Пусть $g{:}U \to R^m$, где U - открытое множество пространства R^n. Тогда для произвольной точки $\mathrm{M}\left(x_1, x_2, ...x_n\right) \in U$ можно записать ее образ $g(M) = \left(g^1(M), g^2(M), ..., g^m(M)\right)$ т.е.

$$g^1(M) = g^1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$
$$g^2(M) = g^2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g^m(M) = g^m\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Отображение $g{:}U \to R^m$ называется <u>дифференцируемым класса</u> C^r если для каждой функции $g^k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ существуют непрерывные частные производные до порядка *r* включительно.

<u>Рангом</u> C^r отображения называется ранг его якобиевой матрицы.

Отображение $g{:}U \to V$ открытого множества $U \subset R^n$ на открытое множество $V \subset R^m$ называется <u>диффеоморфизмом</u> <u>класса</u> C^r, если отображения g и g^{-1} принадлежат классу C^r. Диффеоморфизмом класса C^0 очевидно является гомеоморфизм.

Понятие дифференцируемого многообразия

Рассмотрим многообразие M^n с атласом $A = \left\{\left(u_\alpha, \varphi_\alpha\right)\right\}$. Карты $\left(u_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ и $\left(u_\beta, \varphi_\beta\right)$ называются C^r <u>согласованными</u> если выполнено одно из следующих двух условий:

1. $u_\alpha \cap u_\beta = \varnothing$;
2. $u_\alpha \cap u_\beta \neq \varnothing$ а гомеоморфизм $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ есть диффеоморфизм класса C^r.

Атлас $A = \left\{\left(u_\alpha, \varphi_\alpha\right)\right\}$ многообразия M^n называют <u>атласом класса</u> C^r если две его любые карты C^r согласованы.

На множестве C^r атласов введем отношение эквивалентности: два C^r атласа будем называть эквивалентными, если их объединение также является C^r атласом.

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество C^r атласов многообразия M^{n} на непересекающиеся классы. Класс эквивалентности <u>называют дифференцируемой структурой класса</u> C^r.

<u>**Дифференцируемым многообразием класса $\mathbf{C}^{\mathbf{r}}$ называется $\mathbf{M}^{\mathbf{n}}$ многообразие на котором задана дифференцируемая структура класса $\mathbf{C}^{\mathbf{r}}$.**</u>

§13 Гомотопные отображения

Рассмотрим понятие гомотопии отображений, которое является обобщением физического процесса непрерывной деформации и было введено голландским математиком Л. Брауэром.

Прежде всего заметим, что произвольное семейство отображений $\{f_t, t \in T\}$ (здесь T - индексное множество) множества X в множество Y порождает отображение F декартова произведения $X \times T \to Y$, что $F(x,t) = f_t(x)$.

Пусть X, T, Y - топологические пространства. Семейство непрерывных отображений $\{f_t : X \to Y, t \in T\}$ называется <u>непрерывным,</u> если непрерывно отображение $F: X \times T \to Y$.

В дальнейшем мы будем рассматривать в качестве индексного множества единичный отрезок $I = [0;1]$.

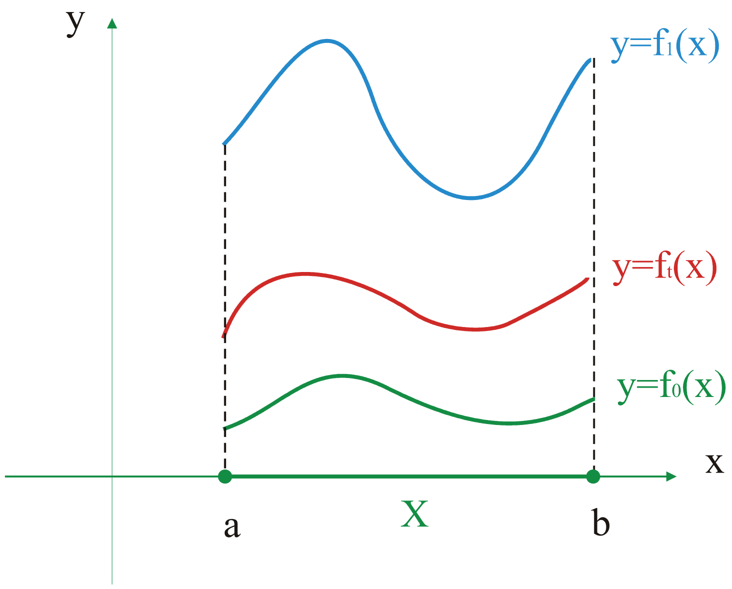
Определение: *Два непрерывных отображения топологического пространства X в топологическое пространство Y называются <u>гомотопными</u> если, если существует такое непрерывное отображение* $F: X \times I \to Y$ *,что*

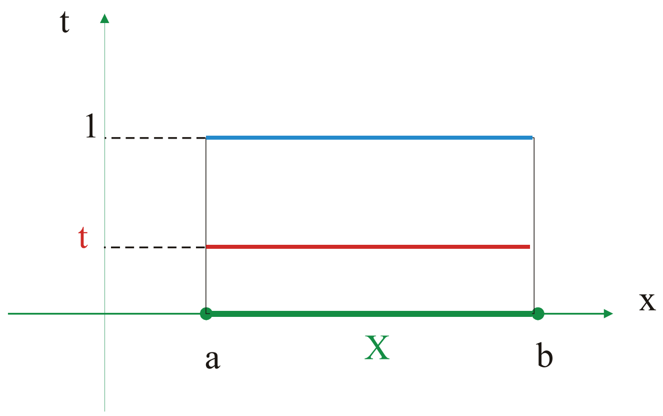
$$F(x,0) = f_0(x), \quad F(x,1) = f_1(x)$$

для всех $x \in X$*. При этом отображение F называется <u>гомотопией от</u>* f_0 *к* f_1.

Если отображения f_0 и f_1 гомотопны то пишут $f_0 \cong f_1$

На основании определений гомотопией от f_0 к f_1 можно считать непрерывное семейство отображений $f_t : X \to Y$, где $t \in I$. Если считать t – время, то в момент времени t=0 имеем отображение f_0, далее на отрезке [0;1] непрерывно меняется отображение f_t. В момент времени t=1 получаем отображение f_1 . Поэтому гомотопию часто называют <u>*непрерывной деформацией отображений.*</u>





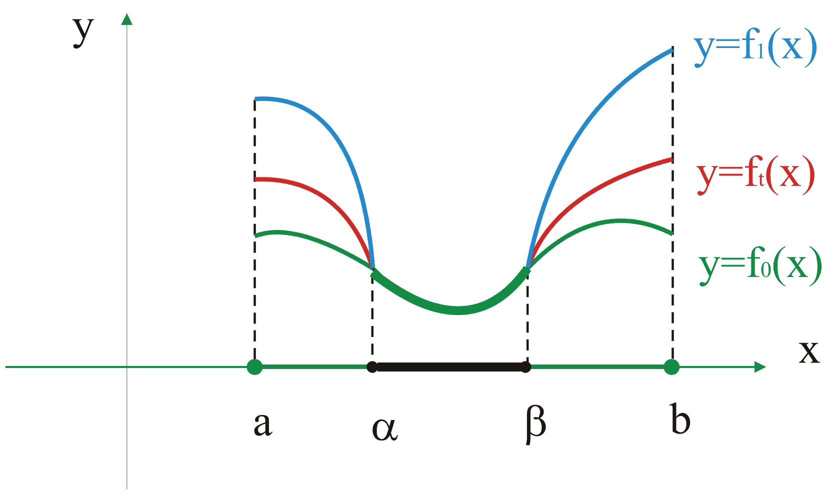
Определение: *Гомотопию F непрерывного отображения $f_0 : X \to Y$ к непрерывному отображению $f_1 : X \to Y$ называют* <u>*связанной множеством*</u> *$A \subset Y$, если кроме условий $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$, выполняются дополнительные условия*

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a)$$

для всех $a \in A$ и всех $t \in T$.

Гомотопию относительно множества А обозначают

$$f_0 \cong f_1 \quad relA.$$



Имеет место следующая

Теорема: *Гомотопия отображений есть отношение эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений одного топологического пространства в другое.*

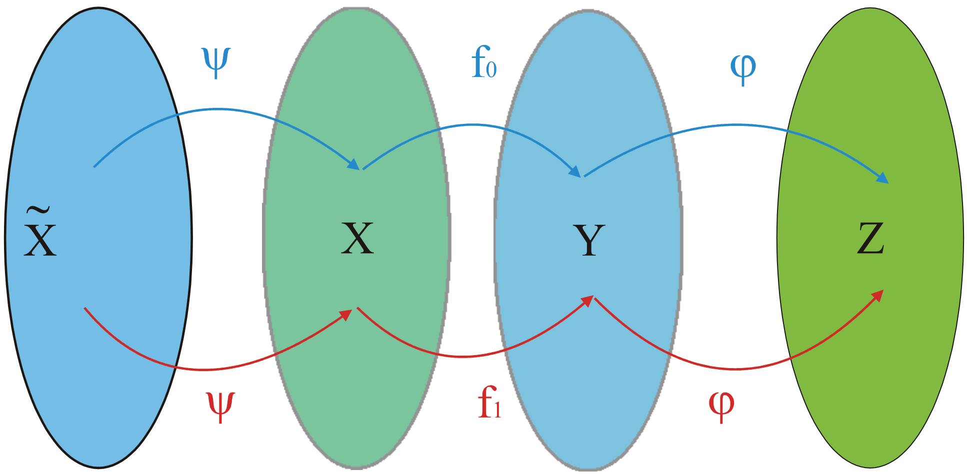
▹ 1. Рефлексивность. Если $f : X \to Y$ непрерывно, то положим $F(x,t) = f(x)$ для всех $t \in [0;1]$, $x \in X$. Получим гомотопию от f к f. Следовательно $f \cong f$.

2. Симметричность. Если $f_0 \cong f_1$ то существует гомотопия $F(x,t)$ положим $\Phi(x,t) = F(x,1-t)$, осуществляющую гомотопию от f_1 к f_0.
3. Транзитивность. Если $f_0 \cong f_1$, а $f_1 \cong f_2$. Докажем, что $f_0 \cong f_2$. Пусть F гомотопия от f_0 к f_1, Φ гомотопия от f_1 к f_2, тогда непрерывное отображение $\Psi: X \times I \to Y$, определяемое формулой

$$\Psi = \begin{cases} F(x,2t) & t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right], \\ \Phi(x,2t-1) & t \in \left[\dfrac{1}{2};1\right] \end{cases}$$

является гомотопией от f_0 к f_2. $\triangleleft$

Обозначим через $H(X,Y)$ – множество всех непрерывных отображений топологического пространства X в пространство Y. На основании предыдущей теоремы, можно утверждать, что это множество разбивается на непересекающиеся классы гомотопных между собой отображений. Эти классы эквивалентности называются <u>гомотопическими классами.</u> Множество гомотопических классов отображений X в Y обозначим $\pi(X,Y)$.



Теорема *Если отображения $f_0: X \to Y$ и $f_1: X \to Y$ гомотопны, то:*
1. Для любого непрерывного отображения $\varphi: Y \to Z$ отображения $\varphi \circ f_0: X \to Z$ и $\varphi \circ f_1: X \to Z$ гомотопны;
2. Для любого непрерывного отображения $\psi: \hat{X} \to X$ гомотопны отображения $f_0 \circ \psi: \hat{X} \to Y$ и $f_1 \circ \psi: \hat{X} \to Y$.

Определение *Топологические пространства X и Y называются <u>гомотопически</u> <u>эквивалентными</u> если существуют такие непрерывные отображения $f: X \to Y$ и $\varphi: Y \to X$, что композиция $\varphi \circ f: X \to X$ гомотопна тождественному на X отображению, а композиция $f \circ \varphi: Y \to Y$ гомотопна тождественному не Y отображению.*

Гомотопически эквивалентные пространства называют <u>пространствами одного и того же гомотопического типа.</u>

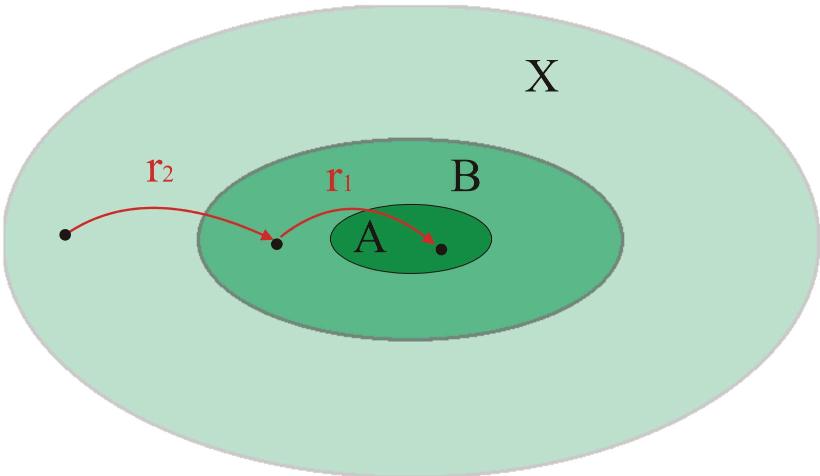
Если топологические пространства гомеоморфны, то они имеют один и тот же гомотопический тип. Обратное не всегда верно.

Ретракция и ретракт.

Одной из важных задач топологии является выяснение вопроса о возможности непрерывного продолжения некоторого отображения, заданного на подпространстве, на все пространство. Прояснит этот вопрос помогают следующие понятия.

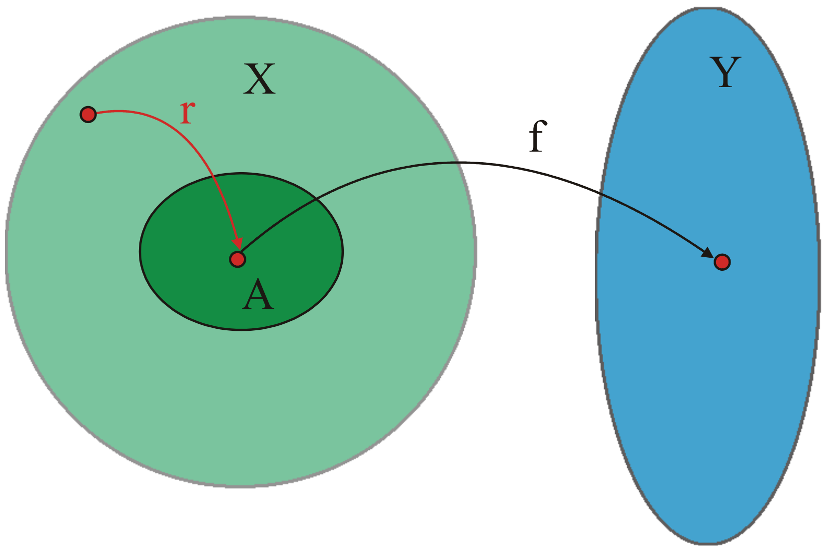
Определение *Подпространство A топологического пространства X называется <u>ретрактом</u> этого пространства, если существует такое непрерывное отображение* ***r*** *пространства X на A, что r(a)=a для каждой точки a∈A. Отображение* $r{:}X \to Y$ *называют <u>ретракцией.</u>*

Теорема *свойство быть ретрактом транзитивно, т.е. ретракт ретракта есть ретракт.*



$\triangleright$ Пусть A и B - подпространства топологического пространства X, $A \subset B$, $r_1{:}B \to A$ - ретракция B на A, $r_2{:}X \to B$ ретракция X на B. Рассмотрим композицию отображений $r = r_1 \circ r_2$. Найдем $r(a)$, где $a \in A$. $r(a) = r_1(r_2(a)) = r_1(a) = a$. Следовательно r есть ретракт X на A. $\triangleleft$

Теорема *Подмножество A топологического пространства X тогда и только тогда является его ретрактом, когда любое непрерывное отображение* $f{:}A \to Y$*, где Y некоторое топологическое пространство, может быть непрерывно продолжено на все пространство X.*



Необходимость.

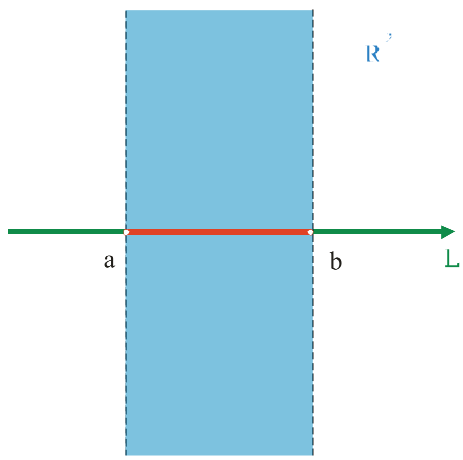
Пусть A - ретракт пространства X и $r: X \to A$ ретракция. Тогда композиция $r \circ f$ отображает X в Y и непрерывна.

Достаточность.

Если любое непрерывное отображение $f: A \to Y$ можно непрерывно продолжить на все пространство X, то для тождественного отображения $I_A: A \to A$ существует его непрерывное продолжение r на A. Отображение $r: X \to A$ есть ретракция пространства X на A. $\triangleleft$

Примеры:

1. Каждая прямая L пространства $\mathbf{R}^2$ является его ретрактом. Здесь ретракцией является ортогональное проектирование $\mathbf{R}^2$ на L. Это отображение непрерывно т.к. при проектировании прообраз открытого множества открыт.



2. Любой замкнутый круг A в пространстве $\mathbf{R}^2$ является его ретрактом. Ретракцией $r: R^2 \to A$ будет отображение, оставляющее на месте все точки A и переводящее любую точку $\mathbf{R}^2$ в точку на границе A, с помощью

центрального проектирования. Очевидно, что все точки окружности переходят сами в себя.