1. Обобщим одну из задач предыдущего занятия. Доказать, что отображение φ аффинного пространства в себя сохраняет простое отношение трех точек (т.е. если C делит AB в отношении λ, то $\varphi(C)$ делит $\varphi(A)\varphi(B)$ в отношении λ) тогда и только тогда, когда является аффинным преобразованием. При доказательстве необходимости тут можно следовать следующей схеме:

   - Построить отображение ψ соответствующего векторного пространства в себя, которое было бы линейной частью φ, если бы φ было аффинным.
   - Записать условие сохранения простого отношения (или следствия из него) в терминах ψ.
   - Вывести из полученных условий, что ψ – линейное.

   После этого уже легко показать что φ – аффинное, а ψ – действительно его линейная часть.

2. Следом матрицы называется сумма ее диагональных элементов: если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, то $\mathrm{Tr}A = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$. След удобно использовать при построении скалярных произведений на пространствах матриц.

   - Показать, что $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^T)$ задает скалярное произведение на пространстве вещественных 2×2-матриц $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = Mat(2,2,\mathbb{R})$. Найти какой-нибудь ортонормированный базис.
   - Комплексные числа тоже можно использовать для построения евклидовых пространств. Показать, что множество “косоэрмитовых” 2×2-матриц с нулевым следом $\mathfrak{su}(2) = \{A \in Mat(2,2,\mathbb{C}) | A = -\overline{A}^T, \mathrm{Tr}A = 0\}$ является трехмерным векторным пространством над $\mathbb{R}$, а $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\overline{B}^T) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(AB)$ задает скалярное произведение на этом пространстве. Найти какой-нибудь ортонормированный базис.
   - Показать, что $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB)$ задает на $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ произведение, которое будет билинейным и симметричным, но не положительно (или отрицательно) определенным. Показать, что, тем не менее, оно является невырожденным: для любой матрицы A существует такая B, что $\langle A, B\rangle \neq 0$. Предложите аналог ортонормированного базиса для таких произведений. Такие пространства называются псевдоевклидовыми, а рассмотренное в этом примере (с точностью до изометрии) – пространством Минковского.

3. Пусть V – конечномерное векторное пространство и отображение $(\cdot,\cdot)\colon V\times V \to \mathbb{R}$ – билинейное и кососимметричное, т.е. $(a,b) = -(b,a)$ для любых a и b (или, что равносильно, $(a,a) = 0$ для любого a). Аналогично ортонормированному базису для скалярного произведения показать, что можно построить базис V, все ненулевые попарные произведения элементов которого имеют вид $(e_{2k-1}, e_{2k}) = -(e_{2k}, e_{2k-1}) = 1$. Вывести отсюда, что $(\cdot,\cdot)$ может быть невырожденным (в смысле последнего пункта предыдущей задачи) только если V четномерно. В этом случае пара $(V, (\cdot,\cdot))$ называется симплектическим пространством.

4. Пусть $(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – конечномерное евклидово пространство. Построить изоморфизм $V \to V^*$, не используя базис V.