1. Прежде всего несколько полезных для следующих задач упражнений.

   - Описать композиции различных изометрий плоскости из классов, перечисленных в теореме Шаля.
   - Пусть $\varphi$ и $\psi$ – изометрии. Сопряженной к $\varphi$ называется изометрия $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$. Что представляет собой изометрия, сопряженная к повороту? Трансляции? Симметрии?

2. Группы изометрий – традиционный источник примеров для теории групп!

   - Найти все конечные группы изометрий прямой (т.е. все конечные подгруппы группы ее изометрий). Сколько существует различных с точностью до изоморфизма таких групп?
   - Показать, что все элементы некоторой конечной группы изометрий плоскости имеют общую неподвижную точку.
   - Показать, что углы всех поворотов, содержащихся в конечной группе изометрий плоскости, кратны $2\pi/n$ для некоторого натурального $n$.
   - Описать (с точностью до изоморфизма) все конечные группы собственных изометрий плоскости.
   - Описать (с точностью до изоморфизма) все конечные группы изометрий плоскости. Показать что все они изоморфны некоторым подгруппам в группах перестановок.
   - Описать группу изометрий пространства, переводящих данный правильный тетраэдр в себя. Каков ее порядок? Какой известной вам группе она изоморфна?
   - Описать группу изометрий пространства, переводящих данный куб в себя. Каков ее порядок? Какой известной вам группе изоморфна подгруппа ее собственных элементов?

3. Естественным обобщением конечных групп изометрий являются дискретные. Орбитой точки $P$ под действием группы $G \subset Iso(A)$ называется множество $G(P) = \{\varphi(P) | \, \varphi \in G\}$. $G$ называется дискретной, если для любых $P, Q \in A$ существует открытое множество $U \ni Q$ такое, что $U \cap G(P)$ состоит из не более чем одной точки.

   - Показать, что любая конечная группа изометрий дискретна.
   - Показать, что любая бесконечная группа собственных изометрий прямой состоит из трансляций на числа, кратные некоторому $a \in \mathbb{R}$, и что все такие группы изоморфны.
   - Описать все дискретные группы изометрий прямой.
   - Фундаментальной областью группы изометрий называется множество, содержащее ровно по одной точке каждой ее орбиты. Описать группу $G_{a_1,\ldots,a_n}$ изометрий $n$-мерного пространства, порожденную параллельными переносами на линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_n$, показать, что она дискретна, и найти какую-нибудь ее фундаментальную область.
   - Множество называется ограниченным, если содержится в некотором евклидовом шаре. Группа изометрий называется кристаллографической (федоровской, для плоскости – орнаментальной), если она дискретна и у нее существует ограниченная фундаментальная область. Показать, что конечные группы изометрий плоскости не являются кристаллографическими.
   - Показать, что подгруппа трансляций кристаллографической группы плоскости имеет вид $G_{a,b}$ (это верно и в произвольной размерности).
   - Показать, что подгруппа кристаллографической группы плоскости, состоящая из элементов, оставляющих на месте некоторую точку, конечна, а ее собственные элементы могут быть только поворотами на углы, кратные $2\pi/n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Пользуясь двумя последними результатами, можно описать все 17 различных (с точностью до изоморфизма) орнаментальных групп.