Теорема *Фундаментальная группа окружности S^1 является бесконечной циклической группой с образующей α_1, где α_1 - гомотопический класс петли* $l_1 : I \to S^1$, *где* $l_1(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0;1]$

§ 15 Степень отображения

Определение *Многообразие M^n называется <u>замкнутым</u>, если оно компактно и не имеет границы.*

Например сфера S^n, тор T^n, поверхности с k-ручками.

Определение *Говорят, что на многообразии M^n <u>задана ориентация,</u> если оно разбито на области действия локальных координат*

$$M^n = \bigcup_\alpha U_\alpha; \quad x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3, \ldots, x_\alpha^n,$$

где в пересечениях областей $U_\alpha \cap U_\beta$ функции $x_\beta^q\left(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^n\right)$, $q = 1, 2, \ldots, n$ таковы, что якобиан $I > 0$, где

$$I = \det\left(\frac{dx_\beta^q}{dx_\alpha^p}\right).$$

Имеем два многообразия M_1^m и M_2^n. Пусть задано гладкое отображение:

$$f : M_1^m \to M_2^n$$

Определение: *Точка $P \in M_1^m$ называется <u>правильной</u> <u>точкой</u> для отображения f, если матрица Якоби I этого отображения в точке P имеет ранг m.*

Определение: *Точка $P' \in M_2^n$ называется <u>регулярной</u> точкой, если все точки $P \in f^{-1}(P')$ полного прообраза правильные.*

Имеет место важная (лемма Сарда)

Лемма *Если отображение f является гладким, то почти все точки $Q \in M_2^n$ регулярны.*

Слова «почти все» понимаются в смысле меры: они означают, что в любой близости каждой точки $Q \in M_2^n$ есть регулярные точки.

Примеры

1. Если $m < n$, то регулярны только те точки $Q \in M_2^n$, где полный прообраз $f^{-1}(Q)$ пуст (нет ни одной точки P, такой что $f(P) = Q$).
2. Если $m = n$, то полный прообраз $f^{-1}(Q) = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_N$ состоит из некоторого числа точек P_α. В каждой точке P_α можно определить знак

$$\operatorname{sgn} P_\alpha = \operatorname{sgn}\left(\det \frac{\partial x^p}{\partial y^q}\right),$$ где x^p - локальные координаты в точке, а y^q - локальные координаты в точке Р.

Имеет место следующая

Теорема *Если $f : M^m \to M^n$ гладкое отображение и $Q \in M^n$ - регулярная точка, то полный прообраз $f^{-1}(Q) \in M^m$ является гладким многообразием размерности $m - n$. Более того, в любой точке $P \in f^{-1}(Q)$ дифференциал отображения f (линейное отображение касательных пространств $\hat{I} : R^q \to R^n$, задаваемое матрицей Якоби отображения f) имеет ранг n.*

Следствие 1 *Если $m = n$ и многообразие M_1^n компактно (где $f : M_1^n \to M_2^n$), то полный прообраз регулярной точки $Q \in M_2^n$ состоит конечного числа точек P_j (j=1,2,...,N); при малом движении точки $Q \to Q'$ новая точка $Q' \in M_2^n$ тоже регулярна, причем ее прообраз тоже сдвигается мало в многообразии M_1^n.*

Следствие 1 *Если $m = n$ и оба многообразия M_1^n и M_2^n ориентированы, причем M_1^n компактно, то в каждой точке полного прообраза $P \in f^{-1}(Q)$ корректно определен знак*

$$\operatorname{sgn}(P) = \operatorname{sgn}\ \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_P$$

Определение ***<u>Степенью</u> <u>отображения</u> ориентированных многообразий $f : M_1^n \to M_2^n$ в регулярной точке $Q \in M_2^n$, где полный прообраз $f^{-1}(Q)$ состоит из конечного числа точек $P\alpha$ называется сумма***

$$\boxed{\deg_Q(f) = \sum_{P_\alpha \in f^{-1}(Q)} \operatorname{sgn}(P_\alpha)}$$

Пример Пусть задано отображение окружности в окружность

$$f : S^1(x) \to S^1(y).$$

Это отображение задаётся функцией $y = f(x)$, где числа x, $x + 2\pi n$ и $y = 2\pi m$, при целых числах m и n определяют одинаковые точки обеих окружностей.

Функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2k\pi,$$

где k- целое число, т.к. точки x и $x+2\pi$ совпадают, то должны совпадать и точки $y_1 = f(x)$ и $y_2 = f(x+2\pi)$. Число k -постоянно т.к. отображение непрерывно. Отсюда следует, что

$$k = \deg(f)$$

(здесь степень отображения называется числом вращения).

Теорема *Степень отображения $M_1^n \xrightarrow{f} S^n$ любого замкнутого ориентированного многообразия на сферу S^n не зависит от выбора регулярной точки $Q \in S^n$. Более того, степень не меняется при гладких гомотопиях.*

§ 16 Интегрирование внешних дифференциальных форм

Интеграл от внешней формы по сингулярному кубу

Пусть R^k- декартово координатное представление k- мерного Евклидова пространства. Произвольную точку этого пространства будем обозначать t а её координаты $t=(t^1,t^2,...,t^k)\in R^k$. Обозначим через h стандартный куб в R^k, т.е.

$$h=[0;1]^k.$$

По определению

$$t \in [0;1]^k \Leftrightarrow 0 \le t^i \le 1 \quad (i = 1,2,3,...,k).$$

Рассмотрим произвольную область U, $U\in R^k$, содержащую куб и допустим, что в области U задана внешняя дифференциальная форма σ степени k

$$\sigma = g(t^1, t^2, ..., t^k) dt^1 \wedge dt^2 \wedge ... \wedge dt^k.$$

Предположим, что σ непрерывна, т.е. непрерывна $g(t^1, t^2, ..., t^k)$.

Определение *Интеграл по кубу* $h=[0;1]^k$ *от формы σ определяется равенством:*

$$\int_h \sigma = \int_{[0;1]^k} g(t^1, t^2, ..., t^k) dt^1 dt^2 ... dt^k ,$$

где справа записан обычный k- кратный интеграл по $h=[0;1]^k$.

Пусть теперь ω - внешняя дифференциальная k-форма, заданная в некоторой области V пространства E

$$\dim E = n \ge k.$$

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение

$$C: U \to V \subset E.$$

Вместе с ним определено сужение на h, которое также обозначим буквой C

$$C: h \to V \qquad (1)$$

Отображение (1) называется k-мерным сингулярным кубом в пространстве E.

Можно считать, что сингулярный куб - это множество пар вида (x,t) где $t\in h$; $x=C(t)\in E$.

Вместе с сингулярным кубом определено линейное отображение:

$$C':\mathrm{T_t}\to T_x \qquad (2)$$

т.е. производная C, здесь $\mathrm{T_t}=\mathrm{T_t}\left(\mathrm{R}^k\right)$ касательное пространство к R^k в точке t, $T_x=T_x(E)$ касательное пространство к E в точке x=C(t).

Отображение (2) индуцирует линейное отображение C^*

$$C^*:\Lambda^k\left(T_x\right)\to\Lambda^k\left(T_t\right) \qquad (3)$$

С каждой k- формой ω в области $V\subset E$ сопоставляется k- форма $C^*\omega$ на стандартном кубе $h\in R^k$.

Определение *Интегралом от внешней дифференциальной k- формы ω по сингулярному n-мерному кубу C в области V называется число, определяемому равенством*

$$\int\limits_C \omega=\int\limits_h C^*\omega \qquad (4)$$

Предположим, что в E введена декартова прямоугольная система координат $x=(x^1,x^2,...,x^n)$, тогда отображение C получает координатное представление:

$$\begin{cases} x^1=C^1\left(t^1,t^2,...,t^k\right),\\ x^2=C^2\left(t^1,t^2,...,t^k\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^k=C^k\left(t^1,t^2,...,t^k\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^n=C^n\left(t^1,t^2,...,t^k\right). \end{cases} \qquad (5)$$

Выведем формулы для вычисления $C^*\omega$ и интеграла от ω по C. Пусть

$$\omega=G\left(x^1,...,x^n\right)dx^1\wedge dx^2\wedge...\wedge dx^n \qquad (6)$$

тогда

$$c^*\omega=(G\circ c)c^*\left(dx^1\wedge dx^2\wedge...\wedge dx^k\right)=(G\circ c)c^*dx^1\wedge...\wedge c^*dx^k, \qquad (7)$$

$$c^*dx^i=\left(D_1c^i\right)dt^1+...+\left(D_kc^i\right)dt^k,$$

следовательно

$$c^*\omega=\left(G\circ c\right)\det\left(\frac{x^1,...,x^k}{t^1,...,t^k}\right)dt^1\wedge...\wedge dt^k \qquad (8)$$

Окончательно получаем

$$\boxed{\int\limits_c\omega=\int\limits_{[0;1]^h}G\left(x^1(t),...,x^n(t)\right)\det\left(\frac{x^1,...,x^k}{t^1,...,t^k}\right)dt^1\wedge dt^2\wedge...\wedge dt^k} \qquad (9)$$

Для простого случая

$$\omega = Pdx^1$$

$P = P\left(x^1, x^2, x^3\right)$ (интеграл по 1 - мерному сингулярному кубу, т.е. ориентированной дуге

$$c:\begin{cases} x^1 = c^1(t), \\ x^2 = c^2(t), \\ x^3 = c^3(t). \end{cases}$$

Обозначим $P(t) = P\left(c^1(t), c^2(t), c^3(t)\right)$, тогда соотношение (9) примет вид:

$$\int_c \omega = \int_{[0;1]} P(t)\frac{dx^1}{dt}dt$$

Формуле (9) можно придать краткую запись, если обозначить

$$\det\left(\frac{x^1,...,x^k}{t^1,...,t^k}\right) = \det \hat{c}'$$

$$\int_c \omega = \int_{[0;1]^k} (G \circ c)(\det \hat{c}')$$

Понятие цепи. Интеграл от формы по цепи.

Наглядный источник, приводящий к понятию цепи это дуга A_0A_p, состоящая из ориентированных дуг A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{p-1}A_p$. Будем рассматривать дугу A_0A_p как набор одномерных сингулярных кубов c_0, c_1, ..., c_p.

Обозначим его как формальную сумму

$$c_0+c_1+ ...+ c_p.$$

Одномерной цепью назовем любую формальную сумму

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + ... + \lambda_p c_p$$

Теперь будем рассматривать цепи любой размерности. Пусть c_0, c_1, ..., c_p - некоторый набор k- мерных сингулярных кубов в E, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda p$ - набор действительных чисел.

Совокупность таких наборов мы назовем k- мерной цепью пространства E^n

$$C = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + ... + \lambda_p c_p$$

<u>Интеграл по цепи</u> определим равенством

$$\int_c \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \lambda_2 \int_{c_2} \omega + ... + \lambda_p \int_{c_p} \omega$$

Можно показать, k-мерные цепи (точнее их классы эквивалентности) образуют линейное пространство. Обозначим его (это пространство бесконечномерное)

Обозначим W^k- линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени k, определенных и гладких (бесконечно дифференцируемых) в евклидовом пространстве E. Можно показать, что пространство W^k также бесконечномерное.

Зафиксируем k $(0 \le k \le n)$, S^k и W^k . Пусть $C \in S^k$,$\omega \in W^k$, тогда введем обозначение "свертки элементов"

$$(\omega, c) = \int_c \omega$$

Пространства S^k и W^k назовем <u>сопряженными относительно свертки.</u>

Ранее был определен оператор внешнего дифференцирования d

$$d: W^k \to W^{k+1}.$$

Наряду с ним существует оператор ∂, который произвольной k-мерной цепи S^k ставит в соответствие цепь S^{k-1} (границу цепи)

$$\partial: S^k \to S^{k-1}$$

или

$$\partial: S^{k+1} \to S^k$$

Операторы d и ∂ действуют в сопряженных пространствах. Эти операторы сами сопряжены $\forall \omega \in W^k$ и $\forall c \in S^{k+1}$
справедливо равенство

$$(d\omega, c) = (\omega, \partial c)$$

или

$$\boxed{\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega}$$

Последнее равенство представляет собой общую формулу Стокса.
Стокс Джордж Габриэль (Stokes George Gabriel) 13.8.1819 - 1.2.1903. английский физик и математик. Окончил Кембриджский университет (1841), с 1849 г профессор этого университета. Основные труды по физике. В математике одновременно с Зейделем ввел (1848) понятие равномерной сходимости последовательности и функционального ряда. Вывел в 1854 году одну из важнейших формул векторного анализа