

Вопросы к зачету по аналитической геометрии

2018 г., зима

1. Векторное пространство. Примеры. Направленные отрезки и векторы в аксиоматических евклидовых плоскости и пространстве.
2. Линейные комбинации векторов. Линейная (не)зависимость и полнота, их свойства. Базис и размерность. Координаты вектора.
3. Аффинное пространство. Примеры. Радиус-вектор. Аффинная система координат. Деление отрезка в заданном отношении, запись в аффинных координатах.
4. Линейные отображения. Примеры. Пространство линейных отображений. Линейный изоморфизм.
5. Запись линейного отображения в координатах. Матрицы. Линейные операции над ними и пространство матриц. Композиция линейных отображений и умножение матриц.
6. Матрица перехода. Преобразование координат вектора и точки при переходе к другой системе координат.
7. Аффинные отображения. Примеры. Запись аффинного отображения в аффинных координатах. Аффинный изоморфизм.
8. Скалярное произведение и векторное евклидово пространство. Примеры. Скалярное произведение векторов в аксиоматическом евклидовом пространстве, доказательство его свойств. Ортогональная проекция вектора на прямую, определяемую другим вектором.
9. Длина и угол между векторами в векторном евклидовом пространстве. Неравенства Коши-Буняковского-Шварца и треугольника.
10. Метрические коэффициенты базиса и матрица Грама. Скалярное произведение в координатах. Преобразование матрицы Грама при переходе к другому базису.
11. Ортогональные системы и их свойства. Ортонормированный базис, его существование. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональные матрицы.
12. Аффинное евклидово пространство. Расстояние между точками и его свойства. Расстояние между точками в координатах. Декартовы системы координат. Линейные и аффинные изометрии.
13. Перестановки и их свойства (без доказательства). Смешанное произведение, связанное с базисом. Смешанное произведение и линейная независимость векторов.
14. Существование и единственность смешанного произведения. Определитель.
15. Свойства определителя. Теорема об определителе произведения матриц. Невырожденные (обратимые) матрицы. Свойства ортогональных матриц.
16. Одинаковая и противоположная ориентация базисов. Ориентация векторного пространства. Непрерывные деформации базисов. Линейные и аффинные преобразования, сохраняющие (обращающие) ориентацию.
17. Ориентированное евклидово пространство. Евклидово смешанное произведение. Угол от одного вектора до другого на плоскости. Формула для синуса.

(Ориентированная) площадь параллелограмма и треугольника. (Ориентированный) объем параллелепипеда и тетраэдра.

18. Разложение определителя по строке и столбцу (без доказательства). Векторное произведение, его существование и единственность. Вычисление векторного произведения в ортонормированном положительно ориентированном базисе.
19. Свойства векторного произведения. Однозначная определенность векторного произведения свойствами.
20. Векторное произведение в трехмерном пространстве. Применение для вычисления площадей. Двойное векторное произведение. Тождество Якоби. Тождество Лапласа.
21. Полярные координаты на плоскости. Цилиндрические и сферические координаты в трехмерном пространстве. Связь с декартовыми координатами.
22. Сферические прямые и отрезки. Расстояния и углы на сфере. Сферический треугольник. Сферические теоремы косинусов и Пифагора. Сферическое неравенство треугольника.
23. Двойственная сферическая теорема косинусов. Свойство суммы углов сферического треугольника. Формула для синуса угла в прямоугольном сферическом треугольнике. Сферическая теорема синусов.
24. Векторные подпространства. Примеры. Ядро и образ линейного отображения. Пересечение подпространств. Включение подпространств и размерность.
25. Линейная оболочка конечного семейства векторов. Описание с помощью линейных комбинаций. Размерность.
26. Аффинное подпространство, его направляющее векторное подпространство и размерность. Примеры. Описание с помощью точки и направляющего пространства. Параметрические уравнения. Прямая, ее направляющий вектор, параметрические и канонические уравнения.
27. Аффинная оболочка конечного множества точек. Описание с помощью линейной оболочки. Размерность. Параметрические уравнения. Случай прямой, проведенной через две точки. Критерий аффинного подпространства.
28. Взаимное расположение аффинных подпространств. Параллельные, скрещивающиеся, пересекающиеся подпространства. Взаимное расположение двух прямых.
29. Описание векторной гиперплоскости как ядра некоторого функционала. Выражение этого функционала через базис гиперплоскости.
30. Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом пространстве и его свойства. Задание векторной гиперплоскости нормальным вектором. Выражение нормального вектора через базис гиперплоскости.
31. Общее уравнение аффинной гиперплоскости. Его свойства. Общее уравнение гиперплоскостей, заданных точкой и базисом (в том числе аффинной оболочки точек), точкой и нормальным вектором.
32. Взаимное расположение аффинных гиперплоскостей. Пересечение двух гиперплоскостей. Задание подпространства пересечением гиперплоскостей (общие уравнения аффинного подпространства). Взаимное расположение гиперплоскости и прямой.
33. Связка подпространств. Пучок гиперплоскостей. Уравнение пучка.

- 34.Отрезок. Принадлежность точек полупространству как отношение эквивалентности. Связь с уравнением гиперплоскости. Открытые и замкнутые полупространства. Полупространства и нормальные векторы.
- 35.Расстояние между подмножествами аффинного евклидова пространства. Ортогональная проекция на подпространство векторного евклидова пространства и на его ортогональное дополнение. Сумма векторных подпространств. Общий перпендикуляр. Теорема о существовании общего перпендикуляра и о расстоянии между подпространствами.
- 36.Перпендикуляр и расстояние от точки до гиперплоскости, от точки до прямой, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых в трехмерном пространстве и расстояние между ними.
- 37.Угол между гиперплоскостями, между прямыми, между гиперплоскостью и прямой.
- 38.Барицентрические комбинации и их свойства. Барицентрические координаты. Примеры.
- 39.Выпуклые множества. Примеры. Пересечение и объединение выпуклых множеств.
- 40.Выпуклая оболочка. Существование и единственность. Конус. Выпуклая оболочка объединения выпуклого множества и точки. Описание выпуклой оболочки конечного числа точек. Симплекс.
- 41.Основные понятия топологии в аффинном евклидовом пространстве: внутренность, граница и замыкание множества, открытые и замкнутые множества. Примеры. Простейшие свойства: пересечение и объединение открытых множеств, монотонность внутренности и замыкания. Множества, открытые в подпространстве. Выпуклые поверхности.