ та $\vec{Y}$ в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді розкладання (2.8) відносно базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2\, e_3)$ можна записати у вигляді

$$\vec{X} = (QX)^1\vec{e}_1 + (QX)^2\vec{e}_2 + (QX)^3\vec{e}_3 := \overrightarrow{QX}, \quad \vec{Y} = (QY)^1\vec{e}_1 + (QY)^2\vec{e}_2 + (QY)^3\vec{e}_3 := \overrightarrow{QY}.$$

Як наслідок

$$\langle\, \vec{X}, \vec{Y} \,\rangle = \langle\, \overrightarrow{QX}, \overrightarrow{QY} \,\rangle = (QY)^t(QX) = Y^t(Q^tQ)X = Y^t g X. \tag{2.9}$$

Скалярний добуток $\langle\, \vec{X}, \vec{Y} \,\rangle$ векторів, що компланарні лінійно незалежним векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, у розкладанні за базисом в E^3 будемо називати *зовнішнім*, а у розкладанні за базисом $(\vec{a}, \vec{b})$ – *внутрішнім*, або індукованим. Із формули (2.9) випливає, що внутрішній скалярний добуток визначається *симетричною білінійною формою*

$$g(X, Y) = Y^t g X = g_{11}X^1Y^1 + g_{12}(X^1Y^2 + X^2Y^1) + g_{22}X^2Y^2,$$

де g – матриця Грама векторів базису $(\vec{a}, \vec{b})$. За формулою (2.9),

$$\langle\, \vec{X}, \vec{Y} \,\rangle = g(X, Y).$$

Відповідна *симетрична квадратична форма* $g(X, X)$ визначає квадрат довжини вектора $\vec{X}$, а саме

$$|\vec{X}|^2 = g(X, X) = g_{11}(X^1)^2 + 2g_{12}X^1X^2 + g_{22}(X^2)^2.$$

Іноді для позначення внутрішнього скалярного добутку замість $g(X, Y)$ використовують позначення $\langle\, X, Y \,\rangle_g$.

2.2 Перша фундаментальна форма поверхні

Угода про позначення. В подплышому будемо використовувати поряд з позначеннями Гауса для параметрів на поверхні (u, v) індексовані параметри (u^1, u^2), шо пов'язані з позначеннями Гауса угодою $u^1 = u, u^2 = v$. Замість $\vec{r}_u$ та $\vec{r}_v$ будемо використовувати позначення $\partial_1\vec{r}$ та $\partial_2\vec{r}$ в розумінні частинної похідної від $\vec{r}$ за першим та другим параметром, відповідно.

Правило Ейнштейна запису суми добутків полягає в розумінні за замовчуванням суми за однаковими нижніми і верхніми індексами за всім діапазоном зміни індексів *без використання* традиційного символу суми $\sum$. Наприклад, замість $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i b_i$ пишеться $a^i b_i$, замість $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} g_{ik}a^i b^k$ пишеться $g_{ik}a^i b^k$ і тому подібне. Правило Ейнштйна значно спрощує запис громіздких виразів, що містить велику кількість символів $\sum$.

Нехай $F \subset E^3$ поверхня і нехай $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to E^3$ її локальна регулярна параметризація. Розглянемо дотичну площину T_qF до поверхні в точці $q \in F$. Базис T_qF складають частинні похідні $\partial_1\vec{r}(q)$ та $\partial_2\vec{r}(q)$.

Нехай $\vec{X}, \vec{Y} \in T_qF$ – дотичні вектори до F з внутрішніми координатами

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix},$$

відповідно. Тобто $\vec{X} = (X^i\partial_i\vec{r})(q),\ \vec{Y} = (Y^i\partial_i\vec{r})(q)$. За формулою (2.9) отримаємо

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = Y^t g_q X,$$

де

$$g_q = \begin{pmatrix} |\partial_1\vec{r}|^2 & \left\langle \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r} \right\rangle \\ \left\langle \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r} \right\rangle & |\partial_2\vec{r}|^2 \end{pmatrix}(q)$$

матриця Грама системи базисних векторів T_qF. Симетрична білінійна форма $g : T_qF \times T_qF \to R$ що визначає скалярний добуток векторів $\vec{X}, \vec{Y} \in T_qF$ формулою

$$g_q(X,Y) = Y^t g_q X = g_{ij}(q)X^iY^j = g_{11}(q)X^1Y^1 + g_{12}(q)(X^1Y^2 + X^2Y^1) + g_{22}(q)X^2Y^2,$$

в кожній точці $q \in F$ через їх внутрішні координати називається *першою фундаментальною формою поверхні в точці* q. З огляду на довільність обраної точки, перша фундаментальна форма поверхні визначається наступним чином.

Означення 2.2.1 *Нехай $F \subset E^3$ регулярна параметризована поверхня і $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to E^3$ її регулярна парметризація. Першою фундаментальною формою поверхні на області парметрів $\mathcal{D}(u^1, u^2)$ називається симетрична білінійна форма, що визначена на внутрішніх координатах дотичних векторних полів на поверхні формулою*

$$g(X,Y) = Y^t gX = g_{ij}X^iY^j = g_{11}X^1Y^1 + g_{12}(X^1Y^2 + X^2Y^1) + g_{22}X^2Y^2.$$

Матриця

$$g = \begin{pmatrix} |\partial_1\vec{r}|^2 & \left\langle \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r} \right\rangle \\ \left\langle \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r} \right\rangle & |\partial_2\vec{r}|^2 \end{pmatrix} = (\partial\vec{r})^t(\partial\vec{r}), \tag{2.10}$$

де $\partial\vec{r}$ – матриця Якобі параметризації поверхні F, називається матрицею першої фундаментальної форми поверхні.

Нехай $\gamma : I(t) \to \mathcal{D}(u^1, u^2)$ регулярна крива в області параметрів і $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ її образ на поверхні при параметризації $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to E^3$. Тоді $\vec{\gamma}$ – регурярна параметризована крива в E^3 і для її натурального параметру має місце формула

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |\vec{\gamma}\,'(\theta)| d\theta.$$

З іншого боку $\vec{\gamma}\,' = (\vec{r} \circ \gamma)' = \partial\vec{r} \cdot \gamma'$. Тому

$$|\vec{\gamma}\,'|^2 = \left\langle \vec{\gamma}\,', \vec{\gamma}\,' \right\rangle = (\partial\vec{r}\cdot\gamma')^t(\partial\vec{r}\cdot\gamma') = (\gamma')^t(\partial\vec{r})^t(\partial\vec{r})\gamma' = (\gamma')^t(g\circ\gamma)\gamma' = (g\circ\gamma)(\gamma', \gamma').$$

Отже уздовж кривої $\vec{\gamma}$ натуральний і довільний регулярний параметри пов'язані формулою

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}(u^1(t), u^2(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}. \tag{2.11}$$

Означення 2.2.2 *Симетрична додатно визначена диференціальна форма, що визначається на області параметрів $\mathcal{D}(u^1, u^2)$ формулою*

$$ds^2 = g_{ij}(u^1, u^2)\, du^i\, du^j, \tag{2.12}$$

називається диференціальною першою фундаментальною формою поверхні в області $\mathcal{D}(u^1, u^2)$.

Ремарка 2.2.1 *З виразу* (2.12) *очевидно, що диференціальну першу фундаментальну форму можна задавати без використання параметризації поверхні. Образно кажучи, перша фундаментальна форма "живе" на області параметрів $\mathcal{D}(u^1, u^2)$ і виражає квадрат диференціалу натурального паметру довільної регулярної кривої на поверхні за умови існування парметризаціїї $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to E^3$ для якої наперед задана матриця g пов'язана з параметризацією $\vec{r}$ формулою* (2.10)*. Умови існування відповідної параметризації містяться в основній теоремі теорії поверхонь, а саме в теоремі Бонне.*

Коефіцієнти першої фундаментальної форми залежать від вибору параметризації. Нехай $\varphi : \mathcal{G}^2(v^1, v^2) \to \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ дифеоморфізм перепараметризації, заданий системою функцій

$$\varphi : \begin{cases} u^1 = u^i(v^1, v^2), \\ u^2 = u^i(v^1, v^2). \end{cases}$$

З інваріантності натурального парметру і формули (2.12) випливає

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j = (g \circ \varphi)_{ij}\, \frac{\partial u^i}{\partial v^k}\, \frac{\partial u^j}{\partial v^m}\, dv^k\, dv^m$$

Отже, матриця першої фундаментальної форми g відносно параметрів (u^1, u^2) пов'язана з матрицею першої фундаментальної форми $\tilde{g}$ відносно параметрів (v^1, v^2) формулою

$$\tilde{g}_{km} = (g \circ \varphi)_{ij}\, \frac{\partial u^i}{\partial v^k}\, \frac{\partial u^j}{\partial v^m}. \tag{2.13}$$

Матричний вираз для перетворення (2.13) можна також з формул (2.1.6) та (2.10). А саме, при заміні параметризації $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi$ маємо

$$\tilde{g} = (\partial\vec{\rho})^t(\partial\vec{\rho}) = (\partial\vec{r}\partial\varphi)^t(\partial\vec{r}\partial\varphi) = (\partial\varphi)^t(\partial\vec{r})^t(\partial\vec{r})\partial\varphi = (\partial\varphi)^t(g \circ \varphi)\partial\varphi, \tag{2.14}$$

де $\partial\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)$ – матриця Якобі перетворення координат.

Ремарка 2.2.2 *З формули* (2.14) *випливає, що додатна визначеність першої фундаментальної форми зберігається при перетворенні координат, адже*

$$\det \tilde{g} = \left(\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right)^2 \det(g \circ \varphi) = \left(\det\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right)^2 (\det g) \circ \varphi. \tag{2.15}$$

2.2.1 Перші фундаментальні форми деяких поверхонь.

Площина $E^2 \subset E^3$. Розглянемо площину у E^3, яка задана у параметричній формі

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – сталі вектори, над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u,v) = \{(u,v) \in I\!R^2 \,\big|\, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty\}.$$

Тоді $\partial_1\vec{r} = \vec{a}, \quad \partial_2\vec{r} = \vec{b}$. Тому

$$g_{11} = \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = |\vec{a}\,|^2, \quad g_{12} = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \quad g_{22} = \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = |\vec{b}\,|^2$$

є сталими величинами. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одиничні і взаємно ортогональні, то перша фундаментальна форма площини запишеться у вигляді

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Явно задана поверхня. Її параметрирація записується у вигляді

$$\vec{r} = \{x, y, f(x,y)\}$$

над областю параметрів $\mathcal{D}(x,y) = \mathcal{D}(f)$ і тому $\partial_1\vec{r} = \{1, 0, f_x\}, \quad \partial_2\vec{r} = \{0, 1, f_y\}$ Тож перша квадратична форма явно заданої поверхні набуде вигляду

$$ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y\, dxdy + (1 + f_y^2)dy^2.$$

Сфера $S^2(R) \subset E^3$. Параметризуємо сферу вектор-функцією

$$\vec{r} = R\big\{\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u\big\}$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u,v) = \{(u,v) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}.$$

Тоді

$$\partial_1\vec{r} = R\{\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u\},$$
$$\partial_2\vec{r} = R\{-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0\}.$$

Для матриці першої фундаментальної форми отримаємо вираз

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$ds^2 = R^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2).$$

Після зміни параметризації за допомогою дифеоморфізму $\varphi : \mathcal{G}(u^*, v^*) \to \mathcal{D}(u,v)$ виду

$$\varphi : \begin{cases} u = u^*/R, \\ v = v^*, \end{cases} \qquad \mathcal{G} = \{(u^*, v^*) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u^* < \pi R,\ 0 < v^* < 2\pi\}$$

маємо $R\,du = du^*,\ dv = dv^*$. Тому над областю параметрів $\mathcal{G}(u^*, v^*)$

$$ds^2 = (du^*)^2 + R^2 \sin^2(u^*/R)(dv^*)^2.$$

Гіперболічна площина H^2. Однією з моделей гіперболічної площини є модель на двопорожнистому гіперболоїді. Позначимо через $E^{3,1}$ векторний простір в якому скалярний добуток векторів $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ обчислюється за формулою $\left\langle\, \vec{a}, \vec{b} \,\right\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$. Такий простір зветься *псевдоевклідовим.* У цьому псевдоевклідовому просторі розглянемо поверхню, утворену обертанням кривої $x^2 - z^2 = -R^2$ (гіперболічного кола уявного радіусу R) навколо вісі Oz. Параметризація відкритого напівкола має вигляд

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sh} u, \\ z = R \operatorname{ch} u, \end{cases} \qquad (0 < u < +\infty),$$

а параметризація відповідної поверхні (яка зветься сферою уявного радіусу R) над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u, v) = \{(u, v) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u < +\infty,\ 0 < v < 2\pi\}.$$

має вигляд

$$\vec{r} = \{R \operatorname{sh} u \cos v, R \operatorname{sh} u \sin v, R \operatorname{ch} u\}$$

Ця поверхня називається *гіперболічною площиною* $H^2(R)$. Гіперболічна площина не компактна і інтерпретується як одна з порожнин двопорожнинного гіперболоїда обертання $x^2 + y^2 - z^2 = -R^2$ евклідового простору. Отже

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= R\{\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= R \operatorname{sh} u\{-\cos v, \sin v, 0\}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$g_{11} = \left\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_1\vec{r} \,\right\rangle = R^2(\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u) = R^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = R^2 \operatorname{sh}^2 u.$$

Отже, перша фундаментальна форма гіперболічної площини, як поверхні у псевдоевклідовому просторі з обраною параметризацією, має вигляд

$$ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 u\, dv^2.$$

Аналогічно до випадку сфери в Евклідовому просторі, дифеоморфізм $\varphi : \mathcal{G}(u^*, v^*) \to \mathcal{D}(u, v)$ виду

$$\varphi : \begin{cases} u = u^*/R, \\ v = v^*, \end{cases} \qquad \mathcal{G} = \{(u^*, v^*) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u^* < +\infty,\ 0 < v^* < 2\pi\}$$

приводить першу фундаментальну форму $H^2(R)$ до вигляду

$$ds^2 = (du^*)^2 + R^2 \operatorname{sh}^2(u^*/R)\,(dv^*)^2.$$

Рис. 2.1: Тор.

Тор $T^2 = S^1 \times S^1 \subset E^3$, як поверхня обертання. Розглянемо поверхню, утворену обертанням кола, радіусу b, що лежить в площині (x, z), центр якого знаходиться в точці $(a, 0)$ $(a > b)$ навколо вісі Oz. Параметризація такого тору має вигляд

$$\vec{r} = \{(a + b\sin u)\cos v, (a + b\sin u)\sin v, b\cos u\}$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u, v) = \{(u, v) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}.$$

Обчислимо

$$\partial_1\vec{r} = \{b\cos v\cos u,\ b\sin v\cos u,\ -b\sin u\},$$
$$\partial_2\vec{r} = \{-\sin v(a + b\sin u),\ \cos v(a + b\sin u),\ 0\}.$$

Тоді

$$g = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\sin u)^2 \end{pmatrix}$$

Таким чином,

$$ds^2 = b^2 du^2 + (a + b\sin u)^2 dv^2.$$

Дифеоморфізм $\varphi : \mathcal{G}(u^*, v^*) \to \mathcal{D}(u, v)$ виду

$$\varphi : \begin{cases} u = u^*/b, \\ v = v^*, \end{cases} \qquad \mathcal{G} = \{(u^*, v^*) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u^* < \pi b,\ 0 < v^* < 2\pi\}$$

зводить першу квадратичну форму тору до виразу

$$ds^2 = (du^*)^2 + (a + b\sin(u^*/b))^2 (dv^*)^2.$$

Загальна поверхня обертання. Нехай l – пряма на площині і γ крива, яка лежить у цій же площині і не перетинає пряму l. *Поверхня, яка утворена кривою γ при обертанні площини навколо прямої l називаеться поверхнею обертання з віссю обертання l і профільною кривою γ .*

Запишемо рівняння поверхні обертання у спеціальній системі координат. Вісь Oz спрямуємо уздовж вісі обертання, а вісь Ox Декартової прямокутної системи координат розташуємо в площині кривої γ. Нарешті, вісь Oy спрямуємо перпендикулярно площині кривої γ.

Нехай параметричне рівняння кривої γ має вигляд

$$\gamma : \begin{cases} x = f(u) > 0, \\ z = g(u) \end{cases}$$

на певному інтервалі $u \in (a, b)$ де визначені обидві функції f і g. Тоді параметризація поверхні обертання запишеться у вигляді

$$\vec{r} = \big\{ f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u) \big\}$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u, v) = \{(u, v) \in I\!R^2 \,\big|\, a < u < b, 0 < v < 2\pi\}.$$

Обчислимо похідні

$$\partial_1\vec{r} = \big\{ f'\cos v, f'\sin v, g' \big\},$$
$$\partial_2\vec{r} = \big\{ -f\sin v, f\cos v, 0 \big\}.$$

Тоді

$$g_{11} = (x')^2 + (z')^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = f^2(u).$$

І отже,

$$ds^2 = [(f')^2 + (g')^2]du^2 + f^2(u)dv^2.$$

Якщо u – *натуральний параметр* на профільній кривій, то

$$(f')^2 + (g')^2 = 1$$

і тоді

$$ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2.$$

Поверхня перенесення. Нехай γ_1 і γ_2 дві плоскі криві, розташовані у двох пересічних площинах Π_1 і Π_2. Нехай $O = \gamma_2 \cap \Pi_1$. Поверхня, яка утворена кривою γ_1 при паралельному зміщенні площини Π_1 уздовж кривої γ_2 (точка O рухається по кривій γ_2 і визначає зміщення площини Π_1 як твердого тіла) називається *поверхнею перенесення.*

Якщо $\vec{\rho}_1(u)$ і $\vec{\rho}_2(v)$ регулярні параметризації кривих γ_1 і γ_2 на інтервалах $u \in (a, b)$ та $v \in (c, d)$ відповідно, то поверхня перенесення парметризується вектор-функцією

$$\vec{r} = \vec{\rho}_1(u) + \vec{\rho}_2(v)$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u, v) = \{(u, v) \in I\!R^2 \,\big|\, a < u < b, c < v < d\}.$$

Очевидно, що $\partial_1\vec{r} = (\vec{\rho}_1)'_u; \quad \partial_2\vec{r} = (\vec{\rho}_2)'_v$. Тоді I фундаментальна форма має вигляд

$$ds^2 = |(\vec{\rho}_1)'_u|^2 du^2 + 2\big\langle\, (\vec{\rho}_1)'_u, (\vec{\rho}_2)'_v \,\big\rangle dudv + |(\vec{\rho}_2)'_v|^2 dv^2.$$

Якщо u і v *натуральні параметри* на відповідних кривих, то

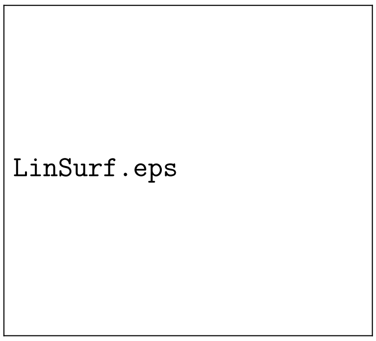
$$|\vec{\rho}_1'| = |\vec{\rho}_2'| = 1, \quad \left\langle \vec{\rho}_1', \vec{\rho}_2' \right\rangle = \cos\omega(u,v),$$

де $\omega(u,v)$ – кут між дотичними векторами координатних ліній. В цьому випадку I фундаментальна форма поверхні перенесення запишеться у вигляді

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, dudv + dv^2.$$

Координатна сітка з I фундаментальною формою такого вигляду називається *Чебишовською* а функція $\omega = \omega(u,v)$ називається *сітковим кутом.*

Загальна лінійчаста поверхня. Нехая γ – крива у просторі і $\vec{a}$ – одиничне векторне поле на γ. Поверхня, яка утворена сімейством прямих, що проходять через точки кривої γ в напрямку відповідного вектору $\vec{a}$ називається *загальною лінійчастою поверхнею.* При цьому крива γ називається *направляючою*, а самі прямі – *твірними* лінійчастої поверхні.



Лінійчаста поверхня.

Нехай вектор-функція

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(v), \quad v \in (a,b)$$

задає натуральну параметризацію направляючої. Тоді параметризація лінійчастої поверхні запишеться у вигляді

$$\vec{r} = \vec{\rho}(v) + u\,\vec{a}(v)$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u,v) = \{(u,v) \in I\!R^2 \,\big|\, -\infty < u < +\infty, a < v < b\}.$$

Отже,

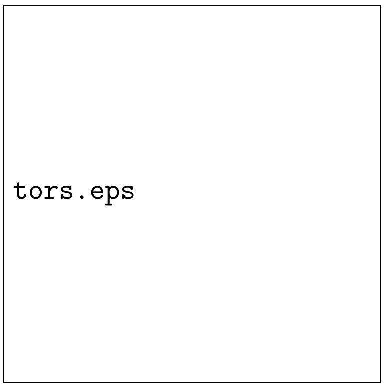
$$\partial_1\vec{r} = \vec{a}, \quad \partial_2\vec{r} = \vec{\rho}' + v\vec{a}\,'.$$

Тоді коефіцієнти першої фундаментальної форми набудуть вигляду

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = \left\langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \right\rangle = \cos\omega(v), \quad g_{22} = 1 + 2\left\langle \vec{\rho}', \vec{a}\,' \right\rangle v + v^2|\vec{a}\,'|^2,$$

а значить

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega(v)\, dudv + (1 + 2\left\langle \vec{\rho}\,', \vec{a}' \right\rangle v + v^2|\vec{a}\,'|^2)dv^2.$$



Торс. У точках направляючої поверхня не регулярна.

Торс (поверхня дотичних). Ця поверхня є окремим випадком лінійчастої поверхні при $\vec{a} = \vec{\rho}\,'$. Тоді $\vec{a'} = k\vec{\nu}$, $\omega = 0$ і I фундаментальна форма торсу набуде вигляду

$$ds^2 = du^2 + 2\,dudv + (1 + k^2v^2)dv^2.$$

Циліндрична поверхня. Ця поверхня є окремим випадком лінійчатої поверхні при $\vec{a}' = 0$ і, одночасно, окремим випадком поверхні перенесення, якщо γ_2 є прямою лінією. Параметризація циліндричної поверхні можне бути обрана у вигляді

$$\vec{r} = \vec{\rho}\,(v) + u\vec{a}, \quad \vec{a} = const, \quad |\vec{a}| = 1.$$

Тому I фундаментальна форма циліндричної поверхні набуде вигляду

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\,dudv + dv^2, \quad \omega = \omega(v).$$

2.3 Внутрішні обчислення на поверхні.

Як відзначалося в зауваженні 2.2.1, для визначення першої фундаментальної форми не обов'язково треба знати парметризацію поверхні, що несе цю форму. Достатньо лише задати додатно визначену квадратичну диференціальну форму на області параметрів. Всі обчислення на поверхні, що включають лише першу фундаментальну форму називаються *внутрішніми*, а геометричні властивості, що залежать лише від першої фундаментальної форми, називаються *внутрішньо-геометричними.* До базових внутрішніх обчислень відносяться обчислення довжини кривої, кута між кривими та площі області.

2.3.1 Довжина відрізку кривої.

Твердження 2.3.1 *Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3$ – регулярна параметризація поверхні F, $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ – регулярна параметризація регулярної кривої в області параметрів і $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma : [t_1, t_2] \to F \subset E^3$ її образ на F. Позначимо через $\gamma\,'$ – дотичне векторне поле γ. Тоді довжина кривої $\vec{\gamma}$ на проміжку $[t_1, t_2]$ обчислюється за формулою*

$$l(\vec{\gamma}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(g \circ \gamma)(\gamma\,', \gamma\,')}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(u^1(t), u^2(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}}dt,$$

де $g = (g_{ik})$ *– матриця першої фундаментальної форми,* $\{u^1(t), u^2(t)\}$ *– координатні функції параметризації* γ *.*

Це твердження є простим наслідком формули (2.11). Розглянемо декілька прикладів.

Довжина кола на сфері. Нехай $S^2(R) \subset E^3$ – сфера радіусу R. Переріз сфери площиною, що проходить через її центр називається великим колом на сфері, а її переріз іншою площиною називається малим колом. Радіус кола як кола в площині перерізу називається зовнішнім радіусом кола на сфері. Площина перерізу видтинає від сфери два сферичних сегменти, що називаються також сферичними кругами. Кінцеві точки діаметру сфери, що перпендикулярний перерізу, називаються центрами сферичних кругів. Довжина дуги великого кола, що з'єднує центр сферичного кругу з точкою на колі називається внутрішнім радіусом кола на сфері.

Оскільки довжина кривої не залежить від параметризації поверхні, то виберемо параметризацію, зручну для обчислень. Початок координат розташуємо в центрі сфери, вісь Oz спрямуємо з центру сфери до центру сферичного кола, а площину xOy розташуємо в площині, що перпендикулярна до обраної вісі Oz і проходить через центр сфери. Відносно такої Декартової системи координат, сфера радіусу R отримає неявне рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Параметризуємо сферу (без двох точок) вектор-функцією

$$\vec{r} = \{R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u\}$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D} = \{(u, v) \,|\, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}.$$

Геометрично, параметр u – це кут між радіусом-вектором точки на сфері і віссю Oz, в параметр v – кут між прекцією радіус-вектору на площину xOy і віссю Ox.

За такої параметризації перша фундаментальна форма сфери отримає вираз

$$ds^2 = R^2(du^2 + \sin^2 u \, dv^2).$$

При цьому коло (без однієї точки), з центром в точці $(0, 0, 1)$ внутрішнього радіусу r, отримає в області параметрів параметризацію вигляду

$$\gamma \, : \left\{u = \frac{r}{R}, v = t\right\} \quad (0 < t < 2\pi).$$

Уздовж кривої γ маємо $du = 0, \; dv = dt$. Тож елемент довжини кола на сфері

$$ds = R \sin(r/R) dt$$

і значить[5]

$$l = \int\limits_0^{2\pi} R \sin(r/R) \, dt = 2\pi R \sin(r/R).$$

[5] З огляду на область параметрів, інтеграл слід розуміти як невласний другого роду.

У порівнянні з довжиною кола того ж радіусу на Евклідовій площині зауважимо

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\sin(r/R)}{r/R} < 1$$

Зауважимо, так само, що якщо $\frac{r}{R} \ll 1$, то $l \approx 2\pi r$.

Довжина кола на гіперболічній площині. Розглянемо модель гіперболічної площини на однопорожнинному гіперболоїді

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2.$$

Параметризуємо гіперболічну площину вектор-функцією

$$\vec{r} = \{R \operatorname{sh} u \cos v, R \operatorname{sh} u \sin v, R \operatorname{ch} u\}$$

Перша фундаментальна форма $H^2(R)$ запишеться у вигляді

$$ds^2 = R^2(du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2).$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}(u, v) = \{(u, v) \in I\!R^2 \,\big|\, 0 < u < +\infty,\ 0 < v < 2\pi\}.$$

Розглянемо коло на гіперболічній площині, що є перерізом двопорожнинного гіперболоїду площиною $z = const > R$. Така площина відтинає від порожнини двопорожнинного гіперболоїду гіперболічний сегмент, що зветься гіперболічним кругом з центром в точці $(0, 0, R)$. Перерізи гіперболічного кругу площинами, що проходять через вісь Oz, утворюють його радіуси. Відносно заданої параметризації, внутрішнє рівняння радіусу має вигляд $\gamma : \{u = t, v = v_0\}$ $(0 < t < u_0)\}$. Уздовж радіусу $\{du = dt, tv = 0\}$ тому зв'язок між параметром u і радіусом кола є таким, як і на звичайній сфері, а саме $r = Ru$.

З огляду на це, внутрішнє рівняння кола (без однієї точки) радіусу r на гіперболічній площині отримає вигляд

$$\gamma : \{u = r/R, v = t\} \quad (0 < t < 2\pi).$$

Обчислюючи, подібно як для сфери, знаходимо

$$l = 2\pi R \operatorname{sh}(r/R).$$

У порівнянні з довжиною кола того ж радіусу на Евклідовій площині зауважимо

$$\frac{l(\gamma)}{2\pi r} = \frac{\operatorname{sh}(r/R)}{r/R} > 1$$

Зауважимо, аналогічно, що якщо $\frac{r}{R} \ll 1$, то $l(\gamma) \approx 2\pi r$.

Довжина кривої на гіперболічній площині в моделі Пуанкаре у напівплощині. Гіперболічну площину ще називають площиною Лобачевського на честь видатного математика М.I. Лобачевського, що першим відкрив існування неевклідової геометрії. Модель Пуанкаре має наступний опис.

Нехай (x, y) – декартові координати на площині. Напівплощина $y > 0$ з додатно визначеною диференціальною формою

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

називається *моделлю Пуанкаре* площини Лобачевського L^2. Область параметрів

$$D^2(x, y) = \{(x, y) \in I\!R^2 \,\big|\, y > 0\}$$

збігається з напівплощиною $y > 0$. Координатними лініями на L^2 є прямі $x = t, y = const$ та $x = const, y = t$. Координатні лінії на L^2 взаємно ортогональні. Пряма $y = 0$ називається абсолютом.

Нехай $\gamma : I \to \mathcal{D}^2(x, y)$ регулярна крива в області параметрів і $\{x = x(t), y = y(t)\}$ її парметризація. На площині L^2 диференціал натурального параметру цієї кривої буде мати вигляд

$$ds = \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{y} dt.$$

Тому довжина кривої на проміжку $[t_1, t_2] \subset I$ обчислиться за формулою

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{y} dt.$$

Наприклад, обчислимо довжину образу кола області параметрів на площині Лобачевського. Параметричне рівняння кола в $\mathcal{D}^2(x, y)$ запишемо у вигляді

$$\{x = a + r\cos t,\ y = b + r\sin t\} \quad (0 \le t \le 2\pi, y_0 > r).$$

Тоді на L^2 отримаємо

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r}{b + r\sin t} dt.$$

Напівколо з центром на осі Ox отримає в $\mathcal{D}^2(x, y)$ параметричне рівняння

$$\{x = a + r\cos t,\ y = r\sin t\} \quad (0 \le t \le \pi).$$

Тож на площині Лобачевського отримаємо розбіжний невласний інтеграл

$$l = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\sin t} dt = +\infty.$$

Зауважимо, що на будь-якому відрізку $[t_1, t_2] \subset (0, \pi)$ довжина дуги кола не залежить від його радіусу.

2.3.2 Кут між кривими на поверхні

Кутом між кривими на поверхні називається менший з кутів між дотичними до кривих в їх спільній точці. Нехай $\vec{r}: \mathcal{D}^2(u^1,u^2) \to E^3$ – регулярна параметризація поверхні F. Нехай $\gamma_1 : [a,b] \to \mathcal{D}^2$ і $\gamma_2 : [c,d] \to \mathcal{D}^2$ – внутрішні рівняння двох кривих $\vec{\gamma}_1 = \vec{r} \circ \gamma_1$ і $\vec{\gamma}_2 = \vec{r} \circ \gamma_2$ на поверхні. Припустимо, що $\gamma_1 \cap \gamma_2 = (u_0,v_0) \in \mathcal{D}^2$. Тоді $\vec{\gamma}_1 \cap \vec{\gamma}_2 = \vec{r}(u_0,v_0) := q \in F$. За означенням,

$$\cos(\vec{\gamma}_1\widehat{\ }\vec{\gamma}_2)(q) = |\cos(\vec{\gamma}_1'\widehat{\ }\vec{\gamma}_2')|\,(q) = \frac{|\langle\, \vec{\gamma}_1{}', \vec{\gamma}_2{}' \,\rangle|}{|\vec{\gamma}_1{}'|\,|\vec{\gamma}_2{}'|}(q) = \frac{|g(\gamma'_1, \gamma'_2)|}{\sqrt{g(\gamma'_1,\gamma'_1)\, g(\gamma'_2,\gamma'_2)}}(u_0,v_0)$$

Отже, для обчислення кута між кривими на поверхні достатньо знати їх параметризації в області параметрів, спільну точку в області параметрів і першу фундаментальну форму.

Координатна сітка на поверхні називається ортогональною, якщо координатні лінії в точках перетину взаємно ортогональні. Відповідна параметризація називається ортогональною.

Твердження 2.3.2 *Для того, щоб координатна сітка на поверхні була ортогональною необхідно і достатньо, щоб матриця першої фундаментальної форми була діагональною.*

Доведення. Розглянемо дві координатні криві, тобто криві з внутрішніми рівняннями

$$\gamma_1 : \{u = t, v = v_0\}, \quad \gamma_2 : \{u = u_0, v = \theta\}.$$

Тоді $\gamma_1 \cap \gamma_2 = (u_0,v_0)$, $\gamma'_1 = \{1,0\}$, $\gamma'_2 = \{0,1\}$ і ми маємо

$$g(\gamma'_1,\gamma'_1) = g_{11}, \quad g(\gamma'_2,\gamma'_2) = g_{22}, \quad g(\gamma'_1,\gamma'_2) = g_{12}.$$

Отже, для кута φ між координатними кривими маємо вираз

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}},$$

що і завершує доведення.

■

Вправа 2.3.1 *Лінії, що ділять навпіл кути між координатними лініями, можуть бути знайдені з рівнянь*

$$\sqrt{g_{11}}\, du = \pm\sqrt{g_{22}}\, dv.$$

Ортогональними траекторіями сімейства регулярних кривих називається сімейство ліній, ортогональних заданому в кожній спільній точці. Параметризація, координатні лінії якої взвємно ортогональні, називається ортогональною. Ортогональна параметризація поверхні завжди існує. Це твердження є наслідком більш загального результату.[6]

[6]Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М. Наука, 1974. стор. 80

Твердження 2.3.3 *Нехай F – регулярна поверхня і $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u,v) \to F \subset E^3$ її регулярна парметризація. Нехай в околі точки (u_0, v_0) задано два диференціальних рівняння*

$$\begin{cases} A_1(u,v)du + B_1(u,v)dv = 0, \\ A_2(u,v)du + B_2(u,v)dv = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

коефіцієнти яких в точці (u_0, v_0) задовольняють умові

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.17}$$

Тоді в околі точки (u_0, v_0) існує параметризація, координатними лініями якої є інтегральні криві рівнянь (2.16).

Доведення. Нехай (u_0, v_0) точка, і якій виконується умова (2.17). За неперервністю, існує певний окіл цієї точки U, в якому виконується умова (2.17). Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що в цьому околі $A_2 \neq 0$ та $B_1 \neq 0$. Задача Коші

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = -\frac{A_1}{B_1}, \\ v(u_0) = \alpha \end{cases}$$

має в околі U єдиний розв'язок для кожного α. За теоремою про неперервну залежність розв'язку диференціального рівняння від параметру, отримаємо сімейство розв'язків $v = \varphi(u, \alpha)$, що задовольняють умові $\varphi(u_0, \alpha) = \alpha$. Аналогічно, для другого рівняння сімейство розв'язків запишеться у вигляді $u = \psi(v, \beta)$ з умовою $\psi(v_0, \beta) = \beta$. Система

$$\begin{cases} u = \psi(v, \beta), \\ v = \varphi(u, \alpha) \end{cases}$$

розв'язувана відносно (α, β) в деякому околі точки (u_0, v_0), бо в самій точці визначник матриці Якобі

$$\left| \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(\beta, \alpha)} \right|_{(u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Нехай $\alpha = \alpha(u, v)$ та $\beta = \beta(u, v)$ відповідні розв'язки. При кожному фіксованому значенні параметру α функція $v = \varphi(u, \alpha)$ є розв'язком рівняння $(2.16)_1$. Тому якщо

$$d\alpha = \alpha_u du + \alpha_v dv = 0,$$

то диференціали параметрів $\{du, dv\}$ пов'язані рівнянням $(2.16)_1$ і значить $\frac{dv}{du} = -\frac{A_1}{B_1}$. В такому разі $(\alpha_u - \alpha_v \frac{A_1}{B_1})du = 0$, тобто

$$\alpha_u B_1 - \alpha_v A_1 = \begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно,

$$\begin{vmatrix} \beta_u & \beta_v \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поруч з тим,

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

бо в протилежному випадку рядки всіх визначників пропорційні і, значить, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, що суперечить умові. Тож (α, β) можуть бути прийняти в якості нових параметрів на поверхні, причому лінії $\alpha = const$ і $\beta = const$ є інтегральними кривими рівнянь (2.16).

■

Твердження 2.3.4 *Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u,v) :\to F \subset E^3$ параметризація поверхні F з першою фундаментальною формою $ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$.*

(1) Нехай $\{\gamma_\alpha\}$ сімейство ліній, що визначається диференціальним рівнянням

$$A(u,v)du + B(u,v)dv = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{2.18}$$

Сімейство ортогональних траекторій для $\{\gamma_\alpha\}$ завжди існує і визначається диференціальним рівнянням

$$(g_{11}B - g_{12}A)du + (g_{12}B - g_{22}A)dv = 0. \tag{2.19}$$

(2) Сімейство $\{\gamma_\alpha\}$ та сімейство його ортогональних траекторій $\{\gamma_\beta\}$ парметризують поверхню. Відносно нової параметризації

$$ds^2 = g_{11}(\alpha, \beta)d\alpha^2 + g_{22}(\alpha, \beta)d\beta^2. \tag{2.20}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що на області параметризації $A \neq 0$ (за необхідності, область параметризації можна звузити). Тоді існує розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{du}{dv} = -\frac{B}{A}.$$

Дотичне векторне поле кривих сімейства $\{\gamma_\alpha\}$ складається з векторів

$$X_\alpha = \{-B/A, 1\} \sim \{B, -A\}.$$

Сімейство ортогональних траекторій будемо шукати у вигляді кривої $\gamma = \{u(t), v(t)\}$ з умови

$$g_{11}Bu' + g_{12}(Bv' - Au') - g_{22}Av' = 0,$$

або

$$(g_{11}B - g_{12}A)u' + (g_{12}B - g_{22}A)v' = 0.$$

Перейшовши до диференціалів парметрів, отримаємо рівняння (2.19). Коефіцієнти при du і dv не можуть бути нулями одночасно, бо визначник системи

$$\begin{cases} g_{11}B - g_{12}A = 0, \\ g_{12}B - g_{22}A = 0 \end{cases}$$

дорівнює $\det g \neq 0$. Покажемо, що два диференціальних рівняння

$$\begin{gathered} Adu + Bdv = 0, \\ (-g_{11}B + g_{12}A)du + (-g_{12}B + g_{22}A)v = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

задовольняють умовам твердження 2.3.3. Дійсно,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -g_{11}B + g_{12}A & -g_{12}B + g_{22}A \end{vmatrix} = g_{22}A^2 - 2g_{12}AB + g_{11}B^2 = |X_\alpha|_g^2 \neq 0.$$

Інтегральні траєкторії системи (2.21) утворюють ортогональну координатну сітку. Відносно нових параметрів перша фундаментальна форма набуває вигляду (2.20).

■

Наслідок 2.3.1 *Нехай сімейство регулярних кривих на поверхні задане внутрішнім рівнянням $\varphi(u, v) = \alpha$ $(\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0)$. Лінії заданого сімейства та їх ортогональні траєкторії можна прийняти в якості координатних ліній на поверхні.*

Доведення. Лінії $\varphi = const$ є розв'язками рівняння $d\varphi = 0$, тобто,

$$\varphi_u du + \varphi_v dv = 0.$$

Таке сімейство задовольняє умовам твердження 2.3.4.

■

2.3.3 Площа області на поверхні

Нехай $F \subset E^3$ поверхня і $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3$ – її регулярна параметризація. *Елементом площі* поверхні dS називається площа нескінченно малого паралелограму в дотичній площині зі сторонами $du^1\partial_1\vec{r}$ та $du^2\partial_2\vec{r}$. За означенням,

$$dS = \left|\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}\right| du^1 du^2.$$

Нехай $\Omega \subset \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ підобласть така, що $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{D}^2$. Площею області $\vec{r}(\Omega) \subset F$ називається в величина

$$S = \iint\limits_{\bar{\Omega}} dS.$$

Ремарка 2.3.1 *Якщо межа області $\partial\Omega$ має міру нуль, то $\iint\limits_{\Omega} dS = \iint\limits_{\bar{\Omega}} dS$ Якщо Ω не компактна, то інтеграл слід розуміти як невласний.*

Площа поверхні належить до внутрішньо-геометричної властивості, оскільки

$$\left|\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}\right| = \sqrt{|\partial_1\vec{r}|^2\,|\partial_2\vec{r}|^2 - \left\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}\,\right\rangle^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det g}.$$

Таким чином, площа області $\vec{r}(\Omega)$ обчислюється за формулою

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \sqrt{\det g}\, du^1 du^2.$$

Означення площі містить параметризацію, тож потребує доведення коректності.

Твердження 2.3.5 *Об'єм області на поверхні не залежить від параметризації поверхні.*

Доведення. При перетворенні параметрів $u : \mathcal{G}(v) \to \mathcal{D}(u)$ виду $u^1 = u^1(v^1, v^2),\ u^2 = u^2(v^1, v^2)$ визначник першої фундаментальної форми змінюється за формулою (2.15), тобто

$$\det\, g(v) = \det g(u(v)) \det^2 \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right).$$

А отже,

$$\int\limits_{\mathcal{G}(v)} \sqrt{\det g(v)}\, dv^1 dv^2 = \int\limits_{\mathcal{G}(v)} \sqrt{\det g(u(v))} \left|\det \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right| dv^1 dv^2 =$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}(u)} \sqrt{\det g(u)}\, du^1 du^2.$$

Остання рівність є формулою заміни змінних у кратному інтегралі.

■

Площа кола на сфері. Розглянемо сферу $S^2(R) \subset E^3$ параметризовану сферичними координатами

$$\vec{r} = R\{\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u\}.$$

Перша фундаментальна форма сфери в такій параметризації має вигляд

$$ds^2 = R^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2).$$

Тоді елемент площі сфери

$$dS = R^2 \sin u\, du dv.$$

Круг внутрішнього радіусу r з центром в точці $(0, 0, R)$ в межах параметризації задається системою нерівностей

$$D : \begin{cases} 0 < u \le r/R; \\ 0 < v < 2\pi. \end{cases}$$

Площа всього кругу на сфері буде дорівнювати (див. Ремарку 2.3.1)

$$S(D) = \iint\limits_{\bar{D}} R^2 \sin u\, du dv = R^2 \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^{r/R} \sin(u)\, du =$$

$$-\,2\pi R^2 \cos u\Big|_0^{r/2} = 4\pi R^2 \sin^2(r/2R).$$

У порівнянні з площею кругу радіусу r на площині маємо

$$\frac{S(D)}{\pi r^2} = \frac{4\pi R^2 \sin^2(r/2R)}{\pi r^2} = \left[\frac{\sin(r/2R)}{(r/2R)}\right]^2 < 1,$$

бо $\dfrac{\sin x}{x} < 1$ для усіх $x > 0$. Якщо $\frac{r}{R} \ll 1$, то $S(\Omega) \approx \pi r^2$.

Площа кола на гіперболічній площині. Розглянемо гіперболічну площину $H^2(R) \subset E^{3,1}$ параметризовану гіперболічними координатами

$$\vec{r} = R\{\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{ch} u\}.$$

Перша фундаментальна форма гіперболічної площини у такій параметризації має вигляд

$$ds^2 = R^2(du^2 + \operatorname{sh}^2(u)\, dv^2.$$

Тоді елемент площі гіперболічної площини має вигляд

$$dS = R^2 \operatorname{sh}(u)\, dudv.$$

Круг внутрішнього радіусу r, з центром в точці $(0, 0, R)$, задається в межах параметризації системою нерівностей

$$D : \begin{cases} 0 < u \leq r/R; \\ 0 < v < 2\pi. \end{cases}$$

Площа кругу на гіперболічній площині буде дорівнювати

$$S(D) = \iint\limits_{\bar{D}} R^2 \operatorname{sh} u\, dudv = R^2 \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^{r/R} \operatorname{sh}(u)\, du = 2\pi R^2 \operatorname{ch} u \Big|_0^{r/R} = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2(r/2R).$$

У порівнянні з площою кругу на площині маємо

$$\frac{S(D)}{\pi r^2} = \frac{4\pi R^2 \operatorname{sh}^2(r/2R)}{\pi r^2} = \left[\frac{\operatorname{sh}(r/2R)}{(r/2R)}\right]^2 > 1,$$

бо $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} > 1$ для усіх $x > 0$. Якщо $\frac{r}{R} \ll 1$, то $S(D) \approx \pi r^2$.

2.4 Ізометрія та конформна еквівалентність.

Означення 2.4.1 *Нехай F_1 і F_2 дві елементарні поверхні в $\mathbb{R}^2$. Кажуть, що задано відображення*

$$\Phi \colon F_1 \to F_2$$

однієї поверхні на іншу, якщо визначена однозначна відповідність

$$F_1 \ni q \longmapsto \Phi(q) \in F_2.$$

Відображення Φ називається ***неперервним****, якщо Φ неперервно щодо індукованих топологій на F_1 і F_2. Якщо Φ – гомеоморфізм, то поверхні F_1 і F_2 називаються* ***гомеоморфними****.*

Нехай $\mathcal{D}_1 \subset I\!R^2(v^1, v^2)$ і $\mathcal{D}_2 \subset I\!R^2(u^1, u^2)$ області параметрів поверхнонь F_1 и F_2 відповідно. Тоді визначені гомеоморфізми

$$h_1 \colon \mathcal{D}_1 \to h_1(\mathcal{D}_1) = F_1,$$
$$h_2 \colon \mathcal{D}_2 \to h_2(\mathcal{D}_2) = F_2.$$

і має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\Phi} & F_2 \\ \uparrow h_1 & & \uparrow h_2 \\ \mathcal{D}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}_2. \end{array}$$

з замикаючим відображенням

$$\varphi = h_2^{-1} \circ \Phi \circ h_1 \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2.$$

Якщо Φ – неперервне (або гомеоморфізм), то φ неперервне (або також гомеоморфізм) як композиція неперервных відображень (відповідно, гомеоморфізмів). З іншого боку, якщо

$$\varphi \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$$

неперервне, то і відображення $\Phi = h_2 \circ \varphi \circ {h_1}^{-1}$ буде неперервним відображенням

$$\Phi \colon F_1 \to F_2.$$

Якщо φ гомеоморфізм, то і Φ – гомеоморфізм. Відображення φ називається *координатним (або параметричним) виразом* відображення $\Phi \colon F_1 \to F_2$ і задається функціями

$$\begin{cases} u_1 = u^1(v^1, v^2), \\ u^2 = u^2(v^1, v^2). \end{cases}$$

Гомеоморфізм Φ називається *дифеоморфізмом*, якщо матриця Якобі відображення φ невироджена над всією областю визначення[7]. Клас регулярності дифеоморфізму Φ визначається класом регулярності координатного дифеоморфізму φ.

Означення 2.4.2 *Відображення $\Phi \colon F_1 \to F_2$ двох елементарних поверхонь класу C^k називається C^k-дифеоморфізмом, якщо його координатний вираз $\varphi = h_2^{-1} \circ \Phi \circ h_1 :$ $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ є дифеоморфізмом класу C^k. Дві поверхні називаються C^k-дифеоморфними, якщо існує C^k-дифеоморфізм $\Phi \colon F_1 \to F_2$.*

Дві елементарні дифеоморфні поверхні можна параметризувати спільною областю параметрів, бо фактично дифеоморфізм φ є перетворенням координат. Якщо дві елементарні поверхні зведені до спільної області параметрів, то говорять, що дифеоморфізм Φ діє за рівністю координат.

Нехай тепер F_1 і F_2 дві елементарні *регулярні* класу C^k поверхні в евклидовому просторі E^3. Нехай існує дифеоморфізм $\Phi \colon F_1 \to F_2$ – дифеоморфізм. Дві криві $\gamma \subset F_1$ і $\tilde{\gamma} \subset F_2$ називаються Φ-*відповідними*, якщо $\tilde{\gamma} = \Phi \circ \gamma$.

[7] За необхідності, область визначення може бути зменшеною для забезпечення умови на Якобіан.

Відображення $\Phi\colon F_1 \to F_2$ двох елементарних поверхонь в E^3 називається *ізометрією*, якщо Φ – дифеоморфізм, щозберігає довжини всіх Φ-відповідних кривих. Дві елементарні поверхні називаються *ізометричними*, якщо існує ізометрія $\Phi\colon F_1 \to F_2$. *Відношення ізометрії є відношенням еківівалентності.* Тому всі елементарні поверхні поділяються на класи еквівалентних між собою поверхонь.

Твердження 2.4.1 *Дві елементарні поверхні F_1^m і F_2^m ізометричні тоді і тільки тоді, коли при дифеоморфізмі, що діє за рівності координат, матриці їх перших квадратичних форм співпадають.*

Доведення. Якщо поверхні ізометричні, то після переходу до спільної області параметрів $\mathcal{D}(u^2, u^2)$ їх парметризації задаються вектор-функціями $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(u^1, u^2)$ та $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(u^1, u^2)$. Позначимо через g і $\tilde{g}$ матриці перших фундаментальних форм поверхонь F_1 і F_2 відповідно.

Нехай $\gamma : I \to \mathcal{D}(u^1, u^2)$ довільна регулярна крива в області параметрів. Тоді $\vec{\gamma}_1 = \vec{r}_1 \circ \gamma$ і $\vec{\gamma}_2 = \vec{r}_2 \circ \gamma$ є відповідними регулярними кривими на поверхнях. З означення ізометричності випливає, що на будь-якому проміжку $[t_0, t] \subset I$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{g(\gamma', \gamma')}dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\tilde{g}(\gamma', \gamma')}dt.$$

Отже, $g(\gamma', \gamma') = \tilde{g}(\gamma', \gamma')$ для довільної кривої. Отже, в довільній точці для довільного вектору X маємо $g(X, X) = \tilde{g}(X, X)$, а значить $g = \tilde{g}$.

Обернене твердження є очевидним.

■

Торс і площина локально ізометричні. Параметризуємо торс вектор-функцією

$$\vec{r} = \vec{\rho}\,(v) + u\vec{\tau}\,(v),$$

де $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,(v)$ – натуральна параметризація просторової кривої γ , над областю параметрів

$$\mathcal{D} = \Big\{0 < u < +\infty, \quad 0 < v < L\Big\},$$

де L обрано так, щоб на ділянці $[0, L]$ кривина кривої $k > 0$.

Тоді

$$\partial_1\vec{r} = \vec{\tau}\,, \quad \partial_2\vec{r} = \vec{\tau} + uk\vec{\nu};$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1 + u^2k^2, \quad g_{12} = 1$$

і перша фундаментальна форма торса набуває вигляду

$$d\sigma^2 = du^2 + 2\,dudv + (1 + u^2k^2)dv^2.$$

Згідно основної теореми теорії кривих, для заданої функції $k(v)$ довільного параметру v, на площині існує крива γ^*, кривина якої $k^* = k$ і параметр v є натуральним параметром на γ^*. Нехай $\vec{p} = \vec{p}(v)$ її (натуральна) параметризація, $(\vec{\tau}^{\,*}, \vec{\nu}^{\,*})$ – її репер Френе.

В околі кривої γ^* задамо відображення $\varphi : \mathcal{D}^2(u,v) \to E^2(x,y)$ вектор-функцією $\vec{p}(v) + u\vec{\tau}^*(v)$. Матриця Якобі цього відображення складена з стовбчиків

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \vec{\tau}^{\,*}(v), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \vec{\tau}^{\,*}(v) + k(v)\vec{\nu}^*.$$

Оскільки на проміжку $[0, L]$ кривина $k > 0$, то ці стовбчики лінійно незалежні, а значить а значить в області $\mathcal{D}$ відображення φ є дифеоморфізмом. Відносно нових параметрів u і v перша фундаментальна форма площини має вигляд:

$$ds^2 = du^2 + 2\,dudv + (1 + k^2u^2)dv^2,$$

що і завершує доведення.

Для будь-якого прямого гелікоїда існує локально ізометричний йому катеноїд. *Прямий гелікоїд*— це поверхня, утворена рухом прямої вздовж перпендикулярної до неї нерухомої прямої з одночасним поворотом на кут, пропорційний швидкості руху. У системі координат з віссю Oz, що співпадає з нерухомою прямою, параметризація гелікоїду має вигляд

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, av\}.$$

Область параметрів обраної параметризації

$$\mathcal{G}^2 = (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

Перша фундаментальна форма такої параметризації гелікоїду

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2. \tag{2.22}$$

Катеноїд— це поверхня обертання, утворена обертанням графіка гіперболічного косинуса $x = \operatorname{ch} z$ навколо осі Oz. Розглянемо катеноїд, що має параметризацію виду

$$\vec{r} = \{a\operatorname{ch}(t/a)\cos\alpha, a\operatorname{ch}(t/a)\sin\alpha, t\}.$$

Локальну область обраної параметризації

$$\mathcal{D}^2 = (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

Перша фундаментальна форма такої парметризації катеноїду

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(t/a)\,dt^2 + a^2\operatorname{ch}^2(t/a)\,d\alpha^2.$$

Розглянемо відображення $\varphi\colon \mathcal{D}^2 \to \mathcal{G}^2$ вигляду:

$$\begin{cases} u = a\operatorname{sh}(t/a), \\ v = \alpha. \end{cases}$$

Матриця Якобі цього відображення

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,\alpha)} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невироджена для усіх (t, α), тому $\varphi\colon \mathcal{D}^2 \to \mathcal{G}^2$ є дифеоморфізмом у всій області визначення. При цьому

$$du = \operatorname{ch}(t/a)\,dt, \quad dv = dt.$$

Відносно нових параметрів (над областю $\mathcal{G}$) перша фундаментальна форма катеноїда набуває вигляду

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2 \tag{2.23}$$

Порівнюючи (2.22) і (2.23) помічаємо, що над однією і тією ж областю параметрів, перші фундаментальні форми катеноїда і гелікоїда співпадають. Отже це локально ізометричні поверхні.

Ремарка 2.4.1 *Критерій ізометричності поверхонь є неефективним з огляду на те, що він містить тезу про існування ізометрії. Побудова ізометрії в загальному випадку є нетривіальною задачею. Інваріанти ізометрії надають необхідні умови існування ізометрії. Одним з таких інваріантів є Гаусова кривина.*

Означення 2.4.3 *Відображення $\Phi\colon F_1 \to F_2$ між елементарними поверхнями називається конформним, якщо воно зберігає кути між відповідними кривими. Дві дифеоморфні поверхні називаються конформно еквівалентними, якщо існує конформний дифеоморфізм.*

Критерієм існування конформного дифеоморфізму служить наступне твердження.

Твердження 2.4.2 *Дві поверхні (F_1, g_1) і (F_2, g_2) конформно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли при дифеоморфізмі, що діє за рівністю координат, матриці їх перших фундаментальних форм пропорційні, тобто*

$$g_1 = \lambda\, g_2,$$

де λ – додатна функція.

Відношення конформної еквівалентності також є відношенням еквівалентності, але менш жорстким ніж ізометрія. Будь-які ізометричні поверхні конформно еквівалентні. Обернене твердження невірне. В якості прикладу покажемо, що **двовимірна сфера і площина конформно еквівалентні**.

Параметризуємо сферу вектор-функцією $\vec{r} = R\{\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u\}$ з першою фундаментальною формою

$$S^2(R): \quad ds^2_{\text{сф}} = R^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2)$$

над областю параметрів

$$\mathcal{D}^2 = (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

На площині оберемо полярні координати (r, φ). Тоді

$$E^2: \quad ds^2_{\text{пл}} = dr^2 + r^2 d\alpha^2$$

над областю параметрів

$$\mathcal{G}^2 = (0, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

З елементарних міркувань $r = R\operatorname{ctg}(u/2)$. Отже, маємо відображення $\mathcal{D}^2 \to \mathcal{G}^2$ у вигляді

$$\varphi : \begin{cases} r = R\operatorname{ctg}(u/2), \\ \alpha = v. \end{cases}$$

Матриця Якобі цього відображення

$$\frac{\partial(r,\alpha)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2\sin^2(u/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невироджена на всій області визначення і значить відображення φ є дифеоморфізмом. Відносно нових координат метрика площини

$$ds^2_{\text{пл}} = \Big(-\frac{R}{2\sin^2(u/2)}\Big)^2 du^2 + \big(R\operatorname{ctg}(u/2)\big)^2 dv^2 = \frac{1}{4\sin^4(u/2)}(du^2 + \sin^2 u\, dv^2).$$

Отже,

$$ds^2_{\text{пл}} = \frac{1}{4\sin^4(u/2)}\, ds^2_{\text{сф}}$$

Обенене перетворення запишемо у вигляді

$$ds^2_{\text{сф}} = 4\sin^4(u/2)\, ds^2_{\text{пл}}$$

і зауважимо, що з огляду на геометрію параметризації

$$\sin^2(u/2) = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(u/2)} = \frac{R^2}{R^2+r^2}.$$

Отже,

$$ds^2_{\text{сф}} = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Перейшовши до Декартових координат, отримаємо

$$ds^2_{\text{сф}} = \frac{4R^4}{(R^2+x^2+y^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

Виявляється, що клас локально конформно еквивалентних поверхонь складається лише з однієї поверхні, а саме з площини.

Теорема 2.4.1 *Будь-яка двовимірна регулярна поверхня локально конформно еквівалентна площині.*

Це означає, що перша фундаментальна форма поверхні може бути приведена до вигляду $ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2)$, де $\Lambda > 0$ або, еквівалентно, $ds^2 = e^{2A}(dx^2 + dy^2)$, де $A = A(x, y)$. Відповідна парметризація поверхні називається *конформною*, або ізотермічною.

2.5 Друга фундаментальна форма поверхні.

Нехай $F \subset E^3$ регулярна поверхня і $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to \mathrm{E}^3(x, y, z)$ – її регулярна параметризація. Дві лінійно незалежні вектор-функції $\partial_1\vec{r}$ та $\partial_2\vec{r}$ утворюють базис дотичної площини до поверхні в будь-який її точці. Вектор нормалі дотичної називається *вектором нормалі* поверхні в даній точці. *Одиничний вектор нормалі* поверхні будемо позначати через $\vec{n}$. У кожній точці вектор $\vec{n}$ визначений з точністю до напрямку. Однак в межах одного координатного околу напрямок вектору нормалі може бути визначений однозначно як напрямок вектору $\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}$. Вектор-функція

$$\vec{n} \colon \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to \mathrm{E}^3(x, y, z) \quad \text{вигляду} \quad \vec{n} = \frac{\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}}{|\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}|} \tag{2.24}$$

називається *одиничним нормальним векторним полем* на поверхні F над областю парметрів $\mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ або локальним одиничним нормальним векторним полем[8].

Характер зміни поля нормалей вздовж поверхні відображає характер розташування поверхі в просторі. Інтуїтивно зрозуміло, що, наприклад, незмінність поля одиничних нормалей означає, що поверхня є частиною площини. Якщо ж розташувати площину у вигляді, наприклад, циліндру в просторі, то вздовж твірної дотична площина одна та ж і тому вздовж твірної поле одиничних нормалей незмінне, але буде змінюватись у перпендикулярному напрямку. За поведінкою поля нормалей можна відрізнити площину від циліндру. Це просте спостереження є мотивацією для детального аналізу поведінки поля одиничних нормалей поверхні. Відповідний аналіз приводить до поняття другої фундаментальної форми і її лінійного оператора, що називається оператором Вейнгартена.[9]

Відображення (2.24) називається (локальним[10]) *нормальним сферичним відображенням*. Годограф вектор-функції $\vec{n}$ лежить на одиничній сфері $S^2(1)$ з центром в початку координат і називається *нормальним сферичним образом* поверні. Якщо $\vec{r} \in C^k$, тоді $\vec{n} \in C^{k-1}$.

Нехай тепер $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to \mathrm{E}^3(x, y, z)$ щонайменше C^2-регулярна параметризація поверхні $F \subset E^3$. З огляду на те що $|\vec{n}| = 1$, частинні похідні $\partial_i\vec{n} \perp \vec{n}$ $(i = 1, 2)$. Тож має місце розкладання

$$\begin{cases} \partial_1\vec{n} = -a_1^1\partial_1\vec{r} - a_1^2\partial_2\vec{r}, \\ \partial_2\vec{n} = -a_2^1\partial_1\vec{r} - a_2^2\partial_2\vec{r}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

що складається з коефіцієнтів розкладання Вейнгартена, називається матрицею Вейнгартена.

Позначимо через $\partial\vec{n} = (\partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{n})$ матрицю Якобі сферичного відображення $\vec{n}$. Тоді розкладання Вейнгартена можна записати у вигляді матричного добутку

$$(\partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{n}) = -(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

[8] Якщо F – орієнтовувана, то векторне поле $\vec{n}$ може бути обраним глобально.

[9] В англомовній літературі для оператора Вейнгартена використовують термін **shape operator**.

[10] Тобто визначеним в межах області параметрів параметризації.

Рис. 2.2: Гіперболічний параболоїд $z = x^2 - y^2$ і його сферичний образ в області $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

або

$$\partial\vec{n} = -\partial\vec{r}\,A, \tag{2.27}$$

де $\partial\vec{r} = (\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r})$-матриця Якобі параметризації поверхні. Нехай

$$\vec{X} = X^1\partial_1\vec{r} + X^2\partial_2\vec{r} = (\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r})\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \partial\vec{r}\,X \tag{2.28}$$

дотичне векторне поле на поверхні з внутрішніми координатами $\{X^1, X^2\}$. Похідною вектор-функції $\vec{n}$ за напрямком векторного поля $\vec{X}$ називається лінійна комбінація $X^1\partial_1\vec{n} + X^2\partial_2\vec{n}$ і позначається $\partial_X\vec{n}$. Отже за означенням

$$\partial_X\vec{n} = X^1\partial_1\vec{n} + X^2\partial_2\vec{n} = (\partial_1\vec{n}, \partial_2\vec{n})\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \partial\vec{n}\,X.$$

Із розкладання Вейнгартена (2.27) випливає, що

$$\partial_X\vec{n} = \partial\vec{n}\,X = -(\partial\vec{r}\,A)X = -\partial\vec{r}\,(AX).$$

Отже, *матриця Вейнгартена є матрицею лінійного оператора Вейнгартена*

$$X \to AX,$$

що в кожній точці $q \in F$ переводить дотичний вектор $\vec{X} \in T_qF$ з внутрішніми координатами $\{X^2, X^2\}$ в вектор $\overrightarrow{AX} \in T_qF$ з внутрішніми координатами $\{(AX)^1, (AX)^2\}$. Геометричне тлумачення оператора Вейнкартена полягає в тому, що він визначає напрямок миттєвого повороту одиничної нормалі при нескінченно малому зміщенні цієї нормалі в дотичному напрямку. Оскільки оператор Вейнгартена визначений в кожній точці поверхні, то тим самим визначається *поле* операторів Вейтгартена. Матриця поля A складається з функцій $a^i_k : D^2(u^1, u^2) \to I\!\!R$ $(i, k = 1, 2)$.

Означення 2.5.1 *Другою фундаментальною формою C^2 регулярної поверхні $F \subset E^3$ в точці $q \in F$ називається білінійна форма $B_q : R_qF \times T_qF$ оператором якої є оператор Вейнгартена в точці q.*

Оскільки друга фундаментальна форма визначений в кожній точці поверхні, то тим самим також визначається *поле* других фундаментальних форм. Матриця поля форм B також складається з функцій $b_{ik} : D^2(u^1, u^2) \to I\!R$.

Твердження 2.5.1 *Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3(x, y, z)$ щонайменше класу C^2 регулярна параметризація поверхні $F \subset E^3$ і $\vec{n}$ – поле одиничних нормалей. Матриця другої фундаменальної форми $B = (b_{ik})$ є симетричною матрицею*

$$B = -(\partial\vec{r})^t\partial\vec{n} \tag{2.29}$$

з компонентами

$$b_{ik} = \left\langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \vec{n}\,\right\rangle = -\left\langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_k\vec{n}\,\right\rangle. \tag{2.30}$$

Оператор Вейнгартена є симетричним лінійним оператором

$$g(AX, Y) = g(X, AY)$$

відносно скалярного добутку, що визначає перша фундаментальна форма. Матриці оператору Вейнгартена A та другої фундаментальної форми B пов'зані співвідношенням

$$A = g^{-1}B,$$

де g^{-1} – матриця, обернена до матриці першої фундаментальної форми.

Доведення. Позначимо через $B = (b_{ik})$ симетричну матрицю з елементами

$$b_{ik} = \left\langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \vec{n}\,\right\rangle.$$

і пов'яжемо з нею симетричну білінійну форму $B(X, Y) = b_{ik}X^iY^k$, що в кожній точці $q \in F$ визначена на внутрішніх координатах дотичних векторів $\vec{X} = X^i\partial_i\vec{r}$ і $\vec{Y} = Y^k\partial_k\vec{r}$ площини T_qF. Оскільки $\vec{n}$ – поле одиничних нормалей, а векторні поля $\partial_1\vec{r}$ і $\partial_2\vec{r}$ дотичні до поверхні, то мають місце тотожності $\left\langle\, \partial_i\vec{r}, \vec{n}\,\right\rangle = 0$. В такому разі

$$\left\langle\, \partial_{ki}\vec{r}, \vec{n}\,\right\rangle + \left\langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_k\vec{n}\,\right\rangle = 0.$$

Отже,

$$b_{ik} = \left\langle\, \partial_{ki}\vec{r}, \vec{n}\,\right\rangle = -\left\langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_k\vec{n}\,\right\rangle = -\left\langle\, \partial_k\vec{n}, \partial_i\vec{r}\,\right\rangle$$

Матриці Якобі відображень $\vec{r}$ і $\vec{n}$ мають вигляд

$$(\partial\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \end{pmatrix} \qquad (\partial\vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial n^1}{\partial u^1} & \frac{\partial n^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial n^2}{\partial u^1} & \frac{\partial n^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial n^3}{\partial u^1} & \frac{\partial n^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}$$

Тоді з очевидністю знаходимо, що b_{ik} є елементами матриці

$$B = -(\partial\vec{r}\,)^t(\partial\vec{n}\,). \tag{2.31}$$

Із розкладання Вейнгартена (2.27) знаходимо, що

$$-(\partial\vec{r}\,)^t\,(\partial\vec{n}\,) = -(\partial\vec{r}\,)^t(\partial\vec{r}\,)A = -gA.$$

Отже $B = gA$ і $A = g^{-1}B$. Форма лінійного оператора відносно скалярного добутку, що визначається першою фундаментальною формою, має вигляд

$$g(AX, Y) = Y^t g(AX) = Y^t(gA)Y = Y^t BX = B(X, Y).$$

Отже форма з матрицею B є за означенням другою фундаментальною формою поверхні. Її матриця складається з елементів (2.30). Із симетричності форми B негайно випливає, що $g(AX, Y) = g(X, AY)$.

■

Означення 2.5.2 *Диференціальна форма, що визначається на області параметрів* $\mathcal{D}(u^1, u^2)$ *формулою*

$$II = b_{ik}du^i du^k = \left\langle\, d^2\vec{r}\,, \vec{n}\,\right\rangle = -\left\langle\, d\vec{r}\,, d\vec{n}\,\right\rangle, \tag{2.32}$$

називається диференціальною другою фундаментальною формою поверхні.

Ремарка 2.5.1 *Диференціальну першу фундаментальну форму часто записують у подібному вигляді, а саме*

$$I = g_{ik}du^i du^k = |d\vec{r}\,|^2 = \left\langle\, d\vec{r}\,, d\vec{r}\,\right\rangle. \tag{2.33}$$

Друга фундаментальна форма з точністю до малих другого порядку визначає відхилення точок поверхні від дотичної площини в малому околі точки. Дійсно, нехай $\vec{r} = \vec{r}\,(u^1, u^2)$ – регулярна параметризація поверхні F. Розглянемо дві близькі точки q і $q + \Delta q$ на цій поверхні з координатами (u^1, u^2) і $(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$. В силу C^2 регулярності вектор-функції $\vec{r}$, можна скористатися розкладанням Тейлора вектор-функції $\vec{r}$ в околі точки q до другого порядку, а саме

$$\vec{r} = \vec{r}\,(q) + \partial_1\vec{r}\,(q)du^1 + \partial_2\vec{r}\,(q)du^2 + \frac{1}{2}[\partial_{11}\vec{r}\,(q)(du^1)^2 + 2\partial_{12}\vec{r}\,(q)du^1du^2 + \\ \partial_{22}\vec{r}\,(q)(du^2)^2] + \vec{o}\big((du^1)^2 + (du^2)^2\big).$$

Величина

$$h(du^1, du^2) = \langle\vec{r} - \vec{r}\,(q), \vec{n}(q)\rangle = \\ \frac{1}{2}\left[b_{11}(q)(du^1)^2 + 2b_{12}(q)du^1du^2 + b_{22}(q)(du^2)^2\right] + o\big((du^1)^2 + (du^2)^2\big),$$

де $b_{ik}(q) = \langle\partial_{ik}\vec{r}\,, \vec{n}\rangle(q)$ – елементи матриці другої фундаментальної форми в точці q, визначає відхилення точки $q + \Delta q$ від дотичної площини до F в точці q.

Коефіцієнти другої фундаментальної також форми залежать від вибору параметризації. Нехай $\varphi : \mathcal{G}^2(v^1, v^2) \to \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ дифеоморфізм перепараметризації, заданий системою функцій

$$\varphi : \begin{cases} u^1 = u^i(v^1, v^2), \\ u^2 = u^i(v^1, v^2). \end{cases}$$

Із формули (2.32) випливає, що

$$II = b_{ik}\, du^i du^j = (B \circ \varphi)_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial u^k}{\partial v^m}\, dv^j\, dv^m$$

Отже, матриця другої фундаментальної форми B відносно параметрів (u^1, u^2) пов'язана з матрицею першої фундаментальної форми $\tilde{B}$ відносно параметрів (v^1, v^2) формулою

$$\tilde{b}_{jm} = (B \circ \varphi)_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial u^k}{\partial v^m}, \tag{2.34}$$

або в матричнній формі

$$\tilde{B} = (\partial\varphi)^t (B \circ \varphi) \partial\varphi, \tag{2.35}$$

де $\partial\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)$ – матриця Якобі перетворення координат.

З формули (2.35) і нерівності Сільвестра (2.3) випливає наступне твердження.

Твердження 2.5.2 *Ранг матриці другої фундаментальної форми не залежить від вибору параметризації.*

Скористаємось твердженням 2.5.2 у доведенні наступної теореми.

Теорема 2.5.1 *Якщо F регулярна поверхня класу C^2 і $B \equiv 0$, тоді F – частина площини.*

Доведення. Нехай F – регулярна поверхня. Тоді в околі будь-якої своєї точки поверхню можна параметризувати явно

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y))\} \quad (x, y) \in \mathcal{D} \subset I\!R^2.$$

Проведемо необхідні обчислення

$$\partial_1 \vec{r} = \{1, 0, f_x\}, \qquad \partial_2 \vec{r} = \{0, 1, f_y\},$$

$$\partial_{11} \vec{r} = \{0, 0, f_{xy}\}, \quad \partial_{22} \vec{r} = \{0, 0, f_{yy}\}, \quad \partial_{12} \vec{r} = \{0, 0, f_{yy}\}.$$

$$\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r} = \{-f_x, -f_y, 1\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{-f_x, -f_y, 1\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} b_{11} &= \langle \partial_{11} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{12} &= \langle \partial_{12} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{22} &= \langle \partial_{22} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Звідки

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Але якщо $B \equiv 0$, тоді $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$, а отже $f(x,y) = ax + by + c$. Тобто, локальна параметризація поверхні з необхідністю має вигляд

$$z = ax + by + c \quad (x,y) \in \mathcal{D} \subset I\!R^2,$$

що й треба було довести.

■

2.5.1 Щільно-дотичний параболоїд поверхні і класфікація точок.

Нехай F – регулярна поверхня і $q \in F$. Згідно з твердженням 2.1.3, в околі точки q поверхня може бути парметризована явно. При цьому вибір координатної системи в E^3 жодним чином не обмежувався. Тож скористаємося твердженням 2.1.3 розмістивши плошину xOy в T_qF. Вісь Ox направимо уздовж $\partial_1\vec{r}$, вісь Oy вздовж $\partial_2\vec{r}$, а вісь Oz вздовж вектора нормалі в цій точці. Тоді наша поверхня буде параметризована як

$$\vec{r} = \{x, y, f(x,y).$$

Точці q буде відповідати початок координат $(0,0,0)$. Зокрема, це означає що $f(0,0) = 0$. Більше того,

$$\partial_1\vec{r}(0,0) = \{1,0,0\} \quad \partial_2\vec{r}(0,0) = \{0,1,0\}.$$

З огляду на те, що $\partial_1\vec{r} = \{1,0,f_x\}$ і $\partial_2\vec{r} = \{1,0,f_y\}$ приходимо до висновку, що

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

Запишемо розкладання $f(x,y)$ до другого порядку, в околі точки $(0,0)$ вважаючи x, y малими. Тоді маємо

$$z = \frac{1}{2}\big[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\big] + o(x^2+y^2).$$

Поверхня другого порядку

$$z_1 = f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2 \tag{2.37}$$

є параболоїдом що моделює поверхню F в околі точки q з точністю до малих другого порядку і називається *щільно-дотичним параболоїдом поверхні* в точці q.

Тип параболоїду (2.37) визначається знаком інваріанту $I_2(0,0) = \big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\big|_{(0,0)}$. В обраній точці $q(0,0,0)$ відносно обраної координатної системи щільно-дотичний параболоїд

- є е*ліптичним*, якщо $\big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\big|_{(0,0)} > 0$;
- є *гіперболічним*, якщо $\big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\big|_{(0,0)} < 0$;
- *вироджується в параболічний циліндр*, якщо $\big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\big|_{(0,0)} = 0$ але $f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \neq 0$;
- *вироджується в площину*, якщо $\big(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\big)\big|_{(0,0)} = 0$ і $f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{yy}^2 = 0$.

Poverhnost.eps

Sopr_paraboloid.eps

Рис. 2.3: Поверхня $r = \{x, y, \cos x \cos y\}$ та її дотичний параболоїд в точці (0,0)

Інваріантність рангу другої фундаментальної форми дозволяє позбутися залежності з'ясування типу щільно-дотичного параболоїду від параметризаціїї поверхні і, тим самим, визначити *тип точки* поверхні незалежно від параметризації.

Означення 2.5.3 *Точка q регулярної поверхні називається*

- ***еліптичною**, якщо в цій точці щільно-дотичний параболоїд поверхні є еліптичним;*
- ***гіперболічною**, якщо в цій точці щільно-дотичний параболоїд поверхні є гіперболічним;*
- ***параболічною**, якщо в цій тоці щільно-дотичний параболоїд поверхні вироджується в параболічний циліндр;*
- ***точкою сплощення**, якщо в цій точці щільно-дотичний параболоїд поверхні вироджується в площину.*

Еліптичні і гіперболічні називаються *невиродженими* точками поверхні, а параболічні і точки уплощіння — *виродженими.*

Коректність класифікації точок регулярної поверхні міститься у наступному твердженні.

Твердження 2.5.3 *У кожній точці регулярної поверхні тип дотичного параболоїду повністю визначається рангом її другої фундаментальної форми в цій точці і не залежить від параметризації поверхні.*

Доведення. Нехай q – точка на регулярній поверхні. Параметризуємо поверхню у деякому околі цієї точки явно в вигляді $z = f(x, y)$, спеціалізуючи систему координат

Ell_parab.eps

Gip_parab.eps

Рис. 2.4: Щільно-дотичний параболоїд в еліптичній і гіперболічній точках

як на початку цього розділу. Тоді друга фундаментальна форма поверхні в точці q обчислиться за формулами (2.36) і отримає вигляд

$$B|_{(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\right|_{(0,0)}.$$

Отже, в точці q інваріант $I_2 = \det B\big|_{(0,0)}$. Для завершення доведення досить помітити, що при заміні параметризації $\varphi : \mathcal{G}^2(v^1, v^2) \to \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ матриця другої фундаментальної змінюється за формулою (2.35) і тому $\det \tilde{B} = (\det \partial\varphi)^2 \det B$, а значить знак визначника не залежить від параметризації. Більше того, за твердженням 2.5.2, виродження щільно-дотичного параболоїду в параболічний циліндр або площину визначається рангом другої фундаментальної форми і також не залежить від вибору параметризації.

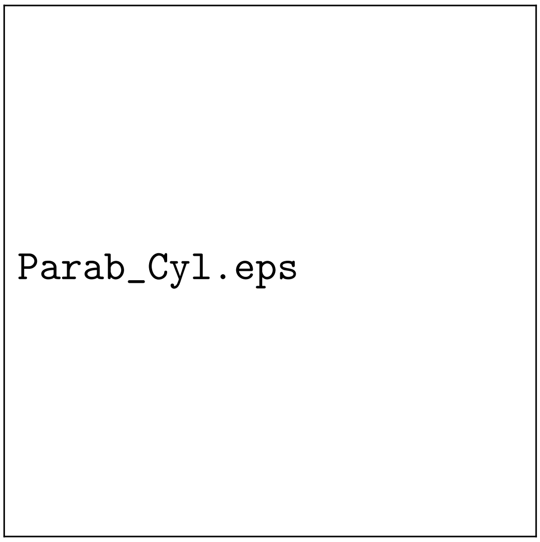
■

2.6 Гауссова і середня кривина поверхні.

В кожній точці поверхні оператор Вейнгартена є симетричним лінійним оператором. Тому всй його власні числа і власні вектори є дійсними. Тож наступне означення є вмотивованим.

Означення 2.6.1 *Головними кривинами в точці поверхі називаютьcя власні числа оператору Вейнгартена в цій точці. Відповідні власні вектори називаютьcя головними напрямками в цій точці.*

Головні кривини поверхні є функціями точки, а головні напрямки утворюють в загальному випадку пару векторних полів на поверхні. Зазвичай, головні кривини на поверхні позначаються k_1 и k_2.



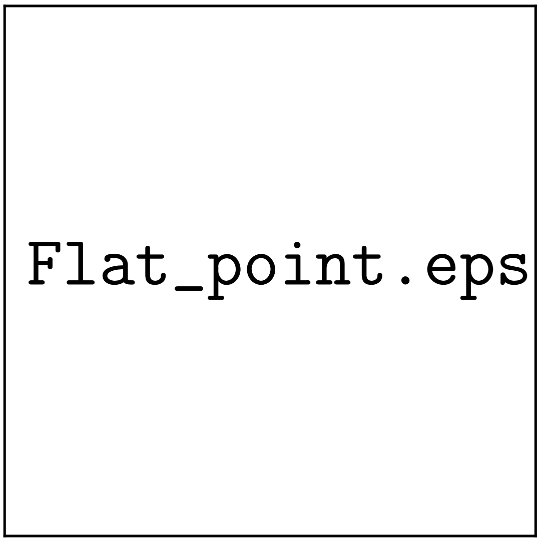


Рис. 2.5: Щільно-дотичний параболоїд в параболічній точці і точці сплощення

Твердження 2.6.1 *Головні кривини і головні напрямки не залежать від параметризації поверхні.*

Доведення. Нехай $\varphi : \mathcal{G}^2(v^1, v^2) \to \mathcal{D}(u^1, u^2)$ дифеоморфізм перепараметризації. Позначимо через $J = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$ матрицю Якобі цього перетворення. Тоді за формулами (2.14) та (2.35)

$$\tilde{B} = J^t (B \circ \varphi) J, \quad \tilde{g} = J^t (g \circ \varphi) J.$$

Тому, для матриці Вейнгартена відповідна формула перетворення запишеться як

$$\tilde{A} = J^{-1} (g \circ \varphi)^{-1} (J^t)^{-1} J^t (B \circ \varphi) J = J^{-1} (A \circ \varphi) J,$$

а значить

$$\det\big(\tilde{A} - \tilde{\lambda} E\big) = \det\big(J^{-1}(A \circ \varphi) J - \tilde{\lambda} J^{-1} J\big) = \det\big(A \circ \varphi - \tilde{\lambda} E\big).$$

Отже, $\tilde{\lambda}$ є власним вислом матриці $A \circ \varphi$ в точках, відповідних за дифеоморфізмом φ. Це означає, що $\tilde{\lambda} = \lambda \circ \varphi$.

При заміні параметризації $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi$ маємо два розкладання одного й того ж дотичного вектору у вигляді

$$\vec{X} = \partial \vec{\rho}\, \tilde{X} = \partial (\vec{r} \circ \varphi) \tilde{X} = \partial \vec{r}\, \partial \varphi\, \tilde{X} = (\partial \vec{r}) J \tilde{X}, \quad \vec{X} = \partial \vec{r}\, X.$$

Значить для дотичних векторів формула перетворення внутрішніх координат записується у вигляді

$$X = J \tilde{X}.$$

Нехай $\tilde{X}$ власний вектор матриці $\tilde{A}$, що відповідає власному значенню $\tilde{\lambda}$. Тоді

$$(A \circ \varphi - \lambda \circ \varphi) X = (J \tilde{A} J^{-1} - \tilde{\lambda} J J^{-1}) J \tilde{X} = J (\tilde{A} - \tilde{\lambda} E) \tilde{X} = 0$$

Із невиродженості матриці Якобі випливає вектор $X = J\tilde{X}$ є власним вектором матриці $A \circ \varphi$, що відповідає власному значенню $\lambda \circ \varphi$ тоді і тільки тоді, коли вектор $\tilde{X}$ є власним вектором матриці $\tilde{A}$, що відповідає власному значенню $\tilde{\lambda}$.

■

Означення 2.6.2 *Гаусовою кривиною C^2 регулярної поверхні $F \subset E^3$ називається добуток головних кривин*

$$K = k_1 k_2;$$

середньою кривиною поверхні називається середнє аріфметичне гловних кривин

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

в кожній точці поверхні.

Інваріантність головних кривин означає інваріантність Гаусової і сердньої кривин поверхні. Обчислення Гаусової і середньої кривин поверхні не потребує обчислення головних кривин.

Твердження 2.6.2 *Гауссова і середня кривини C^2-регулярної поверхні є неперервними функціями на області параметрів поверхні і обчислюються за формулами*

$$K = \det A = \frac{\det B}{\det g} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

$$H = \frac{1}{2} trace(A) = \frac{1}{2} \frac{g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} + g_{11}b_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

де $A = g^{-1}B$ – матриця Вейнгартена.

Доведення. Характеристичний многочлен матриці Вейнгартена має вигляд

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - trace(A)\lambda + \det A.$$

Тому $k_1k_2 = K$ і $2H = k_1 + k_2$. Неперервність цих функцій очевидна, як і формули обчислення.

■

Порівнюючи твердження 2.6.2 та 2.5.3 легко зрозуміти, що знак Гауссової кривини в точці поверхні збігається зі знаком визначника другої квадратичної форми в цій точці. Отже, тип точки (рівно як і тип щільно-дотичного параболоїда) визначається знаком Гауссової кривини. А саме, точка q на поверхні є

- *еліптичною*, тоді і тільки тоді, коли $K(q) > 0$;
- *гіперболічною*, тоді і тільки тоді, коли $K(q) < 0$;
- *параболічною* або *точкою спплощіння*, тоді і тільки тоді, коли $K(q) = 0$;

Розглянемо найпростіші приклади.

- Гаусова і середні кривини *площини* $K \equiv 0$, $H \equiv 0$. Це є очевидним з огляду на те, що $A \equiv 0$.

- Гауссова і середня кривини *сфери радіусу* R дорівнть $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$. Нехай $\vec{r}$ радіус-вектор сфери радіусу R з центром на початку координат. Тоді її одиничне нормальне векторне поле (спрямоване всередину сфери) легко знаходиться як $\vec{n} = -\frac{1}{R}\vec{r}$. А значить
$$\partial\vec{n} = -\frac{1}{R}\,\partial\vec{r}.$$
Домножимо зліва на $(\partial\vec{r})^t$ і використовуючи (2.31), знаходимо $B = \frac{1}{R}\,g$, а значить $\det B = \frac{1}{R^2}\,\det g$. Отже, $K = \frac{1}{R^2}$.

Геометричне тлумачення Гаусової кривини.

Нехай F^2 регулярна поверхня, яка параматризована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to E^3$. Зауважимо, що в силу (2.5.1) ранг сферичного відображення $rg(\partial\vec{n}) = rg(B)$. Отже сферичне відображення $\vec{n} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to S^2 \subset E^3$ регулярне тоді і тільки тоді, коли $\det B \neq 0$ у всіх точках околу. Нехай в деякому околі U_q точки $q \in \mathcal{D}$ Гауссове відображення регулярне. Позначимо через $\tilde{g}$ першу фундаментальну форму сферичного образу поверхні. Тоді, очевидно,
$$\tilde{g} = (\partial\vec{n})^t \cdot (\partial\vec{n})$$
Позначимо через dS елемент площі поверхні, а через $d\omega$ – елемент площі сферичного образу $\vec{n}(F^2)$. Тоді
$$dS = \sqrt{\det g}, \quad d\omega = \sqrt{\det\tilde{g}}.$$
Використовуючи розкладання Вейнгартена (2.27), знаходимо
$$\tilde{g} = (\partial\vec{n})^t \cdot (\partial\vec{n}) = (\partial\vec{r}\;A)^t \cdot (\partial\vec{r}\;A) = A^t\,(\partial\vec{r})^t \cdot (\partial\vec{r})\,A = A^t g A.$$
Отже,
$$\det\tilde{g} = (\det A)^2 \det g.$$
Тому,
$$d\omega = |\det A|\,dS.$$
Таким чином, в околі U_q площа сферичного образу $\omega(\vec{n}(U_q))$ обчислиться як
$$\omega(\vec{n}(U_q)) = \int_{U_q} d\omega = \int_{U_q} |\det A|\,dS.$$
Припишемо площі сферичного образу знак за таким правилом. Покладемо
$$\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q)) = \begin{cases} +\omega(\vec{n}(U_q)) & \text{якщо } \det A > 0, \\ -\omega(\vec{n}(U_q)) & \text{якщо } \det A < 0. \end{cases}$$
Порівнюючи це визначення з розкладанням (2.27) зауважимо, що площі сферичного образу приписується знак $(+)$, якщо сферичне відображення узгоджується з орієнтацією в дотичних площинах поверхні і її сферичного образу, і знак $(-)$ в іншому випадку. Будемо називати $\tilde{\omega}$ орієнтованою площею сферичного образу.

За теоремою про середнє для кратних інтегралів

$$\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q)) = \iint\limits_{U_q} \det A\, dS = \iint\limits_{U_q} K\, dS = K(q') \iint\limits_{U_q} dS = K(q')S(\vec{r}(U_q)) \tag{2.38}$$

для деякої точки $q' \in U_q$. Тоді

$$K(q) = \lim_{U_q \to q} \frac{\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q))}{S(\vec{r}(U_q))}.$$

2.7 Лінії кривини

Точка на поверхні називається омбілічною, якщо в цій точці $k_1 = k_2$. Якщо ж $k_1 \neq k_2$, то точка називається неомбілічною. В омбілічній точці будь-який напрямок є головним. Множина омбілічних точок поверхні замкнена, у той час як множина неомбілічних точок – відкрита.

В околі будь-якої *неомбілічної* точки власні вектори оператору Вейнгартена взаємно ортогональні. Якщо $\vec{X}_1 = X_1^1 \partial_1 \vec{r} + X_1^2 \partial_2 \vec{r}$ – головний напрямок, що відповідає головній кривині k_1, то його координати є розв'язком системи

$$(A - k_1 E)X_1 = 0 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} a_1^1 - k_1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки матриця системи вироджена, то координати власного вектору з точністю до колінеарності можуть бути знайдені як

$$X_1 = \{-a_2^1, a_1^1 - k_1\} \sim \{a_2^2 - k_1, -a_1^2\}.$$

Аналогічно,

$$X_2 = \{-a_2^1, a_1^1 - k_2\} \sim \{a_2^2 - k_2, -a_1^2\}.$$

Головні напрямки C^2 регулярної поверхні неперервні. Цей факт мотивує наступне означення.

Означення 2.7.1 *Крива на поверхні називається лінією кривини, якщо її дотичний вектор збігається з одним з головних напрямків.*

З огляду на інваріантність головних напрямків, лініі кривини інваріантні відносно параметризації поверхні.[11]

Твердження 2.7.1 *В околі неомбілічної точки C^2-регулярної поверхні існує два сімейства ліній кривини що є взаємно ортогогальними в кожній спільній точці.*

Доведення. Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to F \subset E^3$ регулярна парметризація поверхні класу регулярності щонайменше C^2. Нехай $\vec{X}_1 = \partial\vec{r}\, X_1$ поле головних напрямків, що відповідає головній кривині k_1, з внутрішніми координатами $X_1 = \{X_1^1(u^1, u^2), X_1^2(u^1, u^2)\}$.

[11] Чого не можна, звичайно, сказати про їх рівняння.

Крива $\vec{\gamma} : I(t) \to F \subset E^3$ є лінією кривини, якщо існує розв'язок векторного диференціального рівняння

$$\vec{\gamma}' = \vec{X}_1 \quad \sim \quad \partial \vec{r}\,\gamma\,' = \partial \vec{r}\,(X_1 \circ \gamma\,) \quad \sim \quad \gamma\,' = X_1 \circ \gamma\,.$$

Розписавши покоординатно, отримаємо сёистему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dt} = X_1^1(u^1(t), u^2(t)), \\ \frac{du^2}{dt} = X_1^2(u^1(t), u^2(t)) \end{cases}$$

з щонайменше неперервними правими частинами. Розв'язок системи складається з сімейства щонайменше C^1-регулярних функцій

$$u^1 = u^1(t) + \alpha, \quad u^2 = u^2(t) + \beta,$$

які визначають сімейство щонайменше C^1-регулярних ліній кривини. Розв'язок задачі Коші визначає єдину лінію кривини, що проходить через задану точку на поверхні.

Інше поле головних напрямків визначає інше сімейство ліній кривини. Напрямки ліній кривини з різних сімейств у спільних точках взаємно ортогональні, бо є дотичними до взвємно ортогональних векторів.

■

Ремарка 2.7.1 *Диференціал параметризації* $d\vec{r} = \partial_1 \vec{r}\,du^1 + \partial_2 \vec{r}\,du^2$ *можна розглядати як дотичний вектор з нескінченно малими внутрішніми координатами* $du = \{du^1, du^2\}$. *Тоді диференціальне рівняння лінії кривини, що відповідає головній кривині* k *має вигляд*

$$(A - kE)\,du = 0 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} a_1^1 - k_1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Більше того, з невиродженості матриці g *випливає, що лінії кривини можуть бути знайдені як розв'язок системи*

$$g\big((A - kE)du\big) = 0 \quad \sim \quad (B - kg)du = 0.$$

Для запису рівняння лінії кривини не обов'язково знаходити головні кривини. Ці рівняння можуть бути включені в одне рівняння другого ступеню відносно диференціалів параметрів.

Твердження 2.7.2 *Диференціальне рівняння лінії кривини на двовимірній поверхні може бути записано у вигляді*

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

де g_{ik} *і* b_{ik} *— елементи матриць першої та другої фундаментальних форм.*

Доведення. Нехай k головна кривина і нехай $du = \{du^1, du^2\}$ напрямок лінії кривини. Тоді рівняння відповідної лінії кривини можна записати як

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}.$$

Розписуючи покоординатно, маємо

$$\begin{aligned} b_{11}du^1 + b_{12}du^2 &= k(g_{11}du^1 + g_{12}du^2), \\ b_{12}du^1 + b_{22}du^2 &= k(g_{12}du^1 + g_{22}du^2). \end{aligned}$$

Виключимо k з рівнянь складаючи пропорцію

$$\frac{b_{11}du^1 + b_{12}du^2}{b_{12}du^1 + b_{22}du^2} = \frac{g_{11}du^1 + g_{12}du^2}{g_{12}du^1 + g_{22}du^2}.$$

Розкривши пропорцію і зібравши коефіцієнти при диференціалах, отримаємо

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})(du^1)^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})du^1du^2 + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})(du^2)^2 = 0. \quad (2.39)$$

Це рівняння можна згорнути в визначник

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.40)$$

що й потрібно було довести.

■

Твердження 2.7.3 *В околі неомбілічної точки поверхню можна параметризувати так, що координатні лінії параметризації будуть лініями кривини поверхні.*

Доведення. Для спрощення позначень, покладемо $u^1 = u, u^2 = v$. Позначимо через P, Q і R коефіцієнти рівняння (2.39) і перепишемо його у вигляді

$$Pdu^2 + Qdudv + Rdv^2 = 0. \quad (2.41)$$

Нехай q не омбілічна точка поверхні, тобто $k_2(q) \neq k_1(q)$. Тоді за неперервністю знайдеться окіл U_q такий, що $k_2 \neq k_1$ у всіх точках цього околу. Тоді через кожну точку U_q проходить рівно 2 лінії кривини, а значить рівняння (2.41) може бути переписано в вигляді двох рівнянь першого порядку[12]

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \qquad \frac{du}{dv} = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P},$$

причому $Q^2 - 4PR > 0$, бо розв'язки існують і вони різні. Запишемо рівняння двох сімейств ліній кривини в диференціальній формі

$$\begin{aligned} 2Pdu + (-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR})dv &= 0, \\ 2Pdu + (-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR})dv &= 0. \end{aligned}$$

[12]Якщо $P = 0$, а $Q \neq 0$, тоді рівняння можна переписати відносно $\frac{dv}{du}$. Якщо ж $(P = Q = 0)|_{U_q}$ тоді координатні лінії вже є лініями кривини

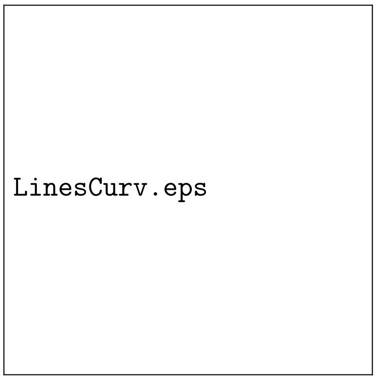


Рис. 2.6: Гелікоїд і лінії кривини на ньому

Визначник

$$\begin{vmatrix} 2P & (-Q-\sqrt{Q^2-4PR}) \\ 2P & (-Q+\sqrt{Q^2-4PR}) \end{vmatrix} = 4P\sqrt{Q^2-4PR} \neq 0$$

і ми потрапляємо в умови твердження 2.3.4.

■

Наслідок 2.7.1 *Координатна сітка на поверхні складається з ліній кривини тоді і тільки тоді, коли у всіх точках даного координатного околу матриці першої і другої фундаментальних форм одночасно діагональні. Головні кривини обчислюються за формулами*

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}$$

Доведення. Координатні лінії такої параметризації взаємно ортогональні. Значить $g_{12} \equiv 0$. Координатні напрямки мають внутрішні координати $\{1, 0\}$ та $\{0, 1\}$ і є головними, тобто є розв'язками систем

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Виконавши матричні дії, отримаємо

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 g_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 g_{22} \end{pmatrix},$$

що і завершує доведення.

■

Твердження 2.7.4 ***(Теорема Родріга, формули Родріга)*** *Нехай $\vec{\gamma}(t)$ — лінія кривини на поверхні F, що відповідає головній кривині k, $\vec{n}(t)$ поле одиничних нормалей поверхні уздовж $\vec{\gamma}$. Тоді має місце формула*

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = -k\,\frac{d\vec{\gamma}}{dt} \quad \sim \quad d\vec{n} = -k\,d\vec{\gamma}.$$

Якщо поверхня пааметризована лініями кривини, то то мають місце формули

$$\partial_1\vec{n} = -k_1\partial_1\vec{r}, \quad \partial_2\vec{n} = -k_2\partial_2\vec{r},$$

де k_1 і k_2 головні кривини.

Доведення. Теорема Родріга є простим наслідком розкладання Вейнгартена. Нехай $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ лінія кривини на поверхні, що відповідає головній кривині k, і $\vec{n}(t) = \vec{n} \circ \gamma$ поле одиничних нормалей поверхні уздовж $\vec{\gamma}$. Тоді

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \partial\vec{n}\,\gamma' = -(\partial\vec{r}A)\gamma' = -k\,\partial\vec{r}\gamma' = -k\,\frac{d\vec{\gamma}}{dt}.$$

Якщо поверхня парметризована лініями кривини, то можна застосувати теорему Родріга для кожної з координатніх ліній.

■

Твердженя 2.7.3 вірне в околі неомбілічної точки. Якщо ж точка на поверхні омбілічна, то будь-який напрямок в цій точці є головним. Отже, система рівнянь $(A - \lambda E)X = 0$ задовольняється при будь-якому X. Значить $A = \lambda E$, або, що те ж саме, $B = \lambda g$. Отже, омбілічні точки на поверхні можуть бути знайдені з пропорції [13]

$$\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

На деяких поверхнях можуть бути присутніми омбілічні точки. Наприклад, на поверхні еліпсоїда обертання їх дві (вони розташовані на осі обертання). На загальному еліпсоїді їх чотири (це граничні точки кругових розрізів еліпсоїда). Аналогічно влаштовані омбілічні точки на поверхні двопорожнинного гіперболоїду.

Означення 2.7.2 *Поверхня $F^2 \subset E^3$ називаєтьcя цілком омбілічною, якщо кожна її точка є омбілічною.*

Поверхня $F \subset E^3$ є цілком омбілічною тоді і тільки тоді, коли будь-яка гладка крива на ній є лінією кривини. Дійсно, на цілком омбілічній поверхні виконується співвідношення $B = \lambda g$, а значить другі два рядки визначника (2.40) пропорційні. І навпаки, обираючи послідовно в якості ліній кривини лінії $u^1 = const$, $u^2 = const$ і $u^1 = u^2$ отримаємо пропорційність других двох рядків визначника (2.40), що і означає цілком омбілічність поверхні. Цілком омбілічні достатньо регулярні поверхні в E^3 вичерпуються сферами і площиною.

Теорема 2.7.1 *Цілком омбілічна поверхня в E^3 класу регулярності C^3 є частиною площини або сфери.*

Доведення. Якщо поверхня цілком омбілічна, тоді в кожній точці поверхні $k_1 = k_2 := k$. Будь-який напрямок на поверхні є головним. Отже, матриця Вейнгартена в кожній точці пропорційна до одиничної $A = k\,E$. З розкладання Вейнгартена отримуємо

$$\partial\vec{n} = -\partial\vec{r}A = -k\partial\vec{r}.$$

[13] тобто, системи з двох рівнянь на два параметри – координати точки.

У покоординатному запису остання рівність перепишеться у вигляді

$$\partial_i \vec{n} = -k\,\partial_i \vec{r}. \tag{2.42}$$

В силу вимоги на регулярність поверхні, другі похідні вектор-функції $\vec{n}$ не залежить від порядку диференціювання. Тому

$$\partial_{12}\vec{n} = -\partial_2 k\,\partial_1\vec{r} + k\partial_{12}\,\vec{r}, \quad \partial_{21}\vec{n} = -\partial_1 k\,\partial_2\vec{r} + k\,\partial_{21}\vec{r}.$$

Віднімаючи, отримаємо $-\partial_2 k\,\partial_1\vec{r} + \partial_1 k\,\partial_2\vec{r} = 0$. В силу лінійної незалежності вектор-функцій $\partial_1\vec{r}$ і $\partial_2\vec{r}$, отримуємо

$$\partial_1 k = 0, \quad \partial_2 k = 0.$$

Отже, $k = const$. Тоді рівності (2.42) можна переписати в вигляді $\partial_i(\vec{n} + k\,\vec{r}) = 0$ для $i = 1, 2$. Це означає, що $\vec{n} + k\,\vec{r}$ є сталим вектором, тобто

$$\vec{n} + k\,\vec{r} = \vec{c}.$$

Якщо $k = 0$, тоді нормалі до поверхні утворюють сталу вектор-функцію. Це означає, що $B \equiv 0$ і наша поверхня є частиною площини. Якщо $k \neq 0$, то позначимо $\vec{c}_0 = \frac{1}{k}\,\vec{c}$. Тоді можемо записати $\vec{r} - \vec{c}_0 = -\frac{1}{k}\,\vec{n}$. Отже,

$$\left|\vec{r} - \vec{c}_0\right| = \frac{1}{k}$$

і наша поверхня є частиною сфери радіуса $R = \frac{1}{k}$.

■

2.8 Геометрія кривих на поверхнях. Нормальна кривина.

Нехай $\gamma : I \to \mathcal{D}^2(u^1, u^2)$ внутрішнє рівняння кривої на регулярній поверхні F, що параметризована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3(x, y, z)$. Тоді її зовнішнє рівняння, як кривої у E^3, запишеться як композиція

$$\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma : I \to E^3$$

Виберемо на кривій натуральну параметризацію. Тоді $\vec{\tau} = \vec{\gamma}\,'$ буде одиничним дотичним векторних полем уздовж $\vec{\gamma}$. Позначимо через $\vec{n}$ поле одиничних нормалей поверхні. Тоді композиція $\vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma$ визначає обмеження поля $\vec{n}$ на криву $\vec{\gamma}$. Векторне поле

$$\vec{\nu}_g(s) = \vec{n}(s) \times \vec{\tau}\,(s)$$

називається *полем геодезичних нормалей* кривої $\vec{\gamma}$. Трійка одиничних взаємно ортогональних векторних полів

$$\vec{\tau} = \vec{\gamma}\,'(s), \quad \vec{\nu}_g(s), \quad \vec{n}(s)$$

в точках кривої $\vec{\gamma}$ на поверхні називається ***репером Дарбу*** натурально парметризованої кривої $\vec{\gamma}(s) \subset F$.

Розкладемо похідні за натуральним параметром векторних полів реперу Дарбу за векторами цього ж реперу. В силу одиничності розглянутих полів, це розкладання визначається кососиметричною матрицею. А саме,

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu}_g \\ \vec{n} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \varkappa_g \\ -k_n & \varkappa_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu}_g \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

Функція $k_g(s)$ називається *геодезичною кривиною* кривої; функція $k_n(s)$ називається *нормальною кривиною* кривої; функція $\varkappa(s)$ називається *геодезичним крутінням* кривої та позначається $\varkappa_g$. У розгорнутій формі *розкладання Дарбу* набуває вигляду

$$\begin{aligned} \vec{\tau}\,' &= k_g\,\vec{\nu}_g + k_n\,\vec{n}, \\ \nu\,'_g &= -k_g\,\vec{\tau} + \varkappa_g\,\vec{n}, \\ \vec{n}\,' &= -k_n\,\vec{\tau} - \varkappa_g\,\vec{\nu}_g. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Якщо $k_g(s) \equiv\ 0$, то лінія на поверхні називається **геодезичною**.

Якщо $k_n(s) \equiv 0$, то лінія на поверхні називається **асимптотичною**.

Якщо $\varkappa_g \equiv 0$, то надалі буде встановлено, що лінія на поверхні є *лінією кривины*.

Вектор $k_g\vec{\nu}_g$ називається *вектором геодезичної кривины* кривої, а вектор $k_n\vec{n}$ називається *вектором нормальної кривини* кривої.

Вектор $\vec{\tau}\,' = \vec{\gamma}\,'' = k\vec{\nu}$ є вектором кривини кривої де k – її кривина. Тож розкладання $(2.43)_1$ можна переписати в вигляді

$$k\vec{\nu}(s) = k_g\vec{\nu}_g(s) + k_n\vec{n}(s), \tag{2.44}$$

звідки випливає, що кривина кривої, її геодезична і нормальна кривини пов'язані між собою очевидним співвідношенням

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2. \tag{2.45}$$

Позначимо через θ кут між векторами $\vec{\nu}(s)$ і $\vec{n}(s)$. Тоді з розкладання (2.44) випливає, що

$$k_g = k\sin\theta, \quad k_n = k\cos\theta. \tag{2.46}$$

З цих визначень і співвідношень (2.43), (2.44) і (2.45) маємо декілька якісних результатів:

- Якщо поверхня містить пряму, то ця пряма є одночасно і геодезичною і асимптотичною лінією на поверхні.
- Лінія на поверхні з кривиною $k \neq 0$ є геодезичною тоді і тільки тоді, коли її вектор кривини колінеарний до вектору нормалі поверхні вздовж кривої. Наприклад, це означає, що великі кола на сфері є геодезичними.
- Лінія на поверхні з кривиною $k \neq 0$ є асимптотичною тоді і тільки тоді, коли її вектор кривини пролягає в дотичній площині поверхні вздовж кривої.

- Лінія на поверхні є лінією кривини тоді і тільки тоді, коли похідна поля нормалей поверхні вздовж кривої колінеарна дотичному до кривої векторному полю (див. Теорему Родріга).

- Будь-яка лінія на площині є лінією кривини, бо $\vec{n}' = 0$. На сфері радіусу R

$$\vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma = \frac{1}{R}\vec{r} \circ \gamma = \frac{1}{R}\vec{\gamma},$$

  а значить

$$\vec{n}\,' = -\frac{1}{R}\vec{\gamma}\,' = -\frac{1}{R}\vec{\tau}\,.$$

  З розкладання Дарбу негайно отримуємо $k_n = \frac{1}{R}$, $\varkappa_g = 0$. Значить будь-яка регулярна лінія на сфері є лінією кривини, а її нормальна кривина є сталою і дорівнює $\frac{1}{R}$.

Легко помітити, що репери Френе і Дарбу для кривої на поверхні мають спільний вектор – вектор дотичної до кривої, а значить вектори $\vec{\nu}$ і $\vec{\beta}$ лежать у площині векторів $\vec{n}$ і $\vec{\nu}_g$. Позначимо через θ кут між векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$. Отримуємо розкладання

$$\begin{cases} \vec{\nu} = \cos\theta\,\vec{n} + \sin\theta\,\vec{\nu}_g, \\[2ex] \vec{\beta} = \sin\theta\,\vec{n} - \cos\theta\,\vec{\nu}_g. \end{cases}$$

Диференціювання і застосування формул Френе зліва і формул Дарбу справа призводить до рівності

$$\begin{cases} -k\,\vec{\tau} + \varkappa\,\vec{\beta} = -(k_n\cos\theta + k_g\sin\theta)\vec{\tau} + (-\theta' + \varkappa_g)\vec{\beta}, \\[2ex] -\varkappa\,\vec{\nu} = (\theta' - \varkappa_g)\vec{\nu} + (-k_n\sin\theta + k_g\cos\theta)\,\vec{\tau}\,. \end{cases}$$

Приймаючи до уваги (2.46), отримуємо єдине нетривіальне співвідношення

$$\varkappa_g = \varkappa + \frac{d\theta}{ds}, \tag{2.47}$$

що прояснює зв'язок геодезичного крутіння кривої та її крутіння як кривої в просторі. Зокрема, якщо крива є геодезичною лінією, тоді $\theta = 0$, а значить $\varkappa_g = \varkappa$. Іншими словами, ***геодезичне крутіння*** *геодезичної лінії дорівнює її* ***просторовому крутінню***. Ця обставина виправдовує термін *геодезичне крутіння.*

Ремарка 2.8.1 *Справедливості заради, зауважимо, що таку ж властивість має будь-яка крива, вектор кривини якої утворює сталий кут з вектором нормалі до поверхні. Зокрема, це є вірним і для асимптотичних ліній ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Неважко зрозуміти, що* ***якщо лінія, що лежить в перетині площини і поверхні, є геодезичною, то вона є і лінією кривини.***

Відзначимо ще один якісний результат, що належить Іоахімсталю.

Теорема 2.8.1 *(Іоахімсталь) Нехай F_1 і F_2 дві поверхні та $\vec{\gamma} = F_1 \cap F_2$ – лінія їх перетину. У припущенні регулярності цієї лінії, позначимо через $\alpha(s)$ кут між полями нормалей $n_1(s)$ і $n_2(s)$ поверхонь F_1 і F_2 в точках цієї лінії. Тоді*

- *якщо* $\alpha = const$ *і лінія є лінією кривини на одній з поверхонь, тоді вона буде лінією кривини і на іншій.*
- *якщо лінія є лінією кривини на обох поверхнях, тоді* $\alpha = const$.

Теорема Іоахімсталя є негайним наслідком наступної леми.

Лема 2.8.1 *Нехай* F_1 *і* F_2 *дві поверхні та* $\vec{\gamma} = F_1 \cap F_2$ *– лінія їх перетину. У припущенні регулярності цієї лінії, позначимо через* $\alpha(s)$ *орієнтований (в нормальній площині лінії) кут між полями нормалей* $n_1(s)$ *і* $n_2(s)$ *поверхонь* F_1 *і* F_2 *в точках цієї лінії. Геодезичні крутіння лінії перетину* $\varkappa^{(1)}$ *і* $\varkappa^{(2)}$ *відносно поверхонь* F_1 *і* F_2 *відповідно, пов'язані співвідношенням:*

$$\varkappa_g^{(2)} = \varkappa_g^{(1)} + \frac{d\alpha}{ds}$$

Доведення. Позначимо через $\theta^{(1)}(s)$ і $\theta^{(2)}(s)$ орієнтовані кути між головною нормаллю кривої і полями нормалей $n_1(s)$ і $n_2(s)$ відповідно. Тоді, за правилом складання орієнтованих кутів,

$$\theta^{(1)} + \alpha = \theta^{(2)}.$$

Отже,

$$\frac{d\theta^{(1)}}{ds} + \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\theta^{(2)}}{ds}.$$

Просторове крутіння лінії перетину поверхонь пов'язано з крутіннями $\varkappa_g^{(1)}$ і $\varkappa_g^{(2)}$ співвідношенням (2.47). Тому

$$\varkappa = \varkappa_g^{(1)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} = \varkappa_g^{(2)} - \frac{d\theta^{(2)}}{ds}.$$

Звідси

$$\varkappa_g^{(1)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} = \varkappa_g^{(2)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} - \frac{d\alpha}{ds},$$

а значить

$$\varkappa_g^{(2)} = \varkappa_g^{(1)} + \frac{d\alpha}{ds}.$$

■

Ясно, що $\varkappa_g^{(2)} = \varkappa_g^{(1)}$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha = const$, що і завершує доведення теореми Іоахімсталя. Кут α може бути і нулем, тобто, теорема є вірною і у випадку дотику поверхонь уздовж кривої.

Найпростіше застосування теореми Іоахімсталя таке: *Якщо площина або сфера перетинають поверхню під сталим кутом, то лінія перетину є лінією кривини на поверхні.*

2.8.1 Нормальна кривина кривої на поверхні. Нормальна кривина поверхні.

Нехай B і g матриці другої та першої фундаментальних форм поверхні, відповідно. Обмеження цих матриць на криву $\vec{\gamma} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to F \subset E^3$ є матрицями $(B \circ \gamma)$ і $(g \circ \gamma)$, відповідно. Тоді $(g \circ \gamma)^{-1}(B \circ \gamma) = (A \circ \gamma)$.

Твердження 2.8.1 *Нормальна кривина кривої $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ на поверхні F, що параметризована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to F \subset E^3$, обчислюється за формулою*

- $k_n(s) = (B \circ \gamma)(\gamma', \gamma')$ *для натурально параметризованої кривої;*
- $k_n(t) = \dfrac{(B \circ \gamma)(\gamma'_t, \gamma'_t)}{(g \circ \gamma)(\gamma'_t, \gamma'_t)}$, *для випадку не натуральної параметризації кривої.*

Доведення. Нехай $\gamma(s)$ внутрішнє рівняння натурально параметризованої кривої $\vec{\gamma}(s)$. Зі співвідношення (2.44) випливає, що

$$k_n(s) = \langle \vec{\gamma}'', \vec{n}(s) \rangle = -\langle \vec{\gamma}', \vec{n}'(s) \rangle.$$

Оскільки

$$\vec{\gamma}(s) = (\vec{r} \circ \gamma)(s), \quad \vec{n}(s) = (\vec{n} \circ \gamma)(s),$$

тоді, використовуючи правила диференціювання і розкладання Вейнгартена (2.27), знайдемо

$$\vec{\gamma}' = (\partial \vec{r})\gamma', \quad \vec{n}' = (\partial \vec{n})\gamma' = -(\partial \vec{r})(A \circ \gamma)\gamma'.$$

Тому,

$$k_n(s) = -\langle \vec{\gamma}', \vec{n}' \rangle(s) = -(\vec{\gamma}')^t(\vec{n}') = \gamma'(\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r})(A \circ \gamma)\gamma') =$$
$$(\gamma')^t(g_\gamma (A \circ \gamma))\gamma' = (\gamma')^t(B \circ \gamma)\gamma' = (B \circ \gamma)(\gamma', \gamma').$$

Якщо тепер $t = t(s)$ довільна регулярна параметризація кривої, тоді

$$\gamma' = \gamma'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|_g} = \gamma'_t \frac{1}{\sqrt{(g \circ \gamma)(\gamma'_t, \gamma'_t)}}.$$

Тому остаточно,

$$k_n(t) = \frac{(B \circ \gamma)(\gamma'_t, \gamma'_t)}{(g \circ \gamma)(\gamma'_t, \gamma'_t)}$$

■

Наслідком знайденої формули є

Теорема 2.8.2 *(Меньє) Нехай q – фіксована точка на поверхні і $\vec{X} \in T_qF$ деякий фіксований дотичний вектор в точці q. Позначимо через θ – кут між вектором нормалі до поверхні і вектором головної нормалі довільної регулярної кривої $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$, що проходить через точку q в напрямку вектора $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$. Якщо $k(q, \vec{\gamma})$ кривина кривої $\vec{\gamma}$ в точці q, тоді*

$$k_n(q, \vec{\gamma}) = k(q, \vec{\gamma}) \cos\theta = \frac{B_q(X, X)}{g_q(X, X)}$$

Доведення. Дійсно, якщо точка фіксована, тоді $(B \circ \gamma)(q) = B(q)$ незалежно від вибору кривої γ. Якщо до того ж крива дотикається до вектора X, тоді $\vec{\gamma}'(q) = \lambda(\gamma)\vec{X}$, що еквівалентно $\partial \vec{r} \cdot \gamma'(q) = \lambda(\gamma)\partial \vec{r} \cdot X$, а значить $\gamma'(q) = \lambda(\gamma) X$ Тому для довільної кривої розглянутого сімейства

$$k \cos\theta = k_n(\gamma(q)) = \frac{\lambda^2(\gamma) X^t B(q) X}{\lambda^2(\gamma) X^t g(q) X} = \frac{B(q)(X, X)}{g(q)(X, X)}.$$

■

Теорема Меньє показує, що нормальна кривина всіх кривих, що проходять через дану точку в даному напрямку однакова, а значить, є характеристикою точки і напрямку на поверхні, а не кривої. Це дає підставу для наступного визначення.

Означення 2.8.1 *Нормальною кривиною поверхні в точці $q \in F^2$ в напрямку вектора $\vec{X} = \partial\vec{r}X \in T_qF$ називається число*

$$k_n(q, X) = \frac{B(q)(X,X)}{g(q)(X,X)} = \frac{B(X,X)}{g(X,X)}(q),$$

де $B(q)(X,X)$ і $g(q)(X,X)$ значення другої і першої фундаментальних форм в точці q на внутрішніх координатах вектора $\vec{X}$.

Ремарка 2.8.2 *Нормальна кривина поверхні не залежить від її параметризації. Нехай $u = u(v)$ дифеоморфізм заміни параметрів. Позначмо літерами з тільдою компоненти векторів і матриць відносно параметризації (u). Тоді координати дотичного вектора перетворюються за формулою $X = J\tilde{X}$, а матриці першої та другої квадратичних форм перетворюються за формулами $\tilde{B} = J^tBJ$ і $\tilde{g} = J^tgJ$, де $J = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)$ – матриця Якобі перетворення координат. Значить*

$$k_n(q, \tilde{X}) = \frac{\tilde{X}^t\tilde{B}\tilde{X}}{\tilde{X}^t\tilde{g}\tilde{X}} = \frac{\tilde{X}^tJ^tBJ\tilde{X}}{\tilde{X}^tJ^tgJ\tilde{X}} = \frac{(J\tilde{X})^tB(J\tilde{X})}{(J\tilde{X})^tg(J\tilde{X})} = \frac{X^tBX}{X^tgX} = k_n(q, X).$$

Ясно, що за самим визначенням *нормальна кривина поверхні дорівнює нормальній кривині довільної кривої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.* Найбільш природною кривою такого сорту є *нормальний переріз* поверхні, що отримується як переріз поверхні площиною, натягнутої на вектор нормалі в даній точці і заданий напрямок.

Твердження 2.8.2 *З точністю до знаку, нормальна кривина поверхні в даній точці і у даному напрямку дорівнює кривині нормального перерізу поверхні в цьому напрямку.*

Ремарка 2.8.3 *При зміні напрямку вектора нормалі поверхні друга фундаментальна форма змінить знак. Тому завжди можна обрати нормаль так, що кривина нормального перерізу буде* ***дорівнювати*** *нормальній кривині поверхні в обраній точці.*

В *еліптичній точці* друга фундаментальна форма додатно визначена. Тому нормальна кривина в усіх напрямках додатна (або від'ємна). У свою чергу, це означає, що всі нормальні перерізи відхиляються від дотичної площини в один напівпростір. В *гіперболічній точці* друга фундаментальна форма не визначена за знаком. Є напрямки як з додатною, так і з від'ємною нормальною кривиною. Значить, є перерізи, які відхиляються від дотичної площини в різні напівпростори. В *параболічній точці* в одному з напрямків вектор кривини нормального перерізу зникає (є нульовим вектором).

2.8.2 Індикатриса Дюпена.

Індикатриса Дюпена дає наочне уявлення про розподіл нормальної кривини поверхні у заданій точці. Оскільки нормальна кривина в точці не залежить від параметризації поверхні, то для фіксованого вектора $\vec{X} = \partial\vec{r}X \in T_qF$ довжина відрізка

$$d(X) = \frac{1}{\sqrt{|k_n(q,X)|}}$$

не залежить від параметризації. Відкладемо в дотичній площині відрізки довжиною $d(X)$ від точки q. *Геометричне місце кінців побудованих відрізків називається* ***індикатрисою Дюпена.***

Твердження 2.8.3 *В даній точці q поверхні, яка не є точкою сплощення, індікатріса Дюпена є кривою другого порядку відносно координат дотичних векторів, рівняння якої визначається другою фундаментальною формою поверхні і має вигляд*

$$|B(X,X)| = 1,$$

де $B = B(q)$ матриця другої фундаментальної форми в точці q. Індикатриса Дюпена не залежить від вибору параметризації і є ***еліпсом*** *в еліптичній точці,* ***парою спряжених гіпербол*** *в гіперболічній точці,* ***парою паралельних прямих*** *в параболічній точці.*

Доведення. За означенням індикатрису Дюпена опише вектор дотичної площини в точці $q \in F$ довжина якого визначається рівнянням

$$g(X,X) = d^2(X) = \frac{g(X,X)}{|B(X,X)|},$$

де матриці $B = B(q)$ і $g = g(q)$ обчислюються в точці q. Звідки випливає, що $|B(X,X)| = 1$. В координатній формі це рівняння запишеться як

$$|b_{11}(X^1)^2 + 2b_{12}X^1X^2 + b_{22}(X^2)^2| = 1.$$

Це рівняння кривої 2-го порядку в дотичній площині до поверхні в точці q, причому еліпса, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$, пара спряжених гіпербол, якщо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$, пари паралельних прямих, якщо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$.

■

Для з'ясування геометричної будови індикатриси Дюпена спеціалізуємо систему координат в околі точки так, що в самій точці координатні вектори матимуть одиничну довжину та спрямовані уздовж головних напрямків. Тоді в даній точці $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$. Отже, рівняння індикатриси Дюпена запишеться у вигляді

$$\left| k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 \right| = 1.$$

Якщо q еліптична точка, тоді $k_1k_2 = K > 0$, а значить головні кривини мають однакові знаки і рівняння індикатриси можна записати як

$$k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = 1.$$

Це еліпс, осі симетрії якого збігаються з головними напрямками, а півосі рівні $1/\sqrt{k_1}$ і $1/\sqrt{k_2}$. Якщо q гіперболічна точка, тоді $k_1k_2 = K < 0$, а значить головні кривизни мають різні знаки і рівняння індикатриси можна записати як

$$k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = \pm 1.$$

Це пара спряжених гіпербол, осі симетрії яких збігаються з головними напрямками, а півосі рівні $1/\sqrt{k_1}$ і $1/\sqrt{-k_2}$. Напрямки асимптот складають кут φ з одним з головних напрямків, такий, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{k_1}{-k_2}} = \pm\frac{\sqrt{-K}}{k_2}$$

Якщо $\vec{X} = \partial\vec{r}\,X$ напрямок асимптоти, то $k_n(q, X)$. Тому, *напрямки на поверхні, в яких нормальна кривина* $k_n(q, X) = 0$ називаються *асимптотичними напрямками* в точці q.

Якщо q параболічна точка, тоді k_1k_2, а значить в точці q одна з головних кривин, скажімо $k_1 = 0$, а $k_2 \neq 0$ і рівняння індикатриси можна записати як

$$|k_2|(X^2)^2 = 1.$$

Це пара паралельних прямих, вісь симетрії якої збігається з головним напрямком, що відповідає асимптотичному напрямку.

2.8.3 Формула Ейлера

Наведені вище розгляди дозволяють отримати інваріантне вираження для нормальної кривини поверхні в даній точці і в даному напрямку. Це формула Ейлера.

Твердження 2.8.4 *Позначимо через φ кут між довільним напрямком X в точці $q \in F^2$ і головним напрямком, що відповідає головній кривині k_1. Тоді для нормальної кривини в напрямку X має місце формула*

$$k_n(q, X) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi.$$

Доведення. В силу інваріантності нормальної кривини від вибору параметризації, введемо в околі обраної точки q таку, що в самій точці базисні вектори одиничні, взаємно ортогональні і спрямовані у головниих напрямках. Тоді в точці q

$$b_{11} = k_1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_2, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0.$$

Значить,

$$k_n(q, X) = \frac{k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2}{(X^1)^2 + (X^1)^2}.$$

Позначимо через φ кут між вектором X і вектором першого головного напрямку. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{X^1}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^1)^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{X^2}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^1)^2}}\,.$$

Тепер очевидно, що

$$k_n(q, X) = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi.$$

■

За допомогою формули Ейлера можна дати інші тлумачення терміну *середня кривина.* А саме,

- Середня кривина поверхні дорівнює середньому значенню інтеграла в усіх напрямках від нормальної кривини поверхні в даній точці.

  Нагадаємо, що середнім значенням інтеграла від функції $f(t)$ на проміжку $[a,b]$ називається величина
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$
  Користуючись формулою Ейлера, запишемо нормальну кривину як функцію кута
$$k_n(q,\varphi)=k_1(q)\cos^2\varphi+k_2(q)\sin^2\varphi.$$
  Тоді
$$\int_0^{2\pi}k_n(q,\varphi)\,d\varphi=k_1(q)\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi+k_2(q)\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=$$
$$2\pi H(q)+\frac{k_1(q)-k_2(q)}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi=2\pi H(q).$$

- Середня кривина поверхні дорівнює середньому арифметичному значень нормальної кривини за будь-якими двома взаємно ортогональними напрямками в даній точці.

  Дійсно, $\dfrac{k_n(q,\varphi)+k_n(q,\varphi+\pi/2)}{2}=\dfrac{k_1(q)+k_2(q)}{2}=H(q).$

2.8.4 Геодезичне крутіння поверхні.

Твердження 2.8.5 *Нехай $\vec r:\mathcal{D}^2(u^1,u^2)\to F\subset E^3$ регулярна параметризація поверхні F і $\gamma: I\to\mathcal{D}^2$ внутрішня параметризація кривої $\vec\gamma=\vec r\circ\gamma: I\to F\subset E^3$. Нехай $\vec n(u^1,u^2)$ – поле одиничних нормалей поверхні і $\vec n_\gamma=\vec n\circ\gamma$ – обмеження поля нормалей на криву $\vec\gamma$. Тоді геодезичне крутіння кривої $\vec\gamma$ обчислюється за формулою*

- $\varkappa_g(s)=-(\vec\gamma\,',\vec n\,'_\gamma,\vec n_\gamma)=(\vec\gamma\,',\overrightarrow{A\gamma\,'},\vec n_\gamma)$ *для випадку натуральної параметризації;*
- $\varkappa_g(t)=-\dfrac{(\vec\gamma\,',\vec n\,'_\gamma,\vec n_\gamma)}{|\vec\gamma'|^2}=\dfrac{(\vec\gamma\,',\overrightarrow{A\gamma\,'},\vec n_\gamma)}{|\vec\gamma'|^2}$ *для загального регулярного параметру.*

Доведення. Дійсно, при натуральній параметризації, з розкладання Дарбу (2.43) випливає, що
$$\varkappa_g=-\langle\vec n\,'_\gamma,\vec\nu_g\rangle=-\langle\vec n\,'_\gamma,\vec n_\gamma\times\vec\gamma'\rangle=-(\vec\gamma\,',\vec n\,'_\gamma,\vec n_\gamma).$$

З розкладання Вейнгартена
$$\vec n\,'_\gamma=(\vec n\circ\gamma)'=\partial\vec n\,\gamma\,'=-(\partial\vec r\,A)\gamma\,'=-\partial\vec r\,(A\gamma\,')=-\overrightarrow{A\gamma\,'},$$

звідки і випливає необхідна формула. Якщо ж параметр не натуральний, тоді

$$\vec{\gamma}\,'_s = \vec{\gamma}\,'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{\gamma}\,'_t}{|\vec{\gamma}\,'_t|}$$

і після очевидної підстановки, одержимо

$$\varkappa_g(t) = -\frac{(\vec{\gamma}\,', \vec{n}\,'_\gamma, \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2} = \frac{(\vec{\gamma}\,', \overrightarrow{A\gamma'}, \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2}.$$

■

З виведенних формул випливають прості але важливі наслідки.

- Лінія на поверхні є лінією кривини тоді і тільки тоді, коли для цієї лінії $\varkappa_g = 0$.

  Для доведення достатньо помітити, що $\varkappa_g = 0$ еквівалентне умові $A\gamma\,' = k\gamma\,'$.

- Для всіх кривих, що проходять через дану точку в даному напрямку геодезичне крутіння одне й теж (аналог теореми Меньє).

  Нехай $\vec{X} = \partial\vec{r} \cdot X$ обраний напрямок на поверхні в точці $q \in F^2$. Для будь-якої кривої, що задовольняє умові, $\gamma\,' = \lambda X$, $\vec{n}_\gamma = \vec{n}(q)$, а матриця Вейнгартена так само не залежить від вибору кривої[14]. Пряма підстановка дає необхідний результат.

Аналогічно нормальній кривині поверхні, визначається геодезичне крутіння поверхні.

Означення 2.8.2 *Геодезичним крутінням регулярної параметризованої поверхні* $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to F \subset E^3$ *в точці* $q \in F^2$ *в напрямку вектора* $\vec{X} = \partial\vec{r} \cdot X$ *називається геодезичне крутіння в точці* q *будь-якої регулярної кривої на поверхні, що проходить у напрямку вектору* $\vec{X}$.

Твердження 2.8.6 *Нехай* $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to F \subset E^3$ *регулярна параметризація поверхні* F *і* $\vec{n}$ *– поле одиничних нормалей поверхні. В заданій точці* $q \in F$ *і заданому напрямку* $\vec{X} = \partial\vec{r}X \in T_qF$ *геодезичне крутіння обчислюється за формулою*

$$\varkappa_g(q, X) = \frac{(\vec{X}, \overrightarrow{AX}, \vec{n})}{|\vec{X}|^2}(q).$$

Виведення обчислювальної формули є нескладною вправою.

Вправа 2.8.1 *(Аналог формули Ейлера) Покажіть, що в будь-якій точці поверхні для геодезичного крутіння поверхні має місце формула*

$$\varkappa_g(q, X) = \pm\frac{k_2 - k_1}{2}\sin 2\varphi,$$

де k_1 *и* k_2 *– головні кривини, а* φ *– кут між напрямком* $\vec{X}$ *і головним напрямком, що відповідає головній кривині* k_1.

Вправа 2.8.2 *Покажіть, що в будь-якій точці поверхні для Гауссової кривини поверхні має місце формула*

$$K(q) = k_n(q, e_1)k_n(q, e_2) + \varkappa_g(q, e_1)\varkappa_g(q, e_2).$$

де e_1 *і* e_2 *довільні одиничні взаємно перпендикулярні вектори.*

[14] Для будь-якої кривої, $(A \circ \gamma)(q)) = A(q)$

2.8.5 Асимптотичні лінії. Спряжені сітки.

Означення 2.8.3 *Лінія на поверхні називається асимптотичною, якщо в кожній своїй точці вона дотикається асимптотичного напрямку.*

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній виводиться безпосередньо з означення.

Твердження 2.8.7 *Диференціальне рівняння асимптотичних ліній на поверхні має вигляд*

$$B(du, du) = b_{ik} du^i du^k = 0,$$

де $B = (b_{ik})$ *– матриця другої фундаментальної форми, а* $du = \{du^1, du^2\}$ *диференціали внутрішніх параметрів поверхні.*

Ясно, що на двовимірних поверхнях асимптотичні лінії можуть існувати тільки на поверхнях недодатної кривини $K \leq 0$. Якщо всі точки поверхні гіперболічні ($K < 0$), тоді поверхня несе два різних сімейства асимптотичних ліній. Скориставшись твердженням 2.3.3, можна довести таступне твердження.

Твердження 2.8.8 *В околі гіперболічної точки поверхню можна параметризувати так, що координатні лінії параметризації будуть асимптотичними лініями на поверхні.*

Вправа 2.8.3 *Покажіть, що координатна сітка на поверхні складається з асимптотичних ліній тоді і тільки тоді, коли матриця другої фундаментальної форми відносно даної параметризації має вигляд*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Два напрямки $\vec{X} = \partial\vec{r} \cdot X$ і $\vec{Y} = \partial\vec{r} \cdot Y$ називаються *спряженими*, якщо $B(X, Y) = 0$. Асимптотичні напрямки відповідають самоспряженим напрямкам. Два сімейства ліній на поверхні утворюють *спряжену сітку*, якщо в кожній точці перетину ліній їх дотичні вектори спряжені.

Вправа 2.8.4 *Нехай* $dr = (du, dv)$ *і* $\delta r = (\delta u, \delta v)$ *два нескінченно малих напрямки на поверхні. Ці напрямки спряжені, якщо*

$$b_{11} du\delta u + b_{12}(du\delta v + dv\delta u) + b_{22} dv\delta v = 0.$$

Нехай одне сімейство ліній задано у вигляді $\varphi(u, v) = 0$. *Виведіть диференціальне рівняння спряженого до нього сімейства.*

Вправа 2.8.5 *Координатні лінії на поверхні утворюють спряжену сітку тоді і тільки тоді, коли* $b_{12} = 0$. *Довести.*

2.8.6 Геодезична кривина кривої. Геодезичні лінії

Перш за все отримаємо обчислювальну формулу.

Твердження 2.8.9 *Нехай $\vec{r}\ : \mathcal{D}^2(u^1,u^2) \to F \subset E^3$ регулярна параметризація поверхні F. Геодезична кривина кривої $\vec{\gamma} = \vec{r}\circ\gamma$ на поверхні обчислюється за формулою*

- $k_g(s) = (\vec{\gamma}\,', \vec{\gamma}\,'', \vec{n}_\gamma)$ *для натурально параметризованої кривої;*
- $k_g(t) = \dfrac{(\vec{\gamma}\,', \vec{\gamma}\,'', \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}\,'|^3}$ *для випадку довільної регулярної параметризації,*

де $\vec{n}_\gamma = \vec{n}\circ\gamma$ – поле нормалей поверхні уздовж кривої.

Доведення. Нехай γ – крива з натуральною параметризацією, тоді з формули Дарбу $(2.43)_1$ знаходимо

$$\vec{\gamma}'' = k_g\vec{\nu_g} + k_n\vec{n}_\gamma\,.$$

Домножимо цю рівність скалярно на $\vec{\nu}_g$, тоді маємо

$$k_g = \langle \vec{\gamma}'', \vec{\nu}_g\rangle = \left\langle\, \vec{\gamma}'', [\vec{n}_\gamma\,, \vec{\gamma}']\,\right\rangle = (\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma\,).$$

Нехай γ має довільну регулярну параметризацію. Тоді

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}'_s &= \vec{\gamma}'_t\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|},\\
\vec{\gamma}''_s &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\gamma\,'_t|}\left(\frac{\vec{\gamma}''_t}{|\vec{\gamma}'_t|} + \vec{\gamma}'_t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|}\right)\right),\\
k_g(t) &= k_g(s(t)) = \left(\frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|}\,,\ \frac{1}{|\gamma\,'_t|}\left(\frac{\vec{\gamma}''_t}{|\vec{\gamma}'_t|} + \vec{\gamma}'_t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|}\right)\right), \vec{n}_\gamma\right) = \frac{(\vec{\gamma}'_t, \vec{\gamma}''_t, \vec{n}_\gamma\,)}{|\vec{\gamma}'_t|^3},
\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

■

Ремарка 2.8.4 *При зміні внутрішньої орієнтації на кривій (напрямки обходу) знак геодезичної кривини змінюється на протилежний. Це випливає з отриманих формул, при заміні $\gamma\,' \to -\gamma\,'$.*

Як приклад, обчислимо *геодезичну кривину кола* на поверхні сфери радіусу R. Параметризуємо сферу вектор-функцією

$$\vec{r}\ = R\{\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u\}.$$

Тут параметр u – кут між радіус-вектором точки на сфері та віссю Oz. Коло на сфері, що лежить в площині $z = const$ задається рівнянням $u = u_0 = const$. Тому

$$\vec{\gamma}(v) = R\{\sin u_0\cos v, \sin u_0\sin v, \cos u_0\}$$

Звідси

$$\vec{\gamma}' = R\sin u_0\{-\sin v, \cos v, 0\}, \quad \vec{\gamma}'' = R\sin u_0\{-\cos v, -\sin v, 0\}.$$

Оскільки $\vec{n} \parallel \vec{r}$, то

$$\vec{n}_\gamma = \{\sin u_0 \cos v, \sin u_0 \sin v, \cos u_0\}.$$

Значить

$$(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma) =$$

$$R^2 \sin^2 u_0 \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 0 \\ \sin u_0 \cos v & \sin u_0 \sin v & \cos u_0 \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 u_0 \cos u_0.$$

Очевидно, $|\vec{\gamma}'|^3 = R^3 \sin^3 u_0$. Тому $k_g = \frac{1}{R} \operatorname{ctg} u_0$. Зауважимо, що $R \sin u_0$ є в точності радіус r кола, що розглядається. Тому $\sin u_0 = r/R$. Тоді

$$\operatorname{ctg} u_0 = \frac{\sqrt{1 - (r/R)^2}}{r/R} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r},$$

а значить

$$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}.$$

Таким чином, серед кіл, тільки великі кола (тобто, радіусу R) є геодезичними на сфері.

Ремарка 2.8.5 *Цей результат можна отримати з інших, більш елементарних міркувань. А саме, коло на сфері зовнішнього радіусу r є плоскою кривою з кривиною $k = \dfrac{1}{r}$. Нормальна кривина будь-якої кривої на сфері радіусу R дорівнює $k_n = \dfrac{1}{R}$. А значить*

$$|k_g| = \sqrt{k^2 - k_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}.$$

2.8.7 Третя фундаментальна форма поверхні

Третьою фундаментальною формою поверхні називається диференціальна квадратична форма $d\vec{n}^2 = \left\langle \partial_i \vec{n}, \partial_k \vec{n} \right\rangle du^i du^k$. Позначимо її матрицю через $\tilde{g}$. Зауважимо, що якщо сферичне відображення поверхні F регулярно, то матриця $\tilde{g}$ є матрицею першої фундаментальної форми сферичного образу поверхні. Отже

$$\tilde{g} = (\partial \vec{n})^t (\partial \vec{n}),$$

де, як і раніше, $\partial \vec{n}$ — матриця Якобі вектор-функції $\vec{n}$. Застосовуючи розкладання Вейнгартена (2.27),

$$\tilde{g} = A^t (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) A = A^t g A. \tag{2.48}$$

Твердження 2.8.10 *Матриці першої, другої і третьої фундаментальних форм поверхні $F \subset E^3$ пов'язані співвідношенням*

$$\tilde{g} = 2H\, B - K\, g,$$

де H и K — середня і Гауссова кривини поверхні.

Доведення. Зауважимо, що співвідношення не залежить від параметризації поверхні. Тому, для доведення достатньо встановити справедливість цього співвідношення в системі координат, що є зручною для обчислень. Введемо на поверхні систему координат з ліній кривини. Тоді

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Щодо обраної параметризації вираз (2.48) набуде вигляду

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^2 g_{11} & 0 \\ 0 & k_2^2 g_{22} \end{pmatrix}.$$

Проведемо нескладні перетворення

$$\begin{pmatrix} k_1(k_1+k_2-k_2)g_{11} & 0 \\ 0 & k_2(k_2+k_1-k_1)g_{22} \end{pmatrix} =$$

$$2H \begin{pmatrix} k_1 g_{11} & 0 \\ 0 & k_2 g_{22} \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $k_1 g_{11} = b_{11},\ k_2 g_{22} = b_{22}$. Отже,

$$\tilde{g} = 2H \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} = 2H\,B - K\,g,$$

що й потрібно було довести.

■

Наслідок 2.8.1 *Для будь-яких двох дотичних векторних полів X, Y на поверхні,*

$$\tilde{g}(X,Y) = 2HB(X,Y) - Kg(X,Y).$$

Теорема 2.8.3 *Нормальна кривина, геодезичне кручення, Гауссова і середня кривини поверхні пов'язані співвідношенням:*

$$k_n^2 + \varkappa_g^2 = 2Hk_n - K \tag{2.49}$$

Доведення. Нехай $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ довільна регулярна крива на поверхні F^2. Тоді її нормальний сферичний образ є кривою на одиничній сфері, що параметризована вектор-функцією $\vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma$. Таким чином, крива і її сферичний нормальний образ мають однакову внутрішню параметризацію. Тоді $|\vec{n}'|^2$ можна обчислити двома способами, а саме, з формул Дарбу $(2.43)_3$ і як $\tilde{g}(\gamma', \gamma')$. Отримаємо:

$$|\vec{n}'|^2 = k_n^2 + \varkappa_g^2 = \tilde{g}(\gamma', \gamma') = 2(H\circ\gamma)B(\gamma', \gamma') - (K\circ\gamma)g(\gamma', \gamma') = 2(H\circ\gamma)k_n - (K\circ\gamma).$$

Оскільки величини, що входять в співвідношення, не залежать від вибору кривої, то отримуємо необхідний результат.

■

На поверхні з від'ємною кривиною асимптотичну лінію, як криву в E^3, не можна розташувати ні в якій площині. Ці криві істотно просторові, що є наслідком наступного твердження.

Теорема 2.8.4 ***(Бельтрами-Еннепер)*** *Нехай γ – асимптотична лінія на поверхні. Тоді її просторове кручення $\varkappa$ задовольняє співвідношенню*

$$\varkappa^2 = -K_\gamma$$

де $K_\gamma = K \circ \gamma$ – Гауссова кривина поверхні в точках кривої.

Доведення. Нехай $\vec{\gamma}$ натурально параметрезована асимптотична лінія. Вектор головної нормалі асимптотичної лінії розташований в дотичній площині поверхні. Тому її вектор головної нормалі утворює з полем нормалей поверхні постійний кут $\theta = \pi/2$. Зі співвідношення $\varkappa_g = \varkappa + \theta'$ випливає, що $\varkappa_g = \varkappa$. Тоді з (2.49) випливає необхідний висновок.

■

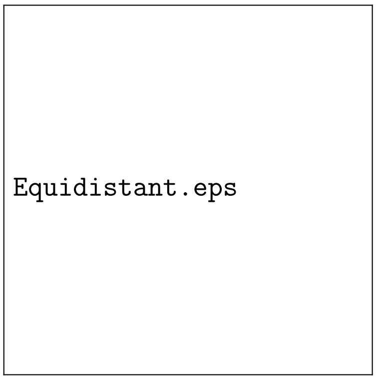


Рис. 2.7: Дві еквідистантні поверхні і відповідні лінії на них

2.8.8 Еквідистантні поверхні.

Нехай $F \subset E^3$ – регулярна поверхня, що параметризована вектор-функцією $\vec{r}$ і $\vec{n}$ – поле одиничних нормалей на ній. *Поверхня $\tilde{F}$, що параметрезована вектор-функцією*

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\vec{n} \quad (\lambda = const)$$

називається еквідистантною поверхнею по відношенню до поверхні F. Геометрично, поверхня $\tilde{F}$ виходить зміщенням точок поверхні F в напрямку вектора нормалі на відстань, що дорівнює λ.

Твердження 2.8.11 *Матриці першої, другої квадратичних форм і матриці Вейнгартена еквідистанти та поверхні позв'язані співвідношеннями*

$$g^* = (I - \lambda A)^t g(I - \lambda A), \quad B^* = (I - \lambda A)^t B, \quad A^* = (I - \lambda A)^{-1} A,$$

де I – одинична матриця.

Доведення. Дійсно, застосовуючи розкладання Вейнгартена, знаходимо

$$\partial\vec{\rho} = \partial\vec{r} + \lambda\partial\vec{n} = \partial\vec{r}(I - \lambda A).$$

Звідси випливає, що

$$g^* = (\partial\vec{\rho})^t(\partial\vec{\rho}) = (I - \lambda A)^t(\partial\vec{r})^t(\partial\vec{r})(I - \lambda A) = (I - \lambda A)^t g(I - \lambda A),$$

а значить еквідистанта регулярної поверхні регулярна до тих пір, поки $\det(I - \lambda A) > 0$.

Крім того, дотичні площини поверхні та її еквідістанти паралельні. Отже, $n^* = n$. З огляду на це, знаходимо

$$B^* = -(\partial\vec{\rho})^t\partial\vec{n} = (I - \lambda A)^t(\partial\vec{r})^t\partial\vec{n} = (I - \lambda A)^t B.$$

Нарешті,

$$A^* = (g^*)^{-1}B^* = (I - \lambda A)^{-1}g^{-1}\big((I - \lambda A)^t\big)^{-1}(I - \lambda A)^t B = \\ (I - \lambda A)^{-1}g^{-1}B = (I - \lambda A)^{-1}A.$$

■

Наслідок 2.8.2 *Гауссова і середня кривини поверхні та її еквідістанти зв'язані співвідношеннями:*

$$K^* = \frac{K}{\det(I - \lambda A)} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$

$$H^* = \frac{1}{2}\, trace\Big((I - \lambda A)^{-1} A\Big) = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

Твердження 2.8.12 *Нормальна кривина і геодезичне крутіння поверхні та її еквідістанти зв'язані співвідношеннями:*

$$k_n^* = \frac{k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2)}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2},$$

$$\varkappa_g^* = \frac{\varkappa_g}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Доведення. Нехай $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ регулярна натурально параметризована крива на поверхні, $\vec{\gamma}^* = \vec{\rho} \circ \gamma$ – її образ на еквідістанті. Тоді $\vec{\gamma}^* = \vec{\gamma} + \lambda \vec{n}$, а значить

$$(\vec{\gamma}^*)' = \vec{\gamma}' + \lambda \vec{n}'.$$

Тоді

$$|(\vec{\gamma}^*)'|^2 = 1 + 2\lambda \big\langle\, \vec{\gamma}', \vec{n}'\,\big\rangle + \lambda^2 \big\langle\, \vec{n}', \vec{n}'\,\big\rangle.$$

З формул Дарбу (2.43)

$$\big\langle\, \vec{\gamma}', \vec{n}'\,\big\rangle = -k_n, \quad \big\langle\, \vec{n}', \vec{n}'\,\big\rangle = k_n^2 + \varkappa_g^2.$$

Тоді

$$|(\vec{\gamma}^*)'|^2 = (1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2,$$

а значить

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = (1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2.$$

Тепер знаходимо

$$\varkappa_g^* = \frac{((\vec{\gamma}^*)', \vec{n}', \vec{n})}{|(\vec{\gamma}^*)'|^2} = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n})}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2} = \frac{\varkappa_g}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Для обчислення нормальної кривини $\vec{\gamma}^*$ зауважимо, що з формул Дарбу в застосуванні до F^* значить, що

$$k_n^* = -\Big\langle\, \frac{dn^*}{ds^*}, \vec{\tau}^{\,*}\,\Big\rangle = -\Big\langle\, \frac{dn}{ds}\frac{ds}{ds^*}, \frac{d\vec{\gamma}^*}{ds^*}\,\Big\rangle = -\frac{\big\langle\, \vec{n}', \vec{\gamma}' + \lambda \vec{n}'\,\big\rangle}{(\frac{ds^*}{ds})^2}.$$

З формул Дарбу для вихідної поверхні, маємо

$$\big\langle\, \vec{n}', \vec{\gamma}'\,\big\rangle = -k_n, \quad \big\langle\, \vec{n}', \vec{n}'\,\big\rangle = k_n^2 + \varkappa_g^2.$$

Тому остаточно

$$k_n^* = \frac{k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2)}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Оскільки отримані вирази не залежать від вибору кривої і точки на ній, то отримаємо необхідне співвідношення.

■

Ремарка 2.8.6 *Використовуючи співвідношення* (2.49), *можна переписати отримані результати у вигляді:*

$$k_n^* = \frac{(1-2\lambda H)k_n + \lambda K}{1-2\lambda(1-\lambda H)-\lambda^2 K}, \qquad \varkappa_g^* = \frac{\varkappa_g}{1-2\lambda(1-\lambda H)-\lambda^2 K}.$$

Звідси випливає ще одне корисне співвідношення:

$$B^*(\gamma', \gamma') = (1-2\lambda H)k_n + \lambda K = k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2),$$

яке можна отримати і безпосередньо.

Наслідок 2.8.3

- *Лінія кривини поверхні переходить в лінію кривини еквідістанти.*
- *Асимптотична лінія поверхні переходить в асимптотичні лінії еквідістанти тоді і тільки тоді, коли гауссова кривина поверхні уздовж цієї лінії дорівнює нулю.*
- *Головні кривини поверхні та її еквідістанти пов'язані співвідношеннями*

$$k_i^* = \frac{k_i}{1-\lambda\, k_i}.$$

Вправа 2.8.6 *Покажіть, що геодезичні кривини кривої на поверхні та її образу на еквідістанті пов'язані співвідношенням:*

$$k_g^* = \frac{k_g - \lambda(\varkappa_g' + 2k_n k_g) + \lambda^2\big(k_n\varkappa_g' - \varkappa_g k_n' + k_g(k_n^2 + \varkappa_g^2)\big)}{((1-\lambda k_n)^2 + \lambda^2\varkappa_g^2)^{3/2}}.$$

Зокрема, для лінії кривини маємо $\varkappa_g = 0$ *і, як наслідок,*

$$k_g^* = \frac{k_g}{1-\lambda k_n}.$$

Більш загальним типом поверхні, ніж еквідистантна, є поверхня у якій параметр λ є функцією точки поверхні. Такі поверхні можна розглядати як явно задану поверхню над даною (за аналогією з явно заданою поверхнею над площиною). Зокрема, поверхні

$$D_1 : \ \vec\rho = \vec r + \frac{1}{k_1}\vec n \quad \text{и} \quad D_2 : \ \vec\rho = \vec r + \frac{1}{k_2}\vec n,$$

де k_1 і k_2 – головні кривини поверхні, називаються *фокальними* для даної поверхні. Фокальні поверхні виникають в рамках наступної конструкції.

Локальним нормальним експоненціальним відображенням даної поверхні $\vec r$: $\mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3$ називається відображення $\Phi : D^2 \times I \to E^3$, що задане векторфункцією

$$\vec\rho(u^1, u^2, \lambda) = \vec r(u^1, u^2) + \lambda\vec n(u^1, u^2).$$

Матриця Якобі такого відображення є складеною матрицею виду $\big((I - \lambda A)\partial\vec r, \vec n\big)$. Структура цієї матриці в координатах з ліній кривини має вигляд

$$\big(1-\lambda k_1)\partial_1\vec r, (1-\lambda k_2)\partial_2\vec r, \vec n\big).$$

Падіння рангу матриці стається якщо $\lambda = \frac{1}{k_1}$ або $\lambda = \frac{1}{k_2}$, тобто в точках фокальної поверхні.

Вправа 2.8.7 *Покажіть, що у відповідних за параметризацією точках фокальні поверхні взаємно ортогональні.*

2.9 Поверхні нульової Гауссової кривини

В цьому розділі , ми доведемо наступну теорему[15].

Теорема 2.9.1 *Нехай $F \subset E^3$ – регулярна поверхня з Гауссовою кривиною $K \equiv 0$. В околі будь-якої неомбілічної точки*[16] *поверхня є циліндром, конусом або торсом.*

Три зазначених типи поверхонь відносяться до класу лінійчастих поверхонь, *що розгортаються.* Поверхня, що утворена сімейством прямих, проведених через точки просторової кривої називається лінійчастою. Прямі сімейства називаються *твірними*, а просторова крива називається *напрямною лінією* або базою лінійчастої поверхні. Зазвичай вважається, що напрямна лінія регулярна, а сімейство твірних щонайменше неперервне. Лінійчаста поверхня, твірні якої складаються з дотичних до даної просторової кривої називається *торсом* або поверхнею дотичних. Параметризація лінійчастої поверхні може бути подана у вигляді

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\,\vec{a}(u), \tag{2.50}$$

де $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – параметризація просторової[17] кривої і $\vec{a}(u) \neq \vec{0}$ – неперервне векторне поле в точках кривої. Клас регулярності лінійчастої поверхні визначається меншим з класчів регулярності напрямної кривої і поля напрямків твірних. Вочевидь можна вважати, що $|\vec{a}(u)| = 1$.

Лінійчаста поверхня називається *розгортуваною* якщо вздовж твірної дотична площина одна й та ж. В іншому випадку, така поверхня називається *косою лінійчастою.*

Лема 2.9.1 *Лінійчаста поверхня класу C^2 є розгортуваною тоді і тільки тоді, коли її гауссова кривина $K \equiv 0$.*

Доведення. Лінійчаста поверхня (2.50) буде розгортуваною якщо поле нормалей $\vec{N}(u, v)$ поверхні уздовж твірної має сталий напрямок. Для цього необхідно і достатньо виконання умови $\partial_v \vec{N} \parallel \vec{N}$. Маємо

$$\partial_u \vec{r} = \vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,', \quad \partial_v \vec{r} = \vec{a}.$$

Знайдемо вектор нормалі

$$\vec{N} = \big(\vec{\rho}\,' + va'\big) \times \vec{a} = \vec{\rho}\,' \times \vec{a} + v\vec{a}\,' \times \vec{a}.$$

За формулою розкриття подвійного векторного добутку

$$\partial_v \vec{N} \times \vec{N} = \big(\vec{a}' \times \vec{a}\big) \times \big(\vec{\rho}\,' \times \vec{a} + v\vec{a}\,' \times \vec{a}\big) = \big(\vec{a}' \times \vec{a}\big) \times \big(\vec{\rho}\,' \times \vec{a}\big) =$$
$$\vec{\rho}\,'\big\langle\, \vec{a}' \times \vec{a}, \vec{a}\,\big\rangle - \vec{a}\big\langle\, \vec{a}' \times \vec{a}, \vec{\rho}\,'\,\big\rangle = -(\vec{\rho}\,', \vec{a}\,', \vec{a})\vec{a}.$$

[15] [14]

[16] В даному контексті неомбілічність означає відсутність в околі точок сплощення.

[17] Тобто, з ненульовим крутінням

Отже, лінійчаста поверхня (2.50) є розгортуваною тоді і тільки тоді, коли

$$(\vec{\rho}\,', \vec{a}', \vec{a}) \equiv 0. \tag{2.51}$$

З іншого боку, після нескладного обчислення, знаходимо що матриці першої та другої фундаментальних форм лінійчастої поверхні відповідно мають вигляд

$$g = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,'|^2 & \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle \\ \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{|\vec{N}|} \begin{pmatrix} \langle \vec{\rho}\,'' + v\vec{a}\,'', \vec{N} \rangle & (\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a}) \\ (\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a}) & 0 \end{pmatrix}.$$

З огляду на те, що $|\vec{N}| = \sqrt{\det g}$, знаходимо $\det B = -\frac{1}{\det g}(\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a})^2$. Значить гауссова кривина лінійчастої поверхні обчислюється за формулою:

$$K = \frac{\det B}{\det g} = -\frac{(\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a})^2}{\left(|\vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,'|^2 - \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle^2\right)^2}$$

Очевидно, що $K \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли $(\vec{\rho}\,', \vec{a}', \vec{a}) \equiv 0$, що й потрібно було довести. ■

Локальна будова лінійчастої розгортуваної поверхні описується наступною теоремою.

Твердження 2.9.1 *Будь-яка лінійчаста розгортувана поверхня класу C^2 локально є циліндром, конусом або торсом.*

Доведення. Нехай $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\,\vec{a}(u)$ задана лінійчаста розгортувана поверхня. Умова розгортування (2.51) тривіально виконана у випадку $\vec{\rho}\,' = 0$, а значить поверхня є конусом, та у випадку $\vec{a}\,' = 0$, тобто коли поверхня є циліндром.

Нехай $\vec{\rho}\,' \neq 0$ і $\vec{a}' \neq 0$. Покладемо $v = v(u)$ в припущенні гладкості цієї функції. Тоді лінія

$$\vec{\gamma}(u) = \vec{\rho}\,(u) + v(u)\,\vec{a}(u) \tag{2.52}$$

лежить на даній лінійчастій поверхні. Маємо

$$\vec{\gamma}\,' = \vec{\rho}\,' + v'\vec{a} + v\vec{a}\,'.$$

З умови розгортуваності (2.51) випливає, що $(\vec{\gamma}\,', \vec{a}\,', \vec{a}) = 0$. Це означає, що в якості напрямної нашої лінійчастої поверхні можна взяти будь-яку криву, що задана рівнянням (2.52). Покажемо, що серед напрямених ліній (2.52) існує лінія, дотичні до якої співпадають з твірними даної лінійчастої поверхні. Умова $\vec{\gamma}\,' \parallel \vec{a}$ еквівалентна умові $\vec{\gamma}\,' \times \vec{a} = 0$, тобто

$$\vec{\rho}\,' \times a + v\vec{a}\,' \times \vec{a} = \vec{0}.$$

З огляду на те, що $\vec{a}\,' \times \vec{a} \neq \vec{0}$, отримаємо

$$\langle \vec{\rho}\,' \times \vec{a}, \vec{a}\,' \times \vec{a} \rangle + v|\vec{a}\,' \times \vec{a}|^2 = 0.$$

Скориставшись тим, що $\vec{a}\,' \perp \vec{a}$ і формулою Лапласа, отримаємо

$$\begin{vmatrix} \langle \vec{\rho}\,', \vec{a}\,' \rangle & \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + v|\vec{a}\,'|^2 = 0.$$

Отже, $v(u) = -\frac{\left\langle \vec{\rho}\,',\vec{a}' \right\rangle}{|\vec{a}'|^2}$, а значить параметризація шуканої лінії має вигляд

$$\vec{\gamma} = \vec{\rho} - \frac{\left\langle \vec{\rho}\,', \vec{a}' \right\rangle}{|\vec{a}'|^2}\vec{a}. \tag{2.53}$$

Зауважимо, що може статися, що $\vec{\gamma}' \equiv \vec{0}$. Але в такому разі всі твірні пройдуть через фіксовану точку і поверхня є конусом з вершиною в цій точці. Припустимо, що на певному проміжку значень параметру $\vec{\gamma}' \neq \vec{0}$. Тоді на цьому проміжку лінія регулярна і її можна прийняти в якості нової напрямної лінії поверхні. Значить поверхня є торсом.

■

Завершує доведення теореми наступне твердження.

Твердження 2.9.2 *Нехай $F \subset E^3$ – регулярна поверхня з кривиною $K \equiv 0$. В кожному відкритому і зв'язному околі, що не містить точок сплощення поверхня є лінійчастою розгортуваною поверхнею.*

Доведення. Нехай F – поверхня з кривиною $K = k_1 k_2 \equiv 0$. Підмножина точок сплощення P на такій поверхні задається рівнянням $H = 0$, а тому є замкненою підмножиною $P \subset F$. Підмножина F є відкритою. Нехай U – зв'язна компонента F. Тоді U не містить точок сплощення, причому одна з головних кривин, скажімо, $k_2 \equiv 0$, у той час як $k_1 \neq 0$. В околі U немає омбілічних точок і поверхня допускає параметризацію з ліній кривини. Нехай (u, v) – координатна сітка з ліній кривини. Тоді з формул Родріга $\partial_v \vec{n} = 0$, а значить локально $\vec{n} = \vec{n}(u)$. З формул Дарбу (2.43) випливає, що v-лінії водночас є і асимптотичними. В такому випадку, на v - лінії маємо $\varkappa = \varkappa_g = 0$. Отже, кожна з v-ліній лежить в дотичній площині до поверхні з нормаллю $\vec{n}(u)$.

Нехай (u, v_0) і (u, v) параметри двох точок на одній v-лінії. Вектор $\vec{r}\,(u, v) - \vec{r}\,(u, v_0)$ лежить в дотичній площині до поверхні з нормаллю $\vec{n}(u)$ при будь-якому значенні параметру u. Отже маємо тотожність

$$\left\langle \vec{r}\,(u, v) - \vec{r}\,(u, v_0), \vec{n}(u) \right\rangle \equiv 0.$$

Диференціювання за u призводить до системи

$$\begin{cases} \left\langle \vec{r}\,(u, v) - \vec{r}\,(u, v_0), \vec{n}(u) \right\rangle \equiv 0, \\ \left\langle \vec{r}\,(u, v) - \vec{r}\,(u, v_0), \vec{n}\,'(u) \right\rangle \equiv 0. \end{cases} \tag{2.54}$$

Якщо $\vec{n}'(u) = 0$, то і друга головна кривина дорівнює нулю, а значить поверхня є цілком омбілічною з нульовою кривиною, тобто, частиною площини (Теорема 2.7.1).

Нехай $\vec{n}'(u) \neq 0$. Покладемо $\vec{a}(u) = \frac{\vec{n}'\times\vec{n}}{|\vec{n}'\times\vec{n}|}$. З формул Родріга $\vec{n}' = -k_1 \partial_u \vec{r}$, а значить $(\vec{n} \times \vec{n}') \parallel (\vec{n} \times \partial_u \vec{r}\,) \parallel \partial_v \vec{r}$ бо $\partial_u \vec{r} \perp \partial_v \vec{r}$. Отже, $\vec{a} \parallel \partial_v \vec{r}$ і з (2.54) випливає, що

$$\vec{r}\,(u, v) = \vec{r}\,(u, v_0) + t(u, v)\vec{a}(u),$$

де $t(u, v)$ – деяка функція. Покажемо, що $t'_u = 0$, а $t'_v \neq 0$. Дійсно, $\partial_v \vec{r} = t'_v \vec{a} \neq 0$ і з регулярності парметризаціїї випливає, що $t'_v \neq 0$.

Рис. 2.8: Напрямний еліпс (червона лінія) і стрікціонна лінія (зелена) на поверхні divопорожнинного гіперболоїду $\frac{x^2}{9}+y^2-z^2=1$.

З огляду на те, що координатна сітка ортогональна, отримаємо

$$\left\langle\, \partial_u\vec{r}\,(u,v_0)+t'_u\vec{a}+t\vec{a}\,',t'_v\vec{a}\,\right\rangle\equiv 0.$$

Оскільки $|\vec{a}|=1$ і $\vec{a}\parallel\partial_v\vec{r}$, то $t'_vt'_u\equiv 0$. Приймаючи до уваги що $t'_v\neq 0$, отримаємо $t'_u\equiv 0$. В такому випадку, $t=t(v)$ монотонна функція і можна локально перейти від параметра v до параметру t. При цьому v-лінії переходять в t-лінії, а параметричне рівняння поверхні набуває вигляду

$$\vec{r}\,(u,t)=\vec{r}\,(u,t_0)+t\vec{a}(u).$$

Зауважимо, що рівняння $\vec{\rho}\,(u)=\vec{r}\,(u,t_0)$ визначає на поверхні деяку криву. Отже остаточно отримаємо:

$$\vec{r}\,(u,t)=\vec{\rho}\,(u)+t\vec{a}(u).$$

Тому, наша поверхня є лінійчастою з нульовою гаусовою кривиною, а за твердженням 2.9.1 вона розгортається.

■

Вправа 2.9.1 *Лінія $\vec{\gamma}(u)$ на лінійчатої поверхні називається горловою (аб стрікціонною) якщо в точках цієї лінії $\left\langle\,\vec{\gamma}\,',\vec{a}\,'\,\right\rangle=0$. Горлова лінія характеризується наступними властивостями:*

- *горлова лінія є геометрични місцем основ спільних перпендикулярів нескінченно близьких твірних лінійчастої поверхні;*
- *горлова лінія лінійчастої поверхні є геометричне місце точок де дорівнює нулю геодезична кривина ортогональної траєкторії твірних;*
- *горлова лінія лінійчастої поверхні є геометричним місцем точок твірних, в яких гауссова кривина поверхні мінімальна вздовж твірної.*
- *на розгортуваній поверхні дотичні до горлової лінії співпадаюь з твірними.*

З Теореми 2.9.1 випливає цікаве спостереження, що належить Бельтрамі, пов'язане з розгортанням на площину кривих на поверхні. А саме, розглянемо уздовж даної кривої $\vec{\gamma}(s)$ на поверхні сімейство дотичних площин

$$\left\langle \vec{r} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}(s) \right\rangle = 0.$$

Диференціювання за параметром s призводить до системи:

$$\begin{cases} \left\langle \vec{r} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}(s) \right\rangle = 0, \\ \left\langle \vec{r} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}'(s) \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що кожна точка розглянутого сімейства належить поверхні (т.зв., обгортці)

$$\vec{r} = \vec{\gamma}(s) + t\,\vec{a}(s),$$

де $\vec{a} = \vec{n} \times \vec{n}'$. Покажемо, що ця поверхня розгортувана. Для цього досить перевірити виконання умови $(\vec{\gamma}', \vec{a}\,', \vec{a}) = 0$. Але це практично очевидно, бо

$$\vec{\gamma}' = \vec{\tau} \perp \vec{n}, \quad \vec{a} = \vec{n} \times \vec{n}' \perp \vec{n}, \quad \vec{a}\,' = \vec{n} \times \vec{n}'' \perp \vec{n},$$

а значить $\vec{\gamma}', \vec{a}\,'$ і $\vec{a}$ компланарні.

Побудована розгортувана поверхня називається *поверхневою полосою*. Ясно що поверхнева полоса і поверхня дотикаються уздовж заданої лінії (у них спільна нормаль, а значить і дотична площина), тому геодезична кривина даної кривої на поверхні дорівнює геодезичній кривині цієї кривої, як кривої на полосі. Але полосу можна *розгорнути на площину* (за ізометрією). Значить геодезична кривина кривої перейде в кривину розгорнутої лінії на площині (!). Якщо так, то геодезична лінія розгорнеться у відрізок прямої, крива зі сталою геодезичної кривиною – в дугу кола і т.д.

Для прикладу, розглянемо кола на сфері. Якщо коло є великим колом, то поверхневою полосою є частина прямого кругового циліндра, а велике коло буде колом на циліндрі, що ортогональне твірним. При розгортанні на площину, це коло перейде у відрізок прямої. Значить, велике коло на сфері є геодезичною. Якщо ж коло є малим колом, то поверхневою полосою буде частина прямого кругового конусу. При розгортанні на площину, коло перейде в частину кола, радіус якого дорівнює довжині твірної конуса. Значить мале коло на сфері є кривою зі сталою геодезичною кривиною. З елементарно-геометричних обчислень легко випливає, що $k_g = \dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$, де R – радіус сфери, а r – зовнішній (просторовий) радіус кола.

2.10 Основні теореми теорії поверхонь.

2.10.1 Дериваційні формули Гаусса і Вейнгартена.

Нехай $F^2 \subset E^3$ поверхня, що параметрезована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3$. Нехай $\vec{n}$ – поле одиничних нормалей на поверхні. Тоді набір вектор-функцій

$$\left\{ \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{n} \right\} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3 \tag{2.55}$$

складає набір лінійно незалежних вектор-функцій і тому всі наступні їх похідні можуть бути розкладені за вказаним базисом. Відповідні розкладання мають назву *розкладання Гауса і Вейнгартена* і мають наступні вирази[18]

$$\begin{aligned} \partial_{ik}\vec{r} &= \Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + b_{ik}\vec{n}, && \text{(Гаусса)} \\ \partial_i\vec{n} &= -a^s_i\partial_s\vec{r}, && \text{(Вейнгартена)} \end{aligned} \tag{2.56}$$

де $B = (b_{ik})$ — матриця другої фундаментальної форми, $A = (a^s_k)$ — матриця Вейнгартена, Γ^s_{ik} – набір функцій, що зветься *символами Крістофеля другого роду.*

Розкладання Вейнгартена було отримано нами раніше, формула 2.27. Розкладання Гаусса є формальним розкладанням $\partial_{ik}\vec{r}$ за базисом (2.55) з тим зауваженням, що проекція цього розкладання на вектор $\vec{n}$ дорівнює b_{ik}, бо за означенням матриці другої фундаментальної форми $b_{ik} = \langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \vec{n}\,\rangle$.

Введемо в розгляд *символи Крістофеля першого роду* формулою

$$\Gamma_{ik,m} = \langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle. \tag{2.57}$$

Символи Крістофеля другого роду знайдемо множачи скалярно розкладання Гаусса на вектор-функцію $\partial_j\vec{r}$. Отримаємо рівність

$$\Gamma_{ik,j} = \Gamma^s_{ik}\langle\, \partial_s\vec{r}, \partial_j\vec{r}\,\rangle = \Gamma^s_{ik}g_{sj}.$$

Позначимо через $g^{-1} = (g^{jm})$ матрицю, обернену до матриці першої фундаментальної форми. Помноживши рівність на g^{jm} і взявши суму за j, отримаємо

$$\Gamma_{ik,j}\, g^{jm} = \Gamma^s_{ik}\, g_{sj}\, g^{jm} = \Gamma^s_{ik}\,\delta^m_s = \Gamma^m_{ik}.$$

Для обчислення символів Крістофеля за формулою (2.57) необхідно знати параметризацію поверхні. Але з іншого боку за визначенням першої фундаментальної форми $g_{ik} = \langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_k\vec{r}\,\rangle$ і тому

$$\begin{aligned} \partial_i g_{km} &= \partial_i\langle\, \partial_k\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle = \langle\, \partial_{ki}\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle + \langle\, \partial_k\vec{r}, \partial_{mi}\vec{r}\,\rangle \\ \partial_k g_{im} &= \partial_k\langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle = \langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle + \langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_{mk}\vec{r}\,\rangle \\ \partial_m g_{ik} &= \partial_m\langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_k\vec{r}\,\rangle = \langle\, \partial_{im}\vec{r}, \partial_k\vec{r}\,\rangle + \langle\, \partial_i\vec{r}, \partial_{km}\vec{r}\,\rangle \end{aligned}$$

Оскільки вектор-функція $\vec{r}$ регулярна класу C^2, то змішані похідні не залежать від порядку диференціювання. Складаючи перші два вирази і віднімаючи третій, отримуємо формулу

$$\langle\, \partial_{ik}\vec{r}, \partial_m\vec{r}\,\rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{km} + \partial_k g_{im} - \partial_m g_{ik}),$$

що містить лише коефіцієнти першої фундаментальної форми. Отже, як висновок, *символи Крістофеля першого і другого роду визначаються першою фундаментальною формою поверхні* і можуть бути обчислені за формулами

$$\Gamma_{ik,m} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{km} + \partial_k g_{im} - \partial_m g_{ik}), \qquad \Gamma^m_{ik} = g^{ms}\Gamma_{ik,s}. \tag{2.58}$$

Тепер ми можемо довести теорему, яка відкрила шлях до внутрішньої геометрії поверхонь.

[18]Нагадуємо про правило Ейнштейна взяття суми за верхнім і нижнім індексами, що повторюються.

Теорема 2.10.1 ***(Теорема Гаусса)*** *Гауссова кривина C^3-регулярної поверхні виражається через компоненти першої фундаментальної форми у вигляді*

$$K = \frac{\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Доведення. Гауссова кривина поверхні обчислюється, як ми знаємо, за формулою

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

З розкладання Гаусса

$$\begin{aligned} b_{11}\vec{n} &= \partial_{11}\vec{r} - \Gamma^s_{11}\,\partial_s\vec{r}, \\ b_{22}\vec{n} &= \partial_{22}\vec{r} - \Gamma^s_{22}\,\partial_s\vec{r}, \\ b_{12}\vec{n} &= \partial_{12}\vec{r} - \Gamma^s_{12}\,\partial_s\vec{r}. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{gathered} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \big\langle\, \partial_{11}\vec{r} - \Gamma^k_{11}\,\partial_k\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} - \Gamma^s_{22}\,\partial_s\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \partial_{12}\vec{r} - \Gamma^s_{12}\,\partial_s\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} - \Gamma^k_{12}\,\partial_k\vec{r}\,\big\rangle = \\ \big\langle\, \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \Gamma^k_{11}\,\partial_k\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \partial_{11}\vec{r}, \Gamma^s_{22}\,\partial_s\vec{r}\,\big\rangle + \big\langle\, \Gamma^k_{11}\,\partial_k\vec{r}, \Gamma^s_{22}\,\partial_s\vec{r}\,\big\rangle - \\ \big\langle\, \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle + \big\langle\, \Gamma^s_{12}\,\partial_s\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle + \big\langle\, \partial_{12}\vec{r}, \Gamma^k_{12}\,\partial_k\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \Gamma^s_{12}\,\partial_s\vec{r}, \Gamma^k_{12}\,\partial_k\vec{r}\,\big\rangle = \\ \big\langle\, \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle - \Gamma^k_{11}\Gamma_{22,k} - \underline{\Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}} + \underline{\Gamma^k_{11}\Gamma^s_{22}g_{ks}} - \\ \big\langle\, \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} + \underline{\underline{\Gamma^k_{12}\Gamma_{12,k}}} - \underline{\underline{\Gamma^k_{12}\Gamma^s_{12}g_{ks}}}. \end{gathered}$$

Підкреслені доданки рівні між собою, а решта скалярних добутків легко перетворюється в наступний спосіб

$$\begin{aligned} \big\langle\, \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle &= \partial_1\big\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_{221}\vec{r}\,\big\rangle = \partial_1\Gamma_{22,1} - \big\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_{221}\vec{r}\,\big\rangle, \\ \big\langle\, \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle &= \partial_2\big\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \partial_2\vec{r}, \partial_{121}\vec{r}\,\big\rangle = \partial_2\Gamma_{12,1} - \big\langle\, \partial_1\vec{r}, \partial_{122}\vec{r}\,\big\rangle, \end{aligned}$$

Тому

$$\big\langle\, \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r}\,\big\rangle - \big\langle\, \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r}\,\big\rangle = \partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{12,1}.$$

Таким чином,

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{12,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}$$

що і завершує доведення.

■

В якості прикладу, розглянемо верхню напівплощину $y > 0$ декартової системи координат (x, y). Задамо на цій напівплощині першу фундаментальну форму

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

Отриманий двовимірний многовид називається моделлю Пуанкаре площини Лобачевського. Не маючи параметризації поверхні із зазначеною першою фундаментальною формою, завдячуючі теоремі Гауса ми можемо обчислити гауссову кривину цього многовиду.

Приклад 2.10.1 *Гаусова кривина моделі Пуанкаре площини Лобачевського з першою фундаментальною формою*

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

дорівнює $K = -\frac{1}{R^2}$. *Проведемо обчислення.*

$$g = R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \quad \det g = \frac{R^4}{y^4}, \quad g^{-1} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Для символів Кристофеля маємо

$$\Gamma_{11,1} = 0, \quad \Gamma_{12,1} = -\tfrac{R^2}{y^3}, \qquad \Gamma_{22,1} = 0,$$

$$\Gamma_{11,2} = \tfrac{R^2}{y^3}, \qquad \Gamma_{12,2} = 0, \qquad \Gamma_{22,2} = -\tfrac{R^2}{y^3},$$

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = -\tfrac{1}{y}, \qquad \Gamma^1_{22} = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = \tfrac{1}{y}, \qquad \Gamma^2_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = -\tfrac{1}{y}.$$

Отже,

$$\partial_1\Gamma_{22,1} = 0, \quad \partial_2\Gamma_{21,1} = \frac{3R^2}{y^4}, \quad \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} = \frac{R^2}{y^4}, \quad \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = -\frac{R^2}{y^4}.$$

Тому

$$\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = -\frac{R^2}{y^4}.$$

Як результат,

$$K = \frac{\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}}{\det g} = -\frac{1}{R^2}.$$

Приклад 2.10.2 *Координатна сітка* (u, v) *на поверхні називається напівгеодезичною, якщо перша фундаментальна форма має вигляд*

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2.$$

Гаусова кривина поверхні з напівгеодезичною координатною сіткою дорівнює

$$K = -\frac{\partial_{uu}}{f}.$$

Проведемо обчислення.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = f^2, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{pmatrix}.$$

Для символів Кристофеля маємо

$$\Gamma_{11,1} = 0, \qquad \Gamma_{12,1} = 0, \qquad \Gamma_{22,1} = -f\partial_u f,$$

$$\Gamma_{11,2} = 0, \quad \Gamma_{12,2} = f\partial_u f, \quad \Gamma_{22,2} = f\partial_v f,$$

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -f\partial_u f,$$

$$\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \tfrac{\partial_u f}{f}, \quad \Gamma^2_{22} = \tfrac{\partial_v f}{f}.$$

Отже,

$$\partial_1\Gamma_{22,1} = -f\partial_{uu}f - (\partial_u f)^2, \quad \partial_2\Gamma_{21,1} = 0, \quad \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} = (\partial_u f)^2, \quad \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = 0.$$

Тому

$$\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = -f\partial_{uu}f.$$

Як результат,

$$K = \frac{\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}}{\det g} = -\frac{\partial_{uu}f}{f}.$$

У частковому випадку поверхні обертання $\vec{r} = \{x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\}$ *з натурально параметризованою профільною кривою* $(x = x(u), z = z(u))$ *перша фундаментальна форма має вигляд*

$$ds^2 = du^2 + x^2(u)dv^2$$

і тому гаусова кривина поверхні обертання отримає вираз $K = -\dfrac{x''}{x}$.

Приклад 2.10.3 *Координатна сітка* (u, v) *на поверхні називається Чебишовською, якщо перша фундаментальна форма має вигляд*

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\omega(x, y)dxdy + dy^2.$$

Функція $\omega(x, y)$ *називається сітьовим кутом. Гаусова кривина поверхні з Чебишовською координатною сіткою дорівнює*

$$K = -\frac{\omega_{xy}}{\sin\omega}.$$

Проведемо обчислення.

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \det g = \sin^2\omega, \quad g^{-1} = \frac{1}{\sin^2\omega}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Для символів Кристофеля маємо

$$\Gamma_{11,1} = 0, \qquad \Gamma_{12,1} = 0, \quad \Gamma_{22,1} = -\omega_y\sin\omega,$$

$$\Gamma_{11,2} = -\omega_x\sin\omega, \quad \Gamma_{12,2} = 0, \quad \Gamma_{22,2} = 0,$$

$$\Gamma^1_{11} = \tfrac{\omega_x\cos\omega}{\sin\omega}, \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -\tfrac{\omega_y}{\sin\omega}$$

$$\Gamma^2_{11} = \tfrac{\omega_x\cos\omega}{\sin\omega}, \quad \Gamma^2_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = \tfrac{\omega_y}{\sin\omega}.$$

Отже,

$$\partial_1\Gamma_{22,1} = -\omega_{xy}\sin\omega - \omega_x\omega_y\cos\omega,\ \partial_2\Gamma_{21,1} = 0,\ \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} = 0,\ \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = -\omega_x\omega_y\cos\omega.$$

Тому

$$\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = -\omega_{xy}\sin\omega$$

Як результат,

$$K = \frac{\partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s}}{\det g} = -\frac{\omega_{xy}}{\sin\omega}.$$

2.10.2 Рівняння Гаусса і Кодацці. Терема Бонне.

У цьому розділі ми виведемо рівняння, що зв'язують матриці першої і другої фундаментальних форм.

Теорема 2.10.2 *Нехай $F \subset E^3$ поверхня класу C^3 з першою фундаментальною формою $g = (g_{ik})$ і другою фундаментальною формою $B = (b_{ik})$. Позначимо через Γ^m_{ik} і $\Gamma_{ik,m}$ символи Крістофеля форми g і покладемо за означенням*

$$\nabla_j b_{ik} = \partial_j b_{ik} - \Gamma^s_{ji} b_{sk} - \Gamma^s_{jk} b_{is}.$$

Тоді мають місце тотожності (рівняння Гауса і Кодацці)

$$\begin{aligned} &\partial_j \Gamma_{ik,m} - \partial_k \Gamma_{ij,m} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{mk,s} - \Gamma^s_{ik}\Gamma_{mj,s} = b_{ik}b_{jm} - b_{ij}b_{km} \\ &\nabla_j b_{ik} = \nabla_k b_{ij} \end{aligned} \tag{2.59}$$

для всіх комбінацій індексів i, j, k, m. Зокрема, нетривіальні комбінації складають

$$\partial_1 \Gamma_{22,1} - \partial_2 \Gamma_{21,1} + \Gamma^s_{12}\Gamma_{12,s} - \Gamma^s_{22}\Gamma_{11,s} = b_{22}b_{11} - b^2_{12}, \qquad \text{(рівняння Гауса)}$$

$$\nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12}, \quad \nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{12}. \qquad \text{(рівняння Кодацці)}$$

Доведення. Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \to E^3$ параметризація класу C^3 даної поверхні. Тоді

$$\partial_{ikj}\vec{r} = \partial_{ijk}\vec{r}$$

для всіх комбінацій індексів. Використовуючи розкладання Гаусса і Вейнгартена, знайдемо

$$\partial_{ikj}\vec{r} = \partial_j(\partial_{ik}\vec{r}) = \partial_j(\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + b_{ik}\vec{n}) = \partial_j\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + \Gamma^s_{ik}\partial_{sj}\vec{r} + \partial_j b_{ik}\vec{n} + b_{ik}\partial_j\vec{n} =$$

$$\partial_j\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + \Gamma^s_{ik}(\Gamma^m_{sj}\partial_m\vec{r} + b_{sj}\vec{n}) + \partial_j b_{ik}\vec{n} - b_{ik}a^s_j\partial_s\vec{r} =$$

$$(\partial_j\Gamma^m_{ik} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{sj} - b_{ik}a^m_j)\partial_m\vec{r} + (\partial_j b_{ik} + \Gamma^s_{ik}b_{sj})\vec{n}.$$

Вираз для $\partial_{ijk}\vec{r}$ отримаємо заміною індексів $k \to j$, $j \to k$ в останньому виразі. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти при $\partial_m\vec{r}$, отримаємо

$$\partial_j\Gamma^m_{ik} - \partial_k\Gamma^m_{ij} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^m_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^m_{sk} = b_{ik}a^m_j - b_{ij}a^m_k. \tag{2.60}$$

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти при $\vec{n}$, отримаємо рівність

$$\partial_j b_{ik} + \Gamma^s_{ik}b_{sj} = \partial_k b_{ij} + \Gamma^s_{ij}b_{sk}. \tag{2.61}$$

Рівність (2.60) є еквівалентною рівнянню Гаусса. Щоб в цьому переконатися, зробимо заміну $m \to \alpha$, помножимо обидві частини рівності на $g_{\alpha m}$ і просумуємо за α. Отримаємо

$$g_{\alpha m}\partial_j\Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha m}\partial_k\Gamma^\alpha_{ij} + \Gamma^s_{ik}\Gamma_{sj,m} - \Gamma^s_{ij}\Gamma_{sk,m} = b_{ik}b_{jm} - b_{ij}b_{km}. \tag{2.62}$$

Внесемо $g_{\alpha m}$ під диференціювання, користуючись тривіальною тотожністю

$$\partial_j g_{\alpha m} = \partial_j \langle \partial_\alpha \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle = \langle \partial_{\alpha j} \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle + \langle \partial_\alpha \vec{r}, \partial_{mj} \vec{r} \rangle = \Gamma_{\alpha j,m} + \Gamma_{mj,\alpha}.$$

Отримуємо:

$$\partial_j (g_{\alpha m} \Gamma^\alpha_{ik}) - \Gamma^\alpha_{ik}(\underline{\Gamma_{\alpha j,m}} + \Gamma_{mj,\alpha}) - \partial_k (g_{\alpha m} \Gamma^\alpha_{ij}) + \Gamma^\alpha_{ij}(\underline{\underline{\Gamma_{\alpha k,m}}} + \Gamma_{mk,\alpha}) +$$
$$\underline{\Gamma^s_{ik}\Gamma_{sj,m}} - \underline{\underline{\Gamma^s_{ij}\Gamma_{sk,m}}}.$$

Підкреслені складові після розкриття дужок і заміни індексу сумовування $\alpha \to s$ зникають і таким чином ліва частина рівності (2.62) перетвориться до вигляду

$$\partial_j \Gamma_{ik,m} - \partial_k \Gamma_{ij,m} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{mk,s} - \Gamma^s_{ik}\Gamma_{mj,s},$$

що і було потрібно перевірити.

Рівність (2.61) еквівалентна рівнянню Кодацці. Дійсно, поміняємо місцями блоки, що містять символи Крістофеля (з заміною порядку індексів)

$$\partial_j b_{ik} - \Gamma^s_{ji} b_{sk} = \partial_k b_{ij} - \Gamma^s_{ki} b_{sj}$$

і віднімемо в обох частинах рівні блоки вигляду $\Gamma^s_{jk} b_{is}$. Отримаємо

$$\partial_j b_{ik} - \Gamma^s_{ji} b_{sk} - \Gamma^s_{jk} b_{is} = \partial_k b_{ij} - \Gamma^s_{ki} b_{sj} - \Gamma^s_{kj} b_{is},$$

що і означає рівність

$$\nabla_j b_{ik} = \nabla_k b_{ij}$$

■

Ліва частина рівняння Гаусса (2.59) утворює так званий тензор Рімана типу (0,4). Його компоненти R_{mkji} визначаються як

$$R_{mkji} = \partial_j \Gamma_{ik,m} - \partial_k \Gamma_{ij,m} + \Gamma^s_{ij}\Gamma_{mk,s} - \Gamma^s_{ik}\Gamma_{mj,s}$$

Формула (2.60) визначає тензор Рімана типу (1,3). Його компоненти R^m_{kji} визначаються як

$$R^m_{kji} = \partial_j \Gamma^m_{ki} - \partial_k \Gamma^m_{ji} + \Gamma^s_{ki}\Gamma^m_{js} - \Gamma^s_{ji}\Gamma^m_{ks}.$$

В процесі перетворення формули (2.60) до формули (2.59) ми фактично встановили зв'язок між компонентами цих тензорів

$$R_{mkji} = g_{ms} R^s_{kji}.$$

Рівняння Гаусса і Кодацці є ключовими в теоремі Бонне про визначення поверхні за заданими першою та другою фундаментальними формами.

Теорема 2.10.3 ***(Бонне)*** *Нехай в деякій області $\mathcal{D}^n$ задані дві квадратичні форми g і B, причому форма g додатно визначена. Якщо коефіцієнти цих форм задовольняють рівнянням Гаусса і Кодацці, то в просторі E^{n+1} існує єдина з точністю до руху в просторі поверхня, для якої задані форми є відповідно першою і другою фундаментальними формами.*

Ідея доведення полягає в наступному. Нехай $\vec{r}:\mathcal{D}^2\to E^3$ невідома вектор-функція. За заданою матрицею g складемо символи Крістофеля, знайдемо матрицю Вейнгартена $A=g^{-1}B$ і формально запишемо систему диференціальних рівнянь на вектор-функції $\vec{r}$ і $\vec{n}$, в припущенні, що $\langle\, \vec{n}, \partial_i\vec{r}\,\rangle=0$, вигляду розкладання Гаусса-Вейнгартена

$$\begin{cases} \partial_{ik}\vec{r}=\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r}+b_{ik}\vec{n},\\ \partial_i\vec{n}=-a^s_i\partial_s\vec{r}. \end{cases}$$

Умови інтегрованості цієї системи мають вигляд

$$\begin{cases} \partial_{ikj}\vec{r}=\partial_{ijk}\vec{r}\\ \partial_{ik}\vec{n}=\partial_{ki}\vec{n} \end{cases}$$

Ясно, що перша з цих умов приводить до рівнянь Гауса і Кодацці на коефіцієнти заданих форм. Але за умовою, ці рівняння задовольняються.

Друга умова інтегрованості приводить до двох рівностей

$$\begin{cases} \partial_j a^m_k+\Gamma^m_{js}a^s_k=\partial_k a^m_j+\Gamma^m_{ks}a^s_j,\\ a^s_k b_{js}=a^s_j b_{ks}, \end{cases}$$

перша з яких еквівалентна рівнянню Кодацці, а друга задовольняється тотожно.

Таким чином, досліджувана система інтегровувана. Єдиність доводиться шляхом суміщення початкових даних для задачі Коші системи Гаусса-Вейнгартена.

2.10.3 Чебишовська координатна сітка.

Чебишовська координатна сітка завжди існує на поверхнях переносу. Нехай

$$\vec{r}(u,v)=\vec{\gamma}_1(u)+\vec{\gamma}_2(v)$$

парметризація поверхні переносу, причому u – натуральний параметр на кривій $\vec{\gamma}_1$ і v – натуральний параметр на кривій $\vec{\gamma}_2$. Тоді

$$\partial_1\vec{r}=\vec{\gamma}\,'_1(u),\quad \partial_2\vec{r}=\vec{\gamma}\,'_2(v),\quad |\partial_1\vec{r}|=1,\quad |\partial_2\vec{r}|=1,\quad \langle\, \vec{\gamma}\,'_1,\vec{\gamma}\,'_2\,\rangle=\cos\omega(u,v).$$

Отже

$$ds^2=du^2+2\cos\omega(u,v)\,dudv+dv^2$$

і координатна сітка є Чебишовською. Не тільки поверхні переносу можуть нести Чебишовську координатну сітку.

Твердження 2.10.1 *На поверхні сталої від'ємної гаусової кривини існує Чебишовська координатна сітка, що складається із асимптотичнх ліній.*

Доведення. Не зменшуючі загальності будемо шукати Чебишовську координатну сітку на поверхні з гаусовою кривиною $K\equiv -1$. На такій поверхні головні кривини задовольняють тотожності $k_1k_2\equiv -1$ і ми можемо покласти

$$k_1=\cot\sigma,\quad k_2=-\tan\sigma,$$

де σ – деяка функція праметрів.

Оскільки поверхня не має омбілічних точок, на поверхні можна обрати координатну сітку (u^1, u^2) з ліній кривини. Тоді її перша і друга фундаментальні форми стануть діагональними, а саме

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}},\ k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Символи Кристофеля в такій координатній системі приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{11}}{g_{11}}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{11}}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{22}}{g_{11}}, \\ \Gamma^2_{11} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{22}}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{22}}{g_{22}}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{22}}{g_{22}}. \end{aligned}$$

Оскільки $b_{12} \equiv 0$, то рівняння Кодацці $\nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{21}$ і $\nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12}$ запишуться у вигляді

$$\nabla_2(k_1 g_{11}) = 0 - \Gamma^s_{11} b_{s2} - \Gamma^s_{12} b_{1s} = -\Gamma^2_{11} b_{22} - \Gamma^1_{12} b_{11} =$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{22}} b_{22} - \frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{11}} b_{11} = \frac{1}{2}\partial_2 g_{11}(k_2 - k_1).$$

$$\nabla_1(k_1 g_{22}) = 0 - \Gamma^s_{21} b_{s2} - \Gamma^s_{22} b_{1s} = -\Gamma^2_{21} b_{22} - \Gamma^1_{22} b_{11} =$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{22}}{g_{22}} b_{22} + \frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{22}}{g_{11}} b_{11} = \frac{1}{2}\partial_1 g_{22}(k_1 - k_2).$$

Із означення символів Кристофеля випливає, що $\nabla_i g_{jk} \equiv 0$. Тому з рівнянь Кодацці отримаємо рівняння

$$\partial_2 k_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{11}}(k_2 - k_1), \quad \partial_1 k_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial_1 g_{22}}{g_{22}}(k_1 - k_2).$$

Тепер зауважимо, що

$$\partial_2 k_1 = -\frac{\partial_2 \sigma}{\sin^2 \sigma}, \quad \partial_1 k_2 = -\frac{\partial_1 \sigma}{\cos^2 \sigma}, \quad k_2 - k_1 = -(\tan\sigma + \cot\sigma) = -\frac{1}{\sin\sigma\cos\sigma}.$$

Тому можемо записати

$$\frac{\partial_2 g_{11}}{g_{11}} = 2\partial_2\sigma\cot\sigma = 2\partial_2 \ln|\sin\sigma|, \quad \frac{\partial_1 g_{22}}{g_{22}} = -2\partial_1\sigma\tan\sigma = 2\partial_1 \ln|\cos\sigma|.$$

Значить коефіцієнти першої фундаментальної форми мають вигляд

$$g_{11} = A(u^1)\sin^2\sigma, \quad g_{22} = B(u_2)\cos^2\sigma,$$

де $A(u^1)$ і $B(u^2)$ довільні додатні функції. Тобто

$$ds^2 = \sin^2\sigma A(u^1)(du^1)^2 + \cos^2\sigma B(u^2)(du^2)^2.$$

Виконавши заміну параметрів виду $\sqrt{A}du^1 \to du$ та $\sqrt{B}du^2 \to dv$, зведемо першу фундаментальну форму до вигляду

$$ds^2 = \sin^2\sigma\, du^2 + \cos^2\sigma\, dv^2.$$

При цьому коефіцієнти другої фундаментальної форми зведуться до виразів

$$b_{11} = k_1 g_{11} = \cot\sigma \sin^2\sigma = \cos\sigma\sin\sigma, \quad b_{22} = k_2 g_{22} = -\tan\sigma\cos^2\sigma = -\sin\sigma\cos\sigma.$$

Отже

$$B = \sin\sigma\cos\sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння асимптотичних ліній для такої параметризації розпадаються на рівняння

$$du + dv = 0, \quad du - dv = 0.$$

Параметризуємо поверхню асимптотичними лініями, поклавши

$$u + v = 2x, \quad u - v = -2y.$$

Для оберненого перетворення, отримаємо

$$u = x - y, \quad v = x + y,$$

а значить друга фундаментальна форма зведеться до

$$\sin\sigma\cos\sigma\big((dx - dy)^2 - (dx + dy)^2\big) = -4\sin\sigma\cos\sigma\, dxdy = -2\sin(2\sigma)\, dxdy,$$

У той же час перша фундаментальна форма пеетвориться наступним чином

$$ds^2 = \sin^2\sigma\big(dx - dy\big)^2 + \cos^2\sigma\big(dx + dy\big)^2 = dx^2 + 2\cos(2\sigma)\, dxdy + dy^2.$$

Покладемо $\omega = 2\sigma(x, y)$ і отримаємо Чебишовську координатну сітку (x, y) з першою фундаментальною формою

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos\omega\, dxdy + dy^2.$$

Друга ж фундаментальна форма отримала вираз

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\omega \\ -\sin\omega & 0 \end{pmatrix}$$

і це означає, що координатна сітка складається з асимптотичних ліній.

■

2.11 Геодезичні лінії.

2.11.1 Внутрішнє рівняння геодезичної лінії.

Раніше ми отримали вираз для геодезичної кривини кривої виходячи з зовнішньої параметризації кривої. Виявляється, що геодезична кривина кривої повністю визначається її внутрішнім завданням і першою квадратичною формою поверхні. Тобто, геодезична кривина кривої належить внутрішній геометрії поверхні.

Твердження 2.11.1 *Геодезична кривина кривої $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ на параметризованій поверхні $\vec{r} : \mathcal{D}(u^1, u^2) \to F \subset E^3$ визначається внутрішнім рівнянням кривої і внутрішньою геометрією поверхні. А саме,*

$$k_g(s) = \sqrt{\det g}\left(\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma^2_{ik}\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds}\right) - \frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma^1_{ik}\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\right)$$

для натурально параметризованої кривої, і

$$k_g(t) = \frac{\sqrt{\det g}}{|\gamma\,'|_g^3}\left(\frac{du^1}{dt}\left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right) - \frac{du^2}{dt}\left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)\right),$$

де $|\gamma\,'|_g = \sqrt{g_{ik}(u^1(t), u^2(t))\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^k}{dt}}$, *для довільної регулярної параметризації.*

В зазначених формулах матриця $g = g \circ \gamma$ і символи Кристофеля $\Gamma^m_{ik} = \Gamma^m_{ik} \circ \gamma$ є відповідними обмеженнями на точки кривої.

Доведення. Скористаємося формулами обчислення геодезичної кривини з твердження 2.8.9. Обчислення виконаємо для випадку довільної регулярної параметризації кривої. Тоді

$$\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma\,, \quad \vec{\gamma}\,' = \partial_i\vec{r}\,\frac{du^i}{dt}, \quad \vec{\gamma}\,'' = \partial_{ik}\vec{r}\,\,\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt} + \partial_i\vec{r}\,\frac{d^2u^i}{dt^2}.$$

Скориставшись розкладанням Гаусса, маємо

$$\vec{\gamma}\,'' = (\Gamma^m_{ik}\partial_m\vec{r} + b_{ik}\vec{n}_\gamma\,)\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt} + \partial_m\vec{r}\,\frac{d^2u^m}{dt^2} =$$
$$\left(\frac{d^2u^m}{dt^2} + \Gamma^m_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)\partial_m\vec{r} + b_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\,\vec{n}_\gamma\,. \quad (2.63)$$

Отже,

$$(\vec{\gamma}\,', \vec{\gamma}\,'', \vec{n}_\gamma\,) = \left(\partial_i\vec{r}\,\frac{du^i}{dt}, \left(\frac{d\,^2u^m}{dt^2} + \Gamma^m_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)\partial_m\vec{r} + b_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\vec{n}_\gamma\,, \vec{n}_\gamma\right) =$$
$$\left(\frac{du^1}{dt}\left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right) - \frac{du\,^2}{dt}\left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)\right)(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}, \vec{n}_\gamma\,).$$

Але

$$(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}, \vec{n}_\gamma\,) = \left\langle\, \partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}, \frac{\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}}{|\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}|}\,\right\rangle\Big|_\gamma = |\,\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r}\,|_\gamma\, = \sqrt{\det g \circ \gamma}\,.$$

Нарешті

$$|\vec{\gamma}\,'|^3 = |\gamma\,'|_g^3 = \left((g\circ\gamma)(\gamma\,',\gamma\,')\right)^{3/2} = \left(\sqrt{g_{ik}(u^1(t),u^2(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}}\right)^3,$$

що і завершує виведення формул.

■

Ремарка 2.11.1 *Вираз для геодезичної кривини можна переписати у більш зручному для обчислень вигляді. Для цього, похідні позначимо крапкою над параметром. Тоді*

$$k_g(t) = \frac{\sqrt{\det g}}{|\gamma\,'|_g^3}\left(\dot{u}^1\ddot{u}^2 - \ddot{u}^1\dot{u}^2 + \left(\dot{u}^1\Gamma_{ik}^2 - \dot{u}^2\Gamma_{ik}^1\right)\dot{u}^i\dot{u}^k\right). \tag{2.64}$$

У деяких випадках обчислення геодезичної кривини кривої можна спростити за допомогою наступного твердження.

Твердження 2.11.2 *Якщо дві поверхні локально-ізометричні, то геодезичні кривини відповідних кривих рівні.*

Доведення. За означенням геодезична кривина не залежить від параметризації. Параметризуємо дві ізометричні поверхні F_1 та F_2 однією і тією ж областю параметрів. Тоді внутрішні рівняння відповідних кривих за ізометрією співпадуть. Також співпадуть перші фундаментальні форми та символи Крістофеля обох поверхонь. Отже співпадуть і геодезичні кривини відповідних кривих.

■

Твердження 2.11.3 *Натурально параметризована C^2-регулярна крива $\vec{\gamma} = \vec{r}\circ\gamma$ на поверхні $\vec{r} : \mathcal{D}^2(u^1,u^2) \to F \subset E^2$ є геодезичною тоді і тільки тоді, коли функції функції внутрішньої параметризації $(u^1(s),u^2(s))$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ik}^1\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^k}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ik}^2\dfrac{du^i}{ds}\dfrac{du^k}{ds} = 0. \end{cases}, \tag{2.65}$$

де $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ik}^m(u^1(s),u^2(s))$ є обмеженнями символів Кристофеля на криву.

Доведення. За означенням, лінія на поверхні є геодезичною, якщо прекція вектора її кривини на дотичну площину є нульовою. Тобто коли для натурально параметризованої кривої $\vec{\gamma}\,''\|\vec{n}_\gamma$. За формулою (2.63) для натурального параметру маємо

$$\vec{\gamma}\,'' = \left(\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\partial_m\vec{r} + b_{ik}\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds}\vec{n}_\gamma.$$

Отже, натурально параметризована лінія є геодезичною тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m\frac{du^i}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0.$$

■

Наслідок 2.11.1 *Через дану точку в даному напрямку проходить єдина геодезична.*

Справді, фіксація точки і напрямку в цій точці означає задачу Коші для системи (2.65).

Ремарка 2.11.2 *Якщо параметризація кривої не натуральна, то система рівнянь для геодезичних ліній відносно довільного регулярного параметру t має вигляд*

$$\frac{d^2u^m}{dt^2} + \Gamma^m_{ik}\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt} = \frac{du^m}{dt}\frac{s''_t}{s'_t} \quad (m = 1, 2),$$

де s'_t означає похідну від функції залежності натурального параметру $s = s(t)$. Доведіть.

Ремарка 2.11.3 *Рівняння геодезичної можна записати у вигляді одного рівняння, що не залежить від натуральності параметризації кривої, використовуючи формулу (2.64), а саме,*

$$\dot u^1\ddot u^2 - \ddot u^1\dot u^2 + \left(\dot u^1\Gamma^2_{ik} - \dot u^2\Gamma^1_{ik}\right)\dot u^i\dot u^k = 0.$$

Вправа 2.11.1 *Якщо поверхні F_1 та F_2 дотикаються уздовж кривої γ, тоді геодезична кривина кривої не залежить від того, яку з двох поверхонь використовувати для її обчислення. Покажіть, що геодезична кривина кола зовнішнього радіусу r на сфері радіусу R дорівнює $\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{Rr}$ "накривши" сферу уздовж кола дотичним конусом.*

Приклад 2.11.1 *Нехай $\gamma = \{x(t), y(t)\}$ крива на напівплощині $y > 0$ з першою фундаментальною формою*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Тоді її геодезична кривина дорівнює

$$k_g = yk_0 + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

де k_0 – кривина цієї кривої на евклідовій напівплощині. Зокрема, для явно заданої кривої $y = y(x)$

$$k_g = yk_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Символи Крістофеля даної метрики мають вигляд

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = -\tfrac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{22} = 0,$$
$$\Gamma^2_{11} = \tfrac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = -\tfrac{1}{y}.$$

Крім того,

$$\sqrt{\det g} = \frac{1}{y^2}, \quad |\gamma\,'|^2_g = \frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}.$$

Тому формула геодезичної кривини набуде вигляду

$$k_g = \frac{y}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}\Big[x'y''-x''y'+(x')^2\Big(\frac{x'}{y}\Big)+2x'y'\Big(\frac{y'}{y}\Big)+(y')^2\Big(-\frac{x'}{y}\Big)\Big] =$$
$$\frac{y}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}\Big[x'y''-x''y'+\frac{x'}{y}\Big((x')^2+(y')^2\Big)\Big] = yk_0+\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}$$

Вправа 2.11.2 *Покажіть, що геодезична кривина евклідового кола радіусу r з центром в точці (a,b) на площині Лобачевського з першою фундаментальною формою*

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2+dy^2)}{y^2}$$

стала і дорівнює $k_g = b/(Rr)$. Зокрема, евклідові кола з центрами на вісі Ox є геодезичними площинами Лобачевського в моделі Пуанкаре. Покажіть, що прямі, перпендикулярні вісі Ox, так само є геодезичними в цій моделі, а прямі, перпендикулярні вісі Oy мають сталу геодезичну кривину $k_g = 1/R$.

Вправа 2.11.3 *Покажіть, що на поверхні з першою фундментальною формою*

$$ds^2 = e^{2A(x,y)}(dx^2+dy^2)$$

геодезична кривина кривої $\{x = x(t), \quad y = y(t)\}$ виражається формулою

$$k_g = e^{-A}k_0 - g(grad\ A, \nu_g)$$

де k_0 кривина цієї кривої на Евклідовій площині, ν_g – одиничний додатно орієнтований вектор нормалі кривої, $grad\ A = \{g^{1j}\partial_j A, g^{2j}\partial_j A\}$ – вектор градієнту функції $A(x,y)$.

Вправа 2.11.4 *Перша фундаментальна форма сфери радіусу R в конформних координатах (при стереографічній проекції на екваторіальну площину) має вигляд*

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2).$$

Обчисліть геодезичну кривину прообразів прямих ліній і кіл евклідової площини на сфері.

Вправа 2.11.5 *Покажіть, що кола на сфері становлять єдине сімейство кривих сталої геодезичної кривини.*

2.11.2 Напівгеодезичні системи координат.

Означення 2.11.1 *Система координат на поверхні називається напівгеодезичною, якщо одне сімейство координатних ліній складається з геодезичних ліній, а друге — з їх ортогональних траєкторій.*

Напівгеодезична декартова система координат.

Твердження 2.11.4 *Нехай $\vec{r}\,:\,\mathcal{D}^2(u^1,u^2)\to F\subset E^3$ регулярна праметризована поверхня і $\vec{L}=\vec{r}\circ\mathcal{L}(v)$ – гладка натурально параметризована крива на поверхні. Тоді в околі кривої $\mathcal{L}$ існує така напівгеодезична система координат, відносно якої перша фундаментальна форма отримає вигляд*

$$ds^2=du^2+f^2(u,v)dv^2\ . \tag{2.66}$$

При цьому

- *внутрішнє рівняння кривої $\mathcal{L}(v)$ має вигляд $u=0, v=s$;*
- $f(0,v)\equiv 1$;
- *якщо $\mathcal{L}(v)$ – геодезична лінія, то $f_u(0,v)\equiv 0$.*

Доведення. Нехай $\vec{L}(\sigma)=\vec{r}\circ\mathcal{L}(\sigma)$ – натурально параметризована гладка крива, $\sigma\in(0,l)$. Нехай $\vec{a}(\sigma)=a^i(\sigma)\partial_i\vec{r}$ – гладке поле нормалей уздовж $\vec{L}$. Розглянемо сімейство геодезичних $\vec{r}\circ\gamma_{\,\sigma}(s)$, що виходять з точок кривої $\vec{L}$ в напрямку векторів поля $\vec{a}(\sigma)$. Нехай

$$\begin{cases} u^1=u^1(s,\sigma)\\ u^2=u^2(s,\sigma)\end{cases}$$

параметризація $\gamma_{\,\sigma}(s)$. Запишемо умову того, що крива сімейства $\gamma_\sigma(s)$ є натурально параметризованою геодезичною:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0\quad(i=1,2). \tag{2.67}$$

Зафіксуємо відповідні початкові умови

$$u^i(0,\sigma)=\mathcal{L}^i(\sigma),\quad \frac{du^i}{ds}(0,\sigma)=a^i(\sigma)\quad(i=1,2).$$

Тим самим, ми отримали задачу Коші з початковими даними, гладко залежними від параметра. Розв'язки цієї системи $u^i=u^i(s,\sigma)$ гладко залежні від s і σ.

Розглянемо цей розв'язок як відображення $(s,\sigma)\to(u^1,u^2)$. Якщо це відображення локальний дифеоморфізм, тоді поверхня може бути параметризована параметрами (s,σ). Розглянемо відповідну матрицю Якобі в точках кривої $\mathcal{L}$

$$J=\left(\begin{array}{cc}\dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{du^1}{d\sigma}\\ \dfrac{du^2}{ds} & \dfrac{du^2}{d\sigma}\end{array}\right)_{(0,\sigma)}=\left(\begin{array}{cc}a^1(\sigma) & (\mathcal{L}^1)'\\ a^2(\sigma) & (\mathcal{L}^2)'\end{array}\right).$$

Оскільки $\vec{a}(\sigma)$ – поле нормалей для кривої $\vec{L}$, то стовбчики матриці не можуть бути пропорційними і, таким чином, $\det J(0,\sigma)\neq 0$. Значить існує інтервал $(0,s_0)$ такий, що $\det J\neq 0$ в прямокутнику $(0,s_0)\times(0,l)$. Отже, отримане відображення є локальним дифеоморфізмом.

Параметризуємо поверхню параметрами $(s,\sigma) \equiv (u,v)$. Нехай перша фундаментальна форма поверхні відносно цих параметрів має вигляд

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}dv^2.$$

Розглянемо криву $u = s, v = \sigma_0$. Тоді $ds^2 = g_{11}(u,\sigma_0)ds^2$. Отже $g_{11}(u,\sigma_0) = 1$ для будь-якого значення параметра σ_0. Значить $g_{11}(u,v) \equiv 1$.

За побудовою, криві задані рівнянням

$$\begin{cases} u = s; \\ v = \sigma_0. \end{cases}$$

є геодезичними. Оскільки $\frac{d^2u}{ds^2} = 0$ і $\frac{d^2v}{ds^2} = 0$, тоді з загального рівняння геодезичних знайдемо, що $\Gamma^m_{11} \equiv 0$, а значить

$$\Gamma_{11,m} = g_{mk}\Gamma^k_{11} \equiv 0.$$

Отже, враховуючи, що $g_{11} \equiv 1$, отримуємо $\frac{\partial g_{12}}{\partial u} \equiv 0$, тобто g_{12} не залежить від s. Але Оскільки в точках кривої $\mathcal{L}$, тобто при $s = 0$, $g_{12}(0,\sigma) = 0$, тоді $g_{12} \equiv 0$. Отже, $ds^2 = du^2 + g_{22}(u,v)dv^2$. Покладемо $f(u,v) = \sqrt{g_{22}}$. Тоді

$$ds^2 = du^2 + f^2(u,v)dv^2.$$

Крива $\mathcal{L}$ в побудованій системі координат задається рівнянням

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = \sigma. \end{cases}$$

Згадуючи, що σ — натуральний параметр, тобто $ds = d\sigma = dv$, з (2.66), знаходимо $ds^2 = f^2(0,v)ds^2$, а значить $f(0,v) \equiv 1$.

Якщо $\mathcal{L}(\sigma)$ – геодезична, то вона задовольняє рівнянню (2.67), а отже $\Gamma^m_{22}(0,v) \equiv 0$ і $\Gamma_{22,m}(0,v) \equiv 0$. Тоді $\frac{\partial g_{22}}{\partial u}(0,v) \equiv 0$, що еквівалентно тотожності $\frac{\partial f}{\partial u}(0,v) \equiv 0$.

■

Лемма Гаусса. Напівгеодезична полярна система координат.

Основою для визначення напівгеодезичної полярної системи координат служить так звана Лемма Гаусса. *Колом Гаусса* з центром в точці $q \in F^2$ радіусу r називається геометричне місце точок, що віддалені на відстань за натурально параметризованними геодезичними, що походять із точки q.

Лема 2.11.1 *Кола Гаусса ортогональні радіальним геодезичним.*

Доведення. Позначимо натуральний параметр на геодезичній через s. Зафіксуємо точку q на поверхні та розглянемо сімейство геодезичних $\vec{\gamma}_t(s)$, що виходять з точки q під кутом t відносно деякого фіксованого променя $t = 0$ в дотичній площині. Тоді колу Гаусса $(r = r_0, t)$ буде відповідати коло в дотичній площині T_qF^2 того ж радіусу. Таким чином, сімейство радіальних променів і їх ортогональних траєкторій (кіл) на дотичній площині T_qF^2 відображається на сімейство радіальних геодезичних і кіл Гауса. Це відображення називається *експоненціальним* та позначається

$\exp_q : T_qF^2 \to U_q \subset F^2$. Його диференціал $(\exp_q)_*$ є тотожним в точці q. Для доведення, зауважимо, що диференціал відображення переводить дотичний вектор до кривої в області визначення в дотичний вектор до образу кривої у відповідних за відображенням точках. У застосуванні до експоненціального відображення, розглянемо пряму $\lambda a \in T_qF^2$ та її образ $\exp_q(\lambda a) = \gamma_q(\lambda|a|)$, де $\gamma_q(\lambda|a|)$ – точка на натурально параметризованій геодезичній, що виходить із точки q в напрямку вектора $\vec{a}$, при значенні параметра $s = \lambda|\vec{a}|$. Тоді з одного боку при $\lambda = 0$ ми маємо $(\exp_q(\lambda\vec{a}))_* = (\exp_q)_*\vec{a}$. А з іншого боку, $\frac{d}{d\lambda}\Big(\gamma_q(\lambda|\vec{a}|)\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\gamma_q(s)\Big)\Big|_{s=0}|a| = \gamma'_q{}_s(0)|\vec{a}| = \vec{a}$. Отже, експоненціальне відображення є локальним дифеоморфізмом.

Нехай V – вектор довжиною r в T_qF^2 і нехай $\gamma : [0,1] \to F^2$ – геодезична з початковими даними $\gamma(0) = 0, \gamma'(0) = V$. Позначимо $p = \gamma(1)$. Тоді $p \in S^1(q,r)$ – кола Гауса радіусу r. Нехай W дотичний вектор до геодезичного кола $S^1(q,r)$ в точці p. Тоді $W = (\exp_q \circ \sigma)'(0)$, де $\sigma : (\varepsilon, \varepsilon) \to T_qF^2$ параметризація кола в дотичній площині така, що $\sigma(0) = V$ и $|\sigma(t)| = r$ для всіх $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Визначимо на поверхні нову локальну параметризацію $\alpha : [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to F^2$ формулою $\alpha(s,t) = \exp_q(s\sigma(t))$ для всіх $s \in [0,1]$ і $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тоді $\alpha(s,0) = \gamma(s)$, де $\gamma(s)$ – геодезична, що з'єднує q і p. При цьому для кожного $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ крива $s \to \alpha(s,t)$ є геодезичною, що з'єднує q і $\exp_q\big(\sigma(t)\big)$ у якій вектор швидкості при $s = 0$ дорівнює $\sigma(t)$. Це означає, що

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$$

і

$$\Big\langle \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial s} \Big\rangle_g = \big\langle\, \sigma(t), \sigma(t) \,\big\rangle_g = r^2$$

для всіх $s \in [0,1]$ и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Якщо $\vec{r} = \vec{r}(s,t)$ – відповідна "зовнішня" параметризація, то з розкладання Гаусса випливає, що

$$\partial_{st}\vec{r} = \overrightarrow{\frac{D}{\partial s}\frac{d\alpha}{dt}} + b(\alpha'_t, \alpha'_s)\vec{n}$$

і

$$\partial_{ts}\vec{r} = \overrightarrow{\frac{D}{\partial t}\frac{d\alpha}{ds}} + b(\alpha'_s, \alpha'_t)\vec{n},$$

а значить має місце рівність

$$\frac{D}{\partial s}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{D}{\partial t}\frac{d\alpha}{ds}.$$

Як наслідок, маємо

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big\rangle = \Big\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big\rangle}_{=1} = 0.$$

Отже, $\Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big\rangle$ не залежить від s. Тепер зауважимо, що $\alpha(0,t) = q$ не залежить від t, тобто $\frac{\partial \alpha}{\partial t}\Big|_{s=0} = 0$. Отже, $\Big\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big\rangle = 0$ для всіх s і t. Зокрема, вважаючи $s = 1, t = 0$ ми отримаємо, що $W \perp \gamma'(1)$, що й потрібно було довести.

■

Розглянемо поверхню і точку q на поверхні. З точки q в кожному дотичному напрямку випустимо геодезичну, параметризрванну натурально (для кожного напрямку вона єдина). За Леммою Гаусса 2.11.1, сімейство еквідістант точки q збігається з сімейством ортогональних траєкторій побудованого сімейства. Таким чином, сімейство геодезичних променів і його ортогональних траєкторій утворює на поверхні напівгеодезичну систему координат. Таку напівгеодезичну систему координат називають *полярною системою координат* з полюсом у точці q.

Зафіксуємо в дотичній площині деякий промінь, званий нульовим. Позначимо через φ кут, утворений довільним променем з нульовим. Позначимо через r натуральний параметр на геодезичних променях. Тоді відносно такої координатної системи

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi)d\varphi^2.$$

Координатна лінія $r = r_0 = const$ ортогональна геодезичним променям, які виходять з точки P і є колом Гаусса, що називають *геодезичною колом.*

Ця координатна система є образом полярної системи координат дотичної площини в точці q при експоненційному відображенні. На відміну від полярної системи координат на площині, яка визначена для всіх $r > 0$, напівгеодезична полярна система координат має обмеження за значеннями r, Оскільки може статися, що геодезичні, що виходять з цієї точки в різних напрямках можуть перетинатися, що порушує ін'єкційність експоненціального відображення. Як приклад достатньо розглянути сферу. Точна верхня межа $\sup\{r \mid \exp_q \text{ є дифеоморфізмом}\}$ називається радіусом ін'єкційності поверхні/многовиду в точці q і позначається inj(q). Радіусом ін'єкційності поверхні/многовиду називається величина $\inf\limits_q(\mathrm{inj(q)})$ і є глобальною характеристикою поверхні/многовиду. Наприклад, для евклідової площини E^2 і площини Лобачевського L^2 радіус ін'єкційності дорівнює ∞, а для сфери $S^2(R)$ він дорівнює πR.

2.11.3 Поверхні сталої кривини

Використовуємо напівгеодезичну декартову систему координат для доведення наступного твердження

Твердження 2.11.5 *Нехай $F \subset E^3$ – поверхня сталої Гауссовиї кривини K. Тоді F локально-ізометрична:*

- *площині з першою фундаментальною формою*

  $$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

  якщо $K = 0$;

- *сфері радіусу $R = 1/\sqrt{K}$ з з першою фундаментальною формою*

  $$ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u)dv^2,$$

  якщо $K > 0$;

- *гіперболічній площині "радіусу"* $R = 1/\sqrt{-K}$ *з з першою фундаментальною формою*
$$ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2(\sqrt{-K}u)dv^2,$$
якщо $K < 0$*;*

Доведення. Візьмемо на поверхні довільну геодезичну $\mathcal{L}$ і побудуємо на ній (як на базі) декартову напівгеодезичну систему координат. В цьому випадку перша фундаментальна форма поверхні набуває вигляду

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2$$

і функція f має властивості

$$\begin{cases} f(0, v) \equiv 1; \\ \dfrac{\partial f}{\partial u}(0, v) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.68}$$

Відносно обраної параметризації, $K = -\dfrac{f_{uu}}{f}$. Оскільки $K = const$, то відносно функції f маємо наступне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$f_{uu} + Kf = 0 \tag{2.69}$$

Якщо $K = 0$, то (2.69) перепишеться у вигляді:

$$f_{uu}(u, v) = 0.$$

Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$f = A(v)\, u + B(v).$$

А оскільки функція f має властивості (2.68), то скориставшись першою умовою маємо $B(v) = 1$, а скориставшись другою умовою маємо $A(v) \equiv 0$. Тоді $f(u, v) = 1$. Таким чином, перша фундаментальна форма поверхні набуває вигляду:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

що відповідає першій фундаментальній формі площини в декартових прямокутних координатах.

Якщо $K > 0$, то розв'язком диференціального рівняння (2.69) є тригонометрична функція виду
$$f(u, v) = A(v) \sin(\sqrt{K}u) + B(v) \cos(\sqrt{K}u).$$

Тоді, як і в попередньому випадку, скориставшись умовою (2.68) отримаємо, що $B(v) = 1$, $A(v) = 0$. І розв'язок приймає вигляд

$$f(u, v) = \cos(\sqrt{K}u).$$

Значить, перша фундаментальна форма приводиться до вигляду

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}\, u)dv^2.$$

В разі $K < 0$, відповідне розв'язок виписується через гіперболічні функції, а саме

$$f(u,v) = A(v)\,\mathrm{sh}(\sqrt{-K}u) + B(v)\,\mathrm{ch}(\sqrt{-K}u).$$

А з умови (2.68) $B(v) = 1$, $A(v) = 0$. Отже,

$$f(u,v) = ch(\sqrt{-K}\,u.)$$

І перша фундаментальна форма набуває вигляду

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2(\sqrt{-K}u)dv^2.$$

■

2.11.4 Поверхні обертання сталої Гауссової кривини (Теореа Міндінга).

У цьому параграфі ми покажемо, що всі метрики сталої гауссової кривини локально реалізуються у вигляді поверхні в E^3. Поверхні нульовою кривини – це поверхні, що розгортаються. Вони описані в розділі 2.9. Тут ми дамо опис поверхонь сталої гауссової кривини $K \neq 0$ в класі поверхонь обертання [14].

Будемо шукати в площині xOz криві γ, обертанням яких навколо вісі Oz утворюється поверхня даної сталої кривини K. Задамо рівняння кривої γ у вигляді

$$x = x(u) > 0, \quad z = z(u),$$

де u – натуральний параметр на γ. Зауважимо, що в цьому випадку

$$(x')^2 + (z')^2 = 1 \tag{2.70}$$

Тоді, для метрики поверхні обертання маємо

$$ds^2 = du^2 + x^2(u)\,dv^2,$$

де v– кут повороту кривої γ навколо вісі Oz. Гауссова кривина в такому випадку дорівнює

$$K = -\frac{x''(u)}{x(u)}.$$

Тоді для $x(u)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$x'' + Kx = 0.$$

Загальне розв'язок цього рівняння залежить від знаку K, а саме,

$$\left[\begin{array}{ll} x(u) = a\cos(\sqrt{K}u) + b\sin(\sqrt{K}u), & \text{якщо} \quad K > 0, \\ x(u) = a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-K}u) + b\,\mathrm{sh}(\sqrt{-K}u), & \text{якщо} \quad K < 0, \end{array}\right. \tag{2.71}$$

де a і b – константи інтегрування. Знаючи функцію $x(u)$, з (2.70) формально можемо знайти і функцію $z(u)$:

$$z = \int\limits_0^u \sqrt{1 - [x'(u)]^2}du. \tag{2.72}$$

Для визначеності ми взяли радикал зі знаком $+$. Геометрично, це означає, що дуга u відраховується в бік зростання z. Вибір нижньої межі інтегрування $u = 0$ забезпечує початкове розташування точки на нашій кривій на вісі Ox.

Випадок $K > 0$. Для зручності викладок, покладемо $K = k^2, k > 0$. Перетворимо розв'язок до вигляду

$$x(u) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\cos(ku) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\sin(ku)\right)$$

і введемо додатковий аргумент u_0 з умов

$$\cos u_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin u_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Тоді розв'язок можна записати у вигляді

$$x(u) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(ku - u_0) = c\cos\Big(k(u - u_1)\Big),$$

де ми поклали $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $u_1 = \frac{u_0}{k}$.

Виконуючи заміну параметра $u = u_1 + \tilde{u}$, що не замінює вигляд метрики, зводимо розв'язок до вигляду

$$x = c\,\cos(k\tilde{u}),$$

Опускаючи тільду в позначенні змінної, отримуємо параметричні рівняння нашої кривої у вигляді

$$x = c\,\cos(ku), \tag{2.73}$$

$$z = \int\limits_0^u \sqrt{1 - c^2k^2\sin^2(ku)}\,du. \tag{2.74}$$

Проаналізуємо розв'язок. З умови $x(u) > 0$ випливає

$$-\frac{\pi}{2k} < u < +\frac{\pi}{2k}.$$

Якщо $c \le \frac{1}{k}$, то для всіх значень u в цих межах, причому підкореневий вираз в (2.74) залишається додатним, що забезпечує існування кривої при всіх значеннях параметру в зазначеному інтервалі. Зокрема, при $c = \frac{1}{k}$ ми отримуємо

$$z = \frac{1}{k}\sin ku, \quad x = \frac{1}{k}\cos ku,$$

тобто γ стає напівколом радіусу $\frac{1}{k}$, що спирається кінцями на вісь обертання. Відповідна поверхня є *сферою* (Мал. 2.9)

Для менших значень c, функція $x(u)$ буде менше, ніж для кола, а функція $z(u)$ навпаки, буде більше на тому ж інтервалі зміни u. Геометрично це означає, що дуга γ, упираючись кінцями в вісь обертання, все більше наближається до неї, витягаючись в той же час вздовж неї (і зберігаючи незмінну довжину $\frac{\pi}{k}$, що дорівнює інтервалу зміни дуги u). У крайніх точках, де $u = \pm\frac{\pi}{2k}$,

$$dx = \pm ck\,du, \quad dz = \sqrt{1 - c^2k^2}\,du, \quad \frac{dz}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-c^2k^2}}{ck}.$$

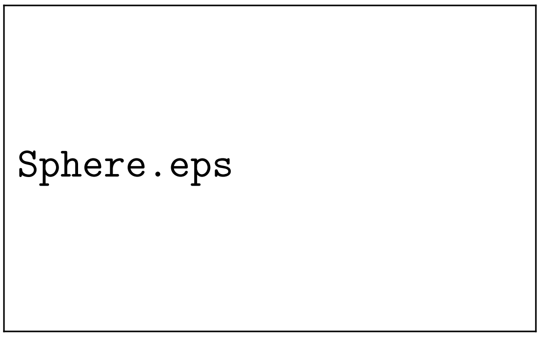


Рис. 2.9: Сфера

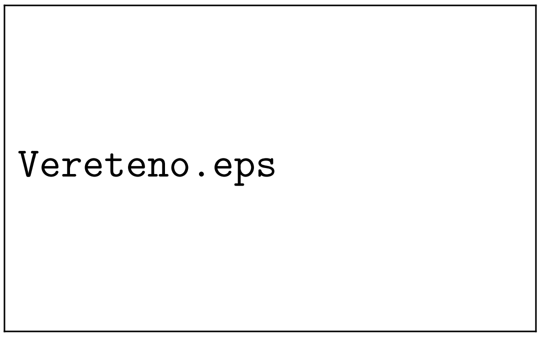


Рис. 2.10: Шпиндельподібна поверхня

Рис. 2.11: Діжка Міндінга

Таким чином, віпадок $c < \frac{1}{k}$ дає *шпиндельподібну* фігуру, більш витягнуту уздовж вісі Oz и вужчу, ніж сфера, з конічними особливими точками на вісі обертання (Мал. 2.10) .

Тепер розглянемо випадок $c > \frac{1}{k}$. В цьому випадку, для існування кривої, потрібно накласти умову

$$c^2 K \sin^2(ku) \leq 1, \quad \text{або} \quad -\frac{1}{ck} \leq \sin(ku) \leq +\frac{1}{ck}.$$

При крайніх значеннях u, коли $\sin(ku)$ максимальний за модулем і дорівнює $\pm\frac{1}{ck}$, ми отримуємо з (2.73) два однакових найменших значення для $x(u)$:

$$x_{min} = c\sqrt{1 - \sin^2(ku)} = \frac{\sqrt{c^2k^2 - 1}}{k}.$$

Це значення додатне, тобто тепер дуга γ кінчається, не доходячи до вісі обертання на цю відстань. Найбільше значення $x(u)$ досягається при $u = 0$:

$$x_{max} = c\,.$$

В кінцевих точках $\frac{dz}{du} = 0$. Отже, дотичні до дуги γ перпендикулярні до вісі Oz. Обертанням дуги γ виходить деякий "пояс", що оточує вісь Oz (Мал. 2.11).

HypBend.eps

Рис. 2.12: Котушка Міндінга

HypCone.eps

Рис. 2.13: Гіперболічний конус (Дзига Міндінга)

Тепер розглянемо випадок $K < 0$. Знову для зручності викладок покладемо $K = -k^2, k > 0$. Тут в другій формулі (2.71) є три варіанти.

Якщо $|a| > |b|$, то застосовуючи перетворення аналогічно попередньому пункту (але тільки для гіперболічних функцій), зведемо розв'язок до вигляду

$$x(u) = c\ \mathrm{ch}(ku), \tag{2.75}$$

де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тоді, згідно (2.72),

$$z = \int\limits_0^u \sqrt{1 - c^2k^2\,\mathrm{sh}^2(ku)}\,du. \tag{2.76}$$

Для існування профільної кривої необхідно накласти умову

$$-\frac{1}{ck} \le \mathrm{sh}\,(ku) \le +\frac{1}{ck}.$$

Очевидно, що при крайніх значеннях $\mathrm{sh}(ku) = \pm\frac{1}{ck}$ будуть досягатися, згідно (2.75), найбільші значення x, найменше ж дорівнюватиме c і досягається при $u = 0$. Дуга γ звернена опуклістю до осі обертання; в кінцевих точках, як легко перевірити, $\frac{dz}{du} = 0$ і, отже, дотичні перпендикулярні до вісі обертання. При збільшенні c дуга γ віддаляється від вісі Oz, а інтервал зміни u, тобто довжина дуги γ , зменшується.

Навпаки, при зменшенні c довжина дуги γ необмежено збільшується, причому γ асимптотично наближається до вісі Oz. Отриману поверхню називають *котушкою Міндінга* (Мал. 2.12).

Якщо $|a| < |b|$, то аналогічним способом отримаємо

$$x(u) = c\,\mathrm{sh}(ku) \qquad (c = \sqrt{b^2 - a^2}), \tag{2.77}$$

а значить $u \geq 0$. З (2.72) знаходимо

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - c^2k^2 \operatorname{ch}^2(ku)}\, du. \tag{2.78}$$

Для існування профільної кривої необхідно виконання нерівності

$$\operatorname{ch}(ku) \leq \frac{1}{ck},$$

причому $u \geq 0$. Оскільки $\operatorname{ch}(ku) \geq 1$, то на величину c виникає обмеження $ck < 1$.

Коли u змінюється від 0 до свого максимального значення, тобто при якому

$$\operatorname{ch}(ku) = \frac{1}{ck},$$

то x росте від 0 до $c\sqrt{\frac{1}{k^2c^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-c^2k^2}}{k}$, причому дуга γ нахилена до вісі Ox в точці O під кутом

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-c^2k^2}}{ck}.$$

Кут нахилу кривої до вісі Ox зменшується в міру наближення параметра u до свого максимального значення, при якому $\operatorname{ch}(ku) = \frac{1}{ck}$, а значить в крайній точці $\operatorname{tg}\varphi = 0$.

Отриману поверхню обертання природно називати *гіперболічним конусом* (Мал. 2.13). Виконавши симетрію відносно горизонтальної дотичної в кінцевій точці отримаємо астроїдо-подібну криву. Відповідна поверхня обертання зветься *дзигою Міндінга.*

Нехай $|a| = |b|$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $a > 0$ і $b = -a$. Тоді $x = ae^{-ku}$. Виконавши заміну параметра $u \to u + u_0$, константу інтегрування можна привести до вигляду $a = \frac{1}{k}$ (досить знайти u_0 так, що $ae^{-ku_0} = \frac{1}{k}$). В такому разі профільна крива набуде вигляду

$$x(u) = \frac{1}{k}e^{-ku}, \quad z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2ku}}\, du.$$

Підкореневий вираз додатний за будь-яких $u \geq 0$, так що $u \in [0, \infty]$. Похідна

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{1 - e^{-2ku}}}{e^{-ku}}.$$

У початковій точці $u = 0$ маємо $\frac{dz}{dx} = 0$, а значить наша крива дотична до вісі Ox. При $u \to \infty$, крива асимптотично наближається до вісі Oz, оскільки при цьому $x \to 0$, $z \to +\infty$, $\frac{dz}{dx} \to -\infty$.

Інтеграл, через який виражається $z(u)$ береться в елементарних функціях. А саме,

$$z(u) = \frac{1}{k}\left\{\ln\left(e^{ku} + \sqrt{e^{2ku} - 1}\right) - \sqrt{1 - e^{-2ku}}\right\},$$

Отримана крива називається *трактрисою.* Вона є евольвентою ланцюгової лінії $x = \frac{1}{k}\operatorname{ch}(zk)$. Назва трактриса (лінія потягу) походить від латинського trahere – *тягти.* Це крива, для якої довжина відрізка дотичної від точки дотику до точки перетину

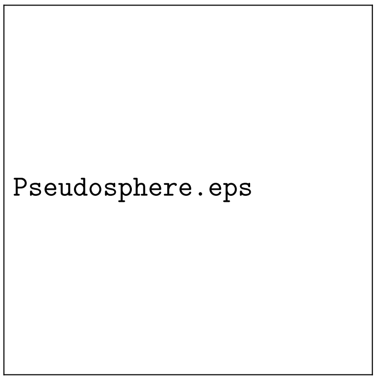


Рис. 2.14: Псевдосфера.

з фіксованою прямою є постійною величиною. Таку лінію описує предмет, що волочиться на мотузці сталої довжини за точкою, що рухається по цій прямій. Трактриса також є частиною кривої гонитви за рівної швидкості наздоганяючого і втікаючого. Побудована поверхня обертання є половиною так званої *псевдосфери* (Мал. 2.14). Виконавши симетрію відносно осі Ox отримаємо лінію з точкою звороту, обертанням якої навколо осі Oz утворюється поверхня, що і зветься псевдосферою. Італійський математик Бельтрамі саме на цій поверхні вперше реалізував аксіоматику площини Лобачевського. Сам Лобачевський називав свою геометрію "уявною". Після результату Бельтрамі ця "уявна" геометрія перейшла в "реальну" геометрію поверхні з від'ємною кривиною. На честь цього, псевдосферу часто називають *поверхнею Бельтрамі.*

2.11.5 Кола Гаусса. Теорема Бертрана-Пьюізе.

Нагадаємо, що *геодезичним колом* (або гаусовим колом) на поверхні з центром в точці q називається геометричне місце точок, рівновіддалених від точки q уздовж геодезичних променів, що виходять з цієї точки.

Теорема Бертрана-Пьюізе [7] є однією з найпростіших теорем порівняння в геометрії. Ми порівняємо довжину кола радіусу r з довжиною кола того ж радіусу на площині. Гауссова кривина проявляє себе як міра різниці цих величин.

Теорема 2.11.1 *Нехай $F \subset E^3$ поверхня з аналітичною метрикою. Позначимо через L довжину геодезичного кола з центром в точці q радіусу r. Тоді*

$$\lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L}{r^3} = K_q.$$

Доведення. У нашому доведенні ми слідуємо Бляшке [7]. Розглянемо напівгеодезичну полярну систему координат в околі точки q. Тоді

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r,\varphi)\, d\varphi^2.$$

Внутрішнє рівняння кола радіусу r_0 має вигляд $r = r_0, \varphi = t$.

Оскільки за припущенням метрика аналітична, то функція f допускає розкладання в ряд Тейлора в околі точки q. Цій точці відповідає значення параметру $r = 0$, при якому порушується регулярність нашої координатної системи. Тому, для знаходження головної частини розкладання перейдемо до аналогу Декартових координат, т.зв. Римановим нормальним координатам (x, y):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Ці координати не мають особливості в нулі. При цьому

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Звідси

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}, \quad d\varphi = \frac{xdy - ydx}{r^2},$$

а значить

$$ds^2 = \Big(\frac{x^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^4}f^2\Big)dx^2 + \Big(\frac{y^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^4}f^2\Big)dy^2 + 2xy\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4}f^2\Big)dxdy.$$

Для забезпечення аналітичності метрики в початку координат, функція f^2 повинна мати вигляд:

$$f^2(r, \varphi) = r^2 + r^4 Q(x, y),$$

де $Q(x, y)$ деяка аналітична функція від (x, y). За формулою Тейлора

$$Q(x, y) = Q_0 + o(r).$$

Остаточно,

$$f^2(r, \varphi) = r^2 + r^4 Q_0 + o(r^5).$$

Покажемо, що

$$Q_0 = -\frac{K_q}{3}.$$

Дійсно,

$$K_q = -\lim_{r\to 0}\frac{\partial_{rr} f}{f}$$

З іншого боку,

$$f = \sqrt{r^2 + r^4 Q_0 + o(r^5)} = r\sqrt{1 + r^2 Q_0 + o(r^3)} \sim r(1 + \frac{1}{2}r^2 Q_0).$$

Звідси

$$K_q = \lim_{r\to 0} K(r, \varphi) = \lim_{r\to 0}\frac{3rQ_0}{r(1 + \frac{1}{2}r^2 Q_0)} = 3Q_0.$$

Отже,

$$f = r - \frac{K_q}{6}r^3 + o(r^3).$$

Тепер очевидно,

$$L = \int_0^{2\pi}\Big(r - \frac{K_q}{6}r^3 + o(r^3)\Big)d\varphi = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K_q r^3 + o(r^3),$$

а значить

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r - L}{r^3} = K_q,$$

що і було потрібно.

∎

Вправа 2.11.6 *Позначимо через F площу геодезичного кола радіусу r з центром в точці q радіусу r. Покажіть, що*

$$K_q = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - F}{r^4}.$$

2.11.6 Кола Дарбу

Колом в розумінні Дарбу на поверхні називається крива сталої геодезичної кривини. Очевидно, що на площині кола Гауса і Дарбу не розрізняються. Однак на поверхні з кривиною кола Дарбу можуть бути навіть не замкнені (наприклад, на площині Лобачевського), на відміну від кіл Гауса.

Твердження 2.11.6 *Геодезича кривина координатного кола радіусу r відносно напівгеодезичної полярної параметризації $ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2$ з полюсом в центрі цього кола дорівнює $k_g = \frac{\partial_r f}{f}$.*

Доведення. Символи Кристофеля в такій системі координат дорівнюють:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \qquad \Gamma_{22}^1 = -f \partial_r f,$$
$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_r f}{f}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial_\varphi f}{f}.$$

Геодезичне коло радіусу r_0 з центром в полюсі задається рівнянням $\gamma = \{r_0, t\}$. Відповідно,

$$\gamma'_t = \{0, 1\}, \quad \gamma''_t = \{0, 0\}, \quad |\gamma'_t|_g = f(r_0, \varphi), \quad \sqrt{\det g} = f(r_0, \varphi).$$

Звідси, застосовуючи формулу (2.64), знаходимо $k_g = \frac{1}{f^2}\Big(- \Gamma_{22}^1\Big) = \frac{\partial_r f}{f}$.
■

Ремарка 2.11.4

Теорема 2.11.2 *Якщо на поверхні кожне коло Гауса є колом Дарбу, то Гауссова кривина поверхні стала.[7]*

Доведення. Для доведення досить показати, що, за умов теореми, в кожній точці поверхні похідні від Гауссової кривини дорівнюють 0.

Нехай q – довільна точка на поверхні. Розглянемо в околі цієї точки напівгеодезичну полярну систему координат. Тоді

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi)\, d\varphi^2$$

і рівняння довільної кола з центром в цій точці буде мати вигляд

$$r = r_0 \ (= const)$$
$$\varphi = t.$$

Геодезична кривина цього кола дорівнює $k_g = \frac{\partial_r f}{f}$. В силу сталості цієї величини для будь-якого фіксованого значення $r = r_0$, маємо

$$\partial_\varphi k_g(r_0, \varphi) = \frac{f \partial_{r\varphi} f - \partial_r f \partial_\varphi f}{f^2} = 0.$$

Тобто, тотожно за r і φ

$$f \partial_{r\varphi} f - \partial_r f \partial_\varphi f = 0.$$

Диференціюючи тепер за r, знаходимо

$$\partial_r f \partial_{r\varphi} f + f \partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} \partial_\varphi f - \partial_r f \partial_{r\varphi} f = f \partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} \partial_\varphi f = 0$$

Для Гауссової кривини K на колы маємо $K(r_0, \varphi) = -\frac{\partial_{rr} f}{f}$. Тому

$$\partial_\varphi K(r_0, \varphi) = -\frac{\partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} f \partial_\varphi f}{f^2} = 0$$

для будь-якого фіксованого значення r_0. Це означає, що похідна від гаусової кривини поверхні у напрямку дотичної до будь-якого Гаусова кола на поверхні дорівнює 0.

Для кожного напрямку X_q на поверхні в точці q, знайдеться коло з центром на колі S_q, що є дотичним до напрямку X_q. Його центр знаходиться на перетині радіусу кола S_q, що ортогональний до напрямку X_q, з колом S_q а радіуч дорівнює радіусу кола S_q. Нехай це буде точка p. Для кола S_p похідна від гаусової кривини в напрямку дотичної до цього кола також дорівнює 0. Значить $\partial_{X_q} K = 0$. Отже, похідна від гаусової кривини в будь-якому напрямку X_q дорівнює 0, а значить Гауссова кривина поверхні не змінюється при зміщенні з точки q у будь-якому напрямку. В силу довільності обраної точки, $K = const$ для всіх точок поверхні.

■

2.11.7 Геодезичні як локально найкоротші

Скористаємося напівгеодезичною полярною системою координат для доведення властивості локальної найкоротшості геодезичних.

Твердження 2.11.7 *Нехай γ – геодезична на поверхні $F \subset E^3$, точки $A, B \in \gamma$. Якщо A і B достатньо близькі, то γ – найкоротша із всіх регулярних кривих, що з'єднують точки A і B.*

Доведення. Нехай γ – геодезична, точки $A, B \in \gamma$. Побудуємо напівгеодезичну систему координат з полюсом в точці A і будемо вважати, що точка B лежить в області визначення цієї системи координат, а сама геодезична γ відповідає нульовому променю обраної системи. Відносно такої системи координат перша фундаментальна форма має вигляд

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2,$$

де r – довжина геодезичного променя. Тоді точка $A = (0, 0), B = (r_0, 0)$. А сама геодезична в цих умовах задається так

$$\gamma : \begin{cases} r = s; \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Нехай $\tilde{\gamma}$ – інша крива, що з'єднує точки A і B. Припустимо, спочатку, що $\tilde{\gamma}$ лежить в колі радіусу r_0 (в якому визначена наша система координат) задана параметрично у вигляді

$$\tilde{\gamma} : \left\{ \begin{array}{l} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\gamma}\,(t_A) = A, \\ \tilde{\gamma}\,(t_B) = B. \end{array} \right.$$

Тоді

$$l(\tilde{\gamma}\,) = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + f^2(r(t), \varphi(t)) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

Очевидно, що якщо $\dfrac{d\varphi}{dt} \neq 0$, то

$$l(\tilde{\gamma}\,) \geqslant \int\limits_{t_A}^{t_B} \frac{dr}{dt} dt = \int\limits_{0}^{r_0} dr = r_0 = l(\gamma_{\,AB}).$$

При цьому рівність досягається, якщо $\varphi \equiv 0$, тобто, коли крива збігається з геодезичною γ.

Припустимо, що крива виходить за межі геодезичного кола радіусу r_0. Тоді нехай B' – точка перетину $\tilde{\gamma}$ з цим колом. Тоді

$$l(\tilde{\gamma}\,) = l(\gamma\,)|_{AB'} + l(\tilde{\gamma}\,)|_{BB'} \geqslant r_0 + l(\tilde{\gamma}\,)|_{BB'} > r_0,$$

що і завершує доказ.

■

2.11.8 Геодезичні як екстремалі функціоналу довжини

Нехай F^2 – поверхня, точки $A, B \in F^2$. Позначимо через Ω_{AB} множину регулярних кривих вигляду

$$\Omega_{AB} = \{\vec{\gamma}\colon [t_A, t_B] \to F^2 \,|\, \vec{\gamma}(t_A) = A, \vec{\gamma}(t_B) = B\}.$$

Тоді

$$l(\vec{\gamma}) = \int\limits_{t_A}^{t_B} |\vec{\gamma}'(t) dt| \in \mathbb{R},$$

Тобто $l\colon \Omega_{AB} \to \mathbb{R}$ можна розглядати як функціонал на множині Ω_{AB}. Критичні точки цього функціоналу називаються *екстрималями функціоналу* довжини.

Постановка варіаційної задачі. Нехай

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} u^1 = u^1(s) \\ u^2 = u^2(s) \end{array} \right.$$

внутрішнє рівняння кривої на поверхні з початком в точці A і кінцем в точці B, тобто $\vec{\gamma}(0) = \vec{r} \circ \gamma(0) = A$, $\vec{\gamma}(0) = \vec{r} \circ \gamma(s_0) = B$.

Означення 2.11.2 *Варіацією кривої $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ з закріпленими кінцями називається крива виду*
$$\vec{\gamma}(s, \varepsilon) = \vec{r} \circ (\gamma\,(s) + \varepsilon\eta(s)),$$
де $\eta(s)$ – гладка варіаційна вектор-функція (в області параметрів), яка задовольняє умові $\eta(0) = \eta(s_0) = 0$ и ε – малий параметр.

Введемо в розгляд функцію параметра ε вигляду $l(\varepsilon) = \int\limits_0^{s_0} |\gamma\,'(s, \varepsilon)|_g ds$, яка називається варіацією функціонала довжини. Будемо говорити, що $\gamma\,(s)$ є *екстрималлю* функціонала довжини, якщо $\dfrac{d}{d\varepsilon} l(\gamma\,(s, \varepsilon))|_{\varepsilon=0} = 0$ для будь-якої варіаційної вектор-варіації

Твердження 2.11.8 *Крива на поверхні є екстрималлю функціоналу довжини для варіації з закріпленими кінцями тоді і тільки тоді, коли крива є геодезичною лінією.*

Доведення. Нехай $\vec{r} : \mathcal{D}^2 \to \mathrm{E}^3$ – параметризація F^2. Розглянемо "зовнішні" параметризації кривих $\gamma\,(s)$ і $\gamma\,(s, \varepsilon)$, а саме
$$\vec{\gamma}(s) = (\vec{r} \circ \gamma\,)(s), \quad \vec{\gamma}(s, \varepsilon) = (\vec{r} \circ \gamma\,)(s, \varepsilon).$$
Виконаємо деякі необхідні обчислення. Але перш введемо в розгляд векторне поле варіації кривої
$$\vec{\eta} = \eta^i(s)\partial_i\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)},$$
тобто, $\vec{\eta}$ є векторне поле уздовж кривої, координатні функції якого є компонентами функції варіації. Тоді
$$\vec{\gamma}'(s, \varepsilon) := \frac{d\vec{\gamma}(s, \varepsilon)}{ds} = \partial\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)}\Big(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon\frac{d\eta}{ds}\Big).$$
Використовуючи розкладання Гаусса і підставляючи в кінцевому підсумку $\varepsilon = 0$, знаходимо
$$\frac{d}{d\varepsilon}(\vec{\gamma}'(s, \varepsilon)) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big[\Big(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon\frac{d\eta}{ds}\Big)^i \partial_i\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)}\Big] =$$
$$\Big(\frac{d\eta}{ds}\Big)^i \partial_i\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)} + \Big(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon\frac{d\eta}{ds}\Big)^i \partial_{ik}\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)}\eta^k =$$
$$\Big(\frac{d\eta}{ds}\Big)^i \partial_i\vec{r}\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)} + \Big(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon\frac{d\eta}{ds}\Big)^i \Big(\Gamma^m_{ik}(s)\partial_m\vec{r} + b_{ik}\vec{n}\Big)\,|_{\gamma\,(s,\varepsilon)}\eta^k =$$
$$(\nabla_{\gamma\,'}\eta)^m\partial_m\vec{r}\,|_{\gamma\,(s)} + B(\gamma\,', \eta)\vec{n}\,|_{\gamma\,(s)} = \overrightarrow{\nabla_{\gamma\,'}\eta}\,|_{\gamma\,(s)} + B(\gamma\,', \eta)\vec{n}\,|_{\gamma\,(s)},$$
де ми ввели позначення $\Gamma^m_{ik}(s) := \Gamma^m_{ik} \circ \gamma$ и
$$\overrightarrow{\nabla_{\gamma\,'}\eta} = \Big(\frac{d\eta^m}{ds} + \Gamma^m_{ik}(s)\eta^k\frac{d\gamma\,^i}{ds}\Big)\partial_m\vec{r} \tag{2.79}$$
Нескладно перевірити, що для будь-яких векторних полів $\vec{X}(s) = \partial\vec{r}\,|_{\gamma\,(s)} \cdot X(s)$ і $\vec{Y}(s) = \partial\vec{r}\,|_{\gamma\,(s)} \cdot Y(s)$, дотичних до поверхні уздовж кривої $\vec{\gamma}$ вірна рівність
$$\frac{d}{ds}\big\langle\, X, Y\,\big\rangle_g = \big\langle\, \nabla_{\gamma\,'}X, Y\,\big\rangle_g + \big\langle\, X, \nabla_{\gamma\,'}Y\,\big\rangle_g. \tag{2.80}$$

Дійсно,

$$\frac{d}{ds}\vec{X}(s) = \frac{d}{ds}\Big(\partial_i \vec{r}\,|_{\gamma(s)} X^i(s)\Big) = \partial_{ik}\vec{r}\,\frac{du^k}{ds}X^i(s) + \partial_i\vec{r}\,|_{\gamma(s)}\frac{dX^i}{ds} =$$
$$\Big(\Gamma^m_{ik}(s)\partial_m\vec{r}\,|_{\gamma(s)} + b_{ik}(s)\vec{n}(s)\Big)\frac{du^k}{ds}X^i(s) + \frac{dX^m}{ds}\partial_m\vec{r}\,|_{\gamma(s)} =$$
$$\Big(\frac{dX^m}{ds} + \Gamma^m_{ik}(s)\frac{du^k}{ds}X^i(s)\Big)\partial_m\vec{r}\,|_{\gamma(s)} + B(\gamma', X)|_{\gamma(s)}\vec{n}(s) = \overrightarrow{\nabla_{\gamma'}X} + B(\gamma', X)|_{\gamma(s)}\vec{n}(s).$$

Враховуючи, що $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ є дотичними векторними полями вздовж нашої кривої, знаходимо

$$\frac{d}{ds}\big\langle X, Y\big\rangle_g = \frac{d}{ds}\big\langle \vec{X}, \vec{Y}\big\rangle = \big\langle \frac{d}{ds}\vec{X}, \vec{Y}\big\rangle + \big\langle \vec{X}, \frac{d}{ds}\vec{Y}\big\rangle =$$
$$\big\langle \overrightarrow{\nabla_{\gamma'}X}, \vec{Y}\big\rangle + \big\langle \vec{X}, \overrightarrow{\nabla_{\gamma'}Y}\big\rangle = \big\langle \nabla_{\gamma'}X, Y\big\rangle_g + \big\langle X, \nabla_{\gamma'}Y\big\rangle_g.$$

Тепер запишемо функціонал довжини на варіації

$$l(\gamma(s,\varepsilon)) = \int\limits_0^{s_0} |\gamma'(s,\varepsilon)|_g ds = \int\limits_0^{s_0} |\vec{\gamma}'(s,\varepsilon)| ds$$

і знайдемо, використовуючи співвідношення (2.80),

$$\frac{dl(\vec{\gamma}(s,\varepsilon))}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int\limits_0^{s_0} \frac{\big\langle \frac{d}{d\varepsilon}\vec{\gamma}'(s,\varepsilon), \vec{\gamma}'(s,\varepsilon)\big\rangle}{|\vec{\gamma}'(s,\varepsilon)|}\bigg|_{\varepsilon=0} ds = \int\limits_0^{s_0} \frac{\big\langle \overrightarrow{\nabla_{\gamma'}\eta}, \vec{\gamma}'\big\rangle}{1} ds =$$
$$\int\limits_0^{s_0} \big\langle \nabla_{\gamma'}\eta, \gamma'\big\rangle_g ds = \big\langle \eta, \gamma'\big\rangle_g\Big|_0^{s_0} - \int\limits_0^{s_0} \big\langle \eta, \nabla_{\gamma'}\gamma'\big\rangle_g ds =$$
$$-\int\limits_0^{s_0} \big\langle \eta, \nabla_{\gamma'}\gamma'\big\rangle_g ds = 0. \quad (2.81)$$

Якщо $\nabla_{\gamma'}\gamma' \neq 0$ на деякому інтервалі (α, β) зміни параметра, то оберемо варіацію так, що η за напрямком співпадає з $\nabla_{\gamma'}\gamma'$ на цьому інтервалі і мала (близька до нуля) поза цього проміжку. Для такої варіації

$$\int\limits_0^{s_0} \big\langle \eta, \nabla_{\gamma'}\gamma'\big\rangle ds > 0.$$

Отже γ – екстрималь тоді і тільки тоді, коли $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Підставляючи в (2.79) замість η^m координати дотичного вектора du^m/ds знаходимо, що γ — геодезична лінія на F^2.

■

Друга варіація функціонала довжини кривої.

Геодезичні, як екстрималі функціоналу довжини, можуть бути як найкоротшими лініями, що з'єднують дві дані точки, так і найдовшими (розгляньте приклад геодезичних на сфері). Достатня умова їх кратчайшесті можна отримати, досліджуючи другу варіацію функціонала довжини, що є аналогом другої похідної функції однієї змінної. Висновок формули другої варіації можна істотно спростити, враховуючи той факт, що варіаційна крива є геодезичної лінією і що суттєвою є тільки нормальна складова векторного поля варіації. Останнє випливає з формули (2.81).

Нехай $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ – досліджувана геодезична, що з'єднує точки A і B на поверхні. І нехай $A = \vec{\gamma}(0)$ і $B = \vec{\gamma}(l)$. Введемо на поверхні напівгеодезичну систему координат з базовою кривою $\vec{\gamma}(v)$. Тоді перша фундаментальна форма поверхні набуде вигляду

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2,$$

а функція $f(u, v)$ буде задовольняти умовам

$$f(0, v) = 1, \quad f_u(0, v) = 0.$$

Відносно такої параметризації рівняння геодезичної $\vec{\gamma}(v)$ має вигляд $(u = 0, v = v)$, *нормальне* векторне поле варіації відповідає варіаційній вектор-функції $\{h(v), v\}$ і варіація геодезичної $\vec{\gamma}(v)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} u = \varepsilon h(v), \quad h(0) = h(l) = 0 \\ v = v. \end{cases}$$

Отже,

$$l(\varepsilon) = \int\limits_0^l \sqrt{\varepsilon^2 (h')^2 + \big(f(\varepsilon h(v), v)\big)^2}dv.$$

Тоді

$$\frac{dl}{d\varepsilon} = \int\limits_0^l \frac{\varepsilon (h'(v))^2 + f(\varepsilon h(v), v) f_u(\varepsilon h(v), v) h(v)}{\sqrt{\varepsilon^2 (h'(v))^2 + \big(f(\varepsilon h(v), v)\big)^2}}.$$

Зауважимо, що властивості системи координат забезпечують рівність $\frac{dl}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} = 0$. З тієї ж причини

$$\frac{d^2 l}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} = \int\limits_0^l \Big((h'(v))^2 + f_{uu}(0, v) h^2(v)\Big)dv = \int\limits_0^l \Big((h'(v))^2 - K(0, v) h^2(v)\Big)dv,$$

де $K(0, v)$ – Гауссова кривина поверхні вздовж геодезичної. Отже, на поверхнях з Гауссовою кривиною $K \leq 0$ будь-яка геодезична є найкоротшою в порівнянні з кривими, що з'єднують точки A і B, які виходять локальними (малими) варіаціями геодезичної. Вимога малої варіації істотно. На поверхні кругового циліндра дві точки на твірній можна з'єднати рахунковим числом різних гвинтових ліній. Кожна з гвинтових ліній є найкоротшою в класі малих варіацій. Очевидно, однак, що відрізок утворює коротше будь-якої з них.

Формулі другої варіації можна надати інший вигляд. Для цього зауважимо, що з урахуванням граничних умов формула частинного інтегрування приводить до рівності

$$\int_0^l (h'(v))^2 dv = -\int_0^l h''(v)h(v)dv,$$

а отже

$$\frac{d^2 l}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} = -\int_0^l h(v)\Big(h''(v) + K(0,v)h(v)\Big)dv.$$

Рівняння

$$h''_s + K\big|_{\gamma(s)} h(s) = 0$$

називається рівняння Якобі для натурально параметризованої геодезичної $\gamma(s)$. Точки A і B на геодезичній називаються сполученими, якщо існує ненульове поле Якобі вздовж цієї геодезичної, що перетворюється на нуль в точках A і B. Сполучені точки на геодезичній можуть з'являтися тільки якщо $K\big|_{\gamma(s)} > 0$. Так, на одиничній сфері з першою квадратичною формою $ds^2 = du^2 + \sin^2(u)dv^2$ рівняння Якобі має очевидне розв'язок $h = C\sin u$, що задовольняє крайовим умовам $h(0) = h(\pi) = 0$. Векторне поле Якобі в цьому випадку має вигляд $\vec{h} = C\sin u\,\partial_v\vec{r}$, тобто має внутрішні координати $\{0, C\sin(u)\}$.

2.12 Перша варіація функціонала площі. Мінімальні поверхні

Нехай F^2 – поверхня, що параметризована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}^2 \to \mathrm{E}^3$ в області $\mathcal{D}^2$. *Варіацією* поверхні F^2 називається поверхня, що параметрезована над цією ж областю параметрів вектор-функцією $\vec{\rho}$: $\mathcal{D}^2 \to \mathrm{E}^3$ вигляду

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \varepsilon w\,\vec{n},$$

де $w\colon \mathcal{D}^2 \to \mathbb{R}$ – дійсна функція така, що $w\,|_{\partial\mathcal{D}^2} = 0$, ε – малий параметр, $\vec{n}$ – одиничне нормальне векторне поле.

Означення 2.12.1 *Поверхня F^2 називається локально-мінімальною, якщо для будь-якої варіації ця поверхня є критичною точкою функціоналу площі, тобто*

$$\frac{dS(u,\varepsilon)}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_{\mathcal{D}} \sqrt{\det\tilde{g}}\,du^1du^2\Bigg|_{\varepsilon=0} = 0,$$

де $\tilde{g}$ – перша фундаментальна форма варіації.

Твердження 2.12.1 *Поверхня F^2 є локально-мінімальною тоді і тільки тоді, коли $H(\mathcal{D}^2) \equiv 0$.*

Доведення. Знайдемо першу фундаментальну форму варіації $\tilde{g}$. Маємо,

$$d\vec{\rho} = d\vec{r} + \varepsilon w\, d\vec{n} + \varepsilon dw\, \vec{n},$$

а значить

$$d\tilde{s}^2 = |d\vec{\rho}\,|^2 = |d\vec{r}\,|^2 + 2\varepsilon w \langle\, d\vec{r}, d\vec{n}\,\rangle + \varepsilon^2(*),$$

де символом $(*)$ відзначені несуттєві вирази.

Звідси випливає, що матриці перших фундаментальних форм варіаційної і вихідної поверхонь пов'язані співвідношенням

$$\tilde{g} = g - 2w\varepsilon\, B + \varepsilon^2(*) = g(E - 2w\varepsilon A) + \varepsilon^2(*).$$

Таким чином,

$$\det \tilde{g} = \det g(1 - 2\varepsilon w\, trace(A)) + \varepsilon^2(*) = \det g(1 - 4\varepsilon w\, H) + \varepsilon^2(*).$$

Скористаємося еквівалентністю $\sqrt{1 \pm x} \sim 1 \pm \dfrac{1}{2}x$. Тоді, з точністю до малих більш високого порядку, маємо

$$\sqrt{\det \tilde{g}} \sim \sqrt{\det g}(1 - 2\varepsilon w\, H).$$

Отже

$$S(\varepsilon) \sim \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{\det g}(1 - 2\varepsilon w\, H) du^1 du^2 = \iint\limits_{\mathcal{D}} (1 - 2\varepsilon w\, H) dS.$$

Тоді

$$\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -2 \iint\limits_{\mathcal{D}} w\, H dS.$$

Оскільки w довільна функція, тоді $H \equiv 0$.

■

2.12.1 Спеціальні мінімальні поверхні в E^3.

Розглянемо клас поверхонь обертання.

Лема 2.12.1 *Для середньої кривини поверхні, утвореної обертанням C^2- регулярної плоскої профільної кривої, має місце формула*

$$H = \frac{1}{2}\left(k - \frac{\cos\theta}{r}\right),$$

де k – орієнтована кривина профільної кривої, θ – орієнтований кут між віссю обертання і дотичною до профільної кривої, r – відстань до осі обертання.

Доведення. Направимо вісь Oz декартової прямокутної системи координат уздовж вісі обертання, а вісі Ox і Oy розташуємо в площині, перпендикулярній вісі обертання. Нехай u – натуральний параметр на профільній кривій. Тоді рівняння поверхні обертання має вигляд:

$$\vec{r} = \{x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)\}.$$

Зауважимо, що функція $x(u)$ в точності виражає відстань від точки на профільній кривій до осі обертання, тобто $r = x(u)$.

Враховуючи, що $(x')^2 + (z')^2 = 1$, знаходимо

$$\partial_1\vec{r} = \{x'\cos v, x'\sin v, z'\}, \quad \partial_2\vec{r} = \{-x\sin v, x\cos v, z'\}, \quad \vec{n} = \{-z'\cos v, -z'\sin v, x'\},$$
$$\partial_{11}\vec{r} = \{x''\cos v, x''\sin v, z''\}, \partial_{12}\vec{r} = \{-x'\sin v, x'\cos v, 0\}, \partial_{22}\vec{r} = \{-x\cos v, -x\sin v, 0\}.$$

Звідси отримуємо, що

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} z''x' - x''z' & 0 \\ 0 & xz' \end{pmatrix}, \quad A = g^{-1}B = \begin{pmatrix} z''x' - x''z' & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix}.$$

Оскільки для натурально параметризованої кривої її кривина $k(u) = z''x' - x''z'$, то матриця Вейнгартена набуває вигляду

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix},$$

а отже, для середньої кривини поверхні обертання маємо формулу

$$H = \frac{1}{2}\left(k + \frac{z'}{x}\right).$$

Залишається зауважити, що вектор $\{x', z'\}$ є одиничним вектором дотичної профільної кривої. Якщо позначити через α орієнтований кут від вісі Ox, а через θ орієнтований кут від вісі Oz (вісі обертання) до дотичної, то $\alpha - \theta = \pi/2$, а значить $z' = -\cos\theta$, тобто $H = \frac{1}{2}(k - \cos\theta/r)$, що й потрібно було довести.

■

Ремарка 2.12.1 *На поверхні обертання меридіани і паралелі складають сімейство ліній кривини. Тому головні кривини поверхні дорівнюють з точністю до знаку кривині меридіану і кривині паралелі, тобто $k_1 = k$ і $k_2 = -\cos\theta/r$.*

Гомотетією називається перетворення $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ вигляду $h(x, y, z) = (\tilde{x} = ax, \tilde{y} = ay, \tilde{z} = az)$, де a – стала , яку називають *коефіцієнтом гомотетії*. Дві поверхні F і $\tilde{F}$ називаються *гомотетичними*, якщо існує гомотетія h така, що $h(F) = \tilde{F}$. Гомотетія є конформних перетворенням, Оскільки з очевидністю

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2ds^2.$$

Нехай F і $\tilde{F} = h(F)$ дві гомотетичні поверхні з коефіцієнтом гомотетії a. Нехай H і $\tilde{H}$ – середні кривини F і $\tilde{F}$ відповідно. Тоді $\tilde{H} = \frac{1}{a}H$. Дійсно, для довільної регулярної параметризації $\vec{r}$ поверхні F, вектор-функція $\vec{\rho} = a\vec{r}$ параметризує поверхню $\tilde{F}$, а значить з очевидністю $\tilde{g} = a^2g$, $\tilde{B} = aB$, $\tilde{A} = \frac{1}{a}A$. Звідси робимо потрібний висновок.

Твердження 2.12.2 *Катеноїд*

$$\mathrm{ch}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

є єдиною з точністю до гомотетії мінімальною поверхнею в класі поверхонь обертання.

Доведення. Для доведення досить встановити, що графік гіперболічного косинуса $x = \operatorname{ch} z$ є єдиною з точністю до гомотетії профільною кривою, що забезпечує мінімальність відповідної поверхні обертання.

Умова мінімальності поверхні обертання призводить до рівняння на профільну криву, а саме

$$k + \frac{z'_s}{x} = 0.$$

Перепишемо це рівняння для функції $x = x(z)$. Тоді

$$k = \frac{-x''_z}{(1 + (x'_z)^2)^{3/2}}.$$

Приймаючи до уваги, що s – натуральний параметр, маємо

$$ds^2 = (1 + (x'_z)^2) dz^2,$$

а значить

$$z'_s = \frac{1}{\sqrt{1 + (x'_z)^2}}.$$

Підстановка в рівняння дає

$$\frac{-x''_z}{(1 + (x'_z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{x\sqrt{1 + (x'_z)^2}} = 0,$$

тобто,

$$\frac{x''_z}{1 + (x'_z)^2} = \frac{1}{x}.$$

Зауважимо, що розв'язок рівняння інваріантно відносно заміни $z \to -z$. Домножимо на x'_z, легко знаходимо

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + (x'_z)^2\right) = \ln(cx),$$

де $c > 0$– константа інтегрування. Звідси

$$x_z = \pm\sqrt{c^2x^2 - 1}.$$

В силу зауваження, візьмемо $x_z = \sqrt{c^2x^2 - 1}$. Отримане рівняння зводиться до табличного інтегралу

$$z = \frac{1}{c} \ln |cx + \sqrt{c^2x^2 - 1}| + z_0 \quad (x \geq \frac{1}{c} > 0)$$

де z_0 стала , що відповідає початковому значенню параметру. Положимо $z_0 = 0$ і висловимо x через z. Маємо

$$e^{cz} = cx + \sqrt{c^2x^2 - 1},$$
$$e^{-cz} = \frac{1}{cx + \sqrt{c^2x^2 - 1}}.$$

Рис. 2.15: Катеноїд.

Додавши отримаємо

$$e^{cz} + e^{-cz} = \frac{c^2x^2 + 2cx\sqrt{c^2x^2-1} + c^2x^2 - 1 + 1}{cx + \sqrt{c^2x^2-1}} = 2cx,$$

тобто

$$cx = \operatorname{ch}(cz).$$

Таким чином профільна крива гомотетична графіку гіперболічного косинуса $x = \operatorname{ch} z$. ∎

Прямою гелікоїдальною поверхнею називається поверхня, задається в деякій декартовій прямокутній системі координат рівнянням

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, z(v)\}.$$

Твердження 2.12.3 *Стандартний гелікоїд*

$$\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, v\}$$

є єдиною, з точністю до гомотетії, мінімальною поверхнею в класі прямих гелікоїдальних поверхонь.

Доведення. Для даної гелікоїдальної поверхні $\vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, z(v)\}$ обчислимо

$$\begin{aligned}
&\partial_1\vec{r} = \{\cos v, \sin v, 0\}, && \partial_2\vec{r} = \{-u\sin v, u\cos v, z'\},\\
&\partial_{11}\vec{r} = \{0,0,0\}, && \partial_{12}\vec{r} = \{-\sin v, \cos v, z'\},\\
&\partial_{22}\vec{r} = \{-u\cos v, -u\sin v, z''\}, && \vec{n} = \tfrac{1}{\sqrt{u^2+(z')^2}}\{z'\sin v, -z'\cos v, u\}.
\end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+(z')^2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{u^2+(z')^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uz'' \end{pmatrix},$$

$$A = g^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{uz''}{(u^2+(z')^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

gelgen.eps

Рис. 2.16: Гелікоїдальна поверхня с $z = v^4$.

gelst.eps

Рис. 2.17: Стандартний гелікоїд $z = v$.

Значить, $H \equiv 0$ тільки в разі $z'' = 0$, тобто для $z = cv + z_0$. Нехтуючи адитивною константою, отримуємо $z = cv$ або $z = c\,\mathrm{arctg}(y/x)$. З точністю до гомотетії,

$$z = \mathrm{arctg}(y/x),$$

що і треба було довести.

$\blacksquare$

Твердження 2.12.4 *Прямий гелікоїд є единою мінімальною поверхнею в класі C^2-регулярних лінійчастих поверхонь.*

Доведення. Параметричне рівняння лінійчатої поверхні може бути записано у вигляді

$$\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u),$$

де $\vec{\rho}(u)$ – регулярна параметризована крива і $\vec{a}(u)$ – одиничне векторне поле на цій кривій. Тоді

$$\begin{aligned}
&\partial_u \vec{r} = \vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,', \quad \partial_v \vec{r} = \vec{a},\\
&\partial_{uu} \vec{r} = \vec{\rho}\,'' + v\vec{a}\,'', \quad \partial_{uv} \vec{r} = \vec{a}\,', \quad \partial_{vv} \vec{r} = 0,\\
&\vec{N} = [\vec{\rho}\,', \vec{a}] + v[\vec{a}\,', \vec{a}].
\end{aligned}$$

Матриця першої квадратичної форми набуває вигляду

$$g = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,'|^2 & \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle \\ \langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} 1 & -\langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle \\ -\langle \vec{\rho}\,', \vec{a} \rangle & |\vec{\rho}\,' + v\vec{a}\,'|^2 \end{pmatrix},$$

а матриця другої

$$B = \frac{1}{|\vec{N}|} \begin{pmatrix} \langle \vec{\rho}\,'' + v\vec{a}\,'', \vec{N} \rangle & (\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a}) \\ (\vec{a}\,', \vec{\rho}\,', \vec{a}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриці Вейнгартена маємо

$$A = \frac{1}{|N|\det g}\begin{pmatrix} \langle \vec\rho\,'' + v\vec a\,'', \vec N \rangle - \langle \vec\rho\,', \vec a \rangle(\vec a\,', \vec\rho\,', \vec a) & * \\ * & -\langle \vec\rho\,', \vec a \rangle(\vec a\,', \vec\rho\,', \vec a) \end{pmatrix},$$

де символом $(*)$ позначені несуттєві елементи матриці. Отже, поверхня мінімальна, якщо

$$\langle \vec\rho\,'' + v\vec a\,'', \vec N \rangle - 2\langle \vec\rho\,', \vec a \rangle(\vec a\,', \vec\rho\,', \vec a) = 0.$$

Підставляючи вираз для вектора $\vec N$, отримуємо

$$v^2(\vec a\,'', \vec a\,', \vec a) + v\big((\vec a\,'', \vec\rho\,', \vec a) + (\vec\rho\,'', \vec a\,', \vec a)\big) + (\vec\rho\,'', \vec\rho\,', \vec a) - 2\langle \vec\rho\,', \vec a \rangle(\vec a\,', \vec\rho\,', \vec a) = 0. \quad (2.82)$$

Отже,

$$(\vec a\,'', \vec a\,', \vec a) = 0,$$

що є необхідною і достатньою умовою паралельності вектор-функції $\vec a$ до деякої площини. Візьмемо цю площину в якості координатної площини (x, y), а вісь Oz направимо перпендикулярно цій площині. В якості нової направляючої нашої лінійчастої поверхні візьмемо перетин поверхні площиною (x, z)[19]. В такому випадку, параметризація лінійчастої поверхні набуде вигляду

$$\vec r = \{x(\alpha), 0, z(\alpha)\} + v\{\cos\alpha, \sin\alpha, 0\},$$

де α – кут між твірною і віссю Ox. Тоді $\vec a\,'' = -\vec a$ і коефіцієнт при v в рівнянні (2.82) буде дорівнювати $(\vec\rho\,'', \vec a\,', \vec a) = -z''$. Отже, $z = h\alpha + b$. Якщо $h = 0$, то напрямляюча вироджується в пряму, а поверхня – в площину. Нехай $h \neq 0$, тоді не порушуючи загальності можна вважати, що

$$z = h\alpha.$$

Оскільки за цих умов

$$(\vec\rho\,'', \vec\rho\,', \vec a) = -x'' h\sin\alpha, \quad \langle \vec\rho\,', \vec a \rangle(\vec a\,', \vec\rho\,', \vec a) = x' h\cos\alpha,$$

то умова мінімальності (2.82) спроститься до

$$x''\sin\alpha + 2x'\cos\alpha = 0.$$

Останнє рівняння легко інтегрується

$$x(\alpha) = C_1 + C_2 \operatorname{ctg}\alpha$$

Тепер покажемо, що існує така пряма $x = x_0, y = y_0, z = t$, яка перетинає всі прямі знайденої лінійчатої поверхні. Для цього розглянемо мішаний добуток

$$0 = (\vec\rho - \vec r_0, \vec a, \vec e_z) = \begin{vmatrix} C_1 + C_2\operatorname{ctg}\alpha - x_0 & -y_0 & h\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\sin\alpha(C_1 + C_2\operatorname{ctg}\alpha - x_0) + \cos\alpha y_0 = \sin\alpha(C_1 - x_0) + \cos\alpha(C_2 + y_0).$$

[19] Твірні перетинають площину (x, z), Оскільки в противному випадку всі твірні паралельні вісі Ox, а значить наша поверхня є циліндром з Гауссовою кривиною $K = 0$. З умови мінімальності випливає, що наша поверхня локально є площиною

Звідси знаходимо $x_0 = C_1, y_0 = -C_2$. Візьмемо цю пряму за нову напрямляючу і одночасно вісь Oz нової системи координат. Тоді рівняння нашої поверхні набуде вигляду

$$\vec{r} = \{0, 0, h\alpha\} + v\{\cos\alpha, \sin\alpha, 0\} = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha, h\alpha\},$$

що є рівнянням прямого гелікоїда.

∎

Поверхнею перенесення називається поверхня, рівняння якої в деякій прямокутній декартовій системі координат має вигляд

$$\vec{r} = \{x(u), y(v), z_1(u) + z_2(v)\}.$$

Поверхня перенесення утворена перенесенням кривої $\vec{\gamma}_1 = \{x(u), 0, z_1(u)\}$ вздовж кривої $\vec{\gamma}_2 = \{0, y(v), z_2(v)\}$, що розташовані у взаємно перпендикулярних площинах.

Твердження 2.12.5 *Поверхня Шерка*

$$z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

є единою з точністю до гомотетії мінімальною поверхнею в класі поверхонь перенесення.

Доведення. Для нашої поверхні

$$\begin{aligned} &\partial_1\vec{r} = \{1, 0, z_1'\}, && \partial_2\vec{r} = \{0, 1, z_2'\}, \\ &\partial_{11}\vec{r} = \{0, 0, z_1''\}, && \partial_{22}\vec{r} = \{0, 0, z_2''\}, \\ &\partial_{12}\vec{r} = \{0, 0, 0\}, && \vec{n} = \tfrac{1}{\sqrt{1+(z_1')^2+(z_2')^2}}\{-z_1', -z_2', 1\}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$g = \begin{pmatrix} 1+(z_1')^2 & z_1'z_2' \\ z_1'z_2' & 1+(z_2')^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{1+(z_1')^2+(z_2')^2}\begin{pmatrix} 1+(z_2')^2 & -z_1'z_2' \\ -z_1'z_2' & 1+(z_1')^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1+(z_1')^2+(z_2')^2}}\begin{pmatrix} z_1'' & 0 \\ 0 & z_2'' \end{pmatrix},$$

$$A = g^{-1}B = \frac{1}{(1+(z_1')^2+(z_2')^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} (1+(z_2')^2)z_1'' & -z_1'z_2'z_2'' \\ -z_1'z_2'z_1'' & (1+(z_1')^2)z_2'' \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо

$$K = \frac{z_1''z_2''}{(1+(z_1')^2+(z_2')^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2}\frac{(1+(z_2'))z_1''+(1+(z_1')z_2''}{(1+(z_1')^2+(z_2')^2)^{3/2}}$$

Умова мінімальності поверхні переносу набуває вигляду

$$\frac{z_1''}{1+(z_1')^2}(x) = -\frac{z_2''}{1+(z_2')^2}(y) = c$$

Рис. 2.18: Поверхня Шерка.

Значить, відносно функції $z_1(x)$ отримуємо рівняння

$$\frac{z_1''}{1+(z_1')^2} = c$$

розв'язком якого є функція $z_1(x) = \frac{1}{c}\ln\cos cx$.

Що стосується функції $z_2(y)$, то аналогічно, маємо

$$\frac{z_2''}{(1+(z_2')^2)}(y) = -c,$$

тобто

$$z_2(y) = -\frac{1}{c}\ln\cos cy.$$

Тому остаточно, явні рівняння нашої поверхні переносу набувають вигляду

$$z = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{\cos cx}{\cos cy}\right),$$

що з точністю до гомотетії дає стандартну поверхню Шерка.

■

Вправа 2.12.1 *Перевірте, що поверхня Еннепера*

$$\vec{r} = \{1/4(u^3 - 3u - 3uv^2), 1/4(3v + 3u^2v - v^3), 3/4(v^2 - u^2)\}$$

мінімальна.

Розглянемо явно задані мінімальні поверхні виду $z = z(x,y)$. Для таких поверхонь умова $H = 0$ задається рівнянням:

$$z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}(1+z_x^2) = 0, \tag{2.83}$$

яке називається рівнянням Лагранжа. Це нелінійне еліптичне рівняння. Побудовані вище приклади дають розв'язок рівняння Лагранжа, однак ці розв'язок визначені не над всією площиною (x,y). Ця обставина є істотною.

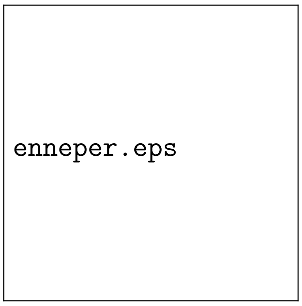


Рис. 2.19: Поверхня Еннепера.

Теорема 2.12.1 *(**Бернштейн**[20]) Площина $z = ax + by + c$ є єдиною мінімальною C^2- регулярною явно заданою над всією площиною (x, y) поверхнею в E^3.*

Доведення.[21] Нехай функція $z = z(x, y)$ задовольняє рівнянню (2.83). Введемо в розгляд функцію $\varphi(x, y)$, що є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \dfrac{1 + z_x^2}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \\ \varphi_{xy} = \dfrac{z_x z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \\ \varphi_{yy} = \dfrac{1 + z_y^2}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}. \end{cases}$$

Умовами інтегрованості системи є виконання тотожностей $\varphi_{xxy} - \varphi_{xyx}$ та $\varphi_{yyx} - \varphi_{xyy}$. Маємо

$$\begin{cases} \varphi_{xxy} - \varphi_{xyx} = -\dfrac{z_y\big(z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}(1 + z_x^2)\big)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \varphi_{yyx} - \varphi_{xyy} = -\dfrac{z_x\big(z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}(1 + z_x^2)\big)}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Отже, якщо поверхня мінімальна, то умови інтегрованості виконані. Більше того,

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = \frac{(1 + z_x)(1 + z_y)}{1 + z_x^2 + z_y^2} - \frac{z_x^2 z_y^2}{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1.$$

Цей факт означає, що функцію φ можна вважати опуклою (другий диференціал $d^2\varphi$ додатно визначений, а умову $\varphi_x > 0$ можна забезпечити заміною $\varphi \to -\varphi$). Визначник матриці Якобі відображення

$$\begin{aligned} \xi &= x + \varphi_x(x, y) \\ \eta &= y + \varphi_y(x, y) \end{aligned}$$

[20] S. Bernstein, Sur un theoreme de geometrie et ses applications aux equations aux derivees partielles du type elliptique, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov (2) 15 (1915-1917), 38-45

[21] J.C.C. Nitsche, Elementary proof of Bernstein's theorem on minimal surfaces, Ann. of Math. (2) 66 (1957), 543-544.

має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1+\varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & 1+\varphi_{yy} \end{vmatrix} = 1+\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 = 2+\varphi_{xx}+\varphi_{yy} > 0$$

і тому є дифеоморфізмом $R^2 \to R^2$. Розглянемо R^2 як комплексну площину поклавши

$$\zeta = \xi + i\eta$$

і розглянемо функцію комплексної змінної

$$w(\zeta) = x - \varphi_x(x,y) - i(y - \varphi_y(x,y)),$$

де $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ функції, що визначені дифеоморфізмом. Тоді

$$|w'(\zeta)| = \frac{\varphi_{xx}+\varphi_{yy}-2}{\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+2} < 1$$

і за теоремою Ліувілля функція $w'(\zeta) = const$. З цього випливає, що другі похідні

$$\varphi_{xx} = \frac{|1-w'|^2}{1-|w'|^2} = c_1, \quad \varphi_{yy} = \frac{|1+w'|^2}{1-|w'|^2} = c_2.$$

Значить $z_x = a$ та $z_y = b$ і отже $z = ax + by + c$.

■

2.13 Коваріантний диференціал векторного поля

Означення 2.13.1 *Дотичним векторним полем X на поверхні F, що параметризована вектор-функцією $\vec{r} : \mathcal{D}^2 \to E^3$, називається відображення $X : \mathcal{D}^2 \to TF$, що ставить в відповідність кожній точці $u \in \mathcal{D}$ дотичний вектор $X(u) \in T_{\vec{r}(u)}F$.*

Дотичне векторне поле X може бути представлено в просторі E^3, як поле векторів, заданих в точках поверхні F^n, у вигляді

$$\vec{X}(u) = X^1(u)\partial_1\vec{r} + X^2(u)\partial_2\vec{r} = X^i(u)\partial_i\vec{r}, \tag{2.84}$$

де $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{D}^2$ параметри на поверхні. *Векторне поле X називається гладким класу C^k*, якщо вектор-функція $\vec{X} : \mathcal{D}^2 \to E^3$, що задана формулою (2.84), є гладкою класу C^k. Для C^k– регулярності векторного поля необхідна C^k- регулярність параметризації поверхні та C^k- регулярність координатних функцій $X^i(u)$.

Домовимося, що в подальших розглядах усі векторні поля мають достатній порядок гладкості.

Між векторними полями на поверхні і векторними полями на області параметрів є природний зв'язок, обумовлений матрицею Якобі вектор-функції параметризації поверхні. Нехай $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ точка в області $\mathcal{D}$. Розглянемо криву $\gamma = u_0 + tX$, що проходить через точку u_0 в напрямку вектора $X = X^1\vec{e}_1 + X^2\vec{e}_2$, де $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базисні дотичні векторні поля на області параметрів $\mathcal{D}$. Тоді $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ є крива, що проходить через точку $q = \vec{r}(u_0)$ та її дотичний вектор

$$\vec{\gamma}\,' = \partial\vec{r} \cdot X$$

має ті ж координати, що і направляючий вектор X кривої γ, але відносно базису $(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r})$ дотичного простору T_qF. Відображення $\partial\vec{r} : T_u\mathcal{D} \to T_{\vec{r}(u)}F$ що визначається формулою

$$\partial\vec{r}(X^1\vec{e}_1 + X^2\vec{e}_2) = X^1\partial_1\vec{r} + X^2\partial_2\vec{r} \tag{2.85}$$

називається *дотичним відображенням.* Координати $\{X^1, X^2\}$ називаються *внутрішніми координатами* вектору $\vec{X} = X^1\partial_1\vec{r} + X^2\partial_2\vec{r}$. Аналогічно визначаються *внутрішні координати векторного поля* $\vec{X}(u)$.

Чи є диференціал дотичного векторного поля на поверхні дотичним векторним полем? Обчислимо

$$d\vec{X} = dX^i\partial_i\vec{r} + X^i\, d\partial_i\vec{r} = \partial_k X^i du^k\partial_i\vec{r} + X^i\,\partial_{ik}\vec{r}\, du^k$$

і скористаємося розкладанням Гаусса для $\partial_{ik}\vec{r}$. Тоді

$$d\vec{X} = \partial_k X^i du^k\partial_i\vec{r} + X^i\,(\Gamma^s_{ik}\partial_s\vec{r} + b_{ik}\vec{n})\, du^k = (\partial_k X^s + \Gamma^s_{ik}X^i)du^k\partial_s\vec{r} + b_{ik}X^i du^k\vec{n}.$$

Очевидно, що диференціал дотичного векторного поля е загальнму випадку не є дотичним векторним полем поверхні. Однак, якщо взяти тільки дотичну складову отриманого диференціала, то вона є знову дотичним векторним полем на поверхні. Тоді наступне визначення є природним.

Означення 2.13.2 *Абсолютним або коваріантним диференціалом векторного поля* $\vec{X}$ *на поверхні* F *називається проекція на дотичний простір поверхні диференціала вектор-функції* (2.84)

Коваріантний диференціал векторного поля X позначається через DX. Очевидно, що

$$\overrightarrow{DX} := DX^i\partial_i\vec{r} = (\partial_k X^s + \Gamma^s_{ik}X^i)du^k\partial_s\vec{r}.$$

Значить внутрішні координатні функції коваріантного диференціалу поля $\vec{X}$ мають вигляд

$$DX^s = (\partial_k X^s + \Gamma^s_{ik}X^i)du^k.$$

Коефіцієнти при диференціалах параметрів називаються *коваріантними частинними похідними* внутрішніх координат векторного поля X і позначаються через $\nabla_k X$. Таким чином,

$$\nabla_k X^s = \partial_k X^s + \Gamma^s_{ik}X^i.$$

Зауважимо, що *для обчислення коваріантного диференціала і коваріантних частинних похідних знання параметризації поверхні не потрібно; досить завдання внутрішніх координатних функцій поля і першої фундаментальної форми поверхні (для обчислення символів Крістофеля).*

Враховуючи зв'язок (2.85) внутрішніх і зовнішніх координат дотичного векторного поля ми можемо їх не розрізняти, але враховувати їх зміст в контексті обчислень і міркувань.

Означення 2.13.3 *Векторне поле* $\vec{X}$ *на поверхні називається коваріантно сталим (або паралельним), якщо* $DX = 0$.

Зауважимо, що якщо $\vec{X}$ – паралельне векторне поле на поверхні, то $d\vec{X} \parallel \vec{n}$.

Якщо $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ – паралельні векторні поля на F, то $d\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = 0$. Дійсно, $d\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = \left\langle d\vec{X}, \vec{Y} \right\rangle + \left\langle \vec{X}, d\vec{Y} \right\rangle = 0$, оскільки $d\vec{X} \parallel \vec{n}$ і $d\vec{Y} \parallel \vec{n}$. Прямим наслідком цього зауваження є той факт, що *що довжина паралельного векторного поля є сталою і кут між паралельними векторними полями також сталий.*

Існування паралельного векторного поля на поверхні накладає істотне обмеження на її внутрішню геометрію.

Твердження 2.13.1 *Якщо на поверхні існує паралельне векторне поле, то ця поверхня локально-ізометрична площині.*

Доведення. Нехай $\vec{X}$ паралельне векторне поле на поверхні, тобто $DX = 0$. Оскільки довжина паралельного векторного поля стала, то не порушуючи зпгальності можна вважати, що $|\vec{X}| = 1$. Приймемо сімейство інтегральних траєкторій поля $\vec{X}$ і сімейство його ортогональних траєкторій в якості координатних ліній локальної системи координат на поверхні. Відносно обраної системи координат,

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u,v)dv^2,$$

а саме поле отримає внутрішні координати виду $X = \{1, 0\}$. Умова $DX = 0$ тягне

$$DX^1 = d(X^1) + \Gamma^1_{ik} X^i du^k = \Gamma^1_{1k} du^k = 0,$$

$$DX^2 = d(X^2) + \Gamma^2_{ik} X^i du^k = \Gamma^2_{1k} du^k = 0.$$

Перше з рівнянь виконується тотожно, а з другого робимо висновок, що $\Gamma^2_{12} = 0$. Тоді і $\Gamma_{12,2} = 0$, а значить $\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u} = 0$. Остання рівність означає, функція g_{22} не залежить від u, тобто перша фундаментальна форма нашої поверхні має вигляд

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(v)dv^2.$$

Введемо нові параметри (u^*, v^*) з умов

$$\begin{cases} du^* = du, \\ dv^* = \sqrt{g_{22}(v)}\, dv. \end{cases}$$

Відносно нових параметрів,

$$ds^2 = (du^*)^2 + (dv^*)^2.$$

Таким чином, дана поверхня дійсно локально-ізометрична площині.

■

2.14 Паралельні векторні поля вздовж кривої на поверхні. Формула Гауса-Бонне

Означення 2.14.1 *Нехай $\vec{X}$ – векторне поле на поверхні та $\gamma(s)$— крива в області параметрів. Тоді векторне поле*

$$\vec{X}(s) = (\vec{X} \circ \gamma)(s) = \vec{X}(u^1(s), u^2(s))$$

називається обмеженням векторного поля $\vec{X}$ на криву $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$.

В точках кривої γ,

$$DX^m(s) = \left(\frac{\partial X^m}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds} + \Gamma^m_{ik}(\gamma)X^i\frac{du^k}{ds}\right)ds = \frac{du^k}{ds}\left(\frac{\partial X^m}{\partial u^k} + \Gamma^m_{ik}(\gamma)X^i\right)ds.$$

Вираз

$$DX^m = \frac{du^k}{ds}\frac{DX^m}{\partial u^k}ds$$

називається *коваріантним диференціалом* (координат) поля X вздовж кривої γ, а вираз

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{du^k}{ds}\frac{DX^m}{\partial u^k}$$

називається *коваріантною похідною* поля X уздовж γ. В координатному виразі $\gamma' = \left\{\frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}\right\}$. Позначимо, за аналогією з частинною похідною, коваріантну частинну похідну як $\nabla_k = \frac{D}{\partial u^k}$. Тоді

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{du^k}{ds}\nabla_k X^m.$$

Коваріантна похідна поля X за напрямком поля Y візначається формулою

$$\nabla_Y X^m = Y^k \nabla_k X^m.$$

Тоді, очевидно, можна записати

$$\frac{DX}{ds} = \nabla_{\gamma'} X$$

Для обчислювання коваріантної похідної поля X вздвовж кривої γ досить знати поле тільки в точках γ. Дійсно,

$$DX^m = dX^m + \Gamma^m_{ik}X^i du^k.$$

Якщо задані функції $X^k = X^k(s)$, задають векторне поле в точках кривої γ, то очевидним чином знаходимо:

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{dX^m}{ds} + \Gamma^m_{ik}X^i\frac{du^k}{ds}.$$

Для кривої на поверхні мають місце аналоги формул Френе, якщо замість звичайного диференціювання використовувати коваріантне. А саме, якщо $\vec{\gamma}$ – натурально параметризована крива на поверхні F^2, то $\vec{\tau}$ і $\vec{\nu}_g$ задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned} \vec{\tau}\,' &= \ \ k_g\vec{\nu}_g, \\ \vec{\nu}\,'_g &= -k_g\vec{\tau}\,, \end{aligned}$$

де $(')$ означає коваріантну похідну за натуральним параметром.

Вправа 2.14.1 *Покажіть, що геодезична кривина кривої $\vec{\gamma}$ на поверхні може бути записана в вигляді*

$$|k_g| = \frac{|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''|}{|\vec{\gamma}'|^3}$$

де $(')$ позначає коваріантну похідну за параметром кривої.

Означення 2.14.2 *Векторне поле $\vec{X} = \partial\vec{r} \cdot X$, що задане в точках кривої $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ називається паралельним уздовж $\vec{\gamma}$, якщо*

$$\nabla_{\gamma'} X = 0.$$

Твердження 2.14.1 *Якщо $\vec{\gamma}$ – (кусоково) гладка крива на поверхні, то вздовж $\vec{\gamma}$ завжди існує паралельне векторне поле.*

Дійсно, система

$$\frac{dX^m}{ds} = -\Gamma^m_{ik} X^i \frac{du^k}{ds}$$

є автономною системою диференціальних рівнянь, у якій розв'язок існує і єдиний при заданих початкових умовах.

З точки зору паралельності векторного поля вздовж кривої, геодезичні лінії характеризуються наступною важливою властивістю.

Твердження 2.14.2 *Крива $\vec{\gamma}$ на поверхні є геодезичною тоді і тільки тоді, коли поле $\vec{\gamma}'$ паралельне вздовж $\vec{\gamma}$, тобто $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$.*

Дійсно, в системі рівнянь для паралельного векторного поля уздовж кривої, а саме $\dfrac{dX^m}{ds} + \Gamma^m_{ik} X^i \dfrac{du^k}{ds} = 0$, покладемо $X = \gamma' = \left\{\dfrac{du^1}{ds}, \dfrac{du^2}{ds}\right\}$. Тоді умова паралельності поля X уздовж γ запишеться як

$$\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma^m_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0.$$

Поняття паралельного векторного поля уздовж кривої дозволяє визначити одне з найважливіших понять в диференціальній геометрії – поняття паралельного перенесення заданого вектора уздовж заданої кривої.

Означення 2.14.3 *Нехай $\vec{\gamma} \colon [a,b] \to F$ – крива і $\vec{\gamma}(a) = A$, $\vec{\gamma}(b) = B$. Нехай $\vec{X}_A = \partial\vec{r} \cdot X_a$ – довільний дотичний вектор поверхні в точці A. Позначимо через $X(s)$ єдиний розв'язок задачі Коші*

$$\begin{cases} \dfrac{dX^m}{ds} = -\Gamma^m_{ik} X^i \dfrac{du^k}{ds} \\ X(a) = X_a, \end{cases}$$

Вектор $\vec{X}_B = \partial\vec{r} \cdot X(b)$ називається результатом паралельного перенесення вектора $\vec{X}_A$ з точки A в точку B уздовж $\vec{\gamma}$.

Як приклад, розглянемо площину Лобачевського з кривиною $K = -1$ в інтерпретації Пуанкаре. Для цієї площини

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

а символи Крістофеля мають вигляд:

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = -\tfrac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{22} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \tfrac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = -\tfrac{1}{y}.$$

Розглянемо криву $x = t, \quad y = y_0$ і знайдемо множину паралельних векторних полів уздовж неї. Для цього позначимо

$$\partial_1 = \{1, 0\}, \quad \partial_2 = \{0, 1\}$$

базисні векторні поля і запишемо рівняння для паралельного векторного поля X у вигляді

$$DX = \left(\frac{dX^m}{dt} + \Gamma^m_{ik} X^i \frac{du^i}{dt}\right)\partial_m = \left(\frac{dX^1}{dt} + \Gamma^1_{i1} X^i\right)\partial_1 + \left(\frac{dX^2}{dt} + \Gamma^2_{i1} X^i\right)\partial_2 = 0$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{y_0} X^2 = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{y_0} X^1 = 0. \end{cases}$$

Це система рівнянь зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якої має вигляд

$$\begin{cases} X^1 = a^1 \cos(t/y_0) + a^2 \sin(t/y_0), \\ X^2 = a^2 \cos(t/y_0) - a^1 \sin(t/y_0). \end{cases}$$

тобто

$$X = \cos(t/y_0) A_1 - \sin(t/y_0) A_2,$$

де $A_1 = a^1\partial_1 + a^2\partial_2, \ A_2 = -a^2\partial_1 + a^1\partial_2$ – пара довільно обраних взаємно ортогональних рівних за довжиною векторних полів, визначених у точках нашої кривої і орієнтованих додатно по відношенню до обраного базису полів на площині. Паралельне векторне поле отримує поворот відносно цієї пари з кутовою швидкістю $1/y_0$ у "від'ємному" напрямку (тобто, за годинниковою стрілкою). Наприклад, для початкових даних $X(0) = \partial_1$ маємо $A_1 = \partial_1, A_2 = \partial_2$ поле X отримує на відрізку $[0, \frac{\pi}{2} y_0]$ поворот на кут $\frac{\pi}{2}$ і займає положення вектора $-\partial_2$ в точці $(\frac{\pi}{2} y_0, y_0)$.

У загальному випадку, сумарний орієнтований поворот паралельного векторного поля на заданій ділянці кривої описується наступною Лемою.

Лема 2.14.1 *Нехай крива на поверхні задана своїм внутрішнім параметричним рівнянням $\gamma : u^i = u^i(t)$, $\gamma(t_1) = A, \gamma(t_2) = B$. Тоді сумарний орієнтований поворот паралельного векторного поля p на ділянці кривої від A до B обчислюється криволінійним інтегралом від диференціальної форми $\left\langle Da, b \right\rangle_g$ за формулою*

$$\Delta\varphi = -\int\limits_\gamma \left\langle Da, b \right\rangle_g = -\int_\gamma \left\langle \nabla_1 a, b \right\rangle_g du^1 + \left\langle \nabla_2 a, b \right\rangle_g du^2 = -\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \nabla_{\gamma'} a, b \right\rangle_g dt, \quad (2.86)$$

де a і b довільна пара одиничних взаємно ортогональних додатно орієнтованих векторних полів на поверхні, взятих в точках кривої γ.

Доведення. Нехай $\vec{r}$ – локальна параметризація поверхні. Приймемо репер $\{\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}\}$ як такий, що задає додатну орієнтацію на поверхні. В якості додатного повороту приймаємо поворот від $\partial_1\vec{r}$ в напрямку вектору $\partial_2\vec{r}$. Нехай $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ – крива на поверхні. Зафіксуємо довільне одиничне векторне поле $\vec{a} = \partial\vec{r}\,a$ на поверхні і покладемо $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{a}$. Тоді $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ утворюють поле додатно орієнтованих ортонормованих реперів на поверхні.

Нехай $\vec{p} = \partial\vec{r}\,p$ – одиничне паралельне векторне поле уздовж $\vec{\gamma}$. Покладемо, $\vec{q} = \vec{n} \times \vec{p}$, яке з очевидністю так само паралельне уздовж кривої. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що в $\vec{p}(A) = \vec{a}(A)$. Позначимо через φ – орієнтований кут між векторами поля $\vec{a}$ і $\vec{p}$. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \cos\varphi\,\vec{a} + \sin\varphi\,\vec{b}, \\ \vec{q} &= -\sin\varphi\,\vec{a} + \cos\varphi\,\vec{b}. \end{aligned}$$

а значить

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \cos\varphi\,\vec{p} - \sin\varphi\,\vec{q}, \\ \vec{b} &= \sin\varphi\,\vec{p} + \cos\varphi\,\vec{q}. \end{aligned}$$

Беручи диференціал, знаходимо

$$d\vec{a} = -d\varphi\,\vec{b} + \cos\varphi\,d\vec{p} - \sin\varphi\,d\vec{q}.$$

Оскільки $d\vec{p} \parallel d\vec{q} \parallel \vec{n}$, то домножуючи цю рівність скалярно на $\vec{b}$, отримаємо

$$-d\varphi = \left\langle\, d\vec{a}, \vec{b}\,\right\rangle.$$

Таким чином,

$$\Delta\varphi = -\int\limits_\gamma \left\langle\, d\vec{a}, \vec{b}\,\right\rangle = -\int\limits_\gamma \left\langle\, Da, b\,\right\rangle_g,$$

тобто

$$\Delta\varphi = -\int\limits_\gamma \left\langle\, \nabla_1 a, b\,\right\rangle_g du^1 + \left\langle\, \nabla_2 a, b\,\right\rangle_g du^2.$$

Переходячи до параметру на кривій, отримаємо

$$\Delta\varphi = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\left\langle\, \nabla_1 a, b\,\right\rangle_g \frac{du^1}{dt} + \left\langle\, \nabla_2 a, b\,\right\rangle_g \frac{du^2}{dt}\Big) dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\langle\, \nabla_{\gamma'} a, b\,\right\rangle_g dt.$$

■

Приклад 2.14.1 На двовимірній поверхні завжди можна ввести ортогональну координатну сітку. Це означає, що першу фундаментальну форму поверхні завжди можна привести до вигляду

$$ds^2 = g^2 du^2 + f^2 dv^2,$$

де $f > 0$ і $g > 0$ – гладкі функції параметрів, що не мають нулів на області визначення локальної системи координат. Набір символів Крістофеля легко обчислюється ($u := u^1, v := u^2$)

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial_1 g}{g}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{\partial_2 g}{g}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{f\partial_1 f}{g^2}$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{g\partial_2 g}{f^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\partial_1 f}{f}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\partial_2 f}{f}$$

Покладемо

$$a = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} := \frac{1}{g}\,\partial_1, \quad b = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := \frac{1}{f}\,\partial_2.$$

Тоді

$$\nabla_1 a := \nabla_{\partial_1} a = \nabla_{\partial_1}\Big(\frac{1}{g}\,\partial_1\Big) = -\frac{\partial_1 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\,\Gamma^s_{11}\partial_s = -\frac{\partial_1 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\Big(\Gamma^1_{11}\partial_1 + \Gamma^2_{11}\partial_2\Big) =$$
$$-\frac{\partial_1 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\Big(\frac{\partial_1 g}{g}\,\partial_1 - \frac{g\partial_2 g}{f^2}\,\partial_2\Big) = -\frac{\partial_2 g}{f^2}\,\partial_2 = -\frac{\partial_2 g}{f}\,b.$$

Аналогічно,

$$\nabla_2 a := \nabla_{\partial_2} a = \nabla_{\partial_2}\Big(\frac{1}{g}\,\partial_1\Big) = -\frac{\partial_2 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\,\Gamma^s_{12}\partial_s = -\frac{\partial_2 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\Big(\Gamma^1_{12}\partial_1 + \Gamma^2_{12}\partial_2\Big) =$$
$$-\frac{\partial_2 g}{g^2}\,\partial_1 + \frac{1}{g}\Big(\frac{\partial_2 g}{g}\,\partial_1 + \frac{\partial_1 f}{f}\,\partial_2\Big) = \frac{\partial_1 f}{gf}\,\partial_2 = \frac{\partial_1 f}{g}\,b.$$

Нехай $u := u^1(t), v := u^2(t)$ крива, що лежить в даній локальній карті. Тоді кут повороту паралельного векторного поля вздовж цієї кривої виразиться формулою

$$\Delta\varphi = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial_2 g}{f}\frac{du^1}{dt} - \frac{\partial_1 f}{g}\frac{du^2}{dt}\Big)dt.$$

Зокрема, при перенесенні вздовж координатних ліній $u^1 = const, u^2 = t$ і $u^1 = t, u^2 = const$ маємо, відповідно,

$$\Delta\varphi_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial_1 f}{g}\,dt, \qquad \Delta\varphi_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial_2 g}{f}\,dt.$$

При напівгеодезичній параметризації $ds^2 = du^2 + f^2 dv^2$ отримуємо

$$\Delta\varphi_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \partial_1 f\,dt, \qquad \Delta\varphi_2 = 0.$$

Якщо ми маємо справу з метрикою обертання, то $f = f(u)$ і $\Delta\varphi_1 = -\partial_1 f \Delta v$. Зокрема, для сфери радіусу R ми маємо напівгеодезичну декартову параметризацію у вигляді $ds^2 = du^2 + R^2\cos^2\big(u/R\big)dv^2$ і, отже, при обході всієї паралелі $u = u_0 = const$

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi\sin\big(u_0/R\big) = 2\pi\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = 2\pi\sqrt{1 - \Big(\frac{r}{R}\Big)^2},$$

де r – зовнішній радіус даної паралелі.

Якщо ж використати полярну напівгеодезичну параметризацію, для якої $ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \big(u/R\big) dv^2$, то аналогічне обчислення приводить до

$$\Delta\varphi_1 = -2\pi \cos\big(u_0/R\big) = -2\pi \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = -2\pi \sqrt{1 - \Big(\frac{r}{R}\Big)^2}.$$

Протилежність знаків повороту пояснюється протилежністю орієнтацій базисних реперів відповідних параметризацій.

Застосуємо доведену Лему до випадку замкнутого контуру на поверхні.

Лема 2.14.2 *Нехай $\vec{\gamma}$ – замкнений контур на поверхні що обмежує однозв'язну область $\mathcal{D}$. Позначимо через $\Delta\varphi$ орієнтований кут між вектором $\vec{p}$ і результатом його паралельного перенесення уздовж $\vec{\gamma}$. Тоді*

$$\Delta\varphi = \iint\limits_{\mathcal{D}} K dS.$$

Доведення. Оскільки всі наші розгляди носять локальний характер, будемо вважати, що контур лежить в області визначення деякої напівгеодезичної системи координат. В цьому випадку

$$\begin{aligned} &ds^2 = du^2 + f^2(u,v) dv^2 \quad (f > 0), \\ &\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -f f_u, \\ &\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \tfrac{f_u}{f}, \quad \Gamma^2_{22} = \tfrac{f_v}{f}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$a = \partial_1, \quad b = \frac{1}{f}\partial_2.$$

Тоді репер $\{a, b\}$ додатно орієнтований і

$$\nabla_1 a = 0, \quad \nabla_2 a = \Gamma^2_{21}\partial_2 = \frac{f_u}{f}\partial_2 = f_u b.$$

Застосування формули Гріна (Стокса) до формули (2.86) запишеться в вигляді

$$\Delta\varphi = -\int_\gamma 0\, du + f_u dv = -\iint\limits_{\mathcal{D}} f_{uu} du dv = \iint\limits_{\mathcal{D}} K f du dv = \iint\limits_{\mathcal{D}} K \sqrt{\det g} du dv = \iint\limits_{\mathcal{D}} K dS.$$

■

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 2.14.2 *На площині Лобачевського*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

розглянемо відрізок прямої

$$\{x = (\cos\alpha)t + x_0, y = (\sin\alpha)t + y_0\}$$

на ділянці $t = t_1 \dots t_2$. Возьмемо в якості a и b поля

$$a = \{y, 0\} = y\partial_1, \quad b = \{0, y\} = y\partial_2.$$

Уздовж нашої кривої $a(t) = (t\sin\alpha + y_0)\partial_1, b(t) = (t\sin\alpha + y_0)\partial_2$. Оскільки $\gamma' = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, то

$$\nabla_{\gamma'} a = \Big(\frac{da^m}{dt} + \Gamma^m_{ik} a^i \frac{du^k}{dt}\Big)\partial_m =$$

$$(\sin\alpha + \Gamma^1_{11} y \sin\alpha)\partial_1 + \Gamma^2_{11} y \cos\alpha \partial_2 = \cos\alpha\partial_2 = \frac{\cos\alpha}{t\sin\alpha + y_0} b.$$

Значить, при $\alpha \neq 0, \pi$ маємо

$$\Delta\varphi = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\cos\alpha}{t\sin\alpha + y_0} dt = -\operatorname{ctg}\alpha \ln\left|\frac{t_2\sin\alpha + y_0}{t_1\sin\alpha + y_0}\right|.$$

Якщо ж $\alpha = 0$ або $\alpha = \pi$, то

$$\Delta\varphi = -\frac{|t_2 - t_1|}{y_0}.$$

Зауважимо зокрема, що при зміщенні вздовж вертикальної геодезичної (тобто при $\alpha = \pi/2$) обертання $\Delta\varphi = 0$.

Приклад 2.14.3 *На площині Лобачевського*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

розглянемо коло

$$x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r\sin t \qquad (y_0 > r)$$

і обчислимо поворот паралельного векторного поля при обході цього кола, тобто при $t = 0 \dots 2\pi$. Для такої кривої

$$\gamma' = \{-r\sin t, r\cos t\}$$

Вибравши знову $a = y\partial_1, b = y\partial_2$, отримуємо

$$\nabla_{\gamma'} a = \Big(\frac{da^m}{dt} + \Gamma^m_{ik} a^i \frac{du^k}{dt}\Big)\partial_m = \Gamma^2_{11} y(-r\sin t)\partial_2 = -r\sin t\partial_2 = -\frac{r\sin t}{y_0 + r\sin t} b.$$

Тому, при $y_0 > r$

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r\sin t}{y_0 + r\sin t} dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{y_0}{y_0 + r\sin t} dt.$$

Зауважимо, що ми знайшли поворот поля не знаходячи самого паралельного векторного поля вздовж кривої. для його знаходження, потрібно було б розв'язувати систему

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{r\cos t}{y_0 + r\sin t} X^2 = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{-r\sin t}{y_0 + r\sin t} X^1 - \frac{r\cos t}{y_0 + r\sin t} X^2 = 0. \end{cases},$$

У деяких випадках можна знайти результат паралельного перенесення взагалі не розв'язуючи системи рівнянь на паралельне векторне поле. Наступні два очевидних твердження є ключовими в такому методі.

Твердження 2.14.3 *Якщо дві поверхні дотикаються уздовж $\vec{\gamma}$, то результат паралельного перенесення векторного поля $\vec{X}$ уздовж $\vec{\gamma}$ не залежить від того, по якій поверхні здійснюється перенесення.*

Твердження 2.14.4 *Якщо дві поверхні локально-ізометричні, то результати паралельного перенесення вектора уздовж кривих, відповідних по ізометрії, збігаються.*

Для прикладу, розглянемо малу коло радіусу r на сфері радіусу R. "Накриємо" її конусом, що дотикається до сфери вздовж цієї кола. Нехай l – довжина твірної цього конуса. Розріжемо конус вздовж твірної і розгорнемо на площину. Тоді паралельне уздовж кола векторне поле перейде в паралельне векторне поле уздовж кола радіусу l на площині. Отже, поворот паралельного поля при обході кола на сфері дорівнює центральному куту α, що стягнутий цією дугою. З елементарних міркувань *орієнтований* поворот вектора твірної конуса, що спрямований до його вершини, визначиться як

$$\Delta\varphi = 2\pi\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

У той же час, *орієнтований* поворот вектора твірної конуса, що спрямований у протилежному до вершини напрямку, визначиться як

$$\Delta\varphi = -2\pi\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Простежимо тепер за поведінкою дотичного векторного поля кривої по відношенню до паралельного векторного поля. Нагадаємо, що на орієнтованій площині сумарний поворот дотичного векторного поля відносно фіксованого (тобто, паралельного) векторного поля визначається формулою

$$\Delta\alpha = \int_\gamma k\,ds,$$

де k – кривина плоскої кривої. Виявляється, що подібна формула, з заміною $k \to k_g$ справедлива і для кривої на поверхні.

Лема 2.14.3 *Нехай $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}\circ\gamma(t)$ – регулярна крива на поверхні. Позначимо через $\Delta\alpha$ сумарний орієнтований кут повороту дотичного векторного поля кривої $\vec{\gamma}$ відносно паралельного векторного поля на ділянці кривої від точки $A(t_1)$ до точки $B(t_2)$. Тоді*

$$\Delta\alpha = \int_\gamma k_g ds = \int_{t_1}^{t_2} k_g(t)\frac{ds}{dt}\,dt,$$

де k_g – орієнтована геодезична кривина кривої.

Доведення. Нехай $\vec{r}$ – локальна параметризація поверхні. Приймемо як і раніше репер $\{\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r}\}$ як такий, що задає додатну орієнтацію на поверхні. В якості додатного повороту також приймаємо поворот від $\partial_1\vec{r}$ в напрямку вектору $\partial_2\vec{r}$.

Нехай $\vec{p}$ – паралельне векторне поле уздовж $\vec{\gamma}$, а $\vec{\tau} = \vec{\gamma}'$ – дотичне векторне поле на контурі. Покладемо $\vec{q} = \vec{n} \times \vec{p}$. Тоді поле $\vec{q}$ так само одинично і паралельне уздовж контуру.

Нехай α – орієнтований кут між $\vec{p}$ і $\vec{\tau}$. Введемо векторне поле $\vec{\nu}_g = \vec{n} \times \vec{\tau}$ – поле геодезичних нормалей контура. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \quad \cos\alpha\,\vec{p} + \sin\alpha\,\vec{q} \\ \vec{\nu}_g &= -\sin\alpha\,\vec{p} + \cos\alpha\,\vec{q}. \end{aligned}$$

А значить

$$d\vec{\tau} = d\alpha\,\vec{\nu}_g + \cos\alpha\,d\vec{p} + \sin\alpha\,d\vec{q}$$

Оскільки $d\vec{p} \parallel d\vec{q} \parallel \vec{n}$, то домножуючи цю рівність скалярно на $\vec{\nu}_g$, отримаємо

$$d\alpha = \left\langle\, d\vec{\tau}\,, \vec{\nu}_g \,\right\rangle = k_g ds$$

Отже,

$$\Delta\alpha = \int\limits_{\gamma} k_g ds,$$

що і завершує доведення.

■

Наприклад, на площині Лобачевського

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

розглянемо коло $x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r\sin t$ і обчислимо поворот дотичного векторного поля при обході цього кола відносно паралельного векторного поля. Для такого кола $k_g = \frac{y_0}{r}$ і тому

$$\Delta\alpha = \int_{\gamma} k_g ds = \int\limits_0^{2\pi} \frac{y_0}{r}\frac{r}{y_0 + r\sin t}dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{y_0}{y_0 + r\sin t}dt$$

Вправа 2.14.2 *Покажіть, що на площині Лобачевського з* $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ *сумарний кут повороту дотичної кривої* γ *відносно паралельного векторного поля дорівнює*

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \int\limits_{\gamma} \frac{dx}{y},$$

де $\Delta\alpha_0$ *– сумарний кут повороту дотичної кривої* γ *як кривої на евклідовій площині.*

Тепер ми можемо легко довести основну теорему розділу.

Теорема 2.14.1 ***(Локальна формула Гауса-Бонне)*** *Нехай* $\Gamma = \cup\gamma_i$ *– кусочно-гладкий замкнений контур на орієнтованій поверхні, що обмежує однозв'язну область* $\mathcal{D}$*. Позначимо через* $k_g(\gamma_i)$ *– орієнтовану геодезичну кривину дуги* γ_i*,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *– внутрішні кути контуру* Γ*, а через* K *– Гауссову кривину поверхні. Тоді має місце формула*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} KdS + \sum \int\limits_{\gamma_i} k_g(\gamma_i)ds + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

Доведення. Дійсно, зафіксувавши довільне одиничне векторне поле $\vec{a}$ на поверхні, легко помітити, що сумарний поворот дотичного векторного поля контуру відносно поля $\vec{a}$ кратний 2π.

Нехай $\vec{p}$ – паралельне векторне поле на Г. Позначимо через $\Delta\varphi$ – кут між початковим положенням і кінцевим положенням поля $\vec{p}$ при обході контуру Г. Тоді за Лемою 2.9.1,

$$\Delta\varphi = \iint\limits_{\mathcal{D}} KdS.$$

Позначимо через $\vec{\tau}$ – одиничне дотичне векторне поле уздовж Г. Нехай $\Delta\alpha$ – сумарний поворот $\vec{\tau}$ відносно паралельного векторного поля $\vec{p}$ при обході контуру. Тоді, використовуючи Лему 2.14.3 на кожній гладкій ділянці контуру, знайдемо, що

$$\Delta\alpha = \sum \int\limits_{\gamma_i} k_g(\gamma_i)ds + \sum_i (\pi - \alpha_i).$$

Таким чином, використовуючи правило складання орієнтованих кутів, можемо записати

$$\Delta\varphi + \Delta\alpha = 2\pi k.$$

Покажемо, що $k = 1$. Припустимо, що контур знаходиться в деякій карті на поверхні і ця карта проектується в деяку область на площині. Тоді при дифеоморфізмі замкнений контур переходить в замкнений контур, дотичне векторне поле в дотичне векторне поле. "Продеформуємо" контур Г в коло на площині, а образ поля $\vec{p}$ в паралельне векторне поле на площині. Тоді $\Delta\alpha = 2\pi$. Оскільки всі деформації були неперервними, то значить і початково $\Delta\alpha = 2\pi$, тобто $k = 1$.

■

В якості найпростішого наслідку доведеної формули, розглянемо на поверхні геодезичний трикутник. Позначимо куті трикутника через α, β, γ. Оскільки $k_g(\gamma_i) = 0$, то

$$\iint\limits_{\triangle} KdS + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi,$$

тобто

$$\alpha + \beta + \gamma = \iint\limits_{\triangle} KdS.$$

Тоді, якщо всередині трикутника

i) $K = 0$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,

ii) $K > 0$, то $\alpha + \beta + \gamma > \pi$,

iii) $K < 0$, то $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Таким чином, відома проблема в геометрії про суму внутрішніх кутів трикутника отримує чудове розв'язання в контексті формули Гауса-Бонне.

Ще одним наслідком формули Гаусса-Бонне є наступна теорема, що зв'язує кривину і топологію замкненої двовимірнї поверхні. Нагадаємо, що *ейлеровою характеристикою* двовимірного компактного многовиду F називається число

$$\chi(F) = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2,$$

де Γ_0, Γ_1 та Γ_2 – число вершин, ребер та граней довільної триангуляції (або клітинного розбиття) многовиду, відповідно. Ейлерова характеристика є топологічним інваріантом і є незмінною при будь-яких гомеоморфних перетвореннях многовиду.

Теорема 2.14.2 ***(Глобальна формула Гауса-Бонне)*** *Нехай F – замкнена орієнтована C^2-регулярна поверхня. Тоді*

$$\iint\limits_F K dS = 2\pi\chi(F),$$

де $\chi(F)$ – ейлерова характеристика поверхні.

Доведення. Тріангулюємо нашу поверхню $F = \bigcup T_i$ так, що кожен трикутник лежить в деякій локальної карті многовиду. Позначимо $\partial T_i = \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_i^{(k)}$ і для кожного трикутника з внутрішніми кутами $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$ та $\alpha_i^{(3)}$ запишемо формулу Гаусса-Бонне:

$$\iint\limits_{T_i} K dS + \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\gamma_i^{(k)}} k_g(\gamma_i^{(k)}) ds + (\pi - \alpha_i^{(1)}) + (\pi - \alpha_i^{(2)}) + (\pi - \alpha_i^{(3)}) = 2\pi.$$

Оскільки поверхня орієнтована, то орієнтацію всіх трикутників можна вибрати когерентно, тобто так, що напрямок обходу сторін суміжних трикутників протилежний. Підсумуємо за i всі вирази. Тоді, очевидно,

$$\sum_i \iint\limits_{T_i} K dS = \iint\limits_F K dS,$$

Сума інтегралів від геодезичних кривин буде дорівнювати 0, оскільки на кожному ребрі тріангуляції інтегрується одна і та ж функція двічі, але в протилежних напрямках. Сума кутів при всіх вершинах складе величину, що дорівнює $2\pi\Gamma_0$. Оскільки кількість трикутників дорівнює Γ_2, то з урахуванням зауваженого вище сума всіх формул складає вираз

$$\iint\limits_{F^2} K dS + 3\pi\Gamma_2 - 2\pi\Gamma_0 = 2\pi\Gamma_2.$$

Тепер зауважимо, що $3\Gamma_2$ –це загальна кількість сторін трикутників триангуляції. Число ж ребер трангуляції Γ_1 вдвічі менше числа $3\Gamma_2$, бо одне ребро то утворюється ототожненям ("склейкою") двох суміжних сторін трикутників з триангуляції. Значить $3\Gamma_2 = 2\Gamma_1$. І тоді остаточно маємо

$$\iint\limits_F K dS = 2\pi(\Gamma_2 - \Gamma_1 + \Gamma_0) = \chi(F).$$

■

В якості застосування формул Гауса-Бонне, доведемо декілька тверджень.

Теорема 2.14.3 *Компактна орієнтована поверхня додатної гаусової кривини гомеоморфна сфері.*

Доведення. Із глобальної формули Гауса-Бонне випливає, що $\chi(F) > 0$, що має місце лише для сфери.

∎

Теорема 2.14.4 *Нехай F – поверхня з гаусовою кривиною $K \leq 0$. Дві геодезичні γ_1 та γ_2, що виходять з однієї точки не можуть перетнутися в іншій точці так, що $\gamma_1 \cup \gamma_2$ обмежують однозв'язну область.*

Доведення. Із локальної формули Гауса-Бонне випливає, що $\iint\limits_F K dS + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$. Оскільки геодезичні (в силу єдиності) не можуть бути дотичними одна до іншої, то $\alpha_1 < \pi$ і $\alpha_2 < \pi$. З огляду на те, що $K \leq 0$, $\iint\limits_F K dS + \alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$. Суперечність.

∎

Теорема 2.14.5 *Нехай F – компактна орієнтована поверхня з гаусовою кривиною $K > 0$. Будь-які дві прості замкнені геодезичні перетинаються.*

Доведення. З огляду на те що $K > 0$, поверхня гомеоморфна сфері. Припустимо, що існують ддві прості замкнені геодезичні γ_1 та γ_2, що не перетинаються. Тоді вони обмежують область, гомеоморфну зрізаному циліндру. Клітинне розбиття такого циліндру включає дві вершини ($c_0 = 1$), три ребра ($c_1 = 3$) і одну грань ($c_2 = 1$). Тому ейлерова характеристика частини поверхні між геодезичними дорівнює $c_0 - c_1 + c_2 = 0$, що суперечить умові $K > 0$.

∎

Теорема 2.14.6 ***(Теорема Якобі)*** *Нехай γ – регулярна замкнута крива в E^3, γ^* – її нормальний сферичний образ. Якщо γ^* не має самоперетинів, то γ^* ділить сферу на дві рівновеликі частини.*

Доведення. Нехай $\vec{\beta}, \vec{\nu}, \vec{\tau}$ – репер Френе кривої γ . Тоді параметризація γ^* має вигляд

$$\vec{\rho} = \vec{\nu}(s).$$

Оскільки $\vec{\rho}\,'_s = \vec{\nu}\,'_s = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}$, то $|\vec{\rho}\,'_s| = \sqrt{k^2 + \varkappa^2} > 0$. Позначимо через s^* натуральный параметр на γ^*. Тоді

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}.$$

Позначимо через k_g^* — геодезичну кривину γ^*. Оскільки s не натуральний параметр на γ^*, то k_g^* як функцію параметра s знайдемо за формулою

$$k_g^* = \frac{(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}\,'', \vec{n})}{|\vec{\rho}\,'|^3},$$

де $\vec{n}$ – вектор нормалі поверхні на якій лежить крива. Оскільки γ^* лежить на одиничній сфері, то в нашій задачі $\vec{n} = \vec{\nu}$. Для похідних вектор-функції $\vec{\rho}$ маємо

$$\vec{\rho}\,' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta},$$

$$\vec{\rho}\,'' = -k'\vec{\tau} + \varkappa'\vec{\beta} - k(+k\vec{\nu}) + \varkappa(-\varkappa\vec{\nu}) = -k'\vec{\tau} + \varkappa'\vec{\beta} - (k^2 + \varkappa^2)\vec{\nu}.$$

Обчислимо:

$$(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}\,'', \vec{n}) = (-k\vec{\tau} + \varkappa\beta, -k'\vec{\tau} + \varkappa'\beta - (k^2 + \varkappa^2)\vec{\nu}, \vec{\nu}) =$$
$$- k\varkappa'(\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\nu}) - \varkappa k'(\vec{\beta}, \vec{\tau}, \vec{\nu}) = k\varkappa' - \varkappa k'.$$

Значить,
$$k_g^*(s) = \frac{k\varkappa' - \varkappa k'}{(k^2 + \varkappa^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Обчислимо інтеграл:

$$\int\limits_{\gamma^*} k_g^*(s^*)ds^* = \int\limits_{\gamma} k_g^*(s)\frac{ds^*}{ds}ds = \int\limits_{\gamma} \frac{k\varkappa' - \varkappa k'}{(k^2 + \varkappa^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{k^2 + \varkappa^2}ds =$$
$$\int\limits_{\gamma} \frac{k\varkappa' - \varkappa k'}{k^2 + \varkappa^2}ds = \int\limits_{\gamma} d\left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\Big|_0^L = \pi m,$$

де L – довжина кривої γ, m – деяке ціле число. Для плоскої кривої $\varkappa \equiv 0$, тому $m = 0$. Якщо неперервно деформувати криву, то величина πm з одного боку змінюється неперервно, а з іншого боку — стрибком. Отже, ця величина є константою. Тобто $m = 0$, а значить
$$\int\limits_{\gamma^*} k_g^* ds^* = 0.$$

Нехай $\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2^*$ – області на сфері, такі що $\partial\mathcal{D}_1^* = \partial\mathcal{D}_2^* = \gamma^*$. За формулою Гаусса-Бонне,

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^*{}_1} KdS + \int\limits_{\gamma^*} k_g^* ds^* = 2\pi.$$

Але сфера одинична, отже $K \equiv 1$. Тоді

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^*{}_1} KdS = S(D_1^*),$$

а значить $S(\mathcal{D}_1^*) = 2\pi$.

$\blacksquare$

Вправа 2.14.3 *Нехай γ – замкнена геодезична на опуклій поверхні в E^3 класу $\mathcal{C}^2$. Тоді її нормальний сферичний образ γ^* ділить сферу на дві рівновеликі частини.*

Розділ 3

Елементи геометрії підмноговидів і тензорного аналізу.

3.1 Гладкі многовиди.

Означення 3.1.1 *Многовидом вимірності n називається зв'язний хаусдорфовий топологічний простір із зліченною базою, кожна точка якого має окіл гомеоморфний $I\!R^n$.*

Атласом на многовиді M^n називається набір відкритих підмножин $\{U_\alpha\}$ і гомеоморфізмів $\{\varphi_\alpha\}$ таких, що

- $M = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$;
- кожен φ_α є гомеоморфізмами U_α на $I\!R^n$ ($U_\alpha \overset{\varphi_\alpha}{\approx} I\!R^n$);
- якщо $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$, то $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : I\!R^n \to I\!R^n$ є гомеоморфізмом.

Пара $(u_\alpha, \varphi_\alpha)$ називається *локальною мапою*, φ_α називається *координатним гомеоморфізмом*, $\varphi_{\alpha\beta}$ називаються *гомеоморфізмами склеювання.* Таким чином, кажній точці многовиду, що лежить на локальній мапі U_α, ставиться в відповідність набір чисел $(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$, який називається *локальними координатами точки* на мапі U_α. оскільки φ_α – гомеоморфізм, то φ_α^{-1} відображає $I\!R^n$ в $U_\alpha \subset M$. Відображення φ_α^{-1} називається локальною параметризацією M на локальній мапі U_α. Зауважимо, що в виду зліченності бази, атлас на многовиді можна вибрати так, що число його локальних мап не більше ніж лічильно.

Якщо Q належить перетину U_α і U_β, то Q можна поставити у відповідність два набора параметрів: $(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ і $(y^1_\beta, \dots, y^n_\beta)$. Тоді гомеоморфізм склеювання

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : I\!R^n \to I\!R^n$$

є відображенням арифметичних просторів і задається набором з n неперервністю функції

$$y^i_\beta = y^i_\beta(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha).$$

Означення 3.1.2 *Многовид називається гладким класу C^k, якщо існує атлас $\mathcal{A} = \{(u_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I\!R}$ такий, що $\varphi_{\alpha\beta} \in C^m$ ($m \geq k$) для будь-яких α, β таких, що $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$.*

При $k = 0$ многовид називається топологічним. Гладкі многовиди, на відміну від топологічних, мають властивість, що дозволяє аналітично визначити, чи є відображення склеювання гомеоморфізмом (насправді навіть *дифеоморфізмом*, тобто гладким, взаємно-однозначним відображенням з гладким оберненим). Такий засіб дає *теорема об оберненом відображенні*, добре відома з аналізу.

Теорема 3.1.1 *Нехай $f : I\!R^n(x) \to I\!R^n(y)$ C^k-гладке відображення, задане набором гладких функцій*

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

Якщо в точці $p(x^1_p, \ldots, x^n_p) \in M$ визначник матриці Якобі

$$\det\Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\Big)(p) \neq 0,$$

то існує окіл U_p точки p такий, що в цьому околі дане відображення оборотне і обернене до нього також є гладким класу регулярності C^k.

3.2 Локальна параметризація підмноговидів в $I\!R^n$.

Нагадаємо наступне визначення з курсу топології.

Означення 3.2.1 *Підмножина F топологічного простору M називається підмноговидом, якщо F є многовид в індукованій топології.*

Ми будемо розглядати підмноговиди в $I\!R^n$. Нехай $F^k \subset I\!R^n$ підмноговид. Позначимо через $(x^1, \ldots, x^n)$ декартові прямокутні координати в $I\!R^n$. Точці $p \in F^k$ відповідає набір декартових координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Але, оскільки F^k – підмноговид, то існує локальний гомеоморфізм φ деякого його індукованого околу $W = U \cap F^k \overset{\varphi}{\approx} I\!R^k$ (U – околу точки в $I\!R^n$). Позначимо через $(u^1, \ldots, u^k)$ – декартові координати в $I\!R^k$. Тоді $\varphi_\alpha^{-1}(I\!R^k) = W \subset U$, а значить відображення $\varphi_\alpha^{-1} : I\!R^k \to I\!R^n$ задається у вигляді

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^k) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Відображення (3.1) називається *локальною параметризацією* F^k (в околі точці $p \in F$). В просторі $I\!R^n$, кожній його точці можна поставити у відповідність радіус-вектор цій точці. Тоді локальну параметризацію (3.1) можна записати у вигляді вектор-функції

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^k), \tag{3.2}$$

яка називається *векторною локальною параметризацією* підмноговида в $F^k \subset I\!R^n$.

Аналітична умова, що забезпечує локальну оберненість[1] і гладкість для гладкого відображення(3.1), є його регулярність. Сформулюємо це поняття в більш широкому контексті.

[1]У сенсі наявності відображення з $W = U \cap F^k$ на $I\!R^k$

Означення 3.2.2 *Гладке відображення $f : I\!R^k \to I\!R^n$ називається регулярним в точці $p \in I\!R^k$, якщо ранг матриці Якобі цього відображення в точці p максимальний (тобто, дорівнює $\min(k, n)$).*

Нехай U_p – окіл точки p в точках якої відображення f регулярно. При $k < n$ відображення називається локальной *імерсіей* (зануренням); при $k > n$ відображення називається локальной *субмерсіей* (накладенням); при $k = n$ відображення називається локальним *дифеоморфізмом.*

Означення 3.2.3 *Зв'язна підмножина F в $I\!R^n$ називається параметризованим регулярним підмноговидом, якщо для будь-якої точки $p \in F$ існує $U_p = W_p \cap F$ і така локальна параметризація $\vec{r} : D(u^1, \dots, u^k) \to W_p \subset I\!R^n$, що ранг матриці Якобі відображення $\vec{r}$ дорівнює k.*

Якщо локально відображення $\vec{r}$ задається як

$$\begin{gathered} x^1 = x^1(u^1 \dots u^k) \\ \dots \\ x^n = x^n(u^1 \dots u^k) \end{gathered}$$

то умова регулярності

$$rg \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} = k$$

Якщо $k = 1$, то цей підмноговид називається *регулярною кривою*, а якщо $k = 2$ - *регулярною поверхнею.* Якщо $n > 3$ і $k = n - 1$, то підмноговид називається *гіперповерхнею.*

Приклад 3.2.1 Розглянемо відображення

$$\vec{r} : I \to I\!R^2 \quad I = (0, 2\pi).$$

задано у вигляді

$$\vec{r} = \{\cos t, \sin t\} \sim \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right.$$

Матриця Якобі:

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Її ранг равен 1 для всіх t, оскільки $(x_t')^2 + (y_t')^2 \equiv 1$

Приклад 3.2.2 $\quad \vec{r} : D^2(u, v) \to I\!R^3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{array} \right.$$

Тут $D^2 = \mathbb{R}^2$, оскільки відображення визначено і взаємно однозначно у всіх точках $\mathbb{R}$. Матриця Якобі має вигляд:

$$\partial\vec{r} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \quad rg\,(\partial\vec{r}) = 2$$

Ця поверхня еліптичного параболоїда.

Приклад 3.2.3 Розглянемо $\vec{r} : D^2 \to \mathbb{R}^3$ виду

$$\begin{cases} x = \sin u \, \cos v \\ y = \sin u \, \sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

Тут $D^2 = \{0 < u < \pi, \; 0 < v < 2\pi\}$ – відкритий прямокутник на площині $\mathbb{R}^2$. Матриця Якобі

$$(\partial\vec{r}) = \begin{pmatrix} \cos u \, \cos v & -\sin u \, \sin v \\ \cos u \, \sin v & \sin u \, \cos v \\ -\sin v & 0 \end{pmatrix}$$

Її ранг може бути менше 2 тільки у випадку, коли стовпчики матриці пропорційні. Розглянемо вектор-функції, складені з стовпців матриці Якобі, а саме,

$$\begin{array}{ll} \partial_u\vec{r} = & \{\ \cos u \, \cos v, \quad \cos u \, \sin v, \quad -\sin u\} \\ \partial_v\vec{r} = & \{-\sin u \, \sin v, \quad \sin u \, \cos v, \qquad 0 \quad \} \end{array}.$$

Тоді умова пропорційності стовпців буде еквівалентна умові колінеарності цих вектор-функцій, що в свою чергу виражається у вигляді

$$\partial_u\vec{r} \times \partial_v\vec{r} = 0.$$

Обчислимо

$$\partial_u\vec{r} \times \partial_v\vec{r} = \{\sin^2 u \, \cos v, -\sin^2 u \, \sin v, \sin u \, \cos v\} = \sin u\{\sin u \, \cos v, -\sin u \, \sin v, \, \cos u\}$$

оскільки $\sin u\big|_{D^2} \neq 0$, то $rg(\partial\vec{r}) = 2$ і параметризація регулярна. Дана поверхня є частиною одиничної сфери.

3.3 Явна параметризація.

Означення 3.3.1 *Нехай F^k – підмноговид в $\mathbb{R}^n$. Кажуть, що підмноговид F^k допускає явну параметризацію в околі точки $p \in F^k$, якщо існує окіл $U_p \subset F^k$, який є графіком гладкого відображення $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, тобто*

$$U_p = \big\{(x, y) \,\big|\, y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k}\big\}.$$

Теорема 3.3.1 *Якщо F^k– регулярний параметризований підмноговид в $I\!R^n$, то для будь-якої точки $p \in F^k$ є окіл U_p для якого існує явна параметризація.*

Доведення. Нехай точка $p \in F^k$. Нехай U_p– окіл p для якого існує регулярна параметризація

$$\vec{r}: D^k(u^1 \dots u^k) \to U_p.$$

Випишемо це відображення в координатах:

$$\begin{cases} x^1 = & x^1(u^1 \dots u^k) \\ \vdots & \\ x^k = & x^k(u^1 \dots u^k) \\ x^{k+1} = & x^{k+1}(u^1 \dots u^k) \\ \vdots & \\ x^n = & x^n(u^1 \dots u^k) \end{cases}$$

Будемо вважати, що ранг цього відображення досягається на перших k рядках, тобто, будемо вважати, що

$$rg\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)\Bigg|_{D^k} = k, \qquad i, j = 1, \dots, k$$

Позначимо через $\bar{p}$ точку в $I\!R^k$ з координатами $(u_p^1, \dots, u_p^k)$. Покладемо

$$x_p^i = x^i(u_p^1, \dots, u_p^k).$$

Тоді в деякому околі $V(x_p) \subset I\!R^k$ існує обернене відображення

$$u : V(x_p) \to V_{\bar{p}} \subset U_p,$$

що записується в координатній формі як

$$u : \begin{cases} u^1 = u^1(x^1 \dots x^k) \\ \vdots \\ u^k = u^k(x^1 \dots x^k) \end{cases}$$

Причому, ці функції мають той же клас регулярності, що і вихідні функції $x^i = x^i(u^1 \dots u^k)$. Підставляючи ці функції в координатний вираз параметризації, отримаємо

$$\begin{aligned} & x^1 = x^1 \\ & x^2 = x^2 \\ & \dots \\ & x^k = x^k \\ & x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ & \dots \\ & x^n = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

що завершує доведення.

■

3.4 Неявно задані регулярні підмноговиди в $I\!\!R^n$.

Нехай $f : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ $(n > m)$ гладке відображення. Точка $q \in I\!\!R^m$ називається *регулярним значенням* відображення f, якщо ранг матриці Якобі відображення f у всіх точках $p \in f^{-1}(q)$ максимален[2].

Теорема 3.4.1 *Нехай $f : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ $(n > m)$ – гладке відображення. Нехай $q \in I\!\!R^m$ – регулярне значення для f. Тоді кожна зв'язна компонента $f^{-1}(q)$ є параметризованим підмноговидом $I\!\!R^n$ вимірності $n - m$.*

Доведення. Покажемо тільки, що в околі кожній точці із прообразу регулярного значення, підмножина $f^{-1}(q)$ може бути задана як графік гладкого відображення.

Нехай $f : I\!\!R^n \to I\!\!R^m$ – гладке відображення. Нехай $q \in I\!\!R^m$– регулярне значення. Нехай $p \in f^{-1}(q)$. Задамо наше відображення в координатах:

$$f : \begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^m = f^m(x^1, \dots, x^m) \end{cases}$$

Матриця Якобі випишеться як

$$\partial f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Будемо вважати, що

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_p \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Тоді існує окіл U_p точки p такий, що

$$det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) |_{U_p} \neq 0$$

По теоремі про неявне відображення існує рішення рівняння

$$f(x^1, \dots, x^m; x^{m+1}, \dots, x^n) = 0$$

у вигляді

$$f(\varphi^1(x^{m+1}, \dots, x^n),\ \varphi^2(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \varphi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1} \dots x^n) = 0$$

де $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$– гладкі функції. Значить рішення рівняння:

$$f(x^1 \dots x^m, x^{m+1} \dots x^n) = 0$$

[2] тобто, дорівнює m

може бути представлено у вигляді:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(x^{m+1} \dots x^n) \\ \vdots \\ x^m = \varphi^m(x^{m+1} \dots x^n) \\ x^{m+1} = x^{m+1} \\ \vdots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

тобто, у вигляді графіка відображення $\varphi : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$. Отже, кожна зв'язна компонента множини $f^{-1}(q)$ є параметризованим підмноговидом в $\mathbb{R}^n$ вимірності $n - m$.

■

Означення 3.4.1 *Неявно заданим регулярним підмноговидом в $\mathbb{R}^n$ називається повний прообраз регулярного значення гладкого відображення $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Вимірність цього підмноговида дорівнює $n - m$.*

Вимога регулярності істотно в силу наступної теореми.

Теорема 3.4.2 *(Уітні). Для будь-якої замкненої підмножини $F \subset \mathbb{R}^n$ існує C^∞ – гладке відображення $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, таке, що $F = f^{-1}(0)$.*

Наприклад, без умови регулярності, підмножина

$$\gamma = \{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 \,|\, F(x, y) = 0\}$$

може мати вигляд, який мало нагадує інтуїтивне уявлення про криву. Взяти хоча б підмножину F на площині, що складається з точок з цілочисловими координатами або Канторову множину.

3.5 Перетворення базису дотичного простору при заміні параметрів

Нехай поверхня F^m параметризована двома областями параметрів $\mathcal{D}^m(u^1, \dots, u^m)$ і $\mathcal{G}(v^1, \dots, v^m)$ і нехай цим областям відповідає параметризації

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m), \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^m).$$

Позначимо через $u = u(v)$ дифеоморфізм $u : \mathcal{G}^m \to \mathcal{D}^m$ виду

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, \dots, v^m), \\ \qquad \dots\dots\dots\dots \\ u^m = u^m(v^1, \dots, v^m). \end{cases}$$

В довільній точці $q \in F^m$ простір T_qF^m містить дві системи базисів $\partial_1\vec{r}, \dots, \partial_m\vec{r}$ і $\partial_1\vec{\rho}, \dots, \partial_m\vec{\rho}$.

Складемо формальні матриці-рядки,

$$\partial\vec{r} = (\partial_1\vec{r}, \dots, \partial_m\vec{r}) \quad \text{и} \quad \partial\vec{\rho} = (\partial_1\vec{\rho}, \dots, \partial_m\vec{\rho}).$$

Справедливе наступне твердження.

Твердження 3.5.1 *Нехай регулярна поверхня F^m параметризована двома вектор - функціями $\vec{r} = \vec{r}(u)$ і $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ над областями параметрів $\mathcal{D}^m(u)$ і $\mathcal{G}(v)$ відповідно. І нехай $u : \mathcal{G}^m \to \mathcal{D}^m$ локальний дифеоморфізм. Тоді*

$$\partial\vec{r} = \partial\vec{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right),$$

де $\left(\dfrac{\partial u}{\partial v}\right)$ *— матриця Якобі перетворення координат.*

Доведення. оскільки $u : \mathcal{G}^m \to \mathcal{D}^m$ локальний дифеоморфізм, то він задає перепараметризацію а поверхні і ми можемо записати

$$\vec{\rho}(v^1, \dots, v^m) = \vec{r}(u^1(v^1, \dots, v^m), \dots, u^m(v^1, \dots, v^m)).$$

Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, знайдемо

$$\partial_i\vec{\rho} = \partial_k\vec{r}\,\frac{\partial u^k}{\partial v^i},$$

що в матричній формі запису переписується у вигляді

$$(\partial_1\vec{\rho}, \dots, \partial_m\vec{\rho}) = (\partial_1\vec{r}, \dots, \partial_m\vec{r})\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^1}{\partial v^m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial v^1} & \dots & \dfrac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix}$$

або в згорненому вигляді

$$\partial\vec{\rho} = \partial\vec{r}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right).$$

■

3.5.1 Перетворення координат дотичного вектора при заміні параметрів

Нехай $\vec{X}$ дотичний вектор до поверхні F^m в довільній її точці. оскільки вектор-функції $\partial_i\vec{r}, \dots, \partial\vec{r}$ визначають базис дотичного простору поверхні F^m в кожній її точці, то має місце розкладання

$$\vec{X} = X^1\partial_1\vec{r} + \dots + X^m\partial_m\vec{r}.$$

В цьому розкладанні вектор $\vec{X}$ зображен як вектор в E^{m+p}, має $m+p$ координат, які ми будемо називати зовнішніми координатами вектора $\vec{X}$.

Поставимо у відповідність вектору $\vec{X}$ набор параметрів $(X^1, \dots, X^m)$ записаних у вигляді вектора-стовпця:

$$\vec{X} \to \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} = X.$$

Цей набір параметрів ми будемо називати *внутрішніми координатами* дотичного вектора $\vec{X}$. Використовуючи внутрішні координати вектора, його розкладання по базису дотичного простору даної параметризації, скажімо $\vec{r} = \vec{r}(u)$, набуде вигляду

$$\vec{X} = \partial\vec{r}\,X.$$

Твердження 3.5.2 *Нехай регулярна поверхня F^m параметризована двома вектор - функціями $\vec{r} = \vec{r}(u)$ і $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ над областями параметрів $\mathcal{D}^m(u)$ і $\mathcal{G}(v)$ відповідно. І нехай $u : \mathcal{G}^m \to \mathcal{D}^m$ локальний дифеоморфізм. Позначимо через $X(u)$ і $X(v)$ внутрішні координати одного і того ж вектора відносно систем координат $\mathcal{D}^m(u)$ і $\mathcal{G}^m(v)$ відповідно. Тоді*

$$X(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) X(v),$$

Доведення. Нехай $\vec{X}$ довільний дотичний вектор до поверхні. Тоді його розкладання по базисах двох параметризацій будуть мати вигляд

$$\vec{X} = X^1(u)\partial_1\vec{r} + \ldots + X^m(u)\partial_m\vec{r}, \quad \vec{X} = X^1(v)\partial_1\vec{\rho} + \ldots + X^m(v)\partial_m\vec{\rho}$$

або в матричному записі

$$\vec{X} = \partial\vec{r}\,X(u), \quad \vec{X} = \partial\vec{\rho}\,X(v).$$

Ми отримали два розкладання одного й того ж вектора в E^{m+p} і, отже, тримуємо рівність

$$\partial\vec{r}\,X(u) = \partial\vec{\rho}\,X(v).$$

Користуючись формулою перетворення базисів дотичного простору, продовжимо

$$\partial\vec{r}\,X(u) = \partial\vec{\rho}\,X_v = \partial\vec{r}\,\frac{\partial u}{\partial v}\,X(v).$$

Звідси негайно робимо висновок

$$X(u) = \frac{\partial u}{\partial v}X(v).$$

■

3.6 Поняття регулярного підмноговиду і дотичного простору.

Нагадаємо деякі поняття, які стосуються геометрії поверхонь.

Означення 3.6.1 *Елементарною поверхнею $F^m \subset I\!R^{m+p}$ називається образ відкритої кулі $\mathcal{D}^m \subset I\!R^m$ при його топологічному відображенні в $I\!R^{m+p}$.*

Топологічним відображенням називається відображення $\varphi\colon \mathcal{D}^m \to I\!R^{m+p}$ є гомеоморфізмом на свій образ, тобто

$$\mathcal{D}^m \overset{\varphi}{\approx} \varphi(\mathcal{D}^m) = F^m.$$

Область $\mathcal{D}$ називається *областю параметрів*. Кажуть також, що *поверхня F^m задана над областю параметрів $\mathcal{D}$.*

Область параметрів визначена не однозначно. Якщо $\varphi\colon \mathcal{D}^m \to \varphi(\mathcal{D}^m)$, а $\psi : \mathcal{G}^m \approx \mathcal{D}^m$ – гомеоморфізм, то відображення $\varphi \circ \psi\colon \mathcal{G}^m \to I\!R^{p+m}$ має таку властивість, що

$$(\varphi \circ \psi)(\mathcal{G}^m) = \varphi(\mathcal{D}^m) = F^m$$

Гомеоморфізм ψ називається *перепараметризацією* поверхні F^m або заміною параметрів. Розгдлянемо

$$\mathbb{R}^{m+p} = \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \cdots \times \mathbb{R}^1}_{m+p}$$

і розглянемо проекції

$$\pi_i\colon\ \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}^1_{(i)},$$

які є неперервними відображеннями. Тоді композиції $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ є неперервними відображеннями

$$\varphi_i\colon\ \mathcal{D}^m \to \mathbb{R}^1_{(i)}$$

і називаються *компонентами* відображення φ.

Якщо $(x^1, \ldots, x^{m+p}) \in \mathbb{R}^{m+p}$, а $(u^1, \ldots, u^m) \in \mathcal{D}^m \subset \mathbb{R}^m$, то тоді $\varphi_i(u)$ можно записати у вигляді

$$x^i = \varphi_i(u^1, \ldots, u^m),$$

а саме відображення φ розписати покомпонентно у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^1 & = & \varphi_1(u^1, \ldots, u^m) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{m+p} & = & \varphi_{m+p}(u^1, \ldots, u^m) \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Рівняння (3.3) називаються *параметричними рівнянням* елементарної поверхні F^m або *координатним виразом* гомеоморфізма φ. Відображення φ називається *гладким* класу C^k, якщо в його координатному виразі $\varphi_i \in C^s$ $(s \geq k)$. Гомеоморфізм φ називається *дифеоморфізмом* класу C^k, якщо φ і φ^{-1} є C^k гладкими.

Рівняння (3.3) взагалі кажучи не задають елементарної поверхні в E^{m+p}, оскільки не забезпечують виконання вимоги $\mathcal{D}^m \overset{\varphi}{\approx} \varphi(\mathcal{D}^m)$. Досить покласти $\varphi_i(u^1, \ldots, u^m) = c_i$. Тоді побудоване за відображенням φ_i відображення

$$\varphi(u^1, \ldots, u^m) = (c_1, \ldots, c_m)$$

переводить $\mathcal{D}^m$ в точку, а значить не є гомеоморфізмом. На рівняння (3.3) необхідно накласти додаткову умову, щоб по відображенням φ_i відновлювався гомеоморфізм φ. Виняток становить випадок, коли відображення $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+p}$ має вигляд

$$\varphi(u) = (u, h(u)).$$

де $u \in \mathcal{D}^m$. В цьому випадку відображення φ задає біекцію між $\mathcal{D}^m$ і графіком Γ_h відображення $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Відображення h неперервно (гладко) тоді і тільки тоді, коли відображення $\varphi : \mathcal{D}^m \to \Gamma_h$, задане по формулі $\varphi(u) = (u, h(u))$, є гомеоморфізмом (дифеоморфізмом) $\mathcal{D}^m$ на графік відображення h, тобто

$$\mathcal{D}^m \overset{\varphi}{\approx} \varphi(\mathcal{D}^m) = \Gamma_h.$$

Таким чином, графіки гладких відображенннь дають приклад елементарних поверхонь, які називаються *явно заданими*.

Означення 3.6.2 *Кажуть, що відображення* $\varphi : I\!R^m \to I\!R^{m+p}$ *задає поверхню* F^m *над областю* $\mathcal{D}^m \in I\!R^m$ ***явно****, якщо* $\varphi|_{\mathcal{D}^m}$ *має вигляд діагонального добутку*

$$\varphi|_{\mathcal{D}^m} = id \times h,$$

де $h : I\!R^m \to I\!R^p$ *гладке відображення, а* $id : I\!R^m \to I\!R^m$ *– тотожне відображення.*

Зазначимо тепер критерій, що дозволяє локально задавати елементарні поверхні або, що те ж саме, локально відновлювати гомеоморфізм по його координатному виразу.

Твердження 3.6.1 *Нехай* $\varphi : I\!R^m \to I\!R^{m+p}$*, задане своїми компонентами* $\varphi_i : I\!R^m \to I\!R^1$*, і* $\varphi \in \mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$*. Якщо в точці* $u_0 \in I\!R^m$ *ранг матриці Якобі*

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\bigg|_{u_0} = m,$$

то існує окіл A_{u_0} *точки* u_0 *і локальний дифеоморфізм* $\psi\colon I\!R^m \to I\!R^m$ *такі, що*

$$(\varphi \circ \psi)|_{A_{u_0}} = id \times h,$$

де $h \in C^k$*.*

Іншими словами, *вибором нової локальної параметризації, підмножина* $\varphi(A_{u_0}) \subset I\!R^{m+p}$ *може бути представлена у вигляді графіка гладкого відображення зі збереженням порядку гладкості.*

Доведення. Нехай $\varphi : I\!R^m \to I\!R^{m+p} = I\!R^m \times I\!R^p$. Представимо це відображення у вигляді діагонального добутку $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вважаючи

$$\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u)),$$

де $\varphi_1 : R^m \to R^m$, а $\varphi_2 : R^m \to R^p$.

оскільки

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\bigg|_{u_0} = m,$$

то не порушуючи загальності, будемо вважати, що

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)\bigg|_{u_0=0} \neq 0.$$

Тоді існує окіл A_{u_0}, такий що $\det\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)\bigg|_{A_{u_0=0}} \neq 0.$

За теоремою про обернене відображення існує відображення

$$\psi\colon I\!R^m \leftarrow I\!R^m,$$

таке що $(\varphi_1 \circ \psi)|_{A_{u_0}} = id$, при цьому $\psi \in \mathcal{C}^k$ і є локальним дифеоморфізмом. Тоді маємо

$$\varphi \circ \psi = (\varphi_1 \circ \psi, \varphi_2 \circ \psi) = (id, h),$$

тобто $(\varphi \circ g)|_{A_{u_0}} = id \times h, \quad h \in C^k$, що і потрібно було довести.

∎

Доведене твердження є основою для визначення регулярної поверхні.

Означення 3.6.3 *Підмножина $F^m \subset I\!R^{m+p}$ називається регулярною параметризованою поверхнею вимірності m класу C^k, якщо у кожній точки $q \in F^m$ цієї множини існує окіл $V_q \subset I\!R^{m+p}$ і дифеоморфізм $\varphi : \mathcal{D}^m \subset I\!R^m \to F^m \cap V_q = W_q$, що $\varphi \in C^k$ і*

$$\operatorname{rg} \varphi|_{\mathcal{D}^m} = m.$$

Відображення φ називається регулярною параметризацією поверхні F^m в околі W_q.

Безпосередньо з визначення випливає, що регулярна поверхня локально може бути задана як графік деякого відображення.

В диференціальній геометрії відображення $\varphi\colon \mathcal{D}^m \to I\!R^{m+p}$ прийнято задавати у вигляді вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$, відкладаючи вектор $\vec{r}$ з координатами

$$\{\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)\}$$

від початку координат ототожнювати образ $\varphi(\mathcal{D}^m)$ з годографом цієї вектор-функції. Замість

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} x^1 & = & \varphi_1(u^1, \dots, u^m); \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ x^{n+p} & = & \varphi_{m+p}(u^1, \dots, u^m) \end{array} \right.$$

пишуть

$$\vec{r} = \vec{r}(u) = \{\varphi_1(u), \dots, \varphi_{m+p}(u)\}.$$

За визначенням вважаємо, що $\vec{r}(u) \in \mathcal{C}^k$ якщо $\varphi_i \in \mathcal{C}^s$, $(s \geq k)$. Образ вектор-функції $\vec{r}$ називається її *годографом.*

Позначимо

$$\partial_i \vec{r} = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^i} \dots, \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^i} \right\} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Твердження 3.6.2 *Регулярність параметризації $\vec{r}\colon \mathcal{D}^m \to I\!R^{m+p}$ еквівалентна лінійній незалежності системи вектор-функцій*

$$\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}.$$

Доведення. Стовпці матриці Якобі відображення $\vec{r}$

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

складені з вектор-функцій $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$, а значить, якщо $\operatorname{rg}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = m$, то вектори $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ лінійно незалежні.

■

Регулярну поверхню можна отримати, використовуючи теорему про прообраз регулярного значення відображення.

Твердження 3.6.3 *Нехай $f\colon I\!R^{m+p} \to I\!R^p$ — гладке відображення і нехай $y_0 \in I\!R^p$ — регулярне значення відображення f. Тоді $f^{-1}(y_0)$ — регулярна параметризована поверхня.*

Такі поверхні називаються заданими *неявно.*

3.6.1 Криві на поверхні

Означення 3.6.4 *Нехай $F^m \subset I\!R^{m+p}$ – поверхня. Кривою на поверхні F^m називається неперервне відображення $\sigma\colon [a,b] \to F^m$, що є локальним гомеоморфізмом на свій образ.*

Нехай $\varphi\colon \mathcal{D}^m \to \varphi(\mathcal{D}^m) \subset I\!R^{m+p}$ локальний гомеоморфізм. Тоді відображення $\gamma :\ [a,b] \to \mathcal{D}^m$ задане як $\gamma = \varphi^{-1} \circ \sigma$, існує крива в області параметрів $\mathcal{D}^m$. І навпаки, якщо $\gamma :\ [a,b] \to \mathcal{D}^m$—крива в області параметрів, то $\sigma = \varphi \circ \gamma :\ [a,b] \to F^m$ — крива на поверхні. Таким чином, криву на поверхні можна задати кривою в області параметрів і навпаки, будь-яку криву з області параметрів можна підняти на поверхню.

Рівняння кривої на поверхні, представлене рівнянням кривої $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}^m$ в області параметрів називається **внутрішнім параметричним рівнянням** кривої на поверхні F^m.

Запишемо внутрішнє рівняння кривої на поверхні у вигляді

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Задамо F^m вектор-функцією $\vec{r}\colon \mathcal{D}^m \to I\!R^{m+p}$. Тоді **зовнішнім параметричним рівнянням кривої** називається рівняння

$$\vec{\gamma}\,(t) \ = \ \vec{r}\,(u(t)) \quad \sim \quad \vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma\,.$$

Внутрішнє рівняння кривої задає цю криву незалежно від простору, в якому лежить поверхня, що розглядається. Воно пов'язує внутрішні локальні координати точок поверхні. Перехід до зовнішнього рівняння кривої означає завдання кривої, що лежить на поверхні, як кривої в обхопному евклідовому просторі.

Твердження 3.6.4 *Крива $\vec{\gamma}\,(t)$ регулярна як крива в E^{m+p} тоді і тільки тоді, коли регулярна крива $\gamma\,(t)$ як крива в області параметрів регулярної поверхні.*

Доведення. Дійсно, дотичний вектор до кривої в області параметрів має вигляд

$$\gamma\,' = \left\{ \frac{du^1}{dt}, \dots, \frac{du^m}{dt} \right\}.$$

Для дотичного вектора кривої $\vec{\gamma}$ отримаємо

$$\vec{\gamma}\,' = \partial_i \vec{r}\,\frac{du^i}{dt}.$$

Тепер очевидно, що якщо $|\vec{\gamma}\,'| \neq 0$, то і $|\gamma\,'| \neq 0$ в силу лінійної незалежності векторів $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ і навпаки.

∎

3.6.2 Дотичний простір.

Означення 3.6.5 *Дотичним простором до поверхні $F^m \subset E^{m+p}$ в точці $q \in F^m$ називається лінійний простір $T_qF^m \subset E^{m+p}$, що містить дотичні вектори до всіх регулярних кривих $\gamma \subset F^m$, які проходять через точку q.*

Твердження 3.6.5 *Нехай F^m — регулярна поверхня, $q \in F^m$. Тоді в точці q існує дотичний простір, причому*

$$T_qF^m = Lin\,(\partial_1\vec{r}, \ldots, \partial_m\vec{r})(q).$$

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \ldots, u^m)$ — локальна параметризація F^m і нехай точці q відповідає координати $(u^1_q, \ldots, u^m_q)$. Нехай γ — регулярна крива на F^m, що проходить через точку q, тобто

$$\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to F^m,$$

причому $\gamma\,(t_0) = q$. Запишемо внутрішнє рівняння кривої γ

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Тоді зовнішнє рівняння кривої γ має вигляд

$$\vec{\gamma}\,(t) = \vec{r}(u^1(t), \ldots, u^m(t)).$$

Дотичний вектор кривої $\vec{\gamma}$ в точці q знаходимо як дотичний вектор до кривої в E^{m+p} за звичайним правилом, диференціюючи вектор-функцію $\vec{\gamma}\,(t)$

$$\vec{\gamma}\,'(t_0) = \partial_i\vec{r}\,(q)\frac{du^i}{dt}(t_0).$$

Отже,

$$\vec{\gamma}\,'(t_0) \in Lin\,(\partial_1\vec{r}, \ldots, \partial_m\vec{r})(q).$$

І навпаки, якщо розглянути довільний вектор

$$\vec{a} = a^1\partial_1\vec{r}\,(q) + \ldots + a^m\partial_m\vec{r}\,(q) \in Lin\,(\partial_1\vec{r}, \ldots, \partial_m\vec{r})(q).$$

то крива в області параметрів виду

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = a^1t + u^1_q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^m = a^mt + u^m_q, \end{cases}$$

задає на поверхні регулярну криву

$$\vec{\gamma}\,(t) = \vec{r}\,(a^1t + u^1_q, \ldots, a^mt + u^m_q),$$

проходить через точку $q \in F^m$ при $t = 0$. Причому

$$\vec{\gamma}\,'(0) = a^1\partial_1\vec{r}\,(q) + \ldots + a^m\partial_m\vec{r}\,(q) = \vec{a}.$$

Отже,

$$T_qF^m = Lin\,(\partial_1\vec{r}\,(q), \ldots, \partial_m\vec{r}\,(q))$$

■

Наслідок 3.6.1 *Рівняння дотичного простору до F^m в точці q, як афінного підпростору в E^{m+p}, має вигляд*

$$\vec{R} = \vec{r}(q) + t^i\,\partial_i\vec{r}(q),$$

де $\vec{r} = \vec{r}(u_1,\dots,u^m)$ — параметризація F^m.

3.7 Визначення і приклади тензорних полів

До цього моменту геометрія на поверхні розглядалася в межах однієї локальної карти. На перетині двох локальних карт геометричні об'єкти (такі, як вектори, диференціальні форми, лінійні оператори та ін.) мають різне координатне уявлення в залежності від вибору локальної карти. На щастя, геометричні об'єкти перетворюються при заміні параметрів деяким спеціальним чином, що дозволяє "склейку" геометричних об'єктів на перетині карт. Такий характер перетворення називається *тензорним*, а сам об'єкт, який підпорядковується тензорному закону перетворення називається *тензором.* Таким чином поняття тензора дозволяє глобалізувати об'єкти, які спочатку були задані локально.

Нехай F^n – гладкий многовид. Не порушуючи загальності, можна вважати, що F^n є вкладеним підмноговидом в евклідовому просторі E^N досить великого числа вимірів.

Нехай $(U,\varphi(u))$ и $(V,\varphi(v))$ дві локальні карти з непустим перетином. На $U\cap V$ виникає дифеоморфізм перетворення координат $\varphi(u)\circ\varphi(v)^{-1} = u(v)$, який має координатний вираз у вигляді $u^i = u^i(v^1,\dots,v^n)$ з невиродженою матрицею Якобі

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\right) \quad (i,\alpha = 1,\dots,n).$$

Матриця Якобі локально оберненого відображення $v^\alpha = v^\alpha(u^1,\dots,u^n)$, а саме,

$$\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right) \quad (i,\alpha = 1,\dots,n)$$

є оберненою матрицею по відношенню до матриці Якобі відображення. Отже, має місце співвідношення (нагадаємо, що ми приймаємо правило Ейнштейна підсумовування за однаковими нижнім і верхнім індексами)

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^k}\right) = \delta^i_k.$$

Розглянемо базові приклади перетворень геометричних об'єктів.

- *Перетворення координатних базисів дотичних площин.*

  Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u)$ локальна параметризація підмноговиду F^n і $\vec{\rho} = (\vec{r}\circ u)(v)$ – локальна перепараметризація F^n. Тоді базисні вектори дотичної площини відносно цих двох параметризацій зв'язуються співвідношенням

$$\partial_\alpha\vec{\rho}(v) = \partial_i\vec{r}(u)\,\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}. \tag{3.4}$$

- *Перетворення коефіцієнтів диференціальних форм.*

  Нехай

$$\omega = \omega_i(u)du^i$$

  диференціальна 1-форма, задана в локальній координатній системі (u). Тоді після переходу до координат (v) ця форма приймає вираз

$$\omega = \omega_i(u)\,\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}dv^\alpha = \omega_\alpha(v)dv^\alpha.$$

  Таким чином,

$$\omega_\alpha(v) = \omega_i(u)\,\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}. \tag{3.5}$$

  Порівнюючи (3.5) і (3.4) можна помітити, що координати 1-форми перетворюються за тим же правилом, що і базисні вектори. У цьому випадку прийнято говорити, що коефіцієнти 1-форми перетворюються *коваріантно* відносно до перетворення базисів.

- *Перетворення координат векторних полів.*

  Нехай

$$\xi(u) = \xi^i(u)\partial_i\vec{r}, \quad \xi(v) = \xi^\alpha(v)\partial_\alpha\vec{\rho}$$

  координатний вираз вектора ξ відносно базисів відповідних координатних систем. Згідно (3.4), маємо

$$\xi^\alpha(v)\partial_\alpha\vec{\rho} = \xi^\alpha(v)\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\,\partial_i\vec{r}.$$

  Значить

$$\xi^i(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\,\xi^\alpha(v).$$

  Таким чином,

$$\xi^\alpha(v) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\,\xi^i(u). \tag{3.6}$$

  Порівнюючи (3.6) і (3.4) можна помітити, що останнє перетворення здійснюється за допомогою матриці, оберненої до матриці Якобі перетворення координат. У цьому випадку прийнято говорити, що координати векторного поля перетворюються *контраваріантно* відносно до перетворення базисів.

- *Перетворення матриці лінійного оператора.*

  Нехай $A\colon T_qF^n \to T_qF^n$ лінійний оператор, який діє в дотичному просторі поверхні, тобто

$$\eta = A\xi.$$

  Відносно параметризації u

$$\eta^i(u) = a^i_k(u)\xi^k(u).$$

Після заміни параметрів виду $u = u(v)$, маємо

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\eta^\alpha(v) = a^i_k(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\xi^\beta(v),$$

отже

$$\eta^\alpha(v) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}a^i_k(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\xi^\beta(v).$$

Таким чином, відносно нових параметрів, матриця лінійного оператора набуває вигляду

$$a^\alpha_\beta(v) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}a^i_k(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}. \tag{3.7}$$

Порівнюючи (3.7) с (3.6) і (3.5) можна помітити, що рядки матриці (верхній індекс фіксований) перетворюються як 1-форми, а стовпці (нижній індекс фіксований) перетворюються за векторним законом. Таким чином, матриця лінійного оператора підпорядковується змішаному закону перетворення.

Означення 3.7.1 *Тензорним полем на многовиді F^n називаеться набір функцій*

$$T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} : F^n \to I\!R \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1,\ldots i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1,\ldots j_p \leqslant n \end{pmatrix},$$

який при заміні координат виду

$$u = u(v) \sim \begin{cases} u^1 = u^1(v^1,\ldots,v^n) \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^n = u^n(v^1,\ldots,v^n) \end{cases}$$

змінюеться за законом:

$$T^{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}_{\beta_1,\ldots,\beta_q}(v) = \frac{\partial v^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial v^{\alpha_p}}{\partial u^{i_p}}\,T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}(u)\,\frac{\partial u^{j_1}}{\partial v^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial u^{j_q}}{\partial v^{\beta_q}},$$

де $\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\right)$ – матриця Якобі відображення $u = u(v)$, а $\left(\dfrac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right)$ – матриця, обернена до матриці Якобі. Величина $p+q$ називається рангом тензору, а пара (p,q) – типом тензору. Тензори типу $(0,0)$ ототожнюються з функціями на многовиді.

Закон тензорного перетворення легко запам'ятовується з використанням мульти-індексів. Покладемо

$$(i) = (i_1,\ldots,i_p), \quad (j) = (j_1,\ldots,j_q) \quad (\alpha) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p), \quad (\beta) = (\beta_1,\ldots,\beta_q).$$

Тоді закон перетворення тензорів запишеться короткою формулою

$$T^{(\alpha)}_{(\beta)}(v) = \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial u^{(i)}}\,T^{(i)}_{(j)}(u)\,\frac{\partial u^{(j)}}{\partial v^{(\beta)}}, \tag{3.8}$$

схожою на закон перетворення матриці поля лінійного оператора.

Таким чином, векторне поле утворює тензорне поле типу $(1,0)$, диференціальні 1-форми утворюють тензорне поле типу $(0,1)$, а поле лінійного оператора утворює тензорне поле типу $(1,1)$. Зважаючи на очевидну подвійність, 1-форми часто називають *ковекторами.*

Перша фундаментальна форма перетворюється як

$$g_{ik}(u)du^i du^k = g_{ik}(u)\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}dv^\alpha dv^\beta,$$

тобто,

$$g_{\alpha\beta}(v) = g_{ik}(u)\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta},$$

а значить матриця першої квадратичної форми $g = (g_{ij})$ утворює тензор типу $(0,2)$.

Ясно, що матриця другої квадратичної форми $B = (b_{ij})$ утворює тензорне поле типу $(0,2)$, а поле операторів Вейнгартена $A = (a^i_j)$– поле тензора типу $(1,1)$.

Вправа 3.7.1 *Перевірте, що матриця $g^{-1} = (g^{ik})$, що обернена до матриці першої квадратичної форми, утворює тензорне поле типу* $(2,0)$.

3.8 Алгебраїчні операції над тензорами

1. Додавання тензорів. Нехай $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, $S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ – два тензорних поля однакового типу. Визначимо

$$(T+S)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Тоді $T+S$ є тензорне поле того ж типу, що і тензори T і S.

2. Множення на функцію. Нехай $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ – тензорне поле, $\lambda : F^n \to I\!R$ – функція на F^n. Визначимо

$$(\lambda T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \lambda T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}.$$

Тоді λT є тензорне поле того ж типу, що й T.

Ці дві операції з очевидністю є *тензорними*, тобто не виводять з множини тензорів. Таким чином, в кожній точці многовиду, множина тензорів типу (p,q) утворює речовий лінійний простір, розмірності n^{p+q}.

Наступні дві операції так само є тензорними[3].

3. Тензорний добуток. Нехай є два тензорних поля

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \quad \text{и} \quad S^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_r}$$

типу (p,q) и (m,r) відповідно. Тоді їх тензорним добутком $T\otimes S$ називається тензорне поле типу $(p+m, q+r)$ з компонентами

$$(T\otimes S)^{i_1\dots i_p\ \alpha_1\dots\alpha_m}_{j_1\dots j_q\ \beta_1\dots\beta_r} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\cdot S^{\alpha_1\dots\alpha_m}_{\beta_1\dots\beta_r}.$$

Якщо, наприклад, ξ і η – векторні поля, тобто тензорні поля типу $(1,0)$, то

$$(\xi\otimes\eta)^{ik} = \xi^i\eta^k$$

[3]Доведення не складно провести самостійно або підглянути в підручнику О. Борисенко "Діференціальна геометрія і топологія" . Основа, 1998 р.

є тензорне поле типу $(2,0)$. Зокрема, якщо $n=2$, то матриця цього тензора має вигляд

$$(\xi\otimes\eta)^{ik}=\begin{pmatrix}\xi^1\eta^1 & \xi^1\eta^2\\ \xi^2\eta^1 & \xi^2\eta^2\end{pmatrix}.$$

Якщо ж ξ – векторне поле, а ω – диференціальна 1-форма, то $\xi\otimes\omega$ є поле лінійних операторів з матрицею

$$(\xi\otimes\omega)^i_k=\xi^i\omega_k.$$

Тензорний добуток не комутативний, $T\otimes S\neq S\otimes T$, що легко перевірити на прикладі тензорного добутку двох векторних полів:

$$\xi\otimes\eta=\begin{pmatrix}\xi^1\eta^1 & \xi^1\eta^2\\ \xi^2\eta^1 & \xi^2\eta^2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\eta^1\xi^1 & \eta^1\xi^2\\ \eta^2\xi^1 & \eta^2\xi^2\end{pmatrix}=\eta\otimes\xi.$$

Тензорний добуток асоціативний і дистрибутивний:

$$(\lambda S+\mu T)\otimes R=\lambda(S\otimes R)+\mu(T\otimes R).$$

Це можна легко перевірити за допомогою формули (3.8).

4. Перестановка індексів.

Нехай $T^{(i)}_{(j)}$ - тензор, $\sigma(\alpha)$ – деяка перестановка відповідного набору індексів $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$. Тоді набір функцій

$$T^{\sigma(i)}_{\sigma(j)}$$

утворює тензор, який називається тензором, утвореним *перестановкою індексів*. Тензор $T^{(i)}_{(j)}$ називається *симетричним* за нижніми/верхніми індексами, якщо

$$T^{(i)}_{(j)}=T^{(i)}_{\sigma(j)},\quad \text{відповідно}\quad T^{(i)}_{(j)}=T^{\sigma(i)}_{(j)}$$

і *кососиметричним* за нижніми/верхніми індексами, якщо

$$T^{(i)}_{(j)}=\varepsilon(\sigma)T^{(i)}_{\sigma(j)},\quad \text{відповідно}\quad T^{(i)}_{(j)}=\varepsilon(\sigma)T^{\sigma(i)}_{(j)},$$

де $\varepsilon(\sigma)$ – парність перестановки, для будь-якої перестановки σ. Кососиметричні тензори типу $(0,q)$ називаються *зовнішніми формами* ступеня q.

5. Згортка тензора. Нехай $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ – тензорне поле типу (p,q). Згортка за індексами i_α, j_β є тензорне поле типу $(p-1,q-1)$, компоненти якого утворюється так:

$$\sum_s T^{i_1\ldots i_{\alpha-1}\ s\ i_{\alpha+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{\beta-1}\ s\ j_{\beta+1}\ldots j_q}.$$

Наприклад, якщо T^i_j — поле лінійного оператора, то його згортка

$$\sum_s T^s_s$$

є слід цього оператора. Це тензор типу $(0,0)$, тобто функція.

Скалярний добуток векторних полів може бути записаний як композиція тензорного добутку та згортки. А саме, як ми знаємо

$$\langle X, Y \rangle_g = g_{ik} X^i Y^k.$$

Розглянемо тензор $T^{ik}_{jl} = (g \otimes X \otimes Y)^{ik}_{jl} = g_{jl} X^i Y^k$. Згорнемо його за всіма індексами (Повна згортка тензора)

$$\sum_{i,k=1}^{n} T^{ik}_{ik} = g_{ik} X^i Y^k = \langle X, Y \rangle_g.$$

Наступна операція є композицією тензорного множення і згортки, а тому є тензорною.

6. Операція піднімання (опускання) індексу. Нехай g_{ik} – невироджених тензор типу $(0, 2)$. Розглянемо g^{ik} – зворотний до нього тензор типу $(2, 0)$, тобто такий, що $g_{is} g^{sk} = \delta^k_i$.

Нехай $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_p}$ – тензор типу (p, q), тоді тензор виду $T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{\quad i_2,\dots,i_p} = g_{i_1 s} T^{s\; i_2,\dots,i_p}_{j_1 \dots j_q}$ – є тензор типу $(p-1, q+1)$. У цьому випадку говорять, що тензор $T^{i_2,\dots,i_p}_{i_1 j_1 \dots j_q}$ отриманий з тензора $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, опусканням індексу i_1.

Нехай є тензор $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, тоді операція підняття індексу здійснюється за наступним правилом

$$T^{j_1 i_1 \dots i_p}_{j_2,\dots,j_q} = g^{j_1 s} T^{\; i_1 \dots i_p}_{s j_2,\dots,j_q}.$$

Ітерацією опускання (підіймання) індексу можна перейти до тензорів з усіма нижніми (верхніми) індексами.

3.9 Інваріантний вираз тензору. Тензори в некоординатному базисі

Згортання тензора T типу (p, q) з набором з q векторних полів $(X_1, \dots, X_q)$ і набором з p 1-форм $(\omega^1, \dots, \omega^p)$ призводить до *полілінійному* відображенню $T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p)$, що задається формулою

$$T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} X_1^{j_1} \dots X_q^{j_q} \omega^1_{i_1} \dots \omega^p_{i_p}.$$

В силу лінійності тензорного множення, останню формулу можна переписати у вигляді

$$T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} (X_1 \otimes \dots \otimes X_q)^{j_1 \dots j_q} (\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p)_{i_1 \dots i_p}.$$

Розкладаючи векторні поля за базисом $e_1, \dots, e_n$, а диференціальні форми за двоїстою[4] базису $e^1, \dots, e^n$, можемо записати

$$X_1 = X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_q = X_q^{j_q} e_{j_q}; \quad \omega^1 = \omega^1_{i_1} e^{i_1}, \dots, \omega^p = \omega^p_{i_p} e^{i_p}.$$

[4]Базис форм e^i називається двоїстим відносно до векторного базису e_j, якщо $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Такий базис завжди існує, див. [9].

Тоді, наприклад,

$$X_1 \otimes X_2 = e_{j_1} \otimes e_{j_2} X_1^{j_1} X_2^{j_2}, \quad \omega^1 \otimes \omega^2 = e^{i_1} \otimes e^{i_2} \omega_{i_1}^1 \omega_{i_2}^2,$$

а значить

$$T(X_1, \ldots, X_q; \omega^1, \ldots, \omega^p) = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \, X_1^{j_1} \ldots X_q^{j_q} \, \omega_{i_1}^1 \ldots \omega_{i_p}^p.$$

Отже, для тензора T маємо наступний координатний вираз

$$T = T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}$$

в розкладанні за базисом

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p}.$$

Для *зовнішніх форм* ступеня q можна ввести в розгляд деякий спеціальний базис. Наприклад при $q = 2$ можна записати

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij} e^i \otimes e^j + \sum_{i>j} T_{ij} \, e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij} \left(e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i \right)$$

Позначимо

$$e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i := e^i \wedge e^j.$$

Тоді для кососиметричного тензора T отримаємо вираз

$$\sum_{i<j} T_{ij} \, e^i \wedge e^j.$$

Зокрема, для стандартного координатного базису $(du^1, \ldots, du^n)$

$$T = \sum_{i<j} T_{ij} \, du^i \wedge du^j.$$

У загальному випадку, зовнішня форма ступеня q представляється у вигляді (докладніше див. [9])

$$T = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} T_{i_1 \ldots i_p} \, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_q}.$$

3.10 Диференціювання тензору

Нехай $T_{j_1, \ldots, j_q}^{i_1, \ldots, i_p}$ — тензорне поле. Формально можна утворити новий набір функцій виду

$$\frac{\partial T_{j_1, \ldots, j_q}^{i_1, \ldots, i_p}}{\partial u^k}.$$

Однак, такий набір в загальному випадку утворює тензорне поле. Як приклад, розглянемо векторне поле ξ з компонентами $\xi^i(u)$. Утворимо набір функцій $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial u^k}$. Зробимо заміну $u = u(v)$. Тоді маємо

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\xi^\mu(v) = \frac{\partial}{\partial v^\alpha}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial u^i}\xi^i(u)\right) = \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha}\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial u^i}\xi^i(u)\right) =$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha}\left(\frac{\partial^2 v^\mu}{\partial u^k \partial u^i}\xi^i(u) + \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}\right) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i}\,\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}\,\frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha}\,\frac{\partial^2 v^\mu}{\partial u^k \partial u^i}\xi^i(u). \quad (3.9)$$

Зауважимо, що отримана формула справедлива і "в зворотному напрямку" , а саме,

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^\sigma}\,\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial v^\beta}\,\frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} + \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k}\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\beta \partial v^\alpha}\xi^\alpha(v). \quad (3.10)$$

З отриманої формули випливає, що набір функцій $\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}$ не утворює тензора, оскільки перетворюється за тензорним законом тільки за лінійної заміни параметрів. Тому визначення похідної тензора вимагає деякої корекції, щоб операція диференціювання НЕ виводила з класу тензорів. Виявляється, що така корекція може бути здійснена за допомогою деякого набору функцій, які є аналогом символам Крістофеля. Зауважимо, що символи Крістофеля можуть бути обчислені за коефіцієнтами першої квадратичної форми, тобто позитивно визначеної квадратичної форми g, заданної на многовиді F^n. Якщо така форма задана, то пара (F^n, g) називається *рімановим многовидом*. Покажемо, що набір символів Крістофеля не утворює тензора.

Лема 3.10.1 *Нехай (F^n, g) – рімановий многовид. Тоді при заміні параметрів $u = u(v)$ символи Крістофеля перетворюються за формулою*

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(v) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^s}\Big(\frac{\partial^2 u^s}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma^s_{ik}(u)\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\Big). \quad (3.11)$$

Доведення. Нехай $\vec{r} = \vec{r}(u)$ деяка регулярна параметризація F^n як підмноговид у евклідовому просторі та $\vec{\rho} = \vec{r}(u(v))$ її локальна перепараметрізація. Тоді мають місце два розкладання Гаусса:

$$\partial_{\alpha\beta}\vec{\rho} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(v)\partial_\sigma\vec{\rho} + b_{\alpha\beta}(v)\vec{n}(v), \quad \partial_{ik}\vec{r} = \Gamma^s_{ik}(u)\partial_s\vec{r} + b_{ik}(u)\vec{n}(u)$$

Використовуючи закон перетворення (3.4), маємо:

$$\partial_{\alpha\beta}\vec{\rho} = \partial_\alpha\Big(\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\partial_k\vec{r}\Big) =$$

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}\partial_k\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\partial_\alpha(\partial_k\vec{r}) = \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}\,\partial_k\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial}{\partial u^i}(\partial_k\vec{r}) =$$

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}\,\partial_m\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\Big(\Gamma^m_{ik}(u)\partial_m\vec{r}(u) + b_{ik}(u)\vec{n}(u)\Big) =$$

$$\Big(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma^m_{ik}(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\Big)\partial_m\vec{r}(u) + b_{ik}(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\vec{n}(u).$$

З іншого боку, знову використовуючи (3.4) це ж розкладання можна записати у вигляді

$$\partial_{\alpha\beta}\vec{\rho} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(v)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\sigma}}\partial_m\vec{r} + b_{\alpha\beta}\vec{n}(v).$$

Звідси випливає рівність

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(v)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\sigma}} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}} + \Gamma^m_{ik}(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}},$$

що й потрібно було довести.

■

Нагадаємо, що частинна *коваріантна* похідна векторного поля ξ^i визначалася як проекція на дотичну площину похідної дотичного векторного поля поверхні формулою, що включає символи Крістофеля, а саме,

$$\nabla_k\xi^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{kj}\xi^j.$$

Виявляється, що така, "виправлена" похідна, вже утворює тензор.

Твердження 3.10.1 *Нехай ξ – векторне поле на рімановому многовиді (F^n, g). Тоді набір функцій*

$$\nabla_k\xi^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{kj}\xi^j,$$

де Γ^j_{kj} – символи Крістофеля, становить тензор типу (1,1)

Доведення. Застосувавши формулу (3.10) і застосовуючи (3.11), знаходимо

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k}(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^{\beta}\partial v^{\alpha}}\xi^{\alpha}(v) = \frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} +$$
$$\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\left(\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(v)\frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}} - \Gamma^i_{jm}(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial u^j}{\partial v^{\beta}}\right)\xi^{\alpha}(v) =$$
$$\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(v)\xi^{\alpha}(v)\frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}} - \Gamma^i_{jm}(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\alpha}}\xi^{\alpha}(v)\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial v^{\beta}} =$$
$$\frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}}\left(\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial v^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}(v)\xi^{\alpha}(v)\right)\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} - \Gamma^i_{jm}(u)\xi^m(u)\delta^k_j.$$

Остаточно, знаходимо

$$\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{km}\xi^m\right)(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}}\left(\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial v^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}\xi^{\alpha}\right)(v)\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}$$

що і завершує доказ.

■

Твердження 3.10.2 *Пусть (F^n, g) рімановий многовид. Тоді*

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^s_{ki}\,g_{js} + \Gamma^s_{kj}\,g_{is}. \tag{3.12}$$

Доведення. Використовуючи локальну параметризацію $\vec{r} = \vec{r}(u)$, запишемо

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \Big\langle\, \partial_i \vec{r}, \partial_j \vec{r}\, \Big\rangle = \Big\langle\, \partial_{ki} \vec{r}, \partial_j \vec{r}\, \Big\rangle + \Big\langle\, \partial_i \vec{r}, \partial_{kj} \vec{r}\, \Big\rangle = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} = \Gamma^s_{ki}\, g_{js} + \Gamma^s_{kj}\, g_{is}.$$

■

Вправа 3.10.1 *Перевірте, що*

$$\partial_k g^{ij} = -\Gamma^i_{ks}\, g^{sj} - \Gamma^j_{ks}\, g^{is}. \tag{3.13}$$

Формула для коваріантного диференціювання векторних полів, тобто тензорів типу $(1, 0)$, була нам відома. Для поля 1-форм, розглянемо наступну конструкцію.

Нехай $\omega = \omega_m\, du^m$ – диференціальна форма. Тоді $\xi^i = g^{im}\omega_m$ є координати векторного поля. Використовуючи (3.13), знаходимо

$$\begin{gathered}\nabla_k \xi^i = \partial_k \xi^i + \Gamma^i_{ks}\xi^s = \partial_k(g^{im}\omega_m) + \Gamma^i_{ks} g^{sm}\omega_m = \\ \partial_k g^{im}\omega_m + g^{im}\partial_k\omega_m + \Gamma^i_{ks} g^{sm}\omega_m = (-\Gamma^i_{ks}\, g^{sm} - \Gamma^m_{ks}\, g^{is})\omega_m + g^{im}\partial_k\omega_m + \Gamma^i_{ks} g^{sm}\omega_m = \\ g^{im}\partial_k\omega_m - \Gamma^m_{ks}\, g^{is}\omega_m = g^{is}\Big(\partial_k\omega_s - \Gamma^m_{ks}\,\omega_m\Big).\end{gathered}$$

оскільки всі використані нами операції були тензорними, то набір функцій $\partial_k\omega_s - \Gamma^m_{ks}\,\omega_m$ утворює тензорне поле типу $(0, 2)$. Покладемо за визначенням

$$\nabla_k \omega_s = \partial_k \omega_s - \Gamma^m_{ks}\,\omega_m. \tag{3.14}$$

Для поля лінійного оператора (a^i_j) природно визначити коваріантну похідну формулою

$$\nabla_k\, a^i_j = \partial_k\, a^i_j + \Gamma^i_{ks}\, a^s_j - \Gamma^s_{kj}\, a^i_s. \tag{3.15}$$

Для тензорів типу (p, q) визначимо коваріантну похідну формулою

$$\begin{gathered}\nabla_k T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial u^k} + \Gamma^{i_2}_{k\alpha} T^{\alpha i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \Gamma^{i_1}_{k\alpha} T^{i_1\alpha\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + \\ \Gamma^{i_p}_{k\alpha} T^{i_1\ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1\ldots j_q} - \Gamma^{\alpha}_{kj_1} T^{i_1\ldots i_p}_{\alpha j_2\ldots j_q} - \ldots - \Gamma^{\alpha}_{kj_q} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}\alpha}.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Отриманий тензор має тип $(p, q + 1)$.

Композиція тензорного множення і згортки дозволяє природним чином визначити коваріантну похідну одного векторного поля у напрямку іншого. А саме, якщо X і Y – два векторних поля, то

$$\nabla_X Y := X^k \nabla_k Y.$$

Відмітимо, що $\nabla_X Y$ є тензорне поле типу $(1, 0)$. Тобто, диференціювання векторного поля у напрямку іншого векторного поля не виводить з класу векторних полів.

Вправа 3.10.2 *Покажіть, що для будь-яких гладких векторних полів X, Y, Z і гладких функцій λ, μ похідна векторного поля у напрямку має такі властивості*[5]

[5] Ці властивості можуть бути покладені в основу визначення зв'язності на многовиді (Див. Кобаясі К., Номідзу К. Основи диференціальної геометрії.

- $\nabla_{\lambda X+\mu Y}Z = \lambda\nabla_X Z + \mu\nabla_Y Z$,
- $\nabla_X(\lambda Y) = \partial_X\lambda \cdot Y + \lambda\nabla_X Y$.

Зокрема, фіксоване векторне поле ξ задає поле лінійного оператора A_ξ, що визначається формулою
$$A_\xi X = -\nabla_X \xi. \tag{3.17}$$
Цей лінійний оператор називається *оператором Номідзу*.

Зауважимо, що в доказі тензорного характеру коваріантною похідною ми використовували тільки характер перетворення символів Крістофеля, але не використали спосіб обчислення самих символів. Це дає можливість дати наступне визначення.

Означення 3.10.1 *Набір функцій Γ^j_{ik} на гладкому многовиді F^n, що змінюються при заміні параметрів за законом*

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(v) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^s}\left(\frac{\partial^2 u^s}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma^s_{ik}(u)\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial v^\beta}\right) \tag{3.18}$$

називається диференційно-геометричною або афінною зв'язностю.

Як зазначалося, набір функцій зв'язності не підкоряється тензорному закону перетворення. Однак легко помітити, що набір функцій $\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}$ перетвориться за тензорним законом. Тензор
$$T^j_{ik} = \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}$$
називається *тензором крутіння* аффінної зв'язності.

Вправа 3.10.3 Для векторних полів X і Y, набір функцій $T^j_{ik}X^iY^k$ утворює векторне поле, що позначається як $T(X,Y)$. Покажіть, що

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

де $[X,Y]$ – векторне поле з координатами

$$[X,Y]^j = X^s\frac{\partial Y^j}{\partial u^s} - Y^s\frac{\partial X^j}{\partial u^s}.$$

Векторне поле $[X,Y]$ називається *комутатором*, або *дужкою Лі* векторних полів X і Y.

Вправа 3.10.4 *Покажіть, що для будь-яких векторних полів X, Y і Z справедлива тотожність Якобі*

$$\Big[X,[Y,Z]\Big] + \Big[Y,[Z,X]\Big] + \Big[Z,[X,Y]\Big] = 0.$$

Це означає, що лінійний простір векторних полів утворює алгебру Лі.

У загальному випадку $\Gamma^j_{ki} \neq \Gamma^j_{ik}$. Якщо ж тензор крутіння зв'язності тотожно нульовий, тобто $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$, то зв'язність називається *зв'язністю без крутіння* або *симетричною* зв'язністю.

Наявність зв'язності на многовиді означає можливість визначити коваріантні похідні тензорних полів формулою (3.16). Як наслідок, якщо a_{ij} – тензор типу $(0,2)$, то

$$\nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ki}\, a_{sj} - \Gamma^s_{kj}\, a_{is}.$$

Зв'язність на рімановому многовиді (F^n, g) називається *узгодженої з метрикою* або *метричною зв'язністю*, якщо перша квадратична форма g паралельна відносно цієї зв'язності, тобто $\nabla_k g_{ij} = 0$. Це означає, що

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}.$$

Симетрична зв'язність, що узгоджена з метрикою називається *рімановою зв'язністю*.

Твердження 3.10.3 *Якщо Γ^j_{ik} – симетрична зв'язність, узгоджена з метрикою на рімановому многовиді (F^n, g), то*

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\right), \quad \Gamma^j_{ik} = g^{jm}\Gamma_{ik,m}.$$

Доведення. Розглянемо коваріантну похідну

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is} = 0.$$

Позначимо, $\Gamma_{ki,m} = \Gamma^s_{ki} g_{sm}$, тоді

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}, \qquad \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{ij,k} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{jk,i}.$$

Взявши суму перших двох виразів і віднімаючи Третє знаходимо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\right) = \Gamma_{ik,j}$$

■

Це означає, що символи Крістофеля утворюють єдинуріманову зв'язність на римановому многовиді (F^n, g).

Виразом для коваріантної похідної ріманової зв'язності можна надати елегантний вираз у вигляді так званої формули Кошуля.

Твердження 3.10.4 *Для коваріантної похідної векторних полів відносно ріманової зв'язності справедлива наступна формула*

$$2\left\langle \nabla_X Y, Z \right\rangle_g = \partial_X \left\langle Y, Z \right\rangle_g + \partial_Y \left\langle X, Z \right\rangle_g - \partial_Z \left\langle X, Y \right\rangle_g - \\ - \left\langle X, [Y,Z] \right\rangle_g - \left\langle Y, [X,Z] \right\rangle_g + \left\langle Z, [X,Y] \right\rangle_g \quad (3.19)$$

Доведення. Вираз для координатних функцій коваріантної похідної $\nabla_X Y$ запишемо в вигляді

$$(\nabla_X Y)^s = X^i(\partial_i Y^s + \Gamma^s_{ij} Y^j) := \partial_X Y^s + \Gamma^s(X,Y)$$

або, у векторній формі,

$$\nabla_X Y = \partial_X Y + \Gamma(X,Y).$$

Вираз для символів Крістофеля першого роду звернемо з векторними полями

$$2\Gamma_{ij,k} X^i Y^j Z^k = (X^i \partial_i g_{jk}) Y^j Z^k + (Y^j \partial_j) g_{ik} X^i Z^k - (Z^k \partial_k g_{ij}) X^i Y^j.$$

Тепер зауважимо, що

$$(X^i \partial_i g_{jk}) Y^j Z^k = X^i \partial_i (g_{jk} Y^j Z^k) - g_{jk} X^i \partial_i Y^j Z^k - g_{jk} Y^j X^i \partial_i Z^k =$$
$$\partial_X \big\langle Y, Z \big\rangle_g - \big\langle \partial_X Y, Z \big\rangle_g - \big\langle Y, \partial_X Z \big\rangle_g.$$

Вираз в лівій частині рівності в наших позначеннях можна перетворити так

$$2\Gamma_{ij,k} X^i Y^j Z^k = 2\big\langle \Gamma(X,Y), Z \big\rangle_g = 2\big\langle \nabla_X Y, Z \big\rangle_g - 2\big\langle \partial_X Y, Z \big\rangle_g.$$

Таким чином, отримуємо

$$2\big\langle \nabla_X Y, Z \big\rangle_g = 2\big\langle \partial_X Y, Z \big\rangle_g + \partial_X \big\langle Y, Z \big\rangle_g - \big\langle \partial_X Y, Z \big\rangle_g - \big\langle Y, \partial_X Z \big\rangle_g +$$
$$\partial_Y \big\langle X, Z \big\rangle_g - \big\langle \partial_Y X, Z \big\rangle_g - \big\langle X, \partial_Y Z \big\rangle_g - \partial_Z \big\langle X, Y \big\rangle_g + \big\langle \partial_Z X, Y \big\rangle_g + \big\langle X, \partial_Z Y \big\rangle_g =$$
$$\partial_X \big\langle Y, Z \big\rangle_g + \partial_Y \big\langle X, Z \big\rangle_g - \partial_Z \big\langle X, Y \big\rangle_g + \big\langle [X,Y], Z \big\rangle_g + \big\langle [Z,X], Y \big\rangle + \big\langle X, [Z,Y] \big\rangle_g =$$
$$\partial_X \big\langle Y, Z \big\rangle_g + \partial_Y \big\langle X, Z \big\rangle_g - \partial_Z \big\langle X, Y \big\rangle_g - \big\langle X, [Y,Z] \big\rangle_g - \big\langle Y, [X,Z] \big\rangle_g + \big\langle Z, [X,Y] \big\rangle.$$

■

Вірно і зворотне, якщо зв'язність задовольняє властивості (3.19), то вона є рімановою.

3.11 Тензор кривини ріманового многовиду.

Якщо ξ это C^2-гладке векторне поле на площині або в евклідовому просторі, що задане в декартових координатах, то

$$\partial_i \partial_k \xi = \partial_k \partial_i \xi.$$

У загальному випадку слід обчислювати коваріантні похідні векторного поля. Чи будуть вони комутувати?

Нехай ξ — векторне поле. Розглянемо різницю $\nabla_k \nabla_i \xi - \nabla_i \nabla_k \xi$. Маємо,

$$\nabla_i \xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ij} \xi^j.$$

Далі,

$$\nabla_k (\nabla_i \xi^m) =$$
$$\frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ij} \xi^j \right) + \Gamma^m_{ks} \left(\frac{\partial \xi^s}{\partial u^i} + \Gamma^s_{ij} \xi^j \right) - \Gamma^t_{ki} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} + \Gamma^m_{tj} \xi^j \right) =$$
$$\frac{\partial^2 \xi^m}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k} \xi^j + \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} + \Gamma^m_{ks} \frac{\partial \xi^s}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ks} \Gamma^s_{ij} \xi^j - \Gamma^t_{ki} \frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} - \Gamma^t_{ki} \Gamma^m_{tj} \xi^j.$$

Помінявши індекси $i \to k$ і $k \to i$, знаходимо

$$\nabla_i \nabla_k \xi^m = \frac{\partial^2 \xi^m}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial u^i}\xi^j + \Gamma^m_{kj}\frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} + \Gamma^m_{is}\frac{\partial \xi^s}{\partial u^k} + \Gamma^m_{is}\Gamma^s_{kj}\xi^j - \Gamma^t_{ik}\frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} - \Gamma^t_{ik}\Gamma^m_{tj}\xi^j.$$

Віднімаючи, знаходимо

$$\nabla_k \nabla_i \xi - \nabla_i \nabla_k \xi = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k}\xi^j - \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial u^i}\xi^j + \Gamma^m_{ks}\Gamma^s_{ij}\xi^j - \Gamma^m_{is}\Gamma^s_{kj}\xi^j = \xi^j\left(\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ks}\Gamma^s_{ij} - \Gamma^m_{is}\Gamma^s_{kj}\right). \quad (3.20)$$

Ліва частина отриманої рівності має тензорний характер. Отже, права частина визначає деякий тензор, який називається тензором Рімана.

Означення 3.11.1 *Тензором кривини або тензором Рімана типу* $(1,3)$ *називається тензор з компонентами*

$$R^m_{jki} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial u^i} + \Gamma^m_{ks}\Gamma^s_{ij} - \Gamma^m_{is}\Gamma^s_{kj},$$

де Γ^m_{ij} *– компоненти ріманової зв'язності (символи Крістофеля).*

Опустивши верхній індекс за допомогою метричного тензора, отримаємо тензор кривини типу (0,4):

$$R_{mjki} = \frac{\partial \Gamma_{ij,m}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj,m}}{\partial u^i} + \Gamma^s_{kj}\Gamma_{mi,s} - \Gamma^s_{ij}\Gamma_{mk,s}.$$

Тензор Рімана володіє легко перевіряючими симетріями відносно індексів виду

$$R_{mjki} = -R_{mjik}, \quad R_{mjki} = -R_{jmki}, \quad R_{mjki} = R_{kimj}$$

і

$$R_{mjki} + R_{mkij} + R_{mijk} = 0 \quad \text{(алгебраїчна тотожність Б'янкі)},$$

тому не всі його компоненти є суттевими.

Вправа 3.11.1 *Покажить, що тензор Рімана задовольняє диференціальній тотожності Б'янкі*

$$\nabla_s R^m_{jki} + \nabla_k R^m_{jis} + \nabla_i R^m_{jsk}.$$

Твердження 3.11.1 *Тензор Рімана тотожно дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли існує локальна система координат відносно якої всі символи Крістофеля тотожно нульові.*

Доведення. Розглянемо перетворення символів Крістофеля (3.18) і будемо вимагати виконання тотожності $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(v) = 0$. Для цього необхідно і достатньо, щоб мала рішення система диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma^m_{ik}(u) \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = 0.$$

Умовою інтегрованості цієї системи є тотожність

$$\frac{\partial}{\partial v^\lambda} \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\lambda} \right).$$

Для спрощення викладок, введемо такі позначення

$$(u^1, \ldots, u^n) := u, \quad \tfrac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} := \partial_\alpha u^k, \quad \tfrac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} := \partial_{\alpha\beta} u^m, \quad \ldots,$$
$$\Big(\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u \Big)^m = \Gamma^m_{ik} \partial_\beta u^k \partial_\alpha u^i.$$

У цих позначеннях система рівнянь доведеться до "векторної" формі

$$\partial_{\alpha\beta} u = -\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u).$$

Тоді

$$\partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta} u) = -(\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) - \Gamma(\partial_{\lambda\beta} u, \partial_\alpha u) - \Gamma(\partial_\beta u, \partial_\lambda \alpha) =$$
$$- (\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\beta u), \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\beta u, \Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u)).$$

Отже,

$$\partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda} u) = -(\partial_\beta \Gamma)(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\lambda u), \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\lambda u, \Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u)).$$

Віднімаючи, знаходимо

$$\partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta} u) - \partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda} u) =$$
$$(\partial_\beta \Gamma)(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u) - (\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\beta u, \Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u)) - \Gamma(\partial_\lambda u, \Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u)).$$

Нарешті, зауважимо, що $\partial_\beta \Gamma^m_{ik}(u) = \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma^m_{ik} \right) \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}$. Тому, повертаючись до індексних позначень, отримуємо

$$\partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta} u) - \partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda} u) =$$
$$\Big(\partial_j \Gamma^m_{ik} - \partial_k \Gamma^m_{ij} + \Gamma^m_{js} \Gamma^s_{ik} - \Gamma^m_{ks} \Gamma^s_{ij} \Big) \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = R^m_{ijk} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = 0.$$

В силу невиродженості матриць Якобі, остання рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $R^m_{ijk} = 0$.

■

Вправа 3.11.2 *Покажіть, що рімановий многовид F^n допускає локальну параметризацію, відносно якої коефіцієнти першої фундаментальної форми постійні тоді і тільки тоді, коли існує параметризація відносно якої всі символи Крістофеля тотожно нульові.*

Тензор Рімана може бути виражений в інваріантних, бескоординатних термінах. Для початку трохи аналогії. Для C^2 гладкої функції $f : F^n \to R$ згортка форми першого диференціала $df = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ з векторним полем X має вигляд $X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} = \partial_X f := df(X)$. Другий диференціал функції f визначає симетричну 2-форму $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} du^i du^k$, згортка якої з двома векторними полями X і Y задає симетричну білінійну форму $(d^2 f)(X,Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} X^i Y^k$. Аналогом форми першого диференціала для векторного поля ξ є форма коваріантного диференціала $D\xi = \nabla_i \xi du^i$ згортка якого з векторним полем X має вигляд $X^i \nabla_i \xi = \nabla_X \xi := (D\xi)(X)$. Аналогом форми другого диференціала функції є (векторнозначна) форма другого коваріантного диференціала векторного поля ξ, а саме

$$(D^2\xi)(X,Y) = X^i Y^k \nabla_i \nabla_k \xi.$$

Користуючись правилом Лейбніца для коваріантної похідної, отримуємо

$$\nabla_X(\nabla_Y \xi) = X^i \nabla_i (Y^k \nabla_k \xi) = X^i \nabla_i Y^k \xi + X^i Y^k \nabla_i \nabla_k \xi = \nabla_{\nabla_X Y} \xi + (D^2\xi)(X,Y).$$

Звідси випливає, що

$$(D^2\xi)(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi.$$

Отримана форма може бути розкладена на симетричну і кососиметричну компоненти у вигляді

$$(D^2\xi)(X,Y) = \frac{1}{2}\Big((D^2\xi)(X,Y) + (D^2\xi)(Y,X)\Big) + \frac{1}{2}\Big((D^2\xi)(X,Y) - (D^2\xi)(Y,X)\Big).$$

Кососиметрична частина отриманого виразу збігається з виразом (3.20), якщо останнє згорнути з X и Y. З іншого боку,

$$(D^2\xi)(X,Y) - (D^2\xi)(Y,X) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[XY]} \xi$$

і отже, інваріантне вираження для (згорнутого з векторними полями) тензора кривини має вигляд

$$R(X,Y)\xi = (D^2\xi)(X,Y) - (D^2\xi)(Y,X) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[XY]} \xi.$$

і є *мірою несиметричності форми другого коваріантного диференціала* векторного поля.

Вправа 3.11.3 *Покажіть, що вираз для тензора кривини в термінах оператора Номідзу* (3.17) *має вигляд*

$$R(X,Y)\xi = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y.$$

Якщо ξ – поле одиничних нормалей сімейства гіперповерхонь (заданих, наприклад, рівнянням $f(u^1, \ldots, u^n) = const$), то A_ξ є полем операторів Вейнгартена для кожної з поверхонь і отриманий вираз збігається з рівнянням Кодацці.

Вправа 3.11.4 *Доведіть інваріантне вираження для алгебраїчної тотожності Б'янкі*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Вказівка: алгебраїчна тотожність Б'янкі зводиться до тотожності Якобі для векторних полів.

Вправа 3.11.5 *Покажіть, що інваріантне вираження для коваріантної похідної тензора Рімана має вигляд*

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \nabla_W\big(R(X,Y)Z\big) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z.$$

Покажіть, що інваріантна диференціальна тотожність Б'янкі має вигляд

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z + (\nabla_X R)(Y,W)Z + (\nabla_Y R)(W,X)Z = 0.$$

Тензор Рімана називається тензором кривини зважаючи на наступну конструкцію. Нехай (F^n, g) – рімановий многовид. Зафіксуємо точку $q \in F^n$ і виберемо два ортонормованих дотичних вектори $X, Y \in T_qF^n$. Позначимо через $F^2 \subset F^n$ двовимірну поверхню, утворену всілякими геодезичними, що виходять з точки q в напрямку всіляких одиничних дотичних векторів, що лежать в площині векторів X і Y. Оберемо одиничний вектор $\xi \in T_qF^2$ і розглянемо паралельне перенесення вектора ξ за малим замкнутим контуром $\partial\sigma$, що обмежує однозв'язну область σ на поверхні F^2. За Лемою 2.14.2, результат паралельного перенесення утворює з вихідним вектором ξ кут $\Delta\varphi$, що дорівнює

$$\Delta\varphi = \iint\limits_{\sigma} K\, dS,$$

де K – Гауссова кривина F^2 в області, що обмежена цим контуром. Тоді границя

$$\lim_{\sigma\to q} \frac{\Delta\varphi}{S(\sigma)} = K(q)$$

називається кривиною ріманового многовиду F^n в точці q в двовимірному напрямку (X,Y) або, коротко, *секційною кривиною* $K_{XY}(q)$. Можна показати [15], що секційна кривина ріманового многовиду виражається через тензор Рімана за формулою

$$K(X,Y) = \frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})X^iY^jX^kY^l}.$$

Цьому виразу можна надати більш ясний вигляд.

Нехай X, Y, Z і U дотичні вектори в точці $q \in F^n$. Розглянемо згортку

$$R^m(X,Y)Z = R^m_{ijk}Z^iX^jY^k.$$

Це тензор типу (1,0), тобто вектор в точці q. Тоді

$$\big\langle\, R(X,Y)Z, U \,\big\rangle_g = g_{ml}R^m_{ijk}Z^iX^jY^kU^l = R_{lijk}Z^iX^jY^kU^l.$$

Вираз в знаменнику перетвориться до виду

$$(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})X^iY^jX^kY^l =$$
$$g_{ik}X^iX^k \cdot g_{jl}Y^jY^l - g_{il}X^iY^k \cdot g_{jk}X^kY^j = |X|_g^2\,|Y|_g^2 - \big\langle\, X, Y \,\big\rangle_g^2.$$

і висловлює квадрат площі паралелограма, натягнутого на вектори X і Y. Таким чином,

$$K_q(X,Y) = \frac{\big\langle\, R(X,Y)Y, X \,\big\rangle_g}{|X|_g^2\,|Y|_g^2 - \big\langle\, X, Y \,\big\rangle_g^2}$$

Секційна кривина визначає тензор кривини в тому сенсі, що якщо відома секційна кривина за всіма двовимірним напрямками, то відомий і тензор кривини [17].

Вправа 3.11.6 *Покажіть, що для тензора кривини справедливий вираз*

$$\begin{gathered}6\big\langle R(X,Y)Z,U\big\rangle = K(X+U,Y+Z) - K(X+U,Y) - K(X+U,Z) - K(X,Y+Z) - \\ K(U,Y+Z) + K(X,Z) + K(U,Z) - K(Y+U,X+Z) + K(Y+U,X) + \\ K(Y+U,Z) + K(Y,X+Z) + K(U,X+Z) - K(Y,Z) - K(U,Z). \quad (3.21)\end{gathered}$$

Поверхні, секційна кривина яких не залежить від точки і двовимірного напрямку називаються поверхнями (просторами) постійної кривини. Насправді, вимога незалежності від точки зайва, тому що справедлива [16]

Теорема 3.11.1 *(Shur) Якщо секційна кривина простору в кожній точці не залежить від вибору двовимірного напрямку, то вона не залежить і від вибору точки.*

Для просторів постійної кривини c тензор Рімана влаштований дуже просто, а саме

$$R(X,Y)Z = c\Big(\big\langle Y,Z\big\rangle_g X - \big\langle X,Z\big\rangle_g Y\Big).$$

3.11.1 Тензор Річчі та скалярна кривина

Тензор Рімана в великих розмірностях містить значну кількість суттєвих компонент, а саме $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Для спрощення ситуації, можна розглядати згортку тензора Рімана за деякою парою індексів. В геометрії використовується згортка тензора Рімана виду

$$R_{ik} = R^s_{isk}.$$

Отриманий тензор симетричний за індексами (i,k) і називається *тензором Річчі*. Цей тензор має $\frac{n(n+1)}{2}$ істотних компонент і значно простіше тензора Рімана. З іншого боку, він містить менше інформації про геометрію простору. Тензор Річчі має тип (0,2). Підняттям індексу, визначається тензор Річчі типу (1,1), а саме

$$R^i_k = g^{is}R_{sk}.$$

Кривиною Річчі в напрямку *одиничного* вектору X називається величина

$$Ric(X) = R_{ik}X^iX^k.$$

Простори з постійною кривиною Річчі називаються *Ейнштейновими.* Тензор Річчі таких просторів пропорційний метричному тензору

$$R_{ik} = \lambda\, g_{ik}.$$

Останнє рівняння (як рівняння відносно метричного тензору) було знайдено А. Ейнштейном як *рівняння гравітаційного поля в вакуумі.*

Геометричний сенс кривини Річчі можна описати через секційні кривини наступним чином. Нехай X — даний одиничний вектор. Доповнимо його до ортонормованого репера $(e_1,\dots,e_{n-1},X)$. Тоді

$$Ric(X) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} K(e_\alpha,X).$$

Ще менше інформації містить *скалярна кривина* простору, що обумовлена ??як згортка тензора Річчі типу (1,1), а саме

$$r = R_s^s$$

Скалярна кривина є функція точки поверхні. Неважко бачити, що в рівнянні Ейнштейна $\lambda = r/n$.

3.12 Диференціальні оператори Бельтрамі: градієнт і лапласіан

.

Нагадаємо, що якщо $\omega = \omega_i du^i$ – диференціальна 1-форма, а $X = X^i \partial_i$ – векторне поле, то значенням форми ω на векторному полі X називається функція

$$\omega(X) = \sum_i \omega_i X^i.$$

Ясно, що ця функція може розглядатися як згортка тензорного добутку $\omega \otimes X$. Так, наприклад, якщо $\omega = df = \partial_i f\, du^i$ є форма першого диференціала гладкої функції на многовиді, то

$$df(X) = \partial_i f\, X^i = \partial_X f$$

є похідна функції f за напрямком векторного поля X.

Означення 3.12.1 *Векторне поле*

$$(\operatorname{grad} f)^i = g^{is} \partial_s f,$$

двоїсте 1-формі першого диференціалу гладкої функції $f : F^n \to I\!R$, називається полем градієнта функції f.

Геометричний сенс векторного поля градієнта прояснює наступне твердження.

Твердження 3.12.1 *Нехай $f : F^n \to I\!R$ – гладка функція. Тоді векторне поле градієнта є полем нормалей поверхні рівня $f(u^1, \ldots, u^n) = const$ і визначає напрямок найбільшого зростання/зниження функції f.*

Доведення. Нехай $p \in F^n$ – довільна точка і $\gamma : I \to F^n$ – гладка крива на поверхні рівня, що проходить через точку p. Будемо враховувати, що $\gamma(0) = p$. Тоді

$$f(u^1(t), \ldots, u^n(t)) \equiv 0.$$

Тому

$$\frac{d}{dt} f = \partial_i f \, \frac{du^i}{dt} \equiv 0.$$

Отже, в точці p

$$df(\gamma'(0)) = 0$$

для будь-якої кривої, що проходить через точку p. Тобто, для будь-якого дотичного вектора $X \in T_pF^n$,

$$df(X) = \partial_i f\, X^i = g_{ik}g^{kj}\partial_j f\, X^i = \left\langle\, \operatorname{grad} f, X \,\right\rangle_g = 0,$$

що доводить першу властивість.

Розглянемо всілякі натурально параметризовані криві $\gamma\,(s)$, що проходять через точку $p\,(s=0)$ і будемо шукати напрямок в точці p, що дає екстремуми функції

$$f'(s) = (f \circ \gamma\,)' = \partial f \cdot \gamma\,'$$

в точці p. Оскільки для непостійній функції f критичні точки функцій f' і $(f')^2$ збігаються, то будемо вирішувати завдання на умовний екстремум саме для $(f')^2$.

Покладемо $\gamma\,'(0) = X$ з умовою $g_{ik}X^iX^k = 1$. Тоді наша задача зводиться до задачі на умовний екстремум функції

$$(\partial_i f X^i)^2 = \partial_i f \partial_k f X^i X^k = \Phi_{ik}X^iX^k = X^t\Phi X,$$

де ми позначили $\Phi = (\Phi_{ik}) = (\partial_i f \partial_k f)$. Відповідна функція Лагранжа має вигляд

$$L = X^t\Phi X - \lambda\, X^t g X = (\Phi_{ik} - \lambda\, g_{ik})X^iX^k.$$

Диференціювання L по X^i дає систему лінійних рівнянь

$$(\Phi_{ik} - \lambda\, g_{ik})X^k = 0 \quad \sim \quad (\Phi - \lambda\, g)X = 0$$

Множення останньої системи на X^t, з урахуванням рівняння зв'язку, дає:

$$X^t\Phi X = \lambda.$$

Значить, множники Лагранжа і є шукані екстремуми. Так ранг матриці Φ дорівнює 1, то характеристичне рівняння $\det(\Phi - \lambda\, g) = 0$ має вигляд

$$\lambda^n - trace\,(g^{-1}\Phi)\lambda^{n-1} = 0,$$

тобто, єдине нульове власне значення дорівнює

$$\lambda = trace\,(g^{-1}\Phi) = g^{ik}\partial_i f \partial_k f = |\operatorname{grad} f|_g^2.$$

що й потрібно було довести.

■

Означення 3.12.2 *Першим диференціальним оператором Бельтрамі* $\nabla(\cdot,\cdot)$ *називається диференційний оператор на гладких функціях* $f : F^n \to I\!R$*, діючий за правилом*

$$\nabla(f,f) = |\operatorname{grad} f|_g^2.$$

Відповідний білінійну оператор має вигляд $\nabla(\varphi, f) = \left\langle\, \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad} f \,\right\rangle_g$.

Означення 3.12.3 *Дивергенцією векторного поля X на рімановому многовиді (F^n, g) називається функція*

$$div\,(X) = \sum_i \nabla_i X^i$$

Іншими словами, дивергенція векторного поля є слідом матриці його коваріантних похідних.

Нехай $F^{n-1} \subset F^n$ – сімейство гіперповерхонь рівня деякої гладкої функції f:

$$f(u^1, \ldots, u^n) = const.$$

Тоді

$$\xi := \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$$

є полем одиничних нормалей на кожній з таких гіперповерхонь. Оператор Вейнгартена для гіперповерхні визначається так само як і для поверхні в E^3, а саме,

$$AX = -\nabla_X \xi,$$

де X – дотичне векторне поле на гіперповерхні. Функція

$$H = \frac{1}{n-1}\, trace(A)$$

називається середньою кривиною гіперповерхні.

Твердження 3.12.2 *Середня кривина гіперповерхні*

$$f(u^1, \ldots, u^n) = c$$

в рімановому просторі (F^n, g) може бути обчислена за формулою

$$H\Big|_{f=c} = -\frac{1}{n-1}\, div\Big(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}\Big)\Big|_{f=c}.$$

Доведення. Дійсно, позначимо через ∂_i – координатний базис на гіперповерхні $f = c$. Якщо $\xi(c)$ – одиничне нормальне векторне поле цієї гіперповерхні, то

$$\nabla_{\partial_i} \xi(c) = -a_i^k(c)\partial_k.$$

Тоді

$$a_k^i(c) = -g^{is}\big\langle\, \nabla_{\partial_k}\xi, \partial_s \,\big\rangle_g = -g^{is} g_{sm} \nabla_{\partial_k} \xi^m(c) = \nabla_{\partial_k}\xi^i(c)$$

а значить

$$trace(A(c)) = -\nabla_{\partial_i}\xi^i\Big|_{f=c} = -div(\xi)\Big|_{f=c}.$$

Вважаючи $\xi = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$, отримаємо необхідне.

■

Вправа 3.12.1 *Перевірте справедливість формули*

$$div(f \cdot X) = \big\langle\, \operatorname{grad} f, X \,\big\rangle_g + f \cdot div(X).$$

для будь-якої гладкої функції f.

Як наслідок, випишемо формулу для геодезичної кривини кривої, заданої неявно, на двовимірній поверхні.

Вправа 3.12.2 *Покажіть, що*

- *геодезична кривина кривої* $f(u^1, u^2) = c$ *на двовимірній поверхні виражається формулою*

$$k_g = -div\Big(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}\Big)\Big|_{f=c} = -\Big(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g}\Big|_{f=c} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g}\right)\Big|_{f=c}\Big);$$

- *вираз для середньої кривини гіперповерхні* $f(u^1, \dots, u^n) = c$ *в рімановому просторі* (F^n, g) *може бути приведене до вигляду*

$$H\Big|_{f=c} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g}\Big|_{f=c} + \nabla\left(f, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g}\right)\Big|_{f=c}\right).$$

- *середня кривина координатної гіперповерхні* $u^k = c = const$ *може бути зведена до формули*

$$H\Big|_{u^k=c} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sqrt{g^{kk}}}\left(-g^{ij}\Gamma^k_{ij} + \frac{1}{g^{kk}}g^{ik}g^{jk}\Gamma^k_{ij}\right)\Big|_{u^k=c} =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(g^{kk})^{3/2}}\begin{vmatrix} g^{kk} & g^{ki} \\ g^{kj} & g^{ij}\end{vmatrix}\Gamma^k_{ij}\right)_{u^k=c}.$$

Якщо на даній гіперповерхні $f(u^1, \dots, u^n) = const$ вектор градієнта не обертається на нуль, то вздовж цієї гіперповерхні визначено поле одиничних нормалей $\xi = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$. Позначимо через x^1 натуральний параметр на кожній з геодезичних, проведених у напрямку вектора ξ. В силу невиродженості градієнта, сама гіперповерхня $f = const$ допускає локальну параметризацію деякими параметрами $(x^2, \dots, x^n)$. Прийнявши $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в якості нових параметрів на F^n, ми отримаємо локальне завдання гіперповерхні $f = const$ рівнянням $x^1 = 0$ і, очевидно, $g_{11} = 1$, $g_{1\alpha}(0, x^2, \dots, x^n) = 0$ $(\alpha = 2, \dots, n)$. Записавши рівняння геодезичних в нових координатах побачимо, що $\dfrac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^1} = 0$. Отже, $g_{1\alpha} \equiv 0$ і перша фундаментальна форма для F^n зведеться до виду [16]

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \dots, x^n)dx^\alpha dx^\beta.$$

Звідси видно, що сімейство еквідистантних поверхонь ($x^1 = const$) утворює сімейство гіперповерхонь, ортогональних побудованому сімейству геодезичних. Побудована параметризація є *аналогом напівгеодезичній системи координат* на двовимірній поверхні.

В курсі аналізу оператор Лапласа визначався на C^2-гладких функціях формулою

$$\Delta f = div(\operatorname{grad} f).$$

Оператор Лапласа-Бельтрамі визначається такою ж самою формулою, але в припущенні, що дивергенція і градієнт обчислюються в довільній криволінійній системі координат.

Твердження 3.12.3 *Нехай $f : F^n \to I\!R$ – C^2- гладка функція на рімановому многовиді (F^n, g). Тоді*
$$\Delta f = div\,(\mathrm{grad}\, f) = g^{mk}(\partial_{mk} f - \Gamma^i_{mk}\partial_i f).$$

Доведення. Враховуючи, що $\nabla_k(g^{mk}) = 0$, знаходимо

$$div\,(\mathrm{grad}\, f) = \nabla_k(\mathrm{grad}\, f)^k = \nabla_k(g^{mk}\partial_m f) = g^{mk}\nabla_k(\partial_m f) = g^{mk}(\partial_{mk} f - \Gamma^i_{mk}\partial_i f),$$

що і завершує доказ.

■

Нагадаємо, що в декартових координатах лапласіан функції може бути виражений ще і як слід матриці других похідних, тобто *гессіана* функції. Аналогом гессіану в криволінійних координатах є наступна конструкція.

Нехай $\omega = df$ – форма першого диференціала гладкої функції. Коваріантна похідна форми ω має вигляд

$$\nabla_k\omega_i = \frac{\partial\omega_i}{\partial u^k} - \Gamma^m_{ik}\omega_m = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^k} - \Gamma^m_{ik}\frac{\partial f}{\partial u^m}\right),$$

є симетричною білінійною матрицею і називається *Гессіаном* функції на многовиді. Таким чином,
$$(Hess_f)_{ik} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^k} - \Gamma^m_{ik}\frac{\partial f}{\partial u^m}\right).$$

Формою Гессе функції f називається симетрична білінійна форма

$$Hess_f(X, Y) = (Hess_f)_{ik}X^iY^k.$$

У цих термінах лапласіан є повною згорткою тензору $g^{-1} \otimes Hess_f$, тобто

$$\Delta f = g^{ik}(Hess_f)_{ik}.$$

Функція на поверхні називається *гармонічною*, якщо оператор Лапласа-Бельтрамі від неї дорівнює нулю:

$$\Delta f = g^{ik}\nabla_{ik} f = g^{ik}(\partial_{ik} - \Gamma^m_{ik}\partial_m f) = 0,$$

Ненульова функція f називається власною функцією оператора Лапласа - Бельтрамі, якщо існує таке число λ, що

$$\Delta f = \lambda f.$$

Набор чисел $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ називається *спектром* оператора Лапласа - Бельтрамі. Власні функції оператора Лапласа-Бельтрамі на одиничній сфері називаються *сферичними гармоніками* і відносяться до класу спеціальних функцій.[6]

Твердження 3.12.4 *Поверхня $F^2 \subset E^3$ мінімальна тоді і тільки тоді, коли координатні функції її конформної параметризації є гармонічними функціями.*

[6] Детальніше див. Г. Корн, Т. Корн. Довідник з математики для інженерів і науковців.

Доведення. Відносно конформної параметризації, перша фундаментальна форма поверхні має вигляд

$$ds^2 = e^{2\sigma}\big((du^1)^2 + (du^2)^2\big).$$

Тоді

$$g = \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix}$$

Порахуємо символи Крістофеля:

$$\Gamma^1_{11} = \partial_1\sigma, \qquad \Gamma^1_{12} = \partial_2\sigma, \quad \Gamma^1_{22} = -\partial_1\sigma;$$

$$\Gamma^2_{11} = -\partial_2\sigma, \quad \Gamma^2_{12} = \partial_1\sigma, \quad \Gamma^2_{22} = \partial_2\sigma.$$

Тоді

$$\Delta f = g^{ik}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma^m_{ik}\frac{\partial f}{\partial u^m}\right) =$$

$$e^{-2\sigma}\left(\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} - (\Gamma^m_{11} + \Gamma^m_{22})\frac{\partial f}{\partial u^m}\right) = e^{-2\sigma}\Delta_0 f.$$

де через Δ_0 позначений Евклідовий Лапласіан функції, тобто Лапласіан функції в Декартових координатах. Звідси

$$\Delta f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_0 f = 0.$$

Розглянемо конформну параметризацію поверхні

$$\vec{r} = \{\varphi^1(u^1, u^2), \varphi(u^1, u^2), \varphi^3(u^1, u^2)\}, \quad (u^1, u^2) \in \mathcal{D}, \varphi^i \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}.$$

Використовуючи розкладання Вейнгартена

$$\partial_{ik}\vec{r} = \Gamma^m_{ik}\partial_m\vec{r} + b_{ik}\vec{n},$$

знайдемо

$$\Delta_0\vec{r} = \sum_i \partial_{ii}\vec{r} = (\Gamma^m_{11} + \Gamma^m_{22})\partial_m\vec{r} + (b_{11} + b_{22})\vec{n} = (b_{11} + b_{22})\vec{n}.$$

Зауважимо, що

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\ A = \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\ (g^{-1}B) =$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(b_{11} + b_{22}).$$

Значить, $H = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\Delta_0\vec{r} = 0$.

■

Вправа 3.12.3 *Довести, що в* E^3 *не існує замкненої мінімальної поверхні.*

Як відомо, дійсна і уявна частини голоморфної функції комплексної змінної є гармонійними функціями. Ця обставина дозволяє будувати велику кількість прикладів мінімальних поверхонь і називається *поданням Вейерштрасса-Еннепера для мінімальної поверхні*[7]. Введемо на мінімальній поверхні з радіусом-вектором $x = (x^1, x^2, x^3)$ конформні (ізотермічні) координаты (u_1, u_2) і позначимо $z = u_1 + iu_2$. У цих координатах лінійний елемент має вигляд $ds^2 = \Lambda(du_1^2 + du_2^2)$. Пусть

$$\varphi_k(z) = \frac{\partial x^k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x^k}{\partial u_2} \tag{3.22}$$

оскільки $\frac{\partial x^k}{\partial u_j}$ при $j = 1, 2-$ пов'язані гармонійні функції, то $\varphi_k(z)$ аналітичні функції. Тоді отримаємо рівняння

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi_k^2(z) = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_1}\right)^2 - 2i\frac{\partial x^k}{\partial u_1}\frac{\partial x^k}{\partial u_2} - \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_2}\right)^2 \right\} = 0 \tag{3.23}$$

де ми використовували ту обставину, що координати ізотермічні:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} = 0.$$

Крім того, маємо

$$\sum_k |\varphi_k(z)|^2 = \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_2}\right)^2 \right\} = 2\Lambda \tag{3.24}$$

Розглянемо рівняння (3.23). Це рівняння можна вирішити за допомогою двох комплексних аналітичних функцій f і g. Покажемо, що для функцій φ_k, що задовольняють рівняння (3.23), існує уявлення

$$\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2), \quad \varphi_3 = fg \tag{3.25}$$

Насамперед зазначимо, що так задані функції φ_k дійсно задовольняють рівняння (3.23). Підстановка в рівняння дає тотожність

$$\frac{1}{4}f^2(1 - 2g^2 + g^4) - \frac{1}{4}f^2(1 + 2g^2 + g^4) + f^2g^2 \equiv 0$$

Назад, якщо відомі функції φ_k, що задовольняють рівняння (3.23), то функції f і g визначимо наступним чином

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \qquad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \tag{3.26}$$

Покажемо, що за допомогою так визначених функцій f і g, функцій φ_k представляються у вигляді (3.25). Дійсно, маємо з (3.26) очевидну рівність

$$\varphi_3 = fg$$

[7]Тут ми використовуємо викладки з [2]

Далі, рівняння (3.23) можна записати так

$$(\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\varphi_3^2$$

Звідси знаходимо

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}\right)^2 (\varphi_1 - i\varphi_2) = -fg^2$$

За допомогою цієї рівності і виразу для f в (3.26) знаходимо

$$2\varphi_1 = f - fg^2, \quad -2i\varphi_2 = f + fg^2$$

тобто маємо вирази (3.25). Для регулярної поверхні функції $\varphi_k(z)$ повинні бути регулярні. Це накладає певні умови на поведінку функцій f і g. В області зміни комплексної змінної z функція $g(z)$ може бути довільною мероморфною функцією, в той час як $f(z)$– аналітична функція. При цьому, якщо в деякій точці z функція $g(z)$ має полюс порядку m, то f повинна мати в цій точці нуль порядку не менш $2m$. В іншому випадку в цій точці φ_1 була б необмежена. Але і більший порядок нуля, ніж $2m$ функція f не може мати, оскільки в іншому випадку $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2, 3$ тобто базисні дотичні вектори x_{u_1} і x_{u_2} дорівнюють нулю, що неможливо.

Має місце уявлення

$$\begin{array}{ll} 2x_1 = Re\int f(1-g^2)\,dz & +c_1 \\ 2x_2 = Re\int if(1+g^2)\,dz & +c_2 \\ x_3 = Re\int fg\,dz & +c_3 \end{array} \tag{3.27}$$

Дійсно, маємо приклад для першої компоненти радіус-вектора

$$2x_1 = 2Re\int \varphi_1 dz + c_1 = Re\int f(1-g^2)\,dz + c_1$$

В якості незалежної комплексної змінної можна взяти і g. Тоді отримаємо *класичне уявлення Вейєрштрасса-Еннепера*

$$\begin{array}{ll} x_1 = \Re\int F(g)(1-g^2)\,dg & +a_1 \\ x_2 = \Re\, i\int F(g)(1+g^2)\,dg & +a_2 \\ x_3 = \Re\int 2F(g)g\,dg & +a_3 \end{array} \tag{3.28}$$

де $F(g) = \frac{1}{2}f\frac{dz}{dg}$ – називається функцією Вейєрштрасса. Якщо в цих формулах покласти $F(g) = 1$, то отримаємо поверхню Еннепера, при $F = -\frac{1}{2g^2}$ отримаємо катеноїд. Функція $F = 1/\sqrt{1 - 14g^4 + g^8}$ відповідає поверхні Г.А. Шварца. Поверхня Хеннеберга виходить при $F = 1 - \frac{1}{g^4}$.

Ротор векторного поля. Поле Кіллінга.

Нехай ξ – векторне поле на поверхні. Позначимо через ω – форму, двоїсту векторному полю ξ. Тоді

$$\omega_i = g_{ik}\xi^k.$$

Ротором векторного поля ξ називається кососиметрична 2-форма $rot\,\xi$, що визначається формулою

$$(rot\,\xi)_{ik} = \nabla_i \omega_k - \nabla_k \omega_i.$$

Векторне поле називається замкнутим, якщо його ротор дорівнює нулю.

Вправа 3.12.4 *Покажіть, що якщо дане визначення узгоджується з визначенням ротора з векторного аналізу в* R^3.

Векторне поле ξ називається полем Кіллінга (або Кіллінговим), якщо воно задовольняє рівнянню

$$\nabla_i \omega_k + \nabla_k \omega_i = 0,$$

де ω – двоїста 1- форма.

Вправа 3.12.5 *Покажіть, що одиничне векторне поле* ξ *є полем Кіллінга тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\langle \nabla_X \xi, Y \right\rangle_g = -\left\langle \nabla_Y \xi, X \right\rangle_g.$$

Остання рівність означає, що оператор Номідзу $A_\xi : X \to -\nabla_X \xi$ є кососиметричним лінійним оператором.

Вправа 3.12.6 *Покажіть, що якщо оператор* A_ξ *симетричний, то інтегральні траєкторії поля* ξ *являються геодезичними лініями, а саме поле є полем одиничних нормалей деякого сімейства гіперповерхонь.*

Рекомендованная литература

[1] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. Киев, Наукова думка, 2002

[2] Аминов Ю.А. Минимальные поверхности. Харьков, 1973

[3] Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М., Наука, 1987

[4] Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.. Введение в дифференциальную геометрию "в целом" . М., Наука, 1973.

[5] Борисенко А. А. Дифференциальная геометрия и топология. Х., Основа, 1995.(Укр.)

[6] Борисенко А. А. Внутренняя и внешняя геометрия подмногообразий. М., Экзамен, 2003.

[7] Бляшке В. Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935

[8] Брус, Джиблин, Кривые и особености, М., Мир, 1987

[9] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М., Наука, 1977.

[10] Погорелов А.А. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1986

[11] Позняк Э.Г., Шикин В.Б. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М., Наука, 1986

[12] Постников М.М. Лекции по геометрии. Гладкие многообразия. М., Наука, 1987

[13] Постников М.М. Лекции по геометрии. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1988

[14] Рашевский П. К. Дифференциальная геометрия, М., Наук, 1948

[15] Рашевский П. К. Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, ОНТИ, 1936

[16] Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948

[17] J. Lie Riemannian geometry. An imntroduction to curvature. Springer, 1950

[18] David R. Wilkins. A course in Riemannian Geometry. 2005.

Покажчик