

Вопросы к экзамену по аналитической геометрии 2019 г., лето

1. Опорная гиперплоскость. Существование опорной гиперплоскости у выпуклого множества. Примеры. Описание замыкания выпуклой оболочки с помощью полупространств.
2. Достаточное условие выпуклости множества в терминах опорных гиперплоскостей.
3. Эллипс. Каноническое уравнение. Основные свойства. Фокальные радиусы и директориальное свойство эллипса.
4. Гипербола. Каноническое уравнение. Равносторонняя и сопряженная гиперболы. Основные свойства. Асимптоты. Фокальные радиусы и директориальное свойство гиперболы.
5. Парабола. Каноническое уравнение. Основные свойства. Прямой круговой конус. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения.
6. Фокальный параметр. Уравнения коник, отнесенные к вершине. Уравнения коник в полярных координатах.
7. Кривая. Примеры. Касательная, ее существование и единственность в регулярной точке. Случай явно заданной кривой.
8. Непрерывные функции и неявно заданные кривые на плоскости. Теорема о неявной функции и касательная к неявно заданной кривой.
9. Касательные к кривым второго порядка. Алгебраическая характеристика касательных. Оптические свойства коник.
10. Алгебраические гиперповерхности. Примеры. Гиперповерхности второго порядка (гиперквадрики) и аффинные квадратичные функции. Преобразование уравнения при замене координат.
11. Симметрия относительно точки. Центр гиперквадрики. Характеризация центров. Центральные и нецентральные гиперквадрики.
12. Теоремы о приведении уравнения гиперквадрики к каноническому виду в декартовых и в аффинных координатах.
13. Единственность уравнения гиперквадрики с точностью до умножения на число. Канонические уравнения кривых второго порядка.
14. Канонические уравнения поверхностей второго порядка и их основные свойства.
15. Конические поверхности. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения. Примеры.
16. Общая классификация гиперквадрик. Непрерывные функции, неявно заданные гиперповерхности и многомерная теорема о неявной функции. Явно заданные гиперповерхности.
17. Пересечение гиперквадрики с прямой. Асимптотические и особые направления. Существование точек пересечения для неасимптотического направления. Диаметральная гиперплоскость, сопряженная направлению.
18. Симметрия относительно гиперплоскости. Характеризация гиперплоскостей симметрии гиперквадрики. Собственные значения и собственные векторы матриц и операторов. Главные направления. Примеры. Связь с каноническим базисом.

19. Характеристическое уравнение. Инварианты. Вырожденные и невырожденные гиперквадрики. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду с использованием инвариантов.
20. Асимптотический конус. Примеры. Связь уравнений гиперboloида и его асимптотического конуса. Образующие асимптотического конуса как асимптоты.
21. Прямолинейные образующие. Примеры. Особые и неособые точки. Теорема о неявной функции и касательная гиперплоскость неявно заданной гиперповерхности. Случай гиперквадрики. Примеры.
22. Характеризация прямолинейных образующих гиперквадрики. Пересечение гиперквадрики и ее касательной гиперплоскости. Случай поверхностей второго порядка. Прямолинейные образующие на однополостном гиперboloиде и гиперболическом параболоиде и их свойства (без доказательства свойств).
23. Аффинные преобразования и их группа. Композиция и обратное преобразование. Собственные и несобственные преобразования. Запись в координатах, связь с заменой координат. Примеры.
24. Аффинные изометрии и их группа. Собственные и несобственные изометрии. Теорема о совпадении метрических изометрий евклидова аффинного пространства с аффинными. Запись в координатах и ортогональные матрицы.
25. Примеры изометрий. Теорема об общем виде изометрии. Теоремы Шаля для плоскости и трехмерного пространства.
26. Алгебры и их свойства. Кватернионы. Сопряжение, вещественная и мнимая части. Свойства сопряжения. Модуль кватерниона. Кватернионы как тело.
27. $O(n)$ как группа изометрий с неподвижной точкой. Описание $SO(2)$ с помощью комплексных чисел. Описание $SO(3)$ и $SO(4)$ с помощью кватернионов. Углы Эйлера (без доказательства).
28. Задание аффинного преобразования образами точек. Основная теорема аффинной геометрии. Общий вид аффинного преобразования. Преобразования подобия и их группа.
29. Проективное пространство. Однородные координаты. Проективные подпространства. Аффинные карты и бесконечно удаленные точки. Проективизация линейного отображения. Проективные изоморфизмы, проективные преобразования и их группа. Запись в однородных и аффинных координатах.
30. Задание проективного преобразования образами точек. Двойное отношение и основная теорема (вещественной) проективной геометрии. (Без доказательств.)
31. Проективные гиперплоскости и двойственность. Принцип двойственности. Проективные гиперквадрики. Приведение уравнения гиперквадрики к каноническому виду над вещественными и комплексными числами. Случай кривых. Двойственность относительно гиперквадрики (полярное соответствие).
32. Теоремы Дезарга, Паппа-Паскаля, Бриансона. Аксиоматическая проективная плоскость, роль теорем Дезарга и Паппа. Плоскость Фано. (Без доказательств.)