1. Доказать тождество Якоби:

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0$$

для любых векторов a, b, c из трехмерного ориентированного евклидова пространства.

2. Структуры, удовлетворяющие тем же свойствам, что и векторное произведение в трехмерном пространстве, появляются и в других разделах линейной алгебры. Доказать, что для произвольного поля F матричный коммутатор $[\cdot,\cdot]\colon Mat(n,n,F)\times Mat(n,n,F)\to Mat(n,n,F)$, определяемый равенством $[A,B]=AB-BA$ – билинейное и кососимметричное отображение, удовлетворяющее тождеству Якоби.

3. Проверить, что следующие пространства матриц замкнуты относительно коммутатора (т.е. если A и B принадлежат пространству, то и $[A,B]$ ему принадлежит):

   - $\mathfrak{sl}(n,F)=\{A\in Mat(n,n,F)|\mathrm{Tr}A=0\}$;
   - $\mathfrak{so}(n)=\{A\in Mat(n,n,\mathbb{R})|A=-A^T,\}\subset\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$;
   - $\mathfrak{u}(n)=\{A\in Mat(n,n,\mathbb{C})|A=-\overline{A}^T\}$;
   - $\mathfrak{su}(n)=\mathfrak{u}(n)\cap\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

4. Построить линейный изоморфизм между $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$ (над $\mathbb{R}$), сохраняющий коммутатор (т.е. $\varphi([A,B])=[\varphi(A),\varphi(B)]$ для любых A и B). Ранее мы вводили скалярное произведение на $\mathfrak{su}(2)$ формулой $\langle A,B\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\overline{B}^T)$. Как ввести скалярное произведение на $\mathfrak{so}(3)$ так, чтобы построенное отображение превратилось в изометрию? Показать, что при подходящем выборе ориентаций коммутаторы совпадают с векторными произведениями этих трехмерных евклидовых пространств.