1. Пусть $P_1, \dots, P_n$ – точки на эллипсоиде с полуосями $a_1, \dots, a_n$ и центром O такие, что векторы $\overline{OP_1}, \dots, \overline{OP_n}$ попарно ортогональны. Показать, что выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{OP_i^2}$ не зависит от выбора точек, и найти его.

2. Рассмотрим семейство гиперквадрик, заданных уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x^i)^2}{a_i^2 + \lambda} = 1,$$

где $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ – фиксированные, а λ – вещественный параметр. Сколько различных гиперквадрик этого семейства проходит через произвольную точку пространства? Воспользоваться этим наблюдением, чтобы построить систему координат на некотором открытом подмножестве пространства (по аналогии с эллиптическими координатами на плоскости). Показать, что в каждой точке этого подмножества касательные гиперплоскости к проходящим через нее гиперквадрикам семейства (которые называются координатными) попарно ортогональны. Как выглядят координатные поверхности этой системы в трехмерном случае?

3. Понятие сопряженности можно сделать симметричным: пусть β – симметричная билинейная форма на векторном пространстве V над произвольным полем, тогда векторы v и w называются сопряженными относительно β, если $\beta(v, w) = 0$. Для подпространства $W \subset V$ назовем сопряженным с ним $W' = \{v \in V | \beta(v, w) = 0 \, \forall w \in W\}$. Ядром β называется $\mathrm{Ker}\beta = V'$, если оно равно нулю, то β называется невырожденной. Пусть V конечномерно. Показать, что:

   - W' – подпространство V;
   - Если β невырождена или ограничение β на W невырождено (проверить, что ни одно из этих условий не следует из другого), то $\dim V = \dim W + \dim W'$;
   - Если ограничение β на W невырождено, то $V = W + W'$; показать, что это, вообще говоря, неверно в противном случае;
   - Если ограничения β на W и W' невырождены, то $(W')' = W$.

   Понятие сопряженности остается корректно определенным и симметричным и в случае кососимметричной билинейной β. Верны ли утверждения выше для таких форм?

4. Симметрией относительно прямой l называется отображение σ_l, которое ставит в соответствие каждой точке P евклидова аффинного пространства единственную точку P' такую, что $\overline{PP'} \perp l$ и $d(P, l) = d(P', l)$. l называется осью симметрии множества B, если $\sigma_l(B) = B$. Описать оси симметрии центральной гиперквадрики.