М.В. ЛОСИК

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТОПОЛОГИИ

Учебно-методическое пособие

Саратовский государственный университет
2002

Введение

Общая топология, которая изучается студентами механико-математического факультета на втором курсе, часто усваивается с большими затруднениями. Для этого имеется несколько причин. Во-первых, в отличие от большинства других математических дисциплин, изучаемых на первом и втором курсах, общая топология очень абстрактна по своей сути, а абстрактные расуждения даются многим студентам с трудом и усваиваются чисто формально. Во-вторых, значительная часть курса представляет собой новый язык с массой новых абстрактных понятий, которые требуют времени и тренировки для их усвоения. К сожалению, известные учебники и, особенно сборники задач, по топологии расчитаны на хороших студентов и содержат мало простых задач, которые доступны большинству. Данное пособие является попыткой восполнить указанные пробелы.

Пособие построено следующим образом. Оно состоит из нескольких разделов по основным частям топологии. Каждый раздел состоит из краткой теоретической части, в которой даются определения основных понятий и формулируются (без доказательства) основные теоремы. Далее приводятся задачи, начиная с совсем простых, требующих для своего решения понимания понятий данного раздела и простых логических умозаключений, и далее несколько более сложных, где используются больше понятий и связей между ними. В частности, во многих задачах определяются и используются конкретные топологические пространства, на которых общие понятия имеют естественный смысл. Постепенно, от раздела к разделу, в процесс формулировки и решения задач вовлекается все большее и большее количество понятий и фактов топологии.

Как показывает опыт, решение даже самых простых задач, особенно на первых порах, у многих студентов вызывает затруднения. Поэтому помощь преподавателя в решении многих задач является естественной и необходимой. После решения основных задач этого пособия основные понятия и теоремы топологии обычно усваиваются студентами более или менее успешно.

1. Определение топологического пространства. Предбаза и база топологии. Замкнутые множества

Топологией на множестве X называется множество подмножеств $\mathfrak{O}$ множества X, удовлетворяющее следующим аксиомам

(1) Пустое подмножество $\emptyset$ и множество X принадлежат $\mathfrak{O}$;
(2) Объединение любого множества подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{O}$, принадлежит $\mathfrak{O}$;
(3) Пересечение двух подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{O}$, принадлежит $\mathfrak{O}$.

Множество X с заданной на нем топологией $\mathfrak{O}$ называется *топологическим пространством*, а подмножества, принадлежащие $\mathfrak{O}$ – *открытыми множествами.* В дальнейшем топологическое пространство обозначается через $(X, \mathfrak{O})$ или через $(X, \mathfrak{O}_X)$, если мы хотим подчеркнуть, что $\mathfrak{O}_X$ – топология на X, а иногда просто через X.

Пусть $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ – две топологии на множестве X. Говорят, что $\mathfrak{O}_1$ *слабее* $\mathfrak{O}_2$ (или $\mathfrak{O}_1$ *сильнее* $\mathfrak{O}_2$), если $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$.

Если топология $\mathfrak{O}$ на множестве X является самой слабой из всех топологий на этом множестве, содержащих некоторое множество подмножеств $\mathfrak{A}$ множества X, то $\mathfrak{A}$ называется *предбазой* топологии $\mathfrak{O}$ или говорят, что топология $\mathfrak{O}$ порождена множеством подмножеств $\mathfrak{A}$. Множество открытых множеств $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{O}$ называется *базой* $\mathfrak{O}$, если любое непустое открытое множество $U \in \mathfrak{O}$ является объединением подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. *Множество подмножеств $\mathfrak{B}$ множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(1) $\cup\mathfrak{B} = X$;
(2) *Если пересечение двух подмножеств $A, B \in \mathfrak{B}$ непусто, то оно является объединением некоторого множества подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{B}$.*

Подмножество топологического пространства X называется *замкнутым множеством*, если его дополнение – открытое множество пространства X.

Задачи

1. Найти все топологии на множестве, состоящем из двух точек. Указать те из них, которые отличны от дискретной и антидискретной.

2. Привести примеры топологий на множестве, состоящем из трех элементов, отличных от дискретной и антидискретной.

3. Какая топология на множестве X порождается множеством всех одноэлементных подмножеств $\{x\}$ $(x \in X)$?

4. Показать, что множество дополнений всех конечных подмножеств множества X, дополненное пустым подмножеством, является топологией на X. Для каких множеств X эта топология отлична от дискретной?

5. Показать, что пересечение любого семейства топологий на множестве X является топологией на X.

6. На множестве целых действительных чисел $\mathbf{Z}$ найти топологии, порожденные: а) конечными интервалами $\{m, m+1, \dots, n\}$ $(m, n \in \mathbf{Z}$, $m < n)$; б) бесконечными интервалами $\{m, m+1, \dots\}$ $(m \in \mathbf{Z}\}$. Сравнить эти топологии.

7. Пусть $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ – базы топологий $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ на множестве X. Доказать, что топология $\mathfrak{O}_1$ слабее топологии $\mathfrak{O}_2$ тогда и только тогда, когда любое непустое подмножество, принадлежащее $\mathfrak{B}_1$, является объединением подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{B}_2$.

8. Показать, что на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел множество всех открытых интервалов (a, b) $(a < b)$ является базой некоторой топологии. Показать, что в этой топологии пересечение бесконечного числа открытых множеств может не быть открытым множеством.

9. Показать, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ множество всех открытых конечных отрезков, параллельных некоторой прямой, является базой некоторой топологии.

10. Показать, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ множество прямоугольников $\{(x, y) \,|\, a_1 < x < b_1,\ a_2 < y < b_2\}$ $(a_1 < a_2,\ b_1 < b_2)$ является базой некоторой топологии на $\mathbf{R}^2$.

11. Показать, что множество всех конечных подмножеств множества X, дополненное множеством X, является множеством замкнутых множеств некоторой топологии на X. Для каких множеств X эта топология отлична от дискретной?

12. Пусть на множестве X заданы две топологии $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ с помощью множеств замкнутых множеств $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Показать, что топология $\mathfrak{O}_1$ слабее топологии $\mathfrak{O}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.

2. Топология метрического пространства

Метрическим пространством называется множество M, для любых двух точек x и y которого задано неотрицательное действительное число $\rho(x,y)$, называемое *расстоянием* между точками x и y, удовлетворяющее следующим аксиомам

(1) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
(2) $\rho(y,x) = \rho(x,y)$ (аксиома симметричности расстояния);
(3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ $(x,y,z \in M)$ (аксиома треугольника).

Открытым шаром метрического пространства M с центром в точке x_0 и радиуса $r > 0$ называется множество $B(x_0,r)$ точек $x \in M$ таких, что $\rho(x_0,x) < r$. Подмножество метрического пространства называется открытым множеством, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке.

Теорема 2. *Множество всех открытых шаров метрического пространства является базой его топологии.*

Задачи

1. Для любого множества X определим расстояние ρ условием $\rho(x,x) = 0$ и $\rho(x,y) = 1$, если $x \neq y$. Проверить, что ρ удовлетворяет аксиомам метрического пространства и найти топологию этого метрического пространства.

2. Показать, что на множестве X, содержащем более одного элемента, антидискретная топология не может быть топологией метрического пространства, определенного некоторой метрикой на X. Сначала рассмотреть случай, когда X состоит из двух элементов.

3. Показать, что на числовой прямой $\mathbf{R}$ с обычной топологией дополнение счетного множества может быть открытым множеством, а может и не быть им.

4. Показать, что топология метрического пространства на множестве целых действительных чисел $\mathbf{Z}$ с обычной метрикой дискретна.

5. Показать что на числовой прямой $\mathbf{R}$ с обычной топологией пересечение бесконечного числа открытых интервалов может быть замкнутым множеством, а объединение бесконечного числа замкнутых интервалов – открытым множеством.

6. Рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ как метрическое пространство с обычной метрикой. Доказать, что открытые шары в $\mathbf{Q}$ являются замкнутыми множествами, если их радиусы иррациональны.

7. Показать, что замкнутый шар метрического пространства M, т.е. множество точек, расстояние которых до некоторой точки $x_0 \in M$ меньше или равно r $(r > 0)$, является замкнутым множеством.

8. Показать что в пространстве $\mathbf{R}^n$ замкнутый параллелипипед, т.е. множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n)$ является замкнутым множеством. Сначала рассмотреть случай $n = 2$.

9. Показать, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ с обычной топологией дополнение любого конечного подмножества – открытое множество.

10. Проверить, что следующая функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Что представляет собой открытый шар в этом метрическом пространстве?

11. Проверить, что следующая функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

где $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$, удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

12. Пусть на множестве M заданы две метрики ρ_1 и ρ_2, удовлетворяющие аксиомам метрического пространства и связанные неравенством $\rho_1(x,y) \leq k\rho_2(x,y)$, где k – положительное действительное число. Показать, что топология пространства (M,ρ_1) слабее топологии пространства (M,ρ_2).

13. Используя предыдущую задачу, показать, что обычная метрика пространства $\mathbf{R}^n$ и метрики задач 10 и 11 определяют и ту же топологию на пространстве $\mathbf{R}^n$.

14. Рассмотрим множество l_2, элементами которого служат последовательности $x = \{x_n\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Показать, что метрика на l_2, заданная равенством

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2},$$

удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

15. Пусть M – метрическое пространство с метрикой ρ. Для любых двух точек $x, y \in M$ положим $\rho^*(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$. Показать, что ρ^* удовлетворяет аксиомам метрического пространства и что метрики ρ и ρ^* определяют одну и ту же топологию на M.

16. Пусть $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ – две топологии на множестве X, а $O_1(x)$ и $O_1(x)$ – множества окрестностей точки $x \in X$ для топологий $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ соответственно. Доказать, что топология $\mathfrak{O}_1$ слабее топологии $\mathfrak{O}_2$ тогда и только тогда, когда для любой точки x $\mathbf{O}_1(x) \subset \mathbf{O}_2(x)$.

3. Окрестности точек. Внутренность и замыкание

Подмножество A топологического пространства X называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует такое открытое множество U, что $x \in U$ и $U \subset A$.

Теорема 3. *Подмножество топологического пространства является открытым тогда и только тогда, когда оно является окрестностью любой своей точки.*

Множество Φ окрестностей точки $x \in X$ называется *фундаментальной системой окрестностей* точки x, если любая окрестность точки x содержит некоторую окрестность, принадлежащую Φ. Например, множество всех открытых окрестностей точки x – фундаментальная система окрестностей этой точки.

Точка $x \in X$ называется *внутренней точкой* подмножества A топологического пространства X, если A является окрестностью x. Множество всех внутренних точек подмножества A называется внутренностью A и обозначается через A^o.

Теорема 4. *Внутренность подмножества A является наибольшим из открытых множеств, содержащихся в A.*

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* подмножества A топологического пространства X, если пересечение A с любой окрестностью точки x непусто. Множество всех точек прикосновения подмножества A называется *замыканием* A и обозначается через $\bar{A}$.

Теорема 5. *Замыкание подмножества A является наименьшим из замкнутых множеств, содержащих A.*

Задачи

1. Пусть $\mathfrak{B}$ – база топологии пространства X и $x \in X$. Доказать, что множество подмножеств $\mathfrak{B} \cap O(x)$ является фундаментальной системой окрестностей точки x.

2. Найти все окрестности точки $x \in X$ в множестве X с дискретной и антидискретной топологией. Внутренность каких подмножеств пространства X с антидискретной топологией пуста, а каких непуста?

3. Пусть $\Phi(x)$ – фундаментальная система окрестностей точки x топологического пространства X. Доказать, что точка x является внутренней точкой подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует окрестность, принадлежащая $\Phi(x)$, которая содержится в A.

4. Пусть $\Phi(x)$ – фундаментальная система окрестностей точки x топологического пространства X. Доказать, что точка x является точкой прикосновения подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда любая окрестность, принадлежащая $\Phi(x)$, имеет непустое пересечение с A.

5. Доказать, что в метрическом пространстве открытый шар содержится во внутренности соответствующего замкнутого шара, а в пространстве $\mathbf{R}^n$ открытый шар совпадает с внутренностью соответствующего замкнутого шара.

6. Доказать, что в метрическом пространстве замыкание открытого шара содержится в соответствующем замкнутом шаре, а в пространстве $\mathbf{R}^n$ замыкание открытого шара совпадает с соответствующим замкнутым шаром.

7. Доказать, что для двух непересекающихся открытых множеств топологического пространства замыкание любого из них не пересекается с другим.

8. Пусть U – открытое, а A – произвольное подмножество топологического пространства. Доказать, что если $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$, то $U \cap A \neq \emptyset$.

9. Доказать, что для двух замкнутых множеств F_1 и F_2, покрывающих топологическое пространство X (т.е. $F_1 \cup F_2 = X$), дополнение любого из них содержится во внутренности другого.

10. Пусть M – метрическое пространство, $A \subset M$ и $x \in M$. Назовем расстоянием от точки $x \in M$ до $A \subset M$ число $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Доказать, что $x \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $\rho(x, A) = 0$.

11. Пусть M – метрическое пространство, $A \subset M$ и $x \in M$. Рассмотрим расстояние $\rho(x, A)$ от точки $x \in M$ до A, введенное в задаче 10. Доказать, что $\rho(x, \bar{A}) = \rho(x, A)$.

12. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность точек топологического пространства X. Точка $x \in X$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если любая ее окрестность содержит члены последовательности со сколь угодно большими номерами. Показать, что x – предельная точка последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого n x является точкой прикосновения множества членов последовательности $\{x_n\}$, начиная с n-ого.

13. Показать, что в метрическом пространстве M множество всех открытых (замкнутых) шаров с центром в точке $x \in M$, радиусы которых пробегают последовательность положительных действительных чисел, сходящуюся к нулю, образуют фундаментальную систему окрестностей точки x.

4. Непрерывность. Гомеоморфизм

Пусть X и Y – топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности B точки $f(x)$ найдется такая окрестность A точки x, такая что $f(A) \subset B$. Отображение $f : X \to Y$ назывется *непрерывным*, если оно непрерывно в любой точке $x \in X$. Биективное отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если отображения f и f^{-1} непрерывны.

Теорема 6. *Пусть X и Y – топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз относительно f любого открытого (замкнутого) множества пространства Y является открытым (замкнутым) множеством пространства X.*

Теорема 7. *Пусть X и Y – топологические пространства. Биективное отображение $f : X \to Y$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда образ относительно f любого открытого (замкнутого) множества пространства X является открытым (замкнутым) множеством пространства Y и прообраз относительно f любого открытого (замкнутого) множества пространства Y является открытым (замкнутым) множеством пространства X.*

Задачи

1. Пусть f и g – непрерывные отображения топологического пространства X в пространство $\mathbf{R}$ с обычной топологией. Доказать, что отображения $f+g$ и kf X в $\mathbf{R}$, определенные условиями: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ и $(kf)(x) = kf(x)$ $(x \in X)$ непрерывны.

2. Пусть M – метрическое пространство, $A \subset M$ и $x \in M$. Рассмотрим расстояние $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ от точки $x \in M$ до A, ввведенное в задаче 10 раздела 3. Доказать, что отображение $\rho_A : M \to \mathbf{R}$, определенное условием $\rho_A(x) = \rho(x, A)$, непрерывно.

3. Пусть $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ – две топологии на множестве X. Доказать, что тождественное отображение X в себя как отображение топологического пространства $(X, \mathfrak{O}_1)$ в топологическле пространство $(X, \mathfrak{O}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда топология $\mathfrak{O}_1$ слабее топологии $\mathfrak{O}_2$.

4. Пусть X и Y – множества и $f : X \to Y$ – произвольное отображение. Показать, что f непрерывно при следующих выборах топологий на X и Y: а) на X – дискретная топология, на Y – произвольная ; б) на X – любая топология, на Y – антидискретная.

5. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Показать, что оно останется непрерывным при замене топологии пространства X более сильной топологией, или при замене топологии пространства Y более слабой топологией.

6. Пусть X и Y – топологические пространства и $\mathfrak{A}$ – предбаза топологии пространства Y. Показать, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно, если для любого $U \in \mathfrak{A}$ $f^{-1}(U)$ – открытое множество пространства X.

7. Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство $(Y, \mathfrak{O}_Y)$. Показать, что следующее множество подмножеств множества X: $\mathfrak{O}_X = \{f^{-1}(U) | \, U \in \mathfrak{O}_Y\}$ является самой слабой из всех топологий на X, для которых f непрерывно.

8. Показать, что все открытые интервалы (ограниченные и неограниченные) пространства $\mathbf{R}$ гомеоморфны. Показать, что открытый интервал негомеоморфен никакому ограниченному замкнутому интервалу.

9. Пусть X и Y – топологические пространства и $f : X \to Y$ – биективное отображение. Показать, что f – гомеоморфизм тогда и только тогда, когда топология на Y является самой сильной из всех топологий, для которых f непрерывно.

10. Доказать, что отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества A пространства Y $f^{-1}(A^o) \subset (f^{-1}(A))^o$.

11. Доказать, что отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества A пространства X $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

5. Подпространство топологического пространства

Пусть A – подмножество топологического пространства X. *Индуцированной топологией* на подмножестве A называется множество пересечений всех открытых множеств пространства X с A. Множество A с индуцированной на нем топологией называется *подпространством* топологического пространства X.

Теорема 8. *Множество замкнутых множеств подпространства A топологического пространства X совпадает с множеством пересечений замкнутых множества пространства X с A.*

Задачи

1. Показать, что индуцированная топология на подмножестве топологического пространства с дискретной (антидискретной) топологией является дискретной (антидискретной).

2. Пусть X – топологическое пространство и $A \subset X$ – открытое (замкнутое) множество. Показать, что множество открытых (замкнутых) множеств подпространства A совпадает с множеством открытых (замкнутых) множеств пространства X, содержащихся в A.

3. Пусть X – топологическое пространство и $A \subset X$. Доказать, что множество окрестностей точки $x \in A$ совпадает с множеством пересечений окрестностей точки x в X с подмножеством A.

4. Пусть M – метрическое пространство и $A \subset M$. Показать, что индуцированная топология на A совпадает с топологией A как метрического пространства с индуцированной метрикой.

5. Пусть $\mathfrak{B}$ – база топологии топологического пространства X и $A \subset X$. Показать, что множество подмножеств $\mathfrak{B}_A = \{U \cap A \,|\, U \in \mathfrak{B}\}$ – база топологии подпространства A.

6. Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ – покрытие топологического пространства X открытыми множествами. Показать, что если $\mathfrak{B}_i$ – база топологии подпространства U_i, то $\cup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ – база топологии пространства X.

7. Показать, что индуцированная топология на подмножестве A топологического пространства X дискретна тогда и только тогда, когда каждая точка A имеет в X окрестность, не содержащую других точек A. Вывести отсюда, что топология, индуцированная на множестве $\mathbf{Z}$ целых действительных чисел как подмножестве пространства $\mathbf{R}$ с обычной топологией, дискретна.

8. Пусть A и B – подмножества топологического пространства X и $B \subset A$. Показать, что внутренность B в пространстве X содержится во внутренности B как подмножестве подпространства A. Рассмотреть случай, когда $X = \mathbf{R}$, $A = [a, b]$ и $B = [a, c]$ $(a < c < b)$ и найти внутренности B в $\mathbf{R}$ и A.

9. Пусть A и B – подмножества топологического пространства X. Показать, что пересечение замыкания B в пространстве X с A содержит замыкание $A \cap B$ в подпространстве A.

10. Пусть X – топологическое пространство, $A \subset X$ и $B \subset A$. Показать, что замыкание B в подпространстве A совпадает с $\bar{B} \cap A$, где $\bar{B}$ – замыкание B в X.

11. Пусть X – топологическое пространство, $A \subset X$ – подпространство и $i : A \to X$ – вложение, т.е. для любого $x \in X$ $i(x) = x \in X$. Показать, что индуцированная топология на подмножестве A топологического пространства X является самой слабой из всех топологий, для которых вложение i непрерывно. Вывести отсюда, что ограничение $f|_A : A \to Y$ непрерывного отображения $f : X \to Y$ пространства X в топологическое пространство Y на подпространство A непрерывно.

12. Пусть X и Y – топологические пространства, $B \subset Y$, и $f : X \to Y$ – такое непрерывное отображение, что $f(X) \subset B$. Показать, что f как отображение X в подпространство B топологического пространства Y непрерывно.

6. Хаусдорфовость. Компактность

Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если оно удовлетворяет следующей аксиоме Хаусдорфа: любые две различные точки пространства имеют непересекающиеся окрестности.

Теорема 9. *Подпространство хаусдорфова пространства является хаусдорфовым пространством. Метрическое пространство является хаусдорфовым пространством.*

Хаусдорфово пространство X называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующей аксиоме Бореля-Лебега: любое покрытие пространства X открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Подмножество топологического пространства называется *компактным множеством*, если оно компактно как подпространство.

Теорема 10. *Пусть X и Y – хаусдорфовы пространства и $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Образ любого компактного множества пространства X относительно f является компактным множеством пространства Y.*

Множество подмножеств множества X называется центрированным, если пересечение любого его конечного подмножества непусто.

Теорема 11. *Аксиома Бореля-Лебега эквивалентна следующей аксиоме: пересечение любого центрированного семейства замкнутых множеств непусто.*

Теорема 12. *Подпространство пространства $\mathbf{R}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто в $\mathbf{R}^n$.*

Хаусдорфово пространство называется локально компактным, если любая его точка имеет компактную окрестность.

Задачи

1. Доказать, что в топологическом пространстве X все одноэлементные подмножества замкнуты тогда и только тогда, когда у любой из двух различных точек пространства X существует такая окрестность, которая не содержит другую точку.

2. Показать, что пространство с дискретной топологией хаусдорфово, а пространство с антидискретной топологией нехаусдорфово, если оно содержит более одной точки.

3. Показать, что в хаусдорфовом пространстве топология, индуцированная на любом конечном подмножестве, дискретна.

4. Показать, что топология более сильная, чем хаусдорфова, также хаусдорфова.

5. Указать все сходящиеся последовательности в пространстве с дискретной и антидискретной топологией.

6. Показать, что в хаусдорфовом пространстве предел сходящейся последовательности определен однозначно.

7. Доказать, что аксиома Хаусдорфа эквивалентна следующему утверждению: пересечение всех замкнутых окрестностей любой точки x есть $\{x\}$.

8. Показать, что если для любой пары x и y различных точек топологического пространства X существует такое непрерывное отображение $f : X \to Y$, что $f(x) \neq f(y)$, то пространство X – хаусдорфово.

9. Пусть f и g – непрерывные отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Показать, что множество точек $x \in X$ таких, что $f(x) = g(x)$, замкнуто.

10. Пусть $f_1, f_2 : X \to Y$ – непрерывные отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Показать, что если f_1 и f_2 совпадают на некотором всюду плотном подмножестве A пространства X (т.е. $\bar{A} = X$), то они совпадают на всем X.

11. Доказать, что дискретная топология на множестве X компактна тогда и только тогда, когда X – конечное множество.

12. Доказать, что всякое топологическое пространство, содержащее только конечное множество точек, удовлетворяет аксиоме Бореля-Лебега, но не обязательно хаусдорфово.

13. Пусть X – бесконечное множество, наделим его топологией, в которой замкнутыми множествами являются только X и его конечные подмножества. Доказать, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме Бореля-Лебега, но не хаусдорфово.

14. Показать, что топологическое пространство, содержащее более двух точек, с антидискретной топологией удовлетворяет аксиоме Бореля-Лебега, но не хаусдорфово. Показать, что в этом пространстве существуют такие компактные множества, которые не замкнуты.

15. Доказать, что хаусдорфово топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любое центрированное семейство его подмножеств имеет общую точку прикосновения.

16. Привести примеры компактных и некомпактных множеств пространства $\mathbf{R}^n$ при $n = 1, 2, 3$.

17. Показать, что замкнутый шар пространства $\mathbf{R}^n$ не гомеоморфен никакому открытому шару этого пространства.

18. Показать, что бесконечное множество с дискретной топологией не компактно, но локально компактно.

19. Пусть X – компактное топологическое пространство, $x \in X$ и F – замкнутое множество в X, не содержащее x. Доказать, что существует такая окрестность точки x и такое открытое множество, содержащее F, которые не пересекаются.

20. Пусть X – компактное топологическое пространство, F_1 и F_2 – непересекающиеся замкнутые множества в X. Доказать, что существуют такие открытые множества, содержащие F_1 и F_2, которые не пересекаются.

21. Пусть f – непрерывное биективное отображение компактного топологического пространства в хаусдорфово топологическое пространство. Показать, что f – гомеоморфизм.

22. Пусть X – компактное пространство и $f : X \to \mathbf{R}$ – непрерывное отображение. Показать, что отображение f ограничено и достигает на X своего наименьшего и наибольшего значений.

23. Показать, что пространство $\mathbf{R}^n$ локально компактно.

7. Связность

Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Подмножество топологического пространства называется связным множеством, если оно связно как подпространство.

Теорема 13. *Замыкание связного множества – связное множество. Объединение множества связных множеств топологического пространства, пересечение которого непусто, является связным множеством.*

Теорема 14. *Подмножество числовой прямой* $\mathbf{R}$ *является связным множеством тогда и только тогда, когда оно либо одноточечно, либо является открытым (ограниченным или неограниченным) интервалом, либо получается из открытого интервала присоединением одного или обоих концов (если они – действительные числа).*

Топологическое пространство называется *локально связным*, если любая его точка имеет фундаментальную систему связных окрестностей.

Задачи

1. Показать, что пространство с антидискретной топологией всегда связно, а с дискретной топологией связно тогда и только тогда, когда оно содержит не более одной точки.

2. Привести примеры таких двух связных множеств на числовой прямой и на плоскости, что а) их объединение не связно; б) их пересечение не связно .

3. Доказать, что топологическое пространство X несвязно тогда и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение $f : X \to \mathbf{R}$, что $f(X) = \{0, 1\}$.

4. Привести пример непрерывного отображения f несвязного топологического пространства X в топологическое пространство Y, для которого $f(X)$ – связное множество.

5. Показать, что открытый (замкнутый) шар пространства $\mathbf{R}^n$ – связное множество. Вывести отсюда, что пространство $\mathbf{R}^n$ локально связно.

6. Показать, что единичная окружность на плоскости $\mathbf{R}^2$ связна как подпространство $\mathbf{R}^2$.

7. Пусть $\{A_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ – последовательность связных множеств топологического пространства, для которых $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Доказать, что $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ – связное множество.

8. Показать, что подмножество множества рациональных чисел с обычной топологией связно тогда и только тогда, когда оно одноточечно.

9. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$ – непрерывная функция на связном топологическом пространстве X. Доказать, что для любых точек $x, y \in X$ $f(X)$ содержит интервал с концами

$f(x)$ и $f(y)$. В частности, если $f(x) < 0$ и $f(y) > 0$, то существует такая точка $z \in X$, что $f(z) = 0$.

10. Пусть A и B – замкнутые множества топологического пространства. Доказать, что если $A \cap B$ и $A \cup B$ – связные множества, то A и B – также связные множества.

11. Рассмотрим подпространство плоскости $\mathbf{R}^2$, являющееся объединением множества прямых, проходящих через начало координат, угловые коэффициенты которых пробегают все рациональные числа. Показать, что это подпространство связно, но не локально связно.

12. Показать, что ограниченный замкнутый интервал числовой прямой не гомеоморфен окружности.

8. Произведение топологических пространств. Факторпространство топологического пространства

Произведением топологических пространств $(X, \mathfrak{O}_X)$ и $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ называется множество $X \times Y$ с топологией, базой которой служит множество подмножеств вида $U \times V$, где $U \in \mathfrak{O}_X$ и $V \in \mathfrak{O}_Y$.

Проекциями произведения $X \times Y$ топологических пространств X и Y называются отображения $p_1 : X \times Y \to X$ и $p_2 : X \times Y \to Y$, определенные условиями $p_1((x, y)) = x$ и $p_2((x, y)) = y$ $(x \in X, y \in Y)$.

Теорема 15. *Топология произведения $X \times Y$ топологических пространств X и Y является самой слабой из всех топологий на $X \times Y$, для которых проекции p_1 и p_2 непрерывны.*

Теорема 16. *Произведение $X \times Y$ топологических пространств X и Y компактно тогда и только тогда, когда его сомножители X и Y компактны.*

Теорема 17. *Произведение $X \times Y$ топологических пространств X и Y связно тогда и только тогда, когда его сомножители X и Y связны.*

Пусть X – множество и ϵ – отношение эквивалентности на X. Множество классов отношения ϵ называется фактормножеством и обозначается через X/ϵ. Отображение $p : X \to X/\epsilon$, которое каждой точке X ставит в соответствие содержащий ее класс, называется проекцией.

Пусть X – топологическое пространство. *Факторпространством* X по отношению эквивалентности ϵ на X называется фактормножество X/ϵ, снабженное самой сильной из всех топологий, для которых проекция $p : X \to X/\epsilon$ – непрерывное отображение.

Теорема 18. *Подмножество факторпространства X/ϵ топологического пространства X является открытым (замкнутым) тогда и только тогда, когда его прообраз относительно проекции p – открытое (замкнутое) множество пространства X.*

Теорема 19. *Пусть X и Y – топологические пространства и ϵ – отношение эквивалентности на X. Отображение $f : X/\epsilon \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение – непрерывно. $f \circ p : X \to Y$ непрерывно.*

Задачи

1. Пусть $\mathfrak{B}_i$ – база топологического пространства X_i $(i = 1, 2)$. Доказать, что множество подмножеств вида $U_1 \times U_2$, где $U_1 \in \mathfrak{B}_1$ и $U_2 \in \mathfrak{B}_2$, является базой топологического пространства $X_1 \times X_2$.

2. Показать, что произведения $X \times Y$ и $Y \times X$ топологических пространств X и Y гомеоморфны.

3. Пусть X и Y – топологические пространства, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Показать, что топология, индуцированная на $A \times B$, совпадает с топологией произведения подпространств A и B.

4. Пусть F_i – замкнутое множество топологического пространства X_i $(i = 1, 2)$. Показать, что $F_1 \times F_2$ – замкнутое множество топологического пространства $X_1 \times X_2$.

5. Показать, что топология произведения топологических пространств с дискретной (антидискретной) топологией дискретна (антидискретна).

6. Показать, что топология пространства $\mathbf{R}^n$ как произведения совпадает с его топологией как метрического пространства.

7. Пусть X и Y – топологические постранства, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Показать, что выполняются следующие равенства: $(A \times B)^o = A^o \times B^o$ и $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

8. Пусть X и Y – топологические пространства, $A \subset X \times Y$ и $a \in X$. Срезом подмножества A по элементу a называется множество таких точек $y \in Y$, что $(a, y) \in A$. Доказать, что срез открытого (замкнутого) множества произведения $X \times Y$ – открытое (замкнутое) множество.

9. Доказать, что проекции произведения $X \times Y$ топологических пространств X и Y на сомножители – открытые отображения, т.е. проекции открытых множеств $X \times Y$ – открытые множества соответствующих сомножителей.

10. Пусть X – топологическое пространство и Δ – подмножество $X \times X$, образованное точками вида (x, x), где $x \in X$. Доказать, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда Δ – замкнутое множество в $X \times Y$.

11. Пусть X_1, X_2 и Y – топологические пространства, $f : X_1 \times X_2 \to Y$ – непрерывное отображение и $a \in X_1$. Показать, что отображение $f_a : X_2 \to Y$, определенное равенством $f_a(x) = f(a, x)$ $(x \in X_2)$, непрерывно.

12. Пусть X и Y – топологические пространства и $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Графиком f называется подмножество $\Gamma(f)$ произведения $X \times Y$, образованное точками вида $(x, f(x))$, где $x \in X$. Доказать, что $\Gamma(f)$ – замкнутое множество пространства $X \times Y$, если Y – хаусдорфово пространство.

13. Пусть X и Y – топологические пространства, $x \in X$ и $y \in Y$. Доказать, что множество подмножеств $X \times Y$ вида $A \times B$, где A – окрестность точки x и B – окрестность точки y, является фундаментальной системой окрестностей точки $(x, y) \in X \times Y$.

14. Показать, что произведение локально компактных пространств локально компактно.

15. Показать, что произведение локально связных пространств локально связно.

16. Показать, что топология факторпространства топологического пространства с дискретной (антидискретной) топологией дискретна (антидискретна).

17. Пусть X и Y – топологические пространства, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение и ϵ_f – отношение эквивалентности на X, классами которого служат прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in Y$. Показать, что существует единственное непрерывное отображение $\tilde{f} : X/\epsilon_f \to Y$ такое, что $\tilde{f} \circ p = f$.

18. Пусть f – проекция произведения $X \times Y$ топологических пространств X и Y на i-ый (i=1,2) сомножитель. Тогда отображение $\tilde{f}$, определенное в задаче 17, гомеоморфизм.

19. Пусть X_1 и X_2 – топологические пространства, $f : X_1 \to X_2$ – непрерывное отображение и ϵ_i – отношение эквивалентности на X_i $(i = 1, 2)$. Предположим, что отношения ϵ_1 и ϵ_2 согласованы с f, т.е. если $x, y \in X_1$ и $(x, y) \in \epsilon_1$, то $(f(x), f(y)) \in \epsilon_2$. Показать, что существует единственное непрерывное отображение $\tilde{f} : X_1/\epsilon_1 \to X_2/\epsilon_2$ такое, что $\tilde{f} \circ p_1 = p_2 \circ f$, где $p_i : X_i \to X_i/\epsilon_i$ – проекции.

20. Пусть X – подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, полученное из $\mathbf{R}^n$ выбрасыванием точки 0, и ϵ – отношение эквивалентности на X, классами которого являются лучи пространства $\mathbf{R}^n$ с началом в точке 0. Показать, что факторпространство X/ϵ гомеоморфно n-мерной сфере S^{n-1}. Вывести отсюда связность сферы S^{n-1}.

21. Пусть ϵ – отношение эквивалентности на числовой прямой $\mathbf{R}$, заданное следующим условием:

$$(x, y) \in \epsilon \Longleftrightarrow x - y \in \mathbf{N},$$

где $\mathbf{N}$ – множество целых чисел и $x, y \in \mathbf{R}$. Показать, что факторпространство $\mathbf{R}/\epsilon$ гомеоморфно единичной окружности S^1 как подпространства плоскости $\mathbf{R}^2$.

9. Сепарабельность и полнота метрических пространств

Метрическое пространство M называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество A.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства назывется *последовательностью Коши*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер N, что для любых $m, n > N$ $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$. Метрическое пространство называется *полным*, если любая его последовательность Коши сходится.

Метрическое пространство называется *вполне ограниченным*, если для любого $\epsilon > 0$ оно покрывается конечным числом открытых шаров радиуса ϵ.

Задачи

1. Показать, что пространство $\mathbf{R}^n$ сепарабельно.

2. Показать, что метрическое пространство l_2 упражнения 14 раздела 2 сепарабельно.

3. Показать, что метрическое пространство, топология которого дискретна, – полное пространство.

4. Доказать, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая убывающая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

5. Пусть M – полное метрическое пространство и x такая точка M, что $x \in \overline{M \setminus \{x\}}$. Показать, что метрическое пространство $M \setminus \{x\}$ с индуцированной метрикой неполно.

6. Показать, что подпространство вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничено.

7. Показать, что метрическое пространство l_2 упражнения 14 раздела 2 полно.