



Вступ до COMSOL Multiphysics

Зміст

О.1. Огляд метода скінченних елементів.....	1
О.1.1 Одновимірні задачі.....	1
О.1.2 Двовимірні задачі	11
О.1.3 Подальші питання реалізації МСЕ в COMSOL Multiphysics.	27

О.1. Огляд метода скінченних елементів.

О.1.1 Одновимірні задачі

Один із способів трактування метод скінченних елементів (МСЕ) базується на теоремі Ейлера – Лагранжа з варіаційного числення. В одновимірному випадку вона стверджує, що для того, щоб функціонал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

визначений на множині функцій $y = y(x)$, які мають неперервну першу похідну і задовольняють умовам

$$y(a) = A, y(b) = B, \quad (2)$$

досягав на функції $y(x)$ екстремуму необхідно, щоб ця функція задовольняла рівнянню

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (3)$$

Це диференціальне рівняння другого порядку. Його розв'язок залежить від двох довільних сталих, які знаходяться з граничних умов (2).

При пошуку екстремуму інколи виникають складнощі з гладкістю функції $y(x)$, бо вираз в лівій частині (3) містить другі похідні цієї функції, а функціонал (1) – ні. Може статися що крива, на якій функціонал (1) досягає екстремуму, не є двічі диференційованою. Такі особливі випадки досліджуються в варіаційному численні.

Рівняння (3) дає лише необхідну, але, взагалі кажучи, недостатню умову екстремуму. Проте в багатьох випадках воно дає вичерпну відповідь, бо часто існування екстремуму зрозуміло з фізичного або геометричного сенсу задачі.

Розглянемо задачу в зворотному напрямку. Нехай є диференціальне рівняння (3) з граничними умовами (2). Враховуючи раніше сказане, можна стверджувати, що розв'язком цієї задачі буде функція, на якій функціонал (1)

досягає екстремуму. Отже, якщо побудувати функціонал (1), і знайти його екстремум, то він (екстремум) буде одночасно розв'язком крайової задачі (3), (2). Звідси випливає суть метода скінчених елементів. Вона полягає в тому, що замість розв'язання диференціального рівнянь шукається наближений екстремум відповідного функціонала. Розглянемо це на прикладі.

На відрізку $[a, b]$ розв'яжемо задачу

$$\begin{aligned} -u''_{xx} &= f(x), \quad a < x < b \\ y(a) &= 0, \quad y(b) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Її розв'язок відомий

$$y(x) = \int_a^x (z-x)f(z)dz - \frac{x-a}{b-a} \left(\int_a^b (z-b)f(z)dz \right),$$

але нам буде зручно продемонструвати на цьому прикладі основні ідеї метода.

Спочатку побудуємо для задачі (4) функціонал (1). Покладемо

$$F(x, u, u'_x) = \frac{1}{2} (u'_x)^2 - u \cdot f.$$

Тоді $\frac{\partial F}{\partial u} = -f$, $\frac{\partial F}{\partial u'_x} = u'_x$. Формула (3) приймає вид $-f - u'' = 0$, який співпадає

з диференціальним рівнянням (4). Отже функціонал (1), який відповідає цьому рівнянню, має вигляд

$$J[u] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} (u'_x)^2 - u \cdot f \right) dx. \quad (5)$$

Зверніть увагу на те, що в (5) не входить друга похідна шуканої функції, що спрощує навантаження на числові алгоритми при мінімізації функціонала.

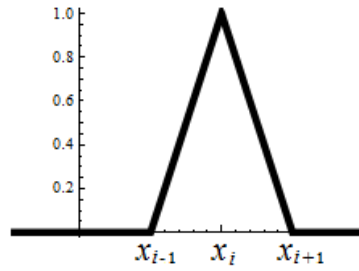
В найпростішому варіанті метода скінчених елементів шукану функцію $u(x)$ замінюють неперервною кусково-лінійною функцією $\omega(x)$. Побудуємо базис в просторі таких функцій.

Нехай дано розбиття відрізка інтегрування $[a, b]$: $\Omega = \{x_i\}_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, яке назвемо скінченно-елементною сіткою. Очевидно, що всі ламані, які мають вузли в точках x_i (на сітці Ω) і обертаються в нуль на кінцях відрізка $[a, b]$, утворюють лінійний простір. Назвемо його W_Ω . Найпростішими базисними функціями в цьому просторі будуть функції $\varphi_i(x)$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_i - x_{i-1}} |x - x_{i-1}| - \left(\frac{1}{x_{i+1} - x_i} + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \right) \cdot |x - x_i| + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} |x - x_{i+1}| \right)$$

Графік функції $\varphi_i(x)$ показано на наступному рисунку.



Очевидно, що для функцій $\varphi_i(x)$ виконується умова

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Крім того, функції $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, які відповідають внутрішнім вузлам сітки, автоматично дорівнюють нулю в граничних точках $x_0 = a$ і $x_n = b$.

Функції-капельюшки $\varphi_i(x)$ утворюють базис в просторі W_Ω , але він (базис) не зовсім ортогональний тому, що для сусідніх елементів скалярний добуток $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \neq 0$ ($i - j = 0, \pm 1$) не дорівнює нулю.

Будь-яка кусково-лінійна неперервна функція $\omega(x) \in W_\Omega$, яка дорівнює нулю в кінцевих точках x_0 і x_n , може бути репрезентована у вигляді

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i(x), \quad (7)$$

де підсумовування виконується по всіх внутрішніх вузлах сітки Ω . Ясно також, що $c_i = \omega(x_i)$.

Перейдемо до пошуку екстремуму функціонала (5) на множині ламаних з сіткою Ω , які задовольняють нульовим граничним умовам (тобто в просторі W_Ω). Всі вони можуть бути представлені у вигляді (7). Нам потрібно отримати рівняння, яким будуть задовольняти невідомі коефіцієнти c_k , щоб функціонал (5) досягав екстремуму. Підставивши (7) в (5), отримуємо

$$\begin{aligned} J[\omega] &= J \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i \right] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i' \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i \right) \cdot f \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} c_i c_j \int_a^b \varphi_i' \cdot \varphi_j' dx - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_a^b f \cdot \varphi_i dx. \end{aligned}$$

Позначимо $k_{ij} = \int_a^b \varphi_i' \cdot \varphi_j' dx$ і $b_i = \int_a^b f \cdot \varphi_i dx$. Тоді

$$J[\omega] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij} c_i c_j - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i. \quad (8)$$

Коефіцієнти k_{ij} утворюють симетричну матрицю $K = [k_{ij}]$ розміру $(n-1) \times (n-1)$, а елементи b_i – вектор–стовпець $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^T$. Функціонал $J(\omega) = J(c_1, c_2, \dots, c_n)$ перетворився на функцію $n-1$ невідомих $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Її екстремум визначається розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_q} = 0 & (q = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Але

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_q} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i,j=1}^{n-1} k_{ij} c_i c_j - \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_i = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i,i \neq q}^{n-1} k_{iq} c_i c_q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} k_{qq} c_q^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{j,j \neq q}^{n-1} k_{qj} c_q c_j - b_q = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_{iq} c_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} k_{qj} c_j - b_q = \left| k_{ij} = k_{ji} \right| = \sum_{j=1}^{n-1} k_{qj} c_j - b_q. \end{aligned}$$

Змінюючи позначки індексів, отримуємо систему

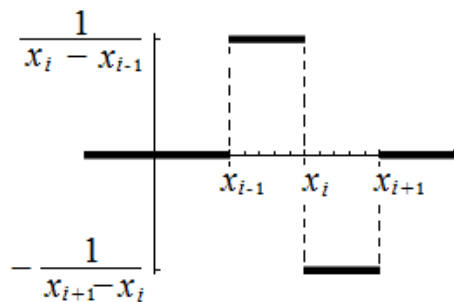
$$\sum_{j=1}^{n-1} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Розв'язання цього рівняння – центральна частина всіх обчислень, і якщо всі $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ малі, то порядок системи буде великим. При цьому матриця K гарантовано додатно-визначена і тому оборотна.

Перейдемо до явного визначення матричних коефіцієнтів $k_{ij} = \int_a^b \varphi'_i \cdot \varphi'_j dx$.

З формули (6) отримуємо

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases}$$



Графік функції $\varphi'_i(x)$.

Зауважимо, що поведінка функцій $\varphi'_i(x)$ в точках розриву не суттєва, бо вони використовуються в підінтегральних виразах, а значення інтегралу не змінюється, якщо змінити значення підінтегральної функції в одній точці.

Далі маємо

$$k_{pq} = \int_a^b \varphi'_p \cdot \varphi'_q dx = \begin{cases} 0, & |p-q| \geq 2 \\ -\frac{1}{x_p - x_{p-1}}, & p = q+1 \\ -\frac{1}{x_{p+1} - x_p}, & p = q-1 \\ \frac{1}{x_p - x_{p-1}} + \frac{1}{x_{p+1} - x_p}, & p = q \end{cases} \quad (10)$$

Наприклад, якщо сітка Ω рівномірна, то довжини всіх елементів сітки однакові $x_i - x_{i-1} = \Delta = (b-a)/n$, і матриця коефіцієнтів системи $K = [k_{ij}]$, що в МСЕ називається матрицею жорсткості, приймає наступний трьохдіагональний вигляд

$$(k_{ij})_{i,j=1}^{n-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Зверніть увагу, що матриця жорсткості не залежить від виду диференціального рівняння, а лише від форми функцій $\varphi_i(x)$ на сітці Ω .

Приклад. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} -u''_{xx} &= 3x - 2, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Вона має розв'язок $u(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)^2$, який нижче ми порівняємо з наближеним розв'язком.

Знайдемо наближений розв'язок задачі за допомогою МСЕ. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на n однакових інтервалів довжиною $\Delta = 1/n$. На побудованій сітці серед всіх ламаних, які задовольняють граничним умовам $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, знайдемо екстремальну. Побудуємо матрицю K коефіцієнтів

(11), вектор $B = [b_i]$, де $b_i = \int_a^b (3x - 2) \cdot \varphi_i dx$, і розв'яжемо систему (9).

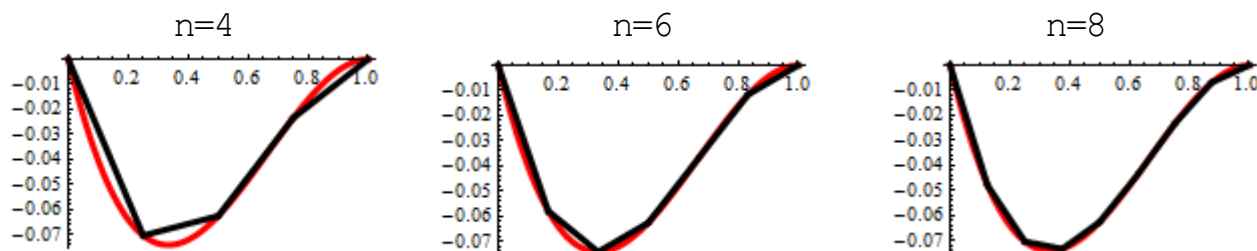
Наприклад, при $n = 4$ отримуємо таку систему.

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3125 \\ -0.125 \\ 0.0625 \end{pmatrix}$$

Її розв'язок має вид

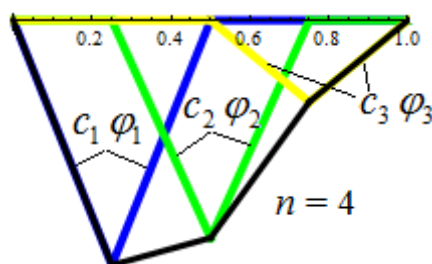
$$C = (-0.0703, -0.0625, -0.0234)^T$$

Ламана $\omega(x) \in W_\Omega$, яка наближає розв'язок $u(x)$, будується по формулі (7). На наступному рисунку показані графіки наближених розв'язків для $n = 4, 6, 8$. Для порівняння приводиться також графік функції $u(x)$.



Як бачимо, ламана гарно наближає точний розв'язок навіть при не дуже великих значеннях n .

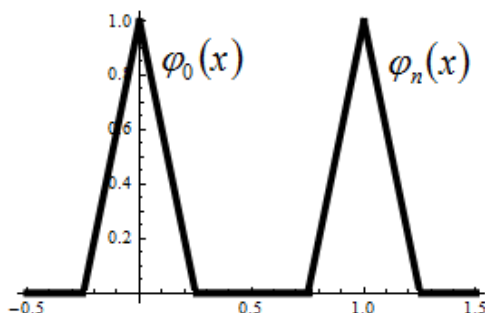
На наступному рисунку наведені графіки кожного доданку $c_i \varphi_i(x)$ і всієї суми (7) загалом при $n=4$.



Розглянемо тепер теж саме рівняння $-u''_{xx} = 3x - 2$, $0 < x < 1$, але з ненульовими граничними умовами $y(0) = A$, $y(1) = B$. Щоб їм задовольнити додамо до сітки Ω точки $x_{-1} = x_0 - (x_1 - x_0) = -x_1$ і $x_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) = 1 + (x_n - x_{n-1})$. Також до базису $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ додамо дві функції-капельшки:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1} \\ \frac{x - x_{-1}}{x_0 - x_{-1}}, & x_{-1} \leq x \leq x_0 \\ \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x_0 < x \leq x_1 \\ 0, & x \geq x_1 \end{cases} \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}, & x_n < x \leq x_{n+1} \\ 0, & x \geq x_{n+1} \end{cases}$$

Графіки цих двох функцій при $n=4$ ($x_0 = 0$, $x_n = 1$) показані на наступному рисунку.



Будь-яка кусково–лінійна неперервна функція на відрізку $[a, b]$ на поширеній сітці $\tilde{\Omega}$ може бути репрезентована виразом

$$\omega(x) = c_0 \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i(x) + c_n \varphi_n(x), \quad (13)$$

де внаслідок граничних умов повинно бути $c_0 = A, c_n = B$. Підставлення (13) в функціонал (5) приводить до нової системи

$$\sum_{j=0}^n k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n. \quad (14)$$

Нехай нова сітка $\tilde{\Omega}$ рівномірна, і довжини всіх елементів сітки однакові $x_i - x_{i-1} = \Delta = (b-a)/n$. Тоді коефіцієнти k_{ij} ($i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-1$) залишаються без зміни, а коефіцієнти нульового рядка і стовпця повинні бути рівними

$$\begin{aligned} k_{00} &= \int_a^b (\varphi'_0)^2 dx = \frac{1}{\Delta}; \\ k_{0j} &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (\text{наслідок граничних умов}) \\ k_{i0} &= -\frac{1}{\Delta}; \quad k_{i0} = 0 \quad (i = 2, \dots, n). \quad (\text{лише } \varphi_1(x) \text{ пересікається з } \varphi_0(x)) \end{aligned}$$

Коефіцієнти останніх (n – го) рядка і стовпця повинні бути рівними

$$\begin{aligned} k_{nn} &= \int_a^b (\varphi'_n)^2 dx = \frac{1}{\Delta}; \\ k_{nj} &= 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n-1); \quad (\text{наслідок граничних умов}) \\ k_{in} &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-2); \quad k_{n-1n} = -\frac{1}{\Delta}. \quad (\text{лише } \varphi_{n-1}(x) \text{ пересікається з } \varphi_n(x)) \end{aligned}$$

Тоді система (14) матиме вид

$$\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/\Delta \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ B/\Delta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Щоб з системи (15) впливали граничні умови $c_0 = A, c_n = B$ ми поклали $b_0 = A/\Delta, b_n = B/\Delta$.

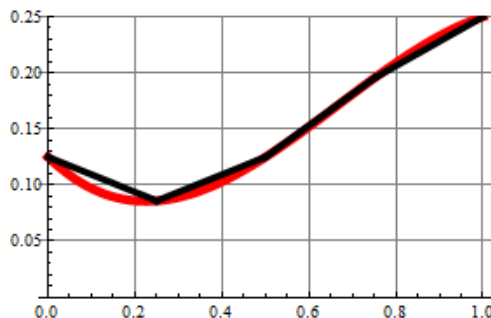
Підставляючи розв'язок системи $\{c_i\}$ в формулу (13), отримуємо ламану $\omega(x)$ на сітці $\tilde{\Omega}$. Вона на множині кусково–лінійних функцій, які

задовольняють заданими граничними умовами $\omega(0)=A, \omega(1)=B$, надає екстремум функціоналу (5).

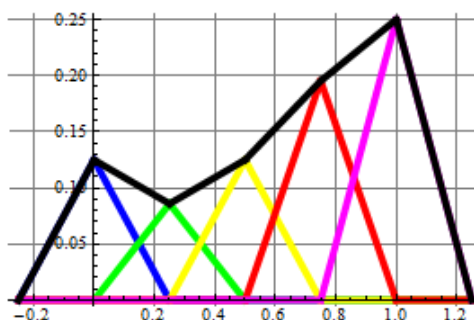
Нехай $A=1/8, B=1/4$. Точний розв'язок має вид

$$u(x) = \frac{1}{8}(1 - 3x + 8x^2 - 4x^3)$$

На наступному рисунку показані графіки ламаної $\omega(x)$ при $n=4$ і точного розв'язку $u(x)$.



На наступному рисунку наведені графіки кожного доданку $c_i \phi_i(x)$ і всієї суми (13) загалом при $n=4$.



Окрім граничних умов $y(a)=A, y(b)=B$ в застосуваннях використовуються інші умови, які, взагалі кажучи, можуть змінити вид функціоналу.

Якщо на обох кінцях відрізка $[a, b]$ виконуються умови $y'(a)=0, y'(b)=0$, то функціонал змінювати не потрібно. Такі граничні умови називаються природними. Але тут є особливість! Наприклад, у задачі

$$-u''_{xx} = 3x - 2, 0 < x < 1$$

$$y'(0)=0, y'(1)=0$$

розв'язку немає, а у задачі

$$-u''_{xx} = x - \frac{1}{2}, 0 < x < 1$$

$$y'(0)=0, y'(1)=0$$

розв'язок

$$u(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + C$$

знаходиться з точністю до константи. Невизначеність константи зрозуміла, оскільки в рівняння та граничні умови входять похідні і не входить сама

функція $u(x)$. Додавання константи до $u(x)$ ніяк не впливає на рівняння та граничні умови. Взагалі, задача

$$\begin{aligned} -u''_{xx} &= f(x), a < x < b, \\ y'(a) &= 0, y'(b) = 0. \end{aligned}$$

має розв'язок лише тоді, коли виконується умова $\int_a^b f(x) dx = 0$. Навпаки, розв'язок задачі Дірихле в цьому випадку єдиний.

Розв'язуючи подібні крайові задачі методом скінченних елементів ви, скоріше за все, будете отримувати вироджену систему рівнянь. В такому випадку, наприклад, система COMSOL Multiphysics повідомить вас про помилку. Отже бажано уникати таких граничних умов. Якщо інтерпретувати функцію $u(x)$ як зміщення, то для однозначного розв'язання задачі потрібно зафіксувати хоча б одну точку тіла, тобто одна гранична умова, наприклад ліва, повинна бути $u(a) = A$.

В задачах поширення тепла часто зустрічаються граничні умови виду

$$-\frac{du}{dx} + \alpha u \Big|_{x=a} = 0 \quad (16)$$

де α - стала. Ця умова описує, наприклад, процес випромінювання тепла. Щоб рівняння

$$-u''_{xx} = f(x), a < x < b \quad (17)$$

було рівнянням Ейлера – Лагранжа та допускало (16) в якості граничної умови треба скорегувати функціонал.

В варіаційному численні показується, що екстремум функціонала

$$J[u] = \int_a^b F(x, u, u'_x) dx + g_b(x, u) \Big|_{x=b} - g_a(x, u) \Big|_{x=a}, \quad (18)$$

де $g_a(x, u)$ і $g_b(x, u)$ деякі функції своїх аргументів, приводить до рівняння Ейлера – Лагранжа (3) з граничними умовами

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial g_a}{\partial u} \Big|_{x=a} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial g_b}{\partial u} \Big|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Наприклад, якщо на лівому краю відрізка $[a, b]$ виконується умова (16) і одночасно на правому – аналогічна умова $-\frac{du}{dx} + \beta u \Big|_{x=b} = 0$, то відповідний функціонал приймає вид

$$J[u] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} (u'_x)^2 - u \cdot f \right) dx + \frac{\alpha}{2} u^2 \Big|_{x=a} - \frac{\beta}{2} u^2 \Big|_{x=b}, \quad (20)$$

Дійсно, $\frac{\partial F}{\partial u'_x} = u'_x$, $g_a(x, u) = -\frac{\alpha}{2}u^2$ і $\frac{\partial g_a}{\partial u} = -\alpha u$. Тому ліва частина першого рівняння (19) обертається на вираз $u'_x - \alpha u$. Подібно до цього, $g_b(x, u) = -\frac{\beta}{2}u^2$, $\frac{\partial g_b}{\partial u} = -\beta u$, і ліва частина другого рівняння (19) перетворюється на вираз $u'_x - \beta u$.

Інші граничні умови також приводять до функціоналу (5) зі штучним доданками. Виникає питання, чи завжди граничні умови можуть бути включені в функціонал додаванням відповідного члена. В багатьох випадках це так, хоча визначення таких доданків не завжди просто. Отже будь яка зміна граничних умов змінює вигляд функціоналу.

Досі ми розглядали лише рівняння $-u''_{xx} = f(x)$, $a < x < b$. Але побудова функціонала можлива і тоді, коли рівняння має більш складний вид. Наприклад, для диференціального рівняння на відрізку $[a, b]$ досить загального вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x) \cdot u = f \quad (21)$$

з нульовими (або фіксованими) граничними умовами відповідний функціонал має вигляд

$$J[u] = \int_a^b \left(\frac{1}{2}((pu'_x)^2 + qu^2) - u \cdot f \right) dx. \quad (22)$$

Для перевірки цього достатньо обчислити похідні $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial u'}$ функції

$F(x, u, u'_x) = \frac{1}{2}((pu'_x)^2 + qu^2) - u \cdot f$. Підставивши їх в рівняння Ейлера (3), ви отримаєте диференціальне рівняння (21).

Якщо задані інші (нефіксовані) граничні умови, то в (22) з'являються доданки, схожі до членів $g_v(x, u)$ в функціоналі (18).

Через появу під інтегралом (22) члена qu^2 виникає потреба в обчислюванні коефіцієнтів $m_{ij} = \int_a^b \varphi_i \cdot \varphi_j dx$, які всі загалом утворюють матрицю, яка називається матрицею мас. Природно, що це змінює матрицю коефіцієнтів в системі (9) або (14).

Таким чином, в розглянутому варіанті метод скінчених елементів зводиться до пошуку екстремуму деякого функціоналу на множині кусково – лінійних функцій, і полягає в наступних кроках:

- побудова функціоналу;
- розбиття відрізка (побудова сітки) і вибір базисних функцій φ_k ;
- обчислення матриці коефіцієнтів та правої частини системи рівнянь;
- розв'язання системи і побудова функції $\omega(x)$.

У кожного кроку є свої особливості і складнощі. Методи побудови функціоналів вивчаються в варіаційному численні. Розбиття відрізка на скінченні елементи в одновимірному випадку не викликає складнощів. Цей крок ми розглянемо докладніше, коли будемо демонструвати МСЕ в двовимірному випадку.

В прикладах вище ми шукали екстремум функціоналу на множині неперервних кусково-лінійних функцій і розкладали їх по базису φ_k . При цьому вважали, що функція $\omega(x)$ наближає двічі неперервно диференційовану функцію $u(x)$, яка є розв'язком відповідної диференціальної задачі. Чутливе покращення точності апроксимації досягається, коли шукана функція $u(x)$ апроксимується кусково квадратичними або кусково кубічними інтерполянтами. Відповідно до цього вводять кусково квадратичні або кусково кубічні базисні функції. Їх вибір є важливим моментом і потребує докладного дослідження, яке ми тут робити не будемо.

Обчислення елементів системи, її розв'язання та побудова функції $\omega(x)$ представляють технічні труднощі, а не теоретичні, і ми їх теж залишимо без розгляду.

О.1.2 Двовимірні задачі

В двовимірному випадку теорема Ейлера – Лагранжа стверджує, що для того, щоб функціонал

$$J[u] = \iint_G F(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy \quad (1)$$

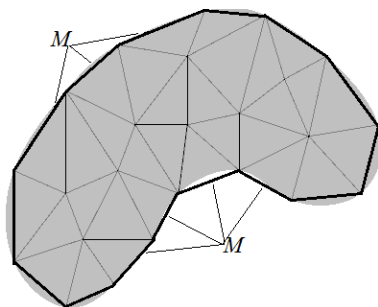
визначений на множині функцій $u = u(x, y)$, які мають неперервні перші і другі похідні в області G і приймають на її границі Γ задані значення, досягав на функції $u(x, y)$ екстремуму, необхідно, щоб ця функція задовольняла рівнянню

$$F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0. \quad (2)$$

Це рівняння в частинних похідних другого порядку, причому шукається його розв'язок, який приймає на контурі Γ задані значення.

Як і в одновимірному випадку МСЕ базується на еквівалентності диференціальної (2) та варіаційної (1) задачі.

Спочатку виконується триангуляцію області. Розіб'ємо область G на трикутники приблизно однакового розміру. Для цього розмістимо всередині та на її границі точки $x_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, і з'єднаємо їх таким чином, щоб отримати трикутну сітку.

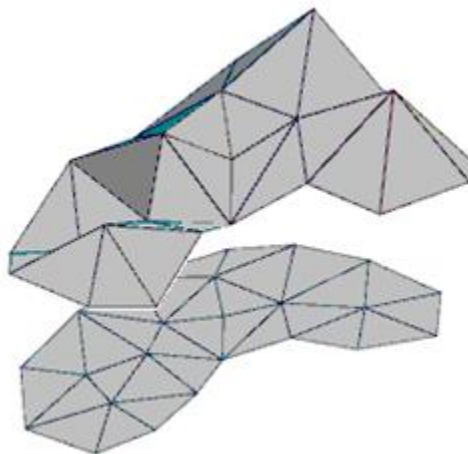


Будемо казати, що точки x_k є вершинами триангуляції Ω області G . Триангуляція (сітка) $\Omega = \bigcup_{\nu} T^{\nu}$ складається зі скінченної кількості маленьких трикутників T^{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, N$). Самі трикутники T^{ν} називають скінченними елементами, і їх вершини поділяють на внутрішні і граничні. Вершини називають суміжними, якщо вони є вершинами спільного трикутника.

Криволінійна границя Γ області G замінюється ламаною M (багатокутником), вершинами якої є граничні вузли. В найпростішому варіанті метода скінчених елементів шукану функцію $u(x, y)$ замінюють неперервною кусково – лінійною функцією $\omega(x, y)$ двох змінних, яка на кожному трикутнику з Ω є плоскою, тобто має вид

$$p^{\nu}(x, y) = \alpha^{\nu} + \beta^{\nu}x + \gamma^{\nu}y \text{ для } (x, y) \in T^{\nu}. \quad (3)$$

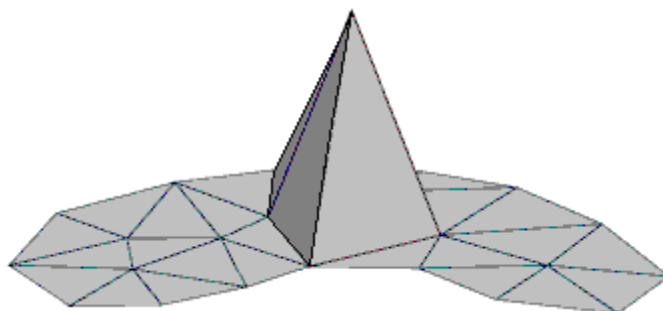
На сітці Ω множина функцій $\omega(x, y)$, які обертаються в нуль на ламаній границі M , утворюють лінійний простір W_{Ω} . В силу неперервності функції $\omega(x, y)$ коефіцієнти $\alpha^{\nu}, \beta^{\nu}, \gamma^{\nu}$ та $\alpha^{\mu}, \beta^{\mu}, \gamma^{\mu}$ в виразах для суміжних трикутників T^{ν}, T^{μ} повинні бути узгоджені. Графік функції $\omega(x, y)$ утворюється в просторі трикутними гранями, які стикуються, і зображується деякою багатогранною поверхнею над триангульованою зоною.



Побудуємо базис в просторі W_{Ω} . Одними з найпростіших будуть «пірамідальні» кусково – лінійні функції $\varphi_k(x, y)$, для яких виконуються наступні умови

$$\varphi_k(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Графік функції $\varphi_k(x, y)$ має форму піраміди або капелюха.



Функції $\varphi_k(x, y)$, які відповідають внутрішнім вузлам триангуляції Ω , автоматично дорівнюють нулю на граничному багатокутнику M .

Будь яка кусково – лінійна неперервна функція на сітці Ω , яка обертається в нуль на ламаній границі M , може бути репрезентована виразом

$$\omega(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y), \quad (4)$$

де підсумовування виконується по всім n внутрішнім вузлам області G (загалом m вузлів, серед яких n внутрішніх). Очевидно, що $c_k = \omega(x_k, y_k)$ і функція $\omega(x, y)$ буде наближати $u(x, y)$, якщо $\omega(x_k, y_k) \approx u(x_k, y_k)$, тобто $c_k = \omega(x_k, y_k) \approx u(x_k, y_k)$.

Отримаємо явні формули для обчислення базисних функцій $\varphi_k(x, y)$. Над трикутником T^v , який має x_k однією зі своїх вершин, функція $\varphi_k(x, y)$ лінійна і зображується похилою площиною. Нехай функція $\varphi_k(x, y)$ дорівнює 1 в точці x_k і нулю в двох інших точках x_i, x_j . Якщо рівняння цієї площини позначити

$$z = p_k^v(x, y) = \alpha_k^v + \beta_k^v x + \gamma_k^v y \quad (x, y) \in T^v, \quad (5)$$

то будемо мати

$$p_k^v(x_i, y_i) = p_k^v(x_j, y_j) = 0 \quad \text{та} \quad p_k^v(x_k, y_k) = 1.$$

Рівняння площини, яка проходить через три точки $(x_k, y_k, 1), (x_i, y_i, 0), (x_j, y_j, 0)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_k & y - y_k & z - 1 \\ x_i - x_k & y_i - y_k & -1 \\ x_j - x_k & y_j - y_k & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо рівняння площини у вигляді (5), де

$$\alpha_k^v = \frac{x_i y_j - x_j y_i}{\Delta_v}, \quad \beta_k^v = \frac{y_i - y_j}{\Delta_v}, \quad \gamma_k^v = \frac{x_j - x_i}{\Delta_v}, \quad (6)$$

і визначник Δ_v з точністю до знака дорівнює подвоєній площині трикутника T_v .

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix} = \pm 2 \cdot \text{Площа} [T^v]. \quad (7)$$

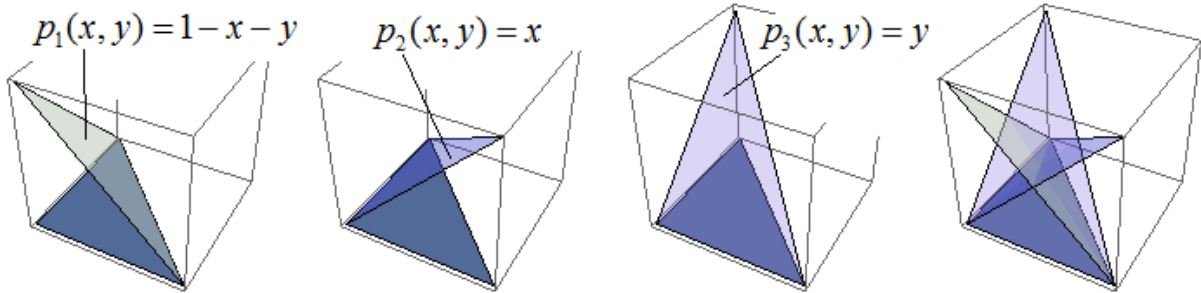
Для приклада розглянемо рівнораменний прямокутний трикутник T з вершинами $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (0, 1)$, і отримаємо для нього рівняння площин, які складають грані базисних функцій $\varphi_k(x, y)$, тобто тих, для яких пірамідальна маківка розташовані в вершинах цього трикутника. Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то за допомогою (6) для грані, яка дорівнює 1 в i -й вершині ($i = 1, 2, 3$), отримуємо

$$p_1(x, y) = 1 - x - y, \quad p_2(x, y) = x, \quad p_3(x, y) = y.$$

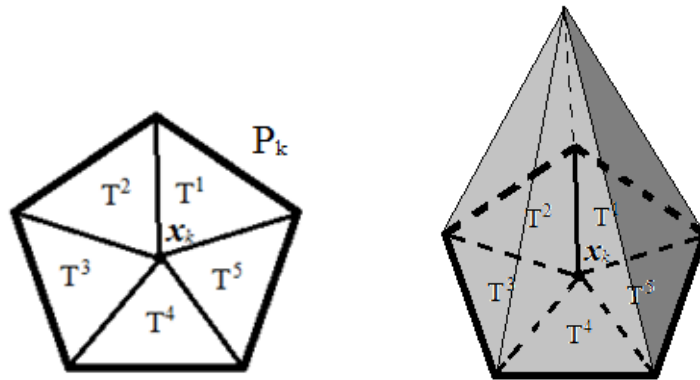
Зображення цих площин над трикутником T наведено на наступному рисунку.



Пірамідальна функція $\varphi_k(x, y)$ утворюється об'єднанням окремих плоских елементів. Тому

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} p_k^v(x, y), & (x, y) \in T^v, \text{ де } x_k \text{ вершина } T^v \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}. \quad (8)$$

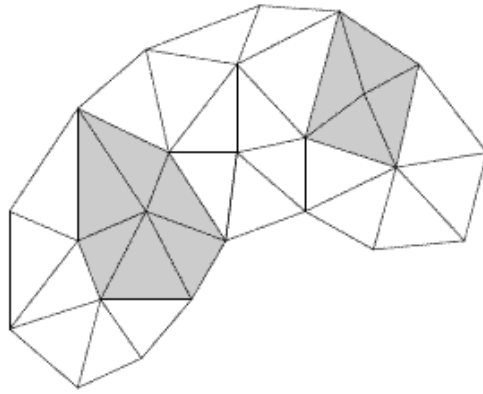
Тут трикутники T^v оточують точку x_k , яка є вершиною кожного з них. Графік функції $\varphi_k(x, y)$ становить собою піраміду, основою якої є полігон з вершинами суміжними до точки x_k , а над самою точкою розташована вершина піраміди.



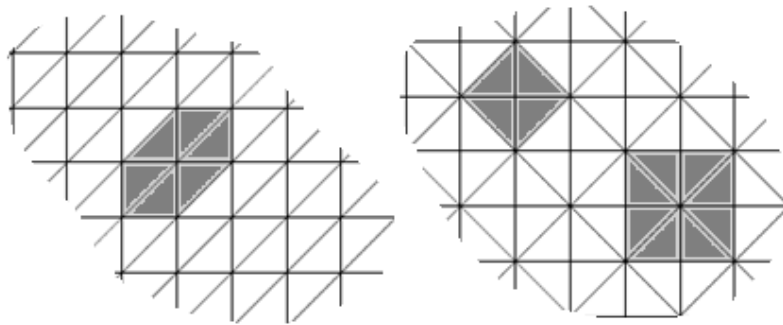
Неперервність $\varphi_k(x, y)$ забезпечується, оскільки лінійні по обом змінним x, y функції $p_k^v(x, y)$ мають однакові значення в спільних вершинах. Носієм пірамідальних функцій (8) є багатокутники P_k

$$\text{supp } \varphi_k = P_k = \bigcup_v T^v,$$

складені з усіх трикутників T^v , які мають x_k однією зі своїх вершин. Ми будемо називати P_k k -м вершинним багатокутником. Вузол x_k розташований всередині багатокутника P_k , а його вершини зв'язані з x_k одним ребром триангуляції. На наступному рисунку зображено два вершинних багатокутника триангуляції Ω .



Найпростіша тріангуляція утворюється регулярною сіткою точок. При цьому розбиття області на трикутники можна виконати багатьма способами. На наступному рисунку показано дві різні тріангуляції на однаковій сітці точок, та три типи вершинних багатокутників.



Способів розбиття областей на трикутники існує багато. Не всі вони вдалі. В загальному випадку для збіжності кінцево-елементного розв'язку тріангуляція повинна задовольняти деяким умовам:

- трикутники повинні бути не дуже витягнутими, тобто довжини їх сторін повинні мати однаковий порядок, бажано уникати тупокутних трикутників;
- площі сусідніх трикутників не повинні сильно розрізнятися;
- площі сусідніх вершинних багатокутників не повинні сильно розрізнятися.

При цьому можна мати рідку сітку в зоні, де розв'язок змінюється повільно, і щільну – в зоні швидкого змінювання розв'язку.

Продемонструємо можливості метода скінченних елементів на прикладі рівняння Пуассона

$$u''_{xx} + u''_{yy} = -f(x, y), \quad (x, y) \in G \quad (9)$$

з однорідними граничними умовам Дірихле $u_\Gamma = 0$. Відповідний функціонал має вид

$$J[u] = \iint_G \left(\frac{1}{2} u_x'^2 + \frac{1}{2} u_y'^2 - f \cdot u \right) dx dy. \quad (10)$$

В двовимірному варіанті МСЕ, як і в одновимірному випадку, ми шукаємо функцію $\omega(x, y)$ наближену до функції $u(x, y)$. Вона повинна мінімізувати функціонал (10) на множині W_Ω неперервних кусково-лінійних функцій, які обертаються в нуль на ламаній границі M .

Отримаємо рівняння, яким повинні задовольняти невідомі коефіцієнти виразу (4). Позначимо $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$, тоді $u_x'^2 + u_y'^2 = (\nabla u)^2$, і функціонал (10) запишеться у вигляді

$$J[u] = \iint_G \left(\frac{1}{2} (\nabla u)^2 - f \cdot u \right) dx dy.$$

Підставимо (4) в цей інтеграл.

$$\begin{aligned} J[\omega] &= J \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right] = \iint_G \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n c_i \nabla \varphi_i \right)^2 - f(x, y) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \iint_G \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy - \sum_{i=1}^n c_i \iint_G f \varphi_i dx dy. \end{aligned}$$

Тут крапка зображає скалярний добуток. Позначимо $k_{ij} = \iint_G \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$ і $b_i = \iint_G f \varphi_i dx dy$. Тоді

$$J[\omega] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} c_i c_j - \sum_{i=1}^n b_i c_i.$$

Коефіцієнти k_{ij} утворюють симетричну матрицю $K = [k_{ij}]$ розміру $n \times n$, а елементи b_i утворюють вектор-стовпець $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. Функціонал $J[\omega] = J(c_1, c_2, \dots, c_n)$ перетворився на функцію n невідомих $c_1, c_2, \dots, c_n$. Її екстремум визначається розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_q} = 0 & (q = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Але

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_q} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} c_i c_j - \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i=1}^n b_i c_i = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{i,i \neq q}^n k_{iq} c_i c_q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} k_{qq} c_q^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_q} \sum_{j,j \neq q}^n k_{qj} c_q c_j - b_q = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i^n k_{iq} c_i + \frac{1}{2} \sum_j^n k_{qj} c_j - b_q = |k_{ij} = k_{ji}| = \sum_i^n k_{iq} c_i - b_q = \sum_j^n k_{qj} c_j - b_q. \end{aligned}$$

Змінюючи позначки індексів, отримуємо систему таку ж саму, як і в одновимірному випадку.

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Визначимо матричні коефіцієнти $k_{ij} = \iint_G \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$. Враховуючи (6), для градієнтів лінійних елементів $p_k^v(x, y) = \alpha_k^v + \beta_k^v x + \gamma_k^v y$ маємо

$$\nabla p_k^v(x, y) = \mathbf{a}_k^v = \begin{pmatrix} \beta_k^v \\ \gamma_k^v \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_v} \begin{pmatrix} y_i - y_j \\ x_j - x_i \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in T^v. \quad (12)$$

Тобто градієнти дорівнюють постійному вектору $\mathbf{a}_k^v$ всередині трикутника T^v . Тому

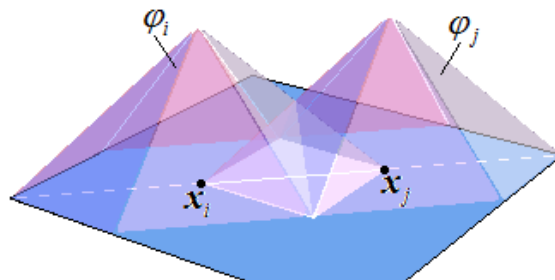
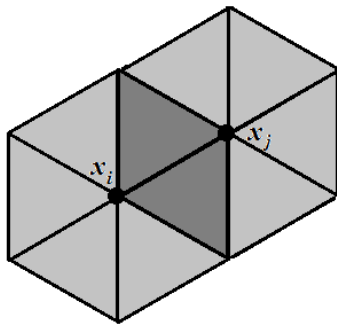
$$\nabla \varphi_k(x, y) = \begin{cases} \mathbf{a}_k^v, & (x, y) \in T^v, \text{ коли } \mathbf{x}_k \text{ вершина } T^v \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (13)$$

є кусково – постійним вектором для заданої триангуляції.

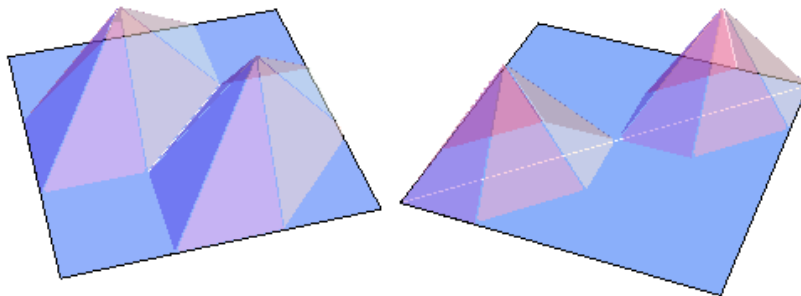
На наступному кроці інтеграли $\int_G \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dxdy$ по області G замінюються інтегралами по триангульованій багатокутній зоні

$$k_{ij} \approx \sum_v \iint_{T^v} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dxdy \equiv \sum_v k_{ij}^v. \quad (14)$$

Тут $k_{ij}^v = \iint_{T^v} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dxdy$ позначає інтеграл по області трикутника T^v від скалярного добутку градієнтів базисних функцій φ_i та φ_j . З (13) випливає, що коли точки $\mathbf{x}_i$ і $\mathbf{x}_j$ не є суміжними, тобто не є одночасно вершинами трикутника T^v , то такий інтеграл дорівнює нулю. Цей факт пояснюють наступні рисунки.



Перекивання базисних функцій φ_i та φ_j .



Перекивання базисних функцій немає.

Внесок в суму (14) дають лише ті трикутники, в яких обидві точки $\mathbf{x}_i$ і $\mathbf{x}_j$ одночасно є вершинами. Якщо $i \neq j$ то таких трикутника тільки два. Якщо $i = j$, то всі трикутники з вершинного багатокутника P_i дають внесок в суму (14). При цьому кожний доданок (інтеграл) в сумі (14) обчислюється наступним чином

$$k_{ij}^v = \iint_{T^v} \mathbf{a}_i^v \cdot \mathbf{a}_j^v dxdy = \mathbf{a}_i^v \cdot \mathbf{a}_j^v s^v, \text{ де } s^v = \text{Площа } [T^v] = \frac{1}{2} \Delta_v. \quad (15)$$

Нехай вершинами трикутника T^v є точки $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$. Тоді з (7), (12) і (13) випливає

$$k_{ij}^v = \frac{1}{2} \frac{(y_k - y_j)(y_i - y_k) + (x_j - x_k)(x_k - x_i)}{(\Delta_v)^2} | \Delta_v | = - \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)}{2 | \Delta_v |}, \quad i \neq j.$$

$$k_{ii}^v = \frac{1}{2} \frac{(y_k - y_j)^2 + (x_j - x_k)^2}{(\Delta_v)^2} | \Delta_v | = \frac{\| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \|^2}{2 | \Delta_v |}.$$
(16)

Ці формули можна записати інакше

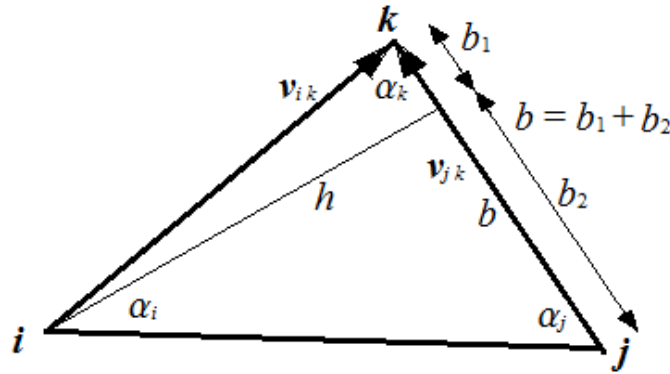
$$k_{ij}^v = - \frac{\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{v}_{jk}}{4 \text{ Площа}[T^v]}, \quad \text{де } \mathbf{v}_{ik} - \text{вектор, який з'єднує вершину } i \text{ з вершиною } k.$$

$$k_{ii}^v = \frac{(\text{Довжина протилежної сторони})^2}{4 \text{ Площа}[T^v]}.$$

Кожний трикутник T^v визначає 6 коефіцієнтів $k_{ij}^v = k_{ji}^v$, проіндексованих своїми вершинами, і які називаються елементарними жорсткостями.

Таким чином, щоб знайти елементи матриці жорсткості k_{ij} потрібно побудувати вершинні багатокутники навколо вершин $\mathbf{x}_i$ і $\mathbf{x}_j$. Якщо вони не пересікаються, то $k_{ij} = 0$. Якщо пересікаються і $i \neq j$, то треба просумувати елементарні жорсткості двох трикутників, які мають відрізок, з'єднуючий точки $\mathbf{x}_i$ і $\mathbf{x}_j$, своєю стороною. Якщо $i = j$, то сумуються елементарні жорсткості всіх трикутників навколо точки $\mathbf{x}_i$.

Цікаво, що елементарні жорсткості залежать лише від кутів трикутника, і не залежать від довжин його сторін. Дійсно, нехай $\alpha_i^v, \alpha_j^v, \alpha_k^v$ позначають кути трикутника T^v в вершинах $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k$.



Згадуючи формулу для площі трикутника $s = \frac{1}{2} |\mathbf{v}_{ik}| \cdot |\mathbf{v}_{jk}| \sin \alpha_k$, отримуємо

$$k_{ij}^v = - \frac{\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{v}_{jk}}{4 s_v} = - \frac{|\mathbf{v}_{ik}| |\mathbf{v}_{jk}| \cos \alpha_k}{4 \frac{1}{2} |\mathbf{v}_{ik}| |\mathbf{v}_{jk}| \sin \alpha_k} = - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha_k \quad i \neq j.$$

$$k_{ii}^v = \frac{|\mathbf{v}_{jk}|^2}{4 s} = \frac{b^2}{4 \frac{1}{2} b h} = \frac{b}{2 h} = \frac{b_1 + b_2}{2 h} = \frac{h \operatorname{ctg} \alpha_k + h \operatorname{ctg} \alpha_j}{2 h} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha_k + \operatorname{ctg} \alpha_j).$$

Отже подібні трикутники мають однакові елементарні жорсткості.

Розглянемо рівнораменний прямокутний трикутник T з вершинами $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (1,0)$, $x_3 = (0,1)$. З (16) випливає, що його елементарними жорсткостями будуть

$$k_{11} = 1, \quad k_{22} = k_{33} = \frac{1}{2}, \quad k_{12} = k_{21} = k_{13} = k_{31} = -\frac{1}{2}, \quad k_{23} = k_{32} = 0. \quad (17)$$

Для рівнобічного трикутника T елементарні жорсткості дорівнюють

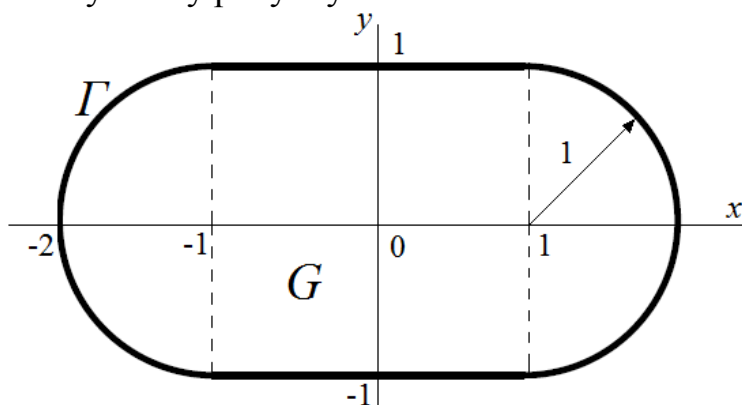
$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad k_{12} = k_{21} = k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (18)$$

Окрім обчислення матриці жорсткості для розв'язання системи (11) потрібно обчислювати вектор навантажень $b_i = \int_G f \varphi_i d x d y$. Аналогічно до (14), інтегрування по області G замінюється інтегруванням по багатокутнику

$$b_i = \iint_G f \varphi_i d x d y \approx \sum_v \iint_{T^v} f p_i^v d x d y = \sum_v b_i^v. \quad (19)$$

де сумування виконується по всім трикутникам вершинного багатокутника P_i . Ми не ставимо своєю метою докладне викладання метода скінченних елементів, тому отримання остаточних формул залишимо без розгляду.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння Пуассона (9) $u''_{xx} + u''_{yy} = -1$ в зоні овалу G , який показано на наступному рисунку.

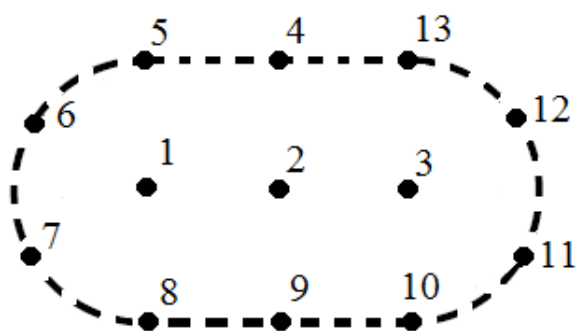


Нехай також функція $u(x, y)$ задовольняє нульовим граничним умовам на його контурі Γ .

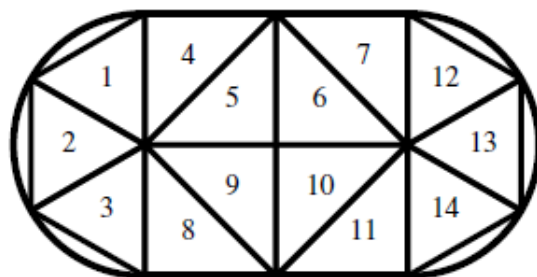
Використаймо дуже грубу тріангуляцію, яка не дасть задовільного розв'язку, але допоможе продемонструвати основні кроки МСЕ в двовимірному випадку.

Розмістимо точки всередині та на межі області G так, як показано на наступному рисунку зліва, і побудуємо тріангуляцію так, як показано на рисунку справа. Область G замінюється багатокутником, а криволінійна границя замінюється ламаною.

Перенумеруємо вершини в такому порядку, щоб першими йшли внутрішні вузли, а потім граничні.

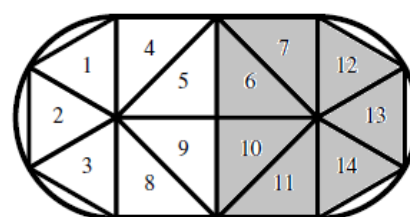
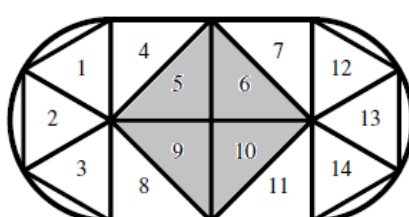
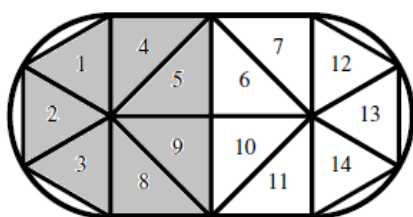


Точки



Триангуляція

Всього ми маємо 13 вершин і 14 трикутників (скінченних елементів). Внутрішніми є тільки точки 1, 2, 3. Кожній з них відповідає свій вершинний багатокутник. Вони зображені на наступному рисунку.



Кожному вершинному багатокутнику відповідає «пірамідальна» базисна функція $\varphi_k(x, y)$. Відповідно до (8) пірамідальна функція $\varphi_k(x, y)$ в точці x_k має вершину і утворюється об'єднанням окремих плоских елементів $p_k^v(x, y)$. Використовуючи (5) і (6), запишемо рівняння цих плоских елементів в наступну таблицю.

$\varphi_1(x, y)$	$\varphi_2(x, y)$	$\varphi_3(x, y)$
$p_1^5 = -x$	$p_2^5 = 1 + x - y$	$p_3^6 = x$
$p_1^9 = -x$	$p_2^9 = 1 + x + y$	$p_3^{10} = x$
$p_1^4 = 1 - y$	$p_2^6 = 1 - x - y$	$p_3^7 = 1 - y$
$p_1^8 = 1 + y$	$p_2^{10} = 1 - x + y$	$p_3^{11} = 1 + y$
$p_1^1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} - y$		$p_3^{12} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} - y$
$p_1^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2x}{\sqrt{3}}$		$p_3^{13} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2x}{\sqrt{3}}$
$p_1^3 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + y$		$p_3^{14} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} + y$

Граденти цих функцій обчислюються відповідно до формул (12) і (13), або простим диференціюванням. Їх записано в наступну таблицю.

$\nabla \varphi_1(x, y)$	$\nabla \varphi_2(x, y)$	$\nabla \varphi_3(x, y)$
$\mathbf{a}_1^5 = (-1, 0)$	$\mathbf{a}_2^5 = (1, -1)$	$\mathbf{a}_3^6 = (1, 0)$
$\mathbf{a}_1^9 = (-1, 0)$	$\mathbf{a}_2^9 = (1, 1)$	$\mathbf{a}_3^{10} = (1, 0)$
$\mathbf{a}_1^4 = (0, -1)$	$\mathbf{a}_2^6 = (-1, -1)$	$\mathbf{a}_3^7 = (0, -1)$
$\mathbf{a}_1^8 = (0, 1)$	$\mathbf{a}_2^{10} = (-1, 1)$	$\mathbf{a}_3^{11} = (0, 1)$
$\mathbf{a}_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$		$\mathbf{a}_3^{12} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$
$\mathbf{a}_1^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$		$\mathbf{a}_3^{13} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$
$\mathbf{a}_1^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$		$\mathbf{a}_3^{14} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$

Легко бачити, що площини трикутників дорівнюють

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_{12} = s_{13} = s_{14} = \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = s_9 = s_{10} = s_{11} = \frac{1}{2}.$$

В нашому прикладі ми маємо лише рівнораменні прямокутні та рівнобічні трикутники. Тому з (14) – (18) отримуємо

$$\begin{aligned} k_{11} &= \|\mathbf{a}_1^5\|^2 s_5 + \|\mathbf{a}_1^9\|^2 s_9 + \|\mathbf{a}_1^4\|^2 s_4 + \|\mathbf{a}_1^8\|^2 s_8 + \|\mathbf{a}_1^1\|^2 s_1 + \|\mathbf{a}_1^2\|^2 s_2 + \|\mathbf{a}_1^3\|^2 s_3 = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$k_{22} = \|\mathbf{a}_2^5\|^2 s_5 + \|\mathbf{a}_2^9\|^2 s_9 + \|\mathbf{a}_2^6\|^2 s_6 + \|\mathbf{a}_2^{10}\|^2 s_{10} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

$$\begin{aligned} k_{33} &= \|\mathbf{a}_3^6\|^2 s_6 + \|\mathbf{a}_3^{10}\|^2 s_{10} + \|\mathbf{a}_3^7\|^2 s_7 + \|\mathbf{a}_3^{11}\|^2 s_{11} + \|\mathbf{a}_3^{12}\|^2 s_{12} + \|\mathbf{a}_3^{13}\|^2 s_{13} + \|\mathbf{a}_3^{14}\|^2 s_{14} = \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$k_{12} = k_{21} = \mathbf{a}_1^5 \cdot \mathbf{a}_2^5 s_5 + \mathbf{a}_1^9 \cdot \mathbf{a}_2^9 s_9 = (-1) \frac{1}{2} + (-1) \frac{1}{2} = -1.$$

$$k_{13} = k_{31} = 0.$$

$$k_{23} = k_{32} = \mathbf{a}_2^6 \cdot \mathbf{a}_3^6 s_6 + \mathbf{a}_2^{10} \cdot \mathbf{a}_3^{10} s_{10} = (-1) \frac{1}{2} + (-1) \frac{1}{2} = -1.$$

Таким чином, матриця жорсткості приймає вигляд

$$K = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

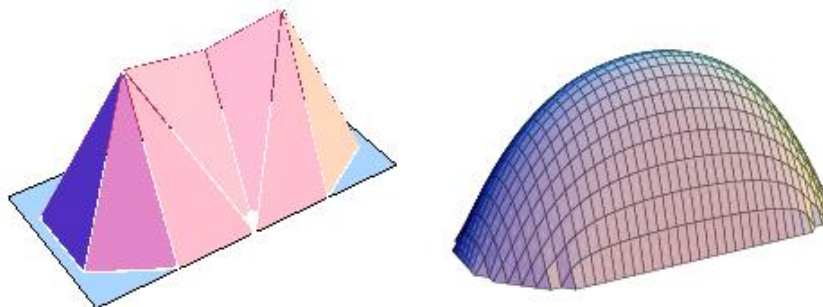
Вектор правих частин системи (11) знаходиться чисельним інтегруванням в виразах (19), і дорівнює

$$B = \{1.0997, 0.6667, 1.0997\}$$

Розв'язком системи (11) $K \cdot C = B$ є вектор

$$C = \{0.3918, 0.3626, 0.3918\}$$

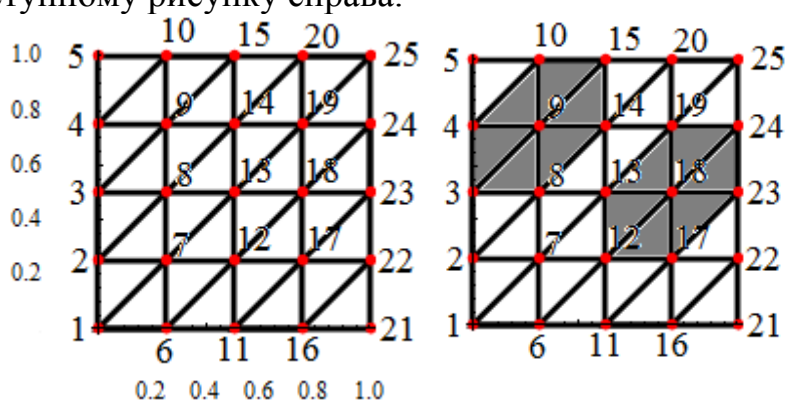
Використовуючи формулу (4), будемо графік функції $\omega(x, y)$, який показано на наступному рисунку зліва. Якщо побудувати щільну тріангуляцію (це потребує автоматизації обчислень), то розв'язок буде значно точнішим. Його графік показано на наступному рисунку справа.



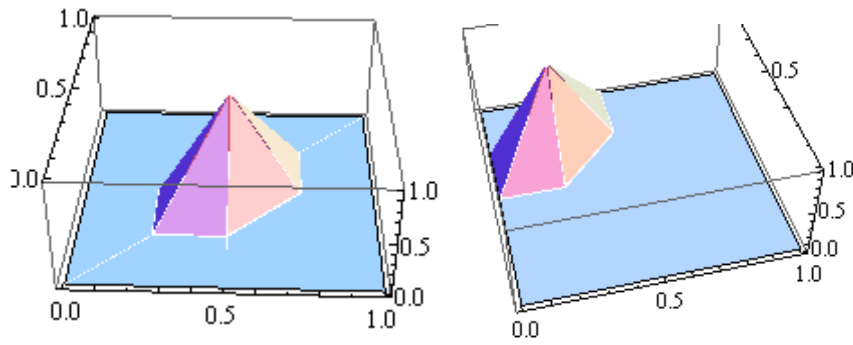
Приклад 2. Розглянемо рівняння Пуассона (9) $u''_{xx} + u''_{yy} = -f(x, y)$ в квадраті $G = [0, 1] \times [0, 1]$ з однорідними граничними умовам $u_\Gamma = 0$, і в правій частині функцією $f(x, y) = 2 \cdot (x^2 + y^2 - x - y)$. Точним розв'язком є функція $u(x, y) = x(1-x)y(1-y)$. Знайдемо наближений розв'язок МСЕ та порівняємо їх. Нагадаємо головні кроки МСЕ:

- побудова функціоналу;
- побудова сітки і вибір базисних функцій φ_k ;
- обчислення матриці коефіцієнтів та правої частини системи рівнянь;
- розв'язання системи і побудова функції $\omega(x, y)$.

Функціонал має вид (10). Скінченно-елементну сітку побудуємо так, як показано на наступному рисунку зліва. Для побудови базисних функцій–капельшок $\varphi_k(x, y)$ будемо використовувати вершинні шестикутники такі, які показано на наступному рисунку справа.



На наступному рисунку наведено дві такі функції з вершинами в точках 13 (середина) і 9. Оскільки розглядаються нульові граничні умови, то потрібно побудувати лише функції $\varphi_k(x, y)$ з вершинами у внутрішніх точках сітки.



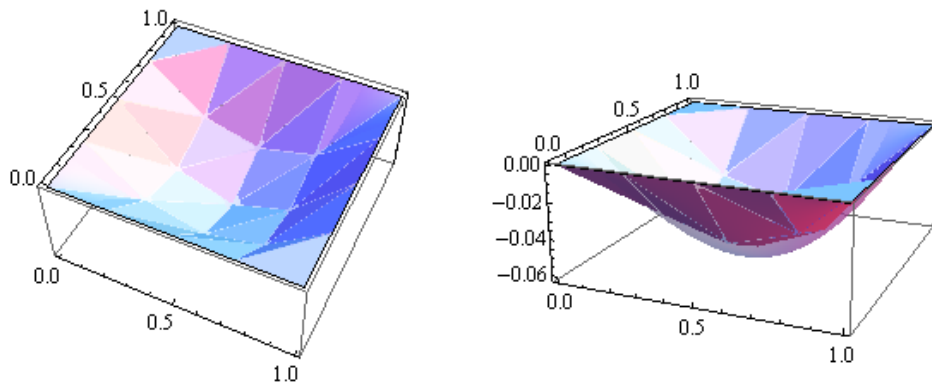
Наступний крок починається з побудови градієнтів $\nabla \varphi_k$. Далі обчислюються коефіцієнти матриці жорсткості $k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$. Для нашого вибору вершинних багатокутників матриця жорсткості буде мати наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} 4. & -1. & 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 4. & -1. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -1. & 4. & -1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -1. & 4. & -1. & 0. & 0. & 0. & -1. \\ 0. & -1. & 0. & -1. & 4. & -1. & 0. & -1. & 0. \\ -1. & 0. & 0. & 0. & -1. & 4. & -1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1. & 4. & -1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & -1. & 4. & -1. \\ 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. & -1. & 4. \end{pmatrix}$$

Хоча вона вже не трьохдіагональна, як в одновимірній задачі, але досить розріджена. Вектор правих частин системи (11), елементи якого обчислюються за формулами $b_i = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_i dx dy$, в нашому прикладі дорівнює $\{-0.0443, -0.0521, -0.0443, -0.0521, -0.0599, -0.0521, -0.0443, -0.0521, -0.0443\}$

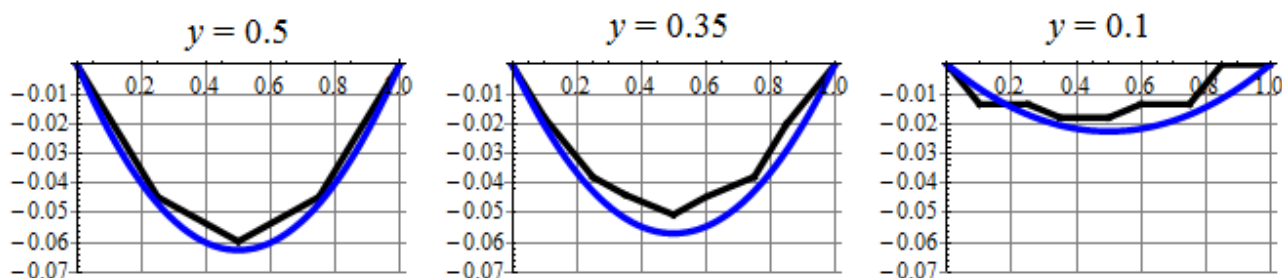
Розв'язок системи (11), тобто вектор $C = \{c_i\}_{i=1}^9$, має вигляд $\{-0.03345, -0.0446, -0.0334, -0.0446, -0.0596, -0.0446, -0.0334, -0.0446, -0.0334\}$

Шукана кусково-лінійна функція $\omega(x, y)$ будується по формулі (4). Її графік показано на наступному рисунку зліва. Справа показана та ж функція $\omega(x, y)$ і поруч (полупрозорий знизу) графік точного розв'язку $u(x, y)$. Як бачимо, навіть на грубій сітці збіг функцій задовільний.

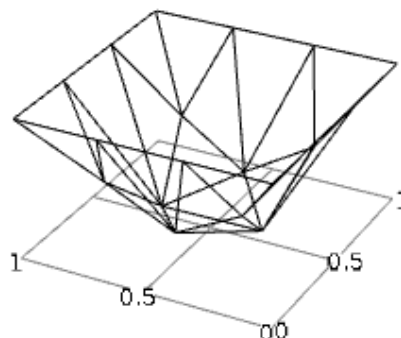
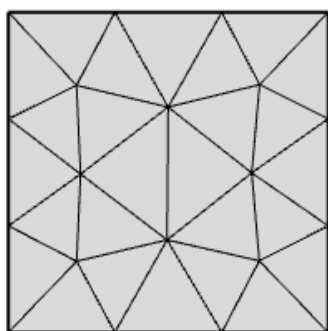


Зверніть увагу на те, що поверхня функції багатогранна, тобто над кожним трикутним елементом функція $\omega(x, y)$ лінійна.

Для порівняння розв'язків на наступному рисунку наведено переріз поверхонь функцій $\omega(x, y)$ та $u(x, y)$ при фіксованих значеннях $y = 0.5, 0.35, 0.1$



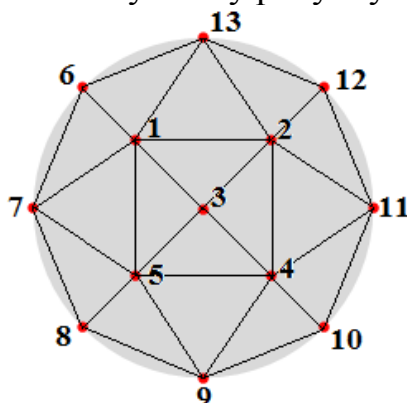
Оскільки наші базисні функції-капельшки $\varphi_k(x, y)$ не «покривають» два трикутника з вершинами в точках $(4, 5, 10)$ і $(16, 22, 21)$, то розв'язок в точках цих трикутників дорівнює нулю. Це свідчить, про поганий спосіб побудови сітки і вибір вершинних багатогранників. Наприклад сітка, яка показана на наступному рисунку, містить лише 6 внутрішніх точок, але навколо кожної з них можна побудувати базисні функції-капельшки $\varphi_k(x, y)$, які «накриють» увесь квадрат. Це будуть пірамідки з п'яти-, шести- чи семикутниками в основі. Відповідно знайдена кусково-лінійна функція $\omega(x, y)$ буде краще наближати розв'язок задачі $u(x, y)$ (див. графік справа).



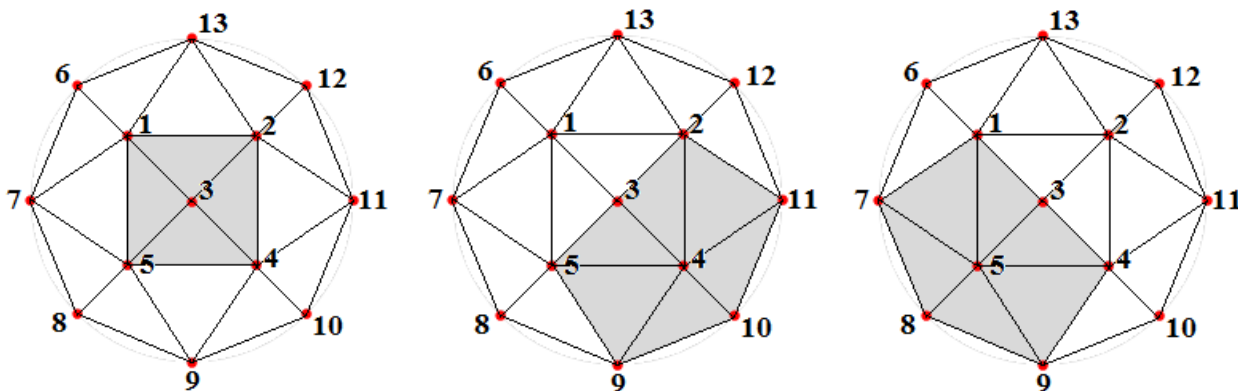
Отже спосіб побудови скінченно-елементної сітки і вибір базисних функцій досить суттєво впливає на якість розв'язку.

Приклад 3. Розглянемо рівняння Пуассона (9) $u''_{xx} + u''_{yy} = -4$ в одиничному колі G з однорідними граничними умовами $u_\Gamma = 0$. Точним розв'язком є функція $u(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Знайдемо наближений розв'язок МСЕ.

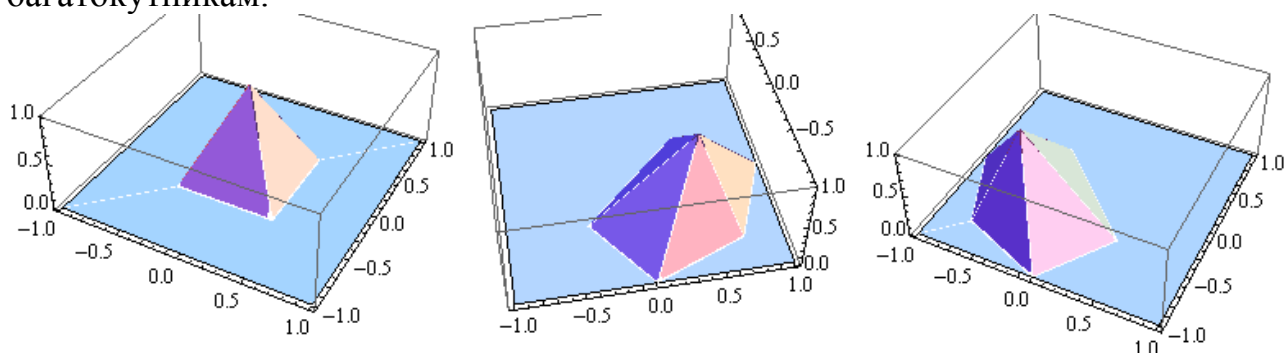
Функціонал (10) залишається незмінним. Скінченно-елементну сітку побудуємо так, як показано на наступному рисунку.



Базисні функції–капелюшки з вершинами у внутрішніх точках з номерами 1, 2, 3, 4, 5 будуємо над вершинними багатокутниками, три з яких зображені на наступному рисунку.



На наступному рисунку показані базисні функції $\varphi_k(x, y)$, які відповідають цим багатокутникам.



Далі обчислюються градієнти $\nabla \varphi_k$ базисних функцій, і знаходяться коефіцієнти $k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy$ у матриці жорсткості

$$K = \begin{pmatrix} 3.9909 & -0.2083 & -1.0 & 0. & -0.2083 \\ -0.2083 & 3.9908 & -1.0 & -0.2083 & 0. \\ -1.0 & -1.0 & 4.0 & -1.0 & -1.0 \\ 0. & -0.2083 & -1.0 & 3.9908 & -0.2083 \\ -0.2083 & 0. & -1.0 & -0.2083 & 3.9908 \end{pmatrix}$$

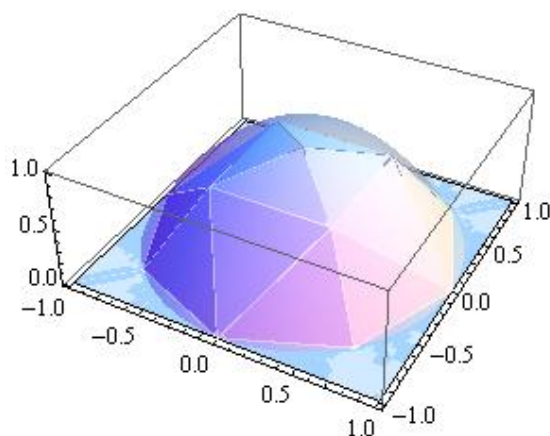
Вектор правих частин системи (11) обчислюється за формулами $b_i = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_i dx dy$, і в нашому прикладі дорівнює

$$B = \{1.4761, 1.4761, 0.8533, 1.4761, 1.4761\}$$

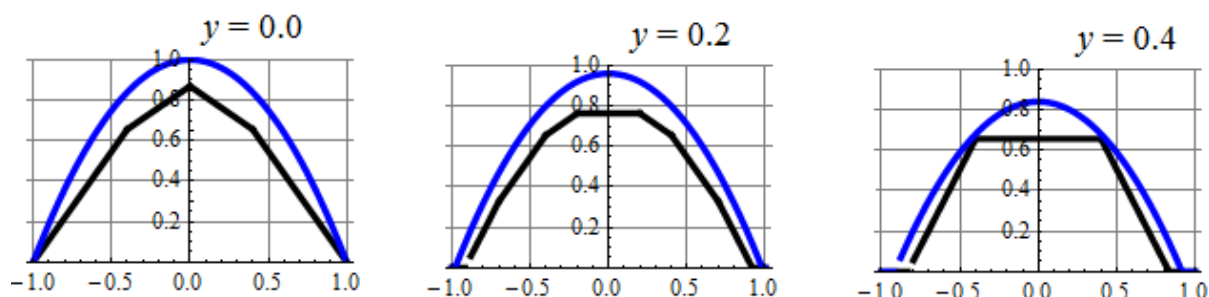
Розв'язком системи (11) є вектор $C = \{c_i\}_{i=1}^5$, який дорівнює

$$C = \{0.6563, 0.6563, 0.8697, 0.6563, 0.6563\}$$

Графік шуканої кусково-лінійної функції $\omega(x, y)$, яка побудована по формулі (4), разом з полупрозорим графіком точного розв'язку $u(x, y)$ зображено на наступному рисунку.



Для порівняння розв'язків далі наведено переріз поверхонь функцій $\omega(x, y)$ та $u(x, y)$ площинами $y = 0.0, 0.4, 0.2$.



З цих графіків випливає, що для покращення апроксимації скінченно-елементна сітка потребує зменшення розміру елементів.

Досі ми розглядали лише рівняння Пуассона (9) $u''_{xx} + u''_{yy} = -f(x, y)$, $(x, y) \in G$. Звичайно, що функціонали будуються і для ДРЧП більш загального вигляду. Наприклад для функції $u(x_1, x_2)$, яка задовольняє рівнянню

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - cu = -f \quad (20)$$

і фіксованим граничним умовам Діріхле $u|_{\Gamma} = g(x, y)$, відповідний функціонал має вигляд

$$J[u] = \int_G \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_1 dx_2 + \int_G cu^2 dx_1 dx_2 - 2 \int_G f u dx_1 dx_2. \quad (21)$$

Якщо граничні умови нефіксовані, то аналогічно до одновимірного випадку, потребує корегування функціонал. Наприклад, в варіаційному численні показується, що екстремум функціонала

$$J[u] = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy + \oint_{\Gamma} (g_1(x, y, u) t_2 - g_2(x, y, u) t_1) dl,$$

де $g_1(x, y, u)$, $g_2(x, y, u)$ деякі функції своїх аргументів і $t_1 = \frac{dx}{ds}$, $t_2 = \frac{dy}{ds}$,

приводить до рівняння Ейлера – Лагранжа (2) з граничними умовами на контурі Γ виду

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) t_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} + \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) t_1 = 0.$$

Подальші узагальнення в двовимірних задачах полягають в пошуку екстремуму функціонала не на множині кусково-лінійних, а на множині неперервних кусково-кваратичних або кусково-кубічних функцій. Це дозволяє досягти чутливого покращення точності апроксимації.

0.1.3 Подальші питання реалізації MCE в COMSOL Multiphysics.

Ми не ставимо своєю метою повне викладання метода скінченних елементів. Тому в цьому параграфі зробимо лише невеликий огляд інших питань його реалізації, яких ми не торкалися в попередньому тексті.

Звичайно MCE застосовується в тривимірних задачах. Спочатку для ДРЧП будується функціонал. Розглянемо для приклада в області G рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Q = 0$$

з граничними умовами $u = u_B$ на частині поверхні S_1 , і

$$K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} l_x + K_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} l_y + K_{zz} \frac{\partial u}{\partial z} l_z + q + h(u - u_\infty) = 0$$

на іншій частині поверхні S_2 , і $S_1 \cup S_2 = \partial G$. Коефіцієнти K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} і члени Q, q, h, h_∞ можуть бути функціями x, y, z , але не залежать від u . Величини l_x, l_y, l_z є направляючими косинусами вектора нормалі до границі $S = \partial G$. Тоді відповідний функціонал має вигляд

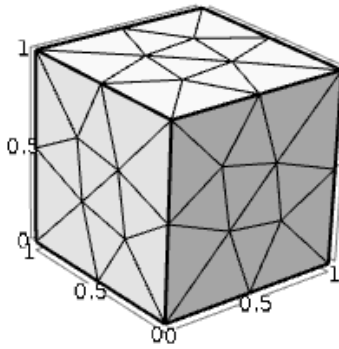
$$J[u] = \iiint_G \frac{1}{2} \left[K_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + K_{zz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - 2Qu \right] dx dy dz + \\ + \iint_{\partial G} \left(qu + \frac{1}{2} h (u - u_\infty)^2 \right) ds.$$

В застосуваннях найбільш поширеними є три типи граничних умов.

$$\begin{aligned} u &= u_0 \quad \text{на } S_1 = \partial G_1; \\ (-k \nabla u) \cdot \mathbf{n} &= h (u - u_\infty) \quad \text{на } S_2 = \partial G_2; \\ (-k \nabla u) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{на } S_3 = \partial G_3; \end{aligned}$$

кожне з яких може задовольнятися на частинах границі $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2 \cup \partial G_3$. Звичайно, як і в двовимірному випадку зміна граничних умов вносить корекцію в функціонал.

На другому кроці будується тривимірна кінцево-елементна сітка Ω , яка наприклад, складається з тетраедрів.



Екстремум функціоналу шукається на множині неперервних кусково-лінійних функцій $\omega(x, y, z) \in W_\Omega$ на сітці Ω . Отже в кожному тетраедрі T^v функція $\omega(x, y, z)$ зображується у вигляді $p^v(x, y, z) = \alpha^v + \beta^v x + \gamma^v y + \delta^v z$. Будуються вершинні багатогранники і базис з «пірамідальних» функцій $\varphi_k(x, y, z)$, які мають ці багатогранники в якості своїх носіїв. Функція $\omega(x, y, z)$ репрезентується виразом $\omega(x, y, z) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y, z)$, який підставляється до функціоналу. Пошук невідомих коефіцієнтів приводить до системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

де $k_{ij} = \int_G \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \, dy \, dz$, $b_i = \int_G f \varphi_i \, dx \, dy \, dz$ (для рівняння Пуассона).

Отже алгоритм МСЕ в тривимірних задачах схожий на алгоритм в одно- і двовимірному випадках. Однак задача ускладнюється, бо в тривимірному випадку для досягнення задовільної точності потрібно розв'язувати систему значно більшого розміру ніж в задачах меншої розмірності.

Подальші зауваження торкаються не самого метода скінченних елементів, а його реалізації в COMSOL Multiphysics.

По-перше, в системі COMSOL Multiphysics використовується інше трактування МСЕ. Але воно також застосовує інтегральний підхід, та таку ж саму схему триангуляції і базисні функції φ_k . Це приводить до тієї ж самої системи рівнянь (2.11) і часто до тотожних алгоритмів обчислення її коефіцієнтів.

По-друге, в динамічних задачах скінченні елементи не використовуються по змінній часу. Для пошуку залежності розв'язку від часу використовується метод прямих.

По-третє, шукані функції $\omega(x, y, z)$ зазвичай мають більш високий порядок гладкості (за замовчуванням другий), і користувач має можливість вибирати цей порядок.

Звичайно, що в COMSOL Multiphysics можна розв'язувати системи ДРЧП. Варіаційний принцип для систем також полягає в мінімізації деякого функціоналу.

Окрім трикутних скінченних елементів у користувача є можливість вибирати елементи іншої форми, наприклад, прямокутні.

Оцінку точності розв'язку система COMSOL Multiphysics не виконує. Єдине, в чому ми можемо бути впевнені це те, що інтеграл по об'єму тіла від квадрату різниці точного і наближеного розв'язків прямує до нуля, коли розмір h найбільшого елемента триангуляції прямує до нуля

$$\int_G (u - \omega)^2 dv \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Підведемо невеликий підсумок. Головна ідея методу скінчених елементів полягає в тому, що будується дискретна модель задачі:

1. В області фіксується скінченна кількість точок, які називають вузлами.
2. Значення неперервної функції в кожній точці вважається змінною, яка повинна бути знайдена.
3. Зона визначення розбивається на скінченну кількість ділянок, які називають елементами. Ці елементи мають спільні вузлові точки і разом апроксимують форму області.
4. Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою її вузлових значень. Для кожного елемента визначається свій поліном, але поліноми підбираються таким чином, щоб зберігалася неперервність вздовж границь елементів.

В результаті метод скінчених елементів заміняє диференціальне рівняння великою кількістю алгебраїчних рівнянь. Деталі цього переходу криві, але Comsol Multiphysics робить це за вас. Все що потрібно знати, це як використовувати програму. Зрештою ви будете вирішувати чи розв'язана задача з достатньою точністю. Розуміння МСЕ допоможе вам в цьому.