

Деформационный ретракт

Промежуточное положение между гомеоморфизмом и ретракцией занимает отображение, называемое деформационной ретракцией.

Определение *Подпространство A топологического пространства X называется деформационным ретрактом X , если существует ретракция $r: X \rightarrow A$, гомотопная тождественному отображению I_x . Отображение r при этом называют деформационной ретракцией.*

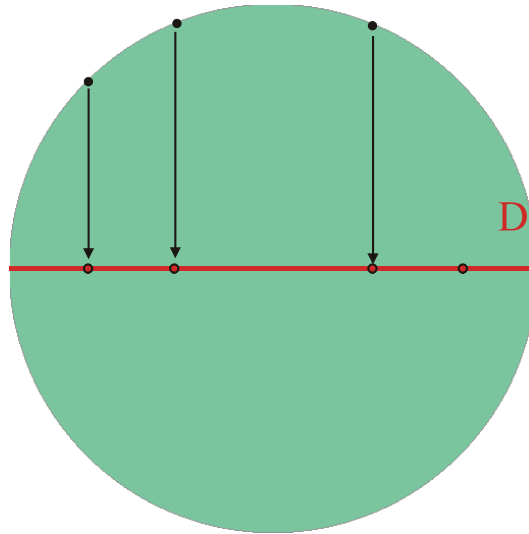
Таким образом, если подпространство A - деформационный ретракт пространства X , то существует такая ретракция $r: X \rightarrow A$ и гомотопия $F: X \times I \rightarrow X$, что для любого $x \in X$

$$F(x,0) = x, \quad F(x,1) = r(x)$$

и $F(a,t) = a$ для произвольных $a \in A, t \in I$.

Пример

Диаметр D любого круга A , пространства \mathbf{R}^2 является его деформационным ретрактом. Ортогональное проектирование точек A на D является ретракцией $r: A \rightarrow D$, а гомотопией от I_A к r - семейство непрерывных отображений $F(x,t) = (1-t)x + ir(x)$, где $t \in [0;1], x \in A$.



Самое простое непустое топологическое пространство состоит из одной точки. Охарактеризуем гомотопический тип такого пространства.

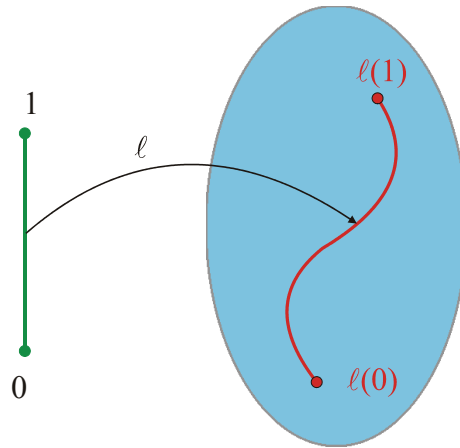
Топологическое пространство называется стягиваемым в точку, если существует такая точка $x_0 \in X$, что одноточечное множество $A = \{x_0\}$, является деформационным ретрактом X .

Теорема *Топологическое пространство стягиваемо в точку тогда и только тогда, когда оно гомотопически эквивалентно одноточечному множеству, т.е. имеет гомотопический тип одноточечного множества.*

§14 Фундаментальная группа

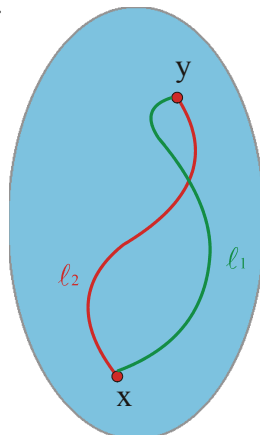
С помощью понятия фундаментальной группы, определяемого для любого топологического пространства в произвольной его точке многие топологические проблемы можно свести к чисто алгебраическим. Понятие фундаментальной группы было введено французским математиком А. Пуанкаре.

Определение Путь в топологическом пространстве называется непрерывное отображение $l:[0;1] \rightarrow X$. Путь $l:[0;1] \rightarrow X$ называется соединяющим точки x и y , если $l(0) = x$, $l(1) = y$. При этом точка x называется начальной, а y конечной точкой пути.



Определение Путь l_0 в пространстве X называется единичным или нулевым, если отображение $l_0:[0;1] \rightarrow X$ постоянно.

Определение Два пути $l_1:[0;1] \rightarrow X$ и $l_2:[0;1] \rightarrow X$ с общими началом и концом называются эквивалентными, если существует гомотопия от l_1 к l_2 не смещающая концов.



Следовательно, существует непрерывное отображение

$$F: [0;1] \times I \rightarrow X, \text{ что } F(s,0) = l_1(s), \quad F(s,1) = l_2(s)$$

для каждой точки $s \in [0;1]$ и, кроме того,

$$F(0,t) = l_1(0) = l_2(0); \quad F(1,t) = l_1(1) = l_2(1)$$

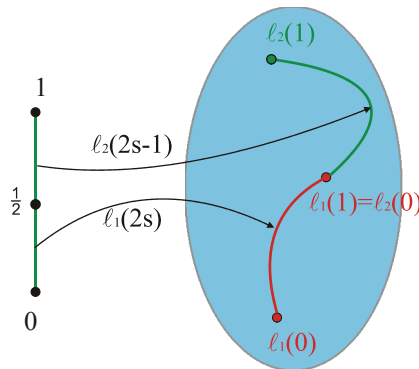
для каждой точки $t \in I$. Эквивалентные пути обозначаются $l_1 \sim l_2$

Введенное отношение является отношением эквивалентности.

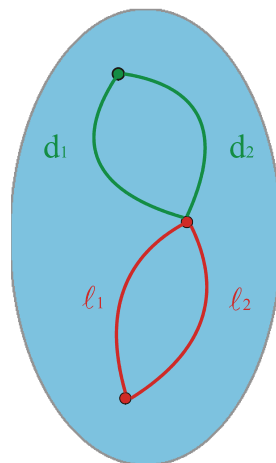
Если $l_1: [0;1] \rightarrow X$ и $l_2: [0;1] \rightarrow X$ два пути в X , причем начальная точка второго пути совпадает с конечной точкой первого, т.е. $l_1(1) = l_2(0)$ тогда

произведение путей $l_1 l_2$ определим следующим образом

$$(l_1 l_2)(s) = \begin{cases} l_1(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ l_2(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$



Теорема 1 Если, $d_1 \sim d_2$ и конечные точки путей l_1 и l_2 совпадают с начальными точками путей d_1 и d_2 соответственно (т.е. $l_1(1) = d_1(0)$ и $l_2(1) = d_2(0)$) то $l_1 d_1 \sim l_2 d_2$



▷ Обозначим через F_1 гомотопию от l_1 к l_2 , т.е.

$$F_1: I \times I \rightarrow X, \quad F_1(s,0) = l_1(s), \quad F_1(s,1) = l_2(s)$$

при всех $s \in I$. Кроме того,

$$F_1(0,t) = l_1(0) = l_2(0), \quad F_1(1,t) = l_1(1) = l_2(1)$$

Пусть F_2 гомотопия от d_1 к d_2 , т.е.

$$F_2: I \times I \rightarrow X, \quad F_2(s,0) = d_1(s), \quad F_2(s,1) = d_2(s)$$

при всех $s \in I$. Кроме того,

$$F_2(0,t) = d_1(0) = d_2(0), \quad F_2(1,t) = d_1(1) = d_2(1).$$

Найдем произведение путей

$$(l_1 d_1)(s) = \begin{cases} l_1(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ d_1(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

$$(l_2 d_2)(s) = \begin{cases} l_2(2s), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ d_2(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

Эти пути имеют общие начало и конец. Гомотопию от $l_1 d_1$ к $l_2 d_2$ определим следующим образом:

$$F(s,t) = \begin{cases} F_1(2s,t), & s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ F_2(2s-1,t), & s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \quad t \in I \end{cases}$$

Отображение $F(s,t)$ непрерывно (непрерывна каждая из компонент и при $s = \frac{1}{2}$ $F_1(1,t) = F_2(0,t)$). Кроме того

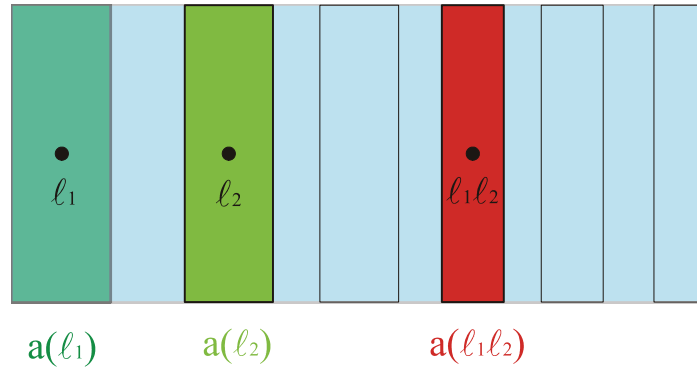
$$\begin{aligned} F(s,0) &= (l_1 d_1)(s), \quad F(s,1) = (l_2 d_2)(s), \quad s \in I; \\ F(0,t) &= F_1(0,t), \quad F(1,t) = F_2(1,t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Множество всех путей, заданных в топологическом пространстве, не образует группу относительно операции умножения. Это связано с тем, что операция умножения не всегда возможно (начало второго сомножителя должно совпадать с концом первого), кроме того, операция умножения путей не ассоциативна.

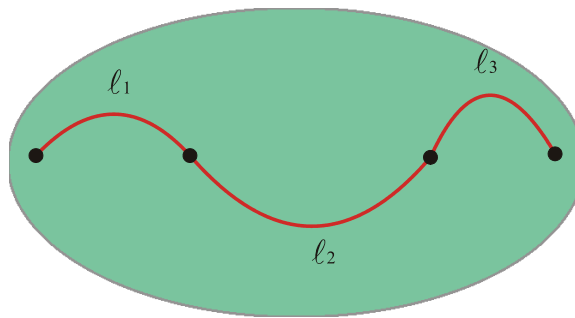
Возможен другой подход к построению группы: рассмотрение классов эквивалентностей.

Пусть $a(l_1)$ и $a(l_2)$ два класса эквивалентности путей $l_1 \in a(l_1)$ и $l_2 \in a(l_2)$, то **произведением** классов эквивалентности $a(l_1)$ $a(l_2)$ называют класс эквивалентности, содержащий путь $l_1 l_2$.



Предыдущая теорема показывает, что введенное определение корректно.

Теорема 2 Произведение классов эквивалентности путей ассоциативно.



Пусть l_1, l_2, l_3 – такие пути в топологическом пространстве X , что конечная точка пути l_1 совпадает с начальной точкой пути l_2 , а конечная точка этого пути совпадает с начальной точкой пути l_3 .

Для доказательства теоремы надо показать, что $(l_1 l_2) l_3 \sim l_1 (l_2 l_3)$

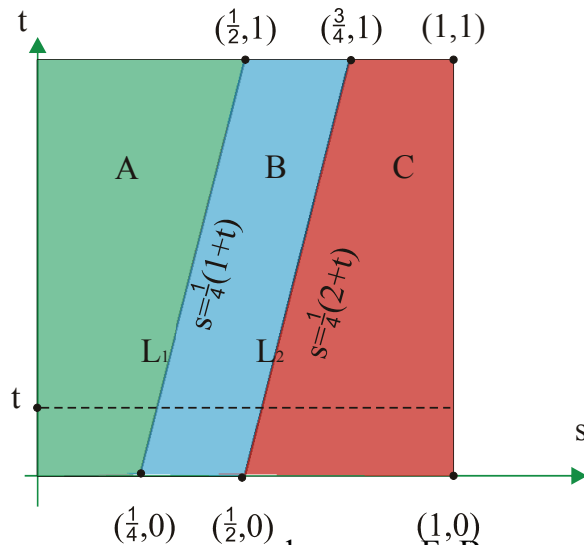
По определению произведения путей:

$$\begin{aligned}
 (l_1 l_2) l_3 &= \begin{cases} (l_1 l_2)(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ l_3(2s-1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} l_1(4s), s \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \\ l_2(4s-1), s \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]; \\ l_3(2s-1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} \\
 l_1(l_2 l_3) &= \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ (l_2 l_3)(2s-1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ l_2(4s-2), s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]; \\ l_3(4s-3), s \in \left[\frac{3}{4}; 1\right] \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой в формулы можно убедиться, что пути $(l_1 l_2) l_3$ и $l_1(l_2 l_3)$ имеют общие начало и конец.

Разобьем прямоугольник $I \times I$ на части А, В, С. Сделаем это с помощью прямых $s = \frac{1}{4}(1+t)$ и $s = \frac{1}{4}(2+t)$.



Перейдем к построению функции F . В точках множества А она будет принимать значения $l_1\left(\frac{4s}{1+t}\right)$. Аргумент выбран так, чтобы во всех точках прямой $s = \frac{1}{4}(1+t)$ он принимал значение 1. В точках множества В функция F принимает значения $l_2(4s-1-t)$ (аргумент равен 0 в точках прямой L_1 и единице на прямой L_2). В точках множества С $F = l_3\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right)$ (аргумент равен 0 на прямой L_2 и единице на прямой $s=1$). Суммируя сказанное выше

$$F(s, t) = \begin{cases} l_1\left(\frac{4s}{1+t}\right), s \in \left[0; \frac{1}{4}(1+t)\right], \\ l_2(4s-1-t), s \in \left[\frac{1}{4}(1+t), \frac{1}{4}(2+t)\right], \\ l_3\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), s \in \left[\frac{1}{4}(1+t), 1\right]. \end{cases}$$

Для всех аргументов отображение F непрерывно как сложная функция, состыкованная на границах. Кроме того,

$$F(s,0) = \begin{cases} l_1(4s), s \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \\ l_2(4s-1), s \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \\ l_3(2s-1), s \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

$$F(s,1) = \begin{cases} l_1(2s), s \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ l_2(4s-2), s \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \\ l_3(4s-3), s \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]. \end{cases}$$

Таким образом, найдена гомотопия, не смещающая концов путей, следовательно

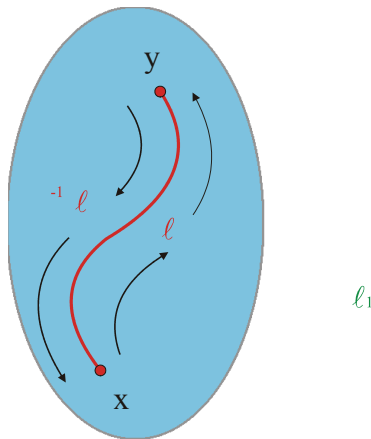
$$(l_1 l_2) l_3 \sim l_1 (l_2 l_3).$$

Теорема доказана.

Обозначим для произвольной точки x пространства X через e_x класс эквивалентности нулевого пути в этой точке, т.е. совокупность всех путей, гомотопных нулевому пути $l_0: I \rightarrow X$, для которого $l_0(I) = \{x\}$.

Теорема 3 Если α - класс эквивалентности путей с начальной точкой x и конечной точкой y , то $e_x \alpha = \alpha$ и $\alpha e_y = \alpha$.

Для произвольного пути $l: I \rightarrow X$ обратным к нему называется путь $l^{-1}(s) = l(1-s)$. Если x - начальная точка пути l , а y - конечная, т.е. $l(0) = x$, $l(1) = y$, то $l^{-1}(0) = l(1) = y$ и $l^{-1}(1) = l(0) = x$.



Теорема 4 Если α и α^{-1} - классы эквивалентности путей l и l^{-1} , то $\alpha \alpha^{-1} = e_x$ и $\alpha^{-1} \alpha = e_y$, где x - начальная точка пути l , а y - конечная.

Определение фундаментальной группы. Односвязные пространства.

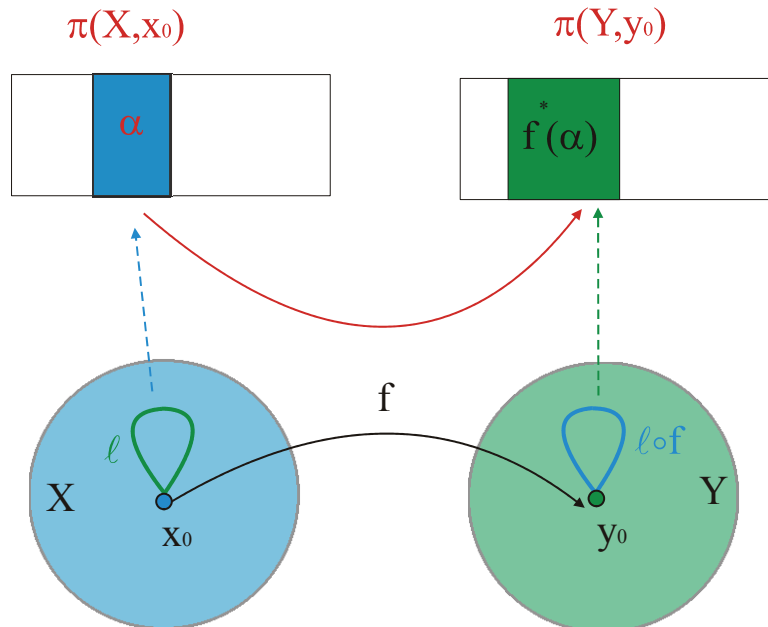
Будем рассматривать частный случай путей, когда начало и конец пути совпадают. Такой путь называется петлей. Если начало и конец пути находятся в точке x_0 , то говорят о петле в этой точке. Для любых двух петель в точке x_0 определено их произведение. К одному классу эквивалентности относятся все петли в точке x_0 , эквивалентные между собой.

Теоремы 1-4 позволяют на множестве классов эквивалентности петель в точке x_0 ввести структуру группы.

Пусть x_0 - произвольная точка топологического пространства. Множество всех классов эквивалентности петель образуют группу относительно операции умножения классов эквивалентности. Эту группу называют фундаментальной группой или Группой Пуанкаре.

Обозначается фундаментальная группа как $\pi(X, x_0)$.

Теорема 5 *Если топологическое пространство X линейно связно, то для любых двух точек x_0 и x_1 группы $\pi(X, x_0)$ и $\pi(X, x_1)$ изоморфны.*



Пусть X и Y - топологические пространства и отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда каждой петле $l: I \rightarrow X$ в точке $x_0 \in X$ ставится в соответствие петля $f \circ l: I \rightarrow Y$ в точке $y_0 = f(x_0)$.

Если петли $l_1: I \rightarrow X$ и $l_2: I \rightarrow X$, то гомотопны петли $f \circ l_1$ и $f \circ l_2$ в Y . Обозначим через α класс петель, к которому принадлежат l_1 и l_2 , а через $f^*(\alpha)$ класс путей в Y , в который входят пути $f \circ l_1$ и $f \circ l_2$. Очевидно этот класс есть образ. Тем самым мы определили отображение $f^*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$

Отображение $f^*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$, сохраняющее групповую операцию называют индуцированным отображением (или индуцированным гомоморфизмом)

Определение *Линейно связное топологическое пространство называется односвязным, если его фундаментальная группа $\pi(X, x_0)$ для какой либо точки, а значит для любой точки x_0 тривиальна (т.е. состоит только из нейтрального элемента).*

Можно показать, что произвольное выпуклое множество пространства R^n , в частности, само пространство R^n односвязно.

Можно показать, что фундаментальная группа сферы S^2 пространства R^3 (а также S^n в пространстве R^{n+1}) тривиальна.

Имеет место следующая