§14. Компактные топологические пространства

Известно, что многие факты математического анализа основаны на одном свойстве отрезка числовой прямой, которое называется леммой Гейне - Бореля -Лебега и заключается в том, что из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Борель Феликс Эдуард Жустен Эмиль (Borel Félix Ĕdouard Justin 1871-1956) - французский математик. Создатель нескольких отраслей современного математического анализа (понятие расширяющихся рядов, меры множества, расширение понятия аналитической функции, диофантовы приближения).

Лебег Анри Леон – (1896-1931) – французский математик, с 1910 г. профессор Парижского университета, один из основателей современной теории функций действительного переменного. Главная заслуга – создание теории меры, понятия измеримой функции и обобщение понятия интеграла (интеграл Лебега).

Обобщение этого факта привело отечественных математиков П.С. Александрова и П.С. Урысона к выделению класса топологических пространств - *компактным (бикомпактным)* топологическим пространствам.

<u>Определение</u> Система множеств $M=\{M_\alpha, \alpha \in I\}$, $M_\alpha \subset X$ *называется* ***покрытием*** *пространства X, если* $\bigcup_\alpha M_\alpha = X$. *Покрытие называется* ***открытым*** *(замкнутым), если все множества* M_α *открыты (замкнуты).*

Подсистема системы множеств M, сама являющаяся покрытием пространства X называется ***подпокрытием*** *покрытия M.*

<u>Определение</u> Топологическое пространство X называется ***компактным****, если оно удовлетворяет условию Бореля - Лебега: из всякого открытого покрытия пространства X, можно выделить конечное подпокрытие.*

<u>Теорема</u> Для компактности топологического пространства X необходимо и достаточно, чтобы любое его семейство замкнутых подмножеств с пустым пересечением содержало конечное подсемейство с пустым пересечением

$\triangleright$ Необходимость. Пусть X - компактно и $\{F_\alpha\}$ - произвольная совокупность замкнутых множеств, причем пересечение $\bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing$. Рассмотрим семейство множеств $G = \{G_\alpha\}$, состоящее из дополнений замкнутых множеств $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$. Воспользуемся формулами де Моргана: $\bigcup_\alpha G_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \bigcap_\alpha F_\alpha = X$, т.е. система множеств G образует открытое покрытие X. В силу компактности X из покрытия G можно выделить конечную систему множеств $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$, также являющуюся покрытием. Тогда $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus G_k) = X \setminus \bigcup_{k=`}^{n} G_k = X \setminus X = \varnothing$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G = \{G_\alpha\}$ - произвольное открытое покрытие пространства X. тогда система множеств $\{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\}$ представляет собой семейство замкнутых множеств с пустым пересечением, которое по условию теоремы содержит конечное подсемейство также с пустым пересечением. С точностью до обозначения, будем считать, что это множества $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ и $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$. Отсюда, по аналогии с первой частью теоремы, следует, что множества $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$ образуют конечное подпокрытие. $\triangleleft$

*<u>Определение</u> Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется **центрированной,** если любое конечное пересечение этой системы не пусто.*

<u>Теорема</u> Для компактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых множеств имела непустое пересечение.

$\triangleright$ Необходимость. Пусть $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых множеств топологического пространства X. Тогда эта система должна иметь непустое пересечение, потому что в противном случае она содержала бы конечную подсистему с пустым пересечением, что противоречило бы центрированности системы $\{F_\alpha\}$.

Достаточность. Пусть $\{F_\alpha\}$-произвольное семейство замкнутых множеств топологического пространства X с пустым пересечением. Тогда оно должно содержать конечную подсистему с пустым пересечением, так как в противном случае семейство $\{F_\alpha\}$ было бы центрированным и имело, по условию непустое пересечение. Таким образом, мы получили, что любое семейство замкнутых множеств с пустым пересечением топологического пространства X содержит конечную подсистему множеств с пустым пересечением, значит пространство X - компактно. $\triangleleft$

Компактность и замкнутость

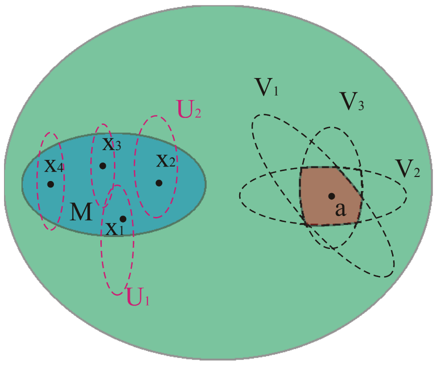
<u>*Определение*</u> *Подмножество $M \subset X$* ***компактным подмножеством****, если подпространство M (т.е. множество M с индуцированной топологией) представляет собой компактное пространство. Подмножество M называется* ***относительно компактным****, если компактно его замыкание.*

<u>*Теорема*</u> *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

▹ Пусть множество F замкнуто и содержится в компактном топологическом пространстве и $\{F_\alpha\}$ - произвольная центрированная система замкнутых в M множеств. Так как M замкнуто, то и в X эта система будет центрированной системой замкнутых множеств, в силу компактности объемлющего пространства $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \varnothing$ откуда следует компактность M. ◃

<u>*Теорема*</u> *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

▹ Пусть F - произвольное компактное подмножество хаудорфова пространства X. Возьмем произвольную точку $a \in X \setminus M$. Воспользуемся хаусдорфовостью пространства X: для точки a и произвольной точки $x \in X$ найдутся непересекающиеся окрестности $a \in V_x$ и $x \in U_x$. Совокупность всех множеств $\{U_x\}$ образует покрытие пространства X. В силу его компактности выделим конечное подпокрытие $\{U_{x1}, U_{x2}, ..., U_{xn}\}$. Этим окрестностям соответствуют следующие окрестности точки a: $\{V_{x1}, V_{x2}, ..., V_{xn}\}$. Пересечение этих окрестностей $\bigcap_{i=1}^{n} V_{xi} = V_0$ содержит точку a. Очевидно, что $V_0 \bigcap M = \varnothing$. Это означает, что точка a не является точкой прикосновения множества M, следовательно множество M содержит все свои точки прикосновения, а значит замкнуто. ◃



<u>*Теорема*</u> (О нормальности компакта) *Всякий компакт представляет собой нормальное множество.*

(Компакт - хаудорфово и компактное пространство). Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

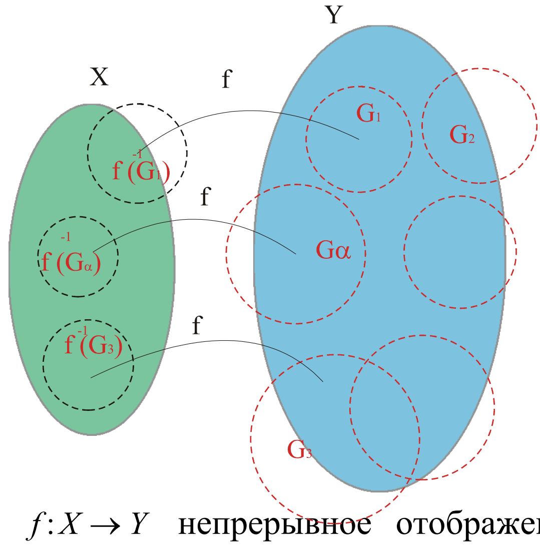
Определение (П.С. Александров) *Точка x_0 пространства X называется* ***точкой полного накопления множества М,*** *если для любой окрестности U этой точки множества M и $M \cap U$ равномощны.*

Теорема (П.С. Александров) *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое его бесконечное подмножество содержит хотя бы одну точку полного накопления.*

Данное утверждение примем без доказательства.

Непрерывные отображения компактных пространств

Теорема *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*



$\triangleright$ Пусть $f: X \to Y$ непрерывное отображение компактного пространства X на произвольное топологическое пространство Y и система множеств $G = \{G_\alpha\}$ является некоторым отрытым покрытием пространства Y. Рассмотрим систему множеств $U = f^{-1}(G_\alpha)$. В силу непрерывности отображения f эта все множества последней системы открыты. Очевидно, что система U образует покрытие пространства X. В силу компактности пространства X покрытие U содержит конечное подпокрытие $\widetilde{U}$, а образы множеств, входящих в $\widetilde{U}$, образуют подпокрытие, покрытия G, что означает компактность пространства Y. $\triangleleft$

Замечание Из теоремы следует, что образ компактного подмножества - есть компактное множество.

Теорема *Непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство есть отображение замкнутое.*

$\triangleright$ Пусть F произвольное замкнутое подмножество компактного пространства X, следовательно F само является компактным множеством.

В силу предыдущей теоремы и замечания образ этого множества т.е. $B = f(F)$ компактен, компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто. Следовательно, при непрерывном отображении f образ замкнутого множества - замкнут, значит отображение f замкнуто.

Теорема *Непрерывное, взаимно- однозначное отображение f компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y является гомеоморфизмом.*

$\triangleright$ Обозначим через $g: Y \to X$ отображение, обратное к f, а F - произвольное замкнутое подмножество пространства X. Тогда $g^{-1}(F) = f(F)$. Так как отображение f замкнуто, то и $g^{-1}(F)$ замкнуто. Следовательно, при отображении g прообраз замкнутого отображения замкнут, что означает непрерывность обратного к f отображения и, следовательно, отображение f является гомеоморфизмом. $\triangleleft$

Теорема (Обобщение теорем Вейерштрасса) *Пусть A- компактное подмножество топологического пространства X, а f непрерывная на A вещественная функция, тогда f ограничена и достигает своей точной верхней и нижней граней.*

$\triangleright$ Пусть выполнены условия теоремы. В данном случае функция - это непрерывное отображение множества A в пространство $\mathbf{R}^1$, образ компактного множества при непрерывном отображении компактен. Следовательно множество $f(A)$ компактно. Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто, следовательно, $f(A)$ является замкнутым ограниченным множеством на числовой прямой откуда и следует утверждение теоремы $\triangleleft$.

§13 Дифференцируемые многообразия

В евклидовых, аффинных и проективных пространствах, благодаря наличию систем координат можно широко применять аналитический аппарат. Проведем ряд рассуждений для топологических пространств, в которых систему координат можно построить в каждой точке.

Определение *Вещественным многообразием (или просто многообразием) называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, для каждой точки которой существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства $\boldsymbol{R}^n$. При этом натуральное число **n** называется размерностью многообразия.*

Пусть M^n -*n* мерное многообразие и B - его произвольная точка. Тогда существует окрестность u точки B, для которой найдется гомеоморфизм $\varphi: u \to v \subset R^n$. Эта конструкция позволяет ввести систему координат в u. Если в $\mathbf{R}^n$ задана система координат, то координаты точки $\varphi(B) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ можно считать координатами точки B. Они называются локальными координатами точки B. Гомеоморфизм φ называется локальным гомеоморфизмом, множество u - координатной окрестностью, пара (u,φ) -локальной картой.

Таким образом, локальная карта на M^n представляет собой локальную систему координат. Одна и таже точка многообразия M^n может принадлежать различным локальным картам, например (u_1,φ_1) и (u_2,φ_2). Пусть пресечение этих карт не является пустым множеством. Обозначим координаты точки $A \in u_1 \cap u_2$ в первой локальной карте $(x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^n)$ и $(x_2^1, x_2^2, x_2^3, ..., x_2^n)$ во второй. Тогда

$$\varphi_1(A) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^n), \quad \varphi_2(A) = (x_2^1, x_2^2, x_2^3, ..., x_2^n).$$

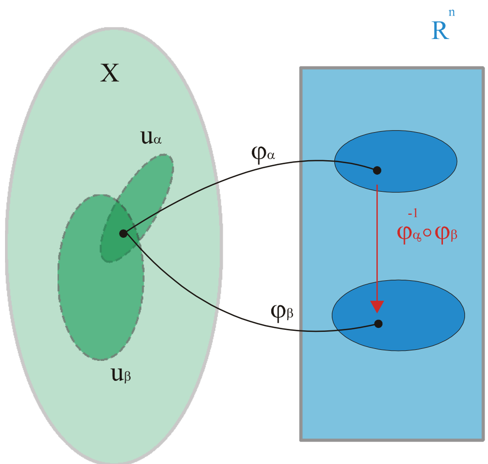
Рассмотрим гомеоморфизм

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(u_1 \cap u_2) \to \varphi_2(u_1 \cap u_2),$$

который определяет закон изменения координат и определяется совокупностью n непрерывных функций :

$$x_2^1 = x_2^1(x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^n),$$
$$x_2^2 = x_2^2(x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^n),$$
$$..................................$$
$$x_2^n = x_2^n(x_1^1, x_1^2, x_1^3, ..., x_1^n).$$

Эти функции называются функциями замены координат.



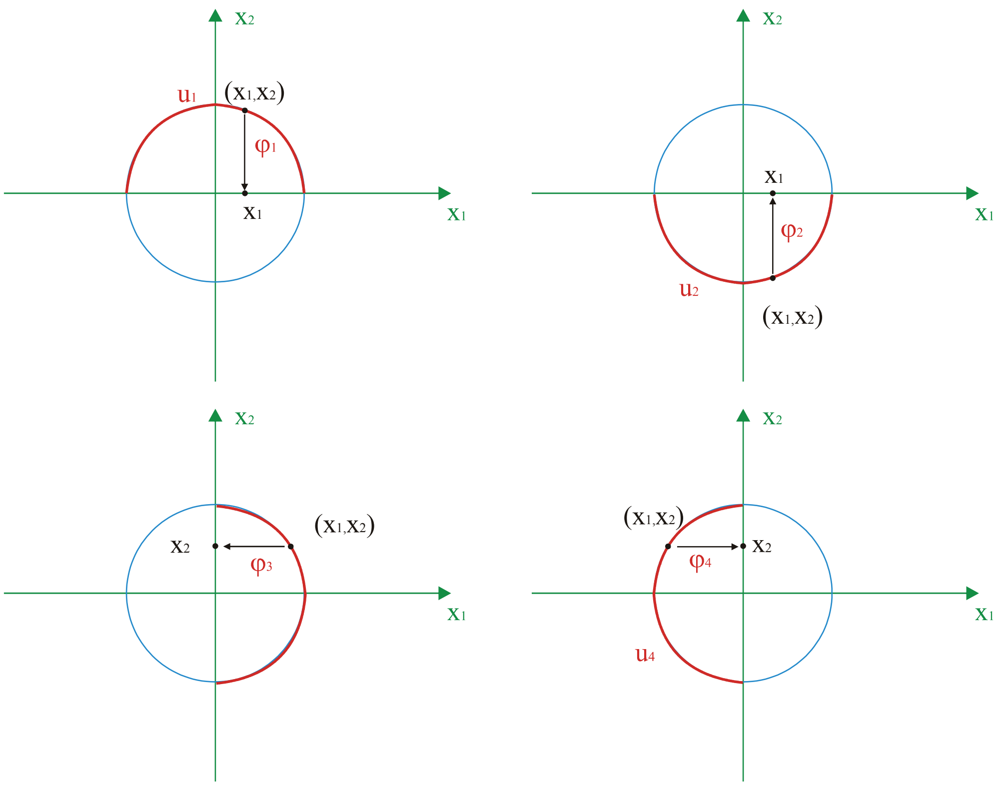
Семейство локальных карт $\{(u_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется атласом многообразия M^n. Очевидно, что совокупность всех координатных окрестностей образует покрытие многообразия M^n.

Примеры:

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ является n - мерным многообразием. Действительно, пространство R^n является хаусдорфовым пространством со счетной базой. В качестве атласа можно взять атлас состоящий из одной карты: (R^n, I), где I - тождественное отображение.

2. Рассмотрим единичную окружность, которую принято обозначать S^1. $S^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Пространство S^1, как подпространство пространства R^2, является хаусдорфовым и удовлетворяет второй аксиоме счетности. Выберем следующие четыре карты:

- Карта (u_1, φ_1): $u_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 > 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_1 действует по закону $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1$.
- Карта (u_2, φ_2): $u_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 < 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_2 действует по закону $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1$.
- Карта (u_3, φ_3): $u_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 > 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_3 действует по закону $\varphi_3(x_1, x_2) = x_2$.
- Карта (u_4, φ_4): $u_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 < 0\}$, координатный гомеоморфизм φ_4 действует по закону $\varphi_4(x_1, x_2) = x_2$.



Множества u_i являются дуговыми интервалами, гомеоморфизмы можно рассматривать как ортогональные проектирования на ось OX или ось OY. Отображения φ_i^{-1} переводят интервал (-1;1) в соответствующие дуговые интервалы:

$$\varphi_1^{-1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right), \quad \varphi_2^{-1}(x) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$\varphi_3^{-1}(x) = \left(\sqrt{1-x^2}, x\right), \quad \varphi_4^{-1}(x) = \left(-\sqrt{1-x^2}, x\right).$$

Таким образом S^1 представляет собой одномерное многообразие

Возьмем некоторую произвольную точку A=$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$, которая принадлежит множествам u_1 и u_2. Относительно карты $\left(u_1,\varphi_1\right)$ эта точка имеет координату $\varphi_1\left(A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, относительно карты $\left(u_3,\varphi_3\right)$ координату $\varphi_3\left(A\right)=\frac{1}{2}$

Для всех пересечений можно найти законы преобразования координат.

Напомним несколько определений, касающихся дифференцируемых отображений в R^n .

Действительная функция $f:u\rightarrow R^1$ называется гладкой или дифференцируемой класса C^r, если на множестве u у неё существуют непрерывные частные производные до порядка r включительно.