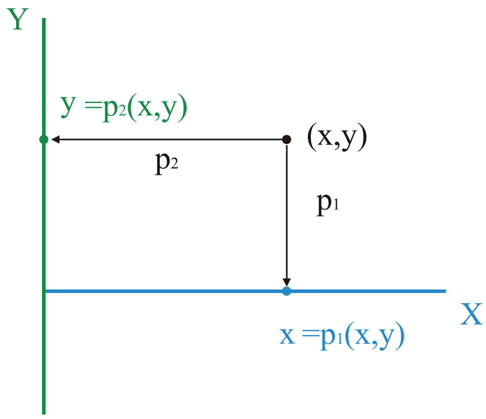
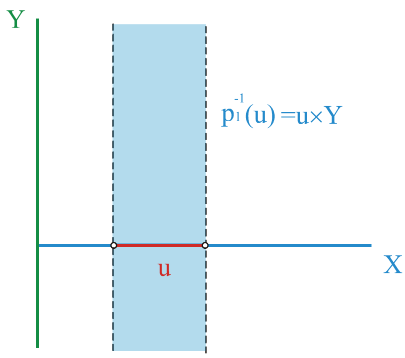
Произведением топологических пространств (X,τ) и (Y,σ) называется декартово произведение носителей топологии, наделенную топологией произведения.

Пусть X и Y топологические пространства и $X \times Y$ их произведение, то X и Y называются **координатными пространствами.** Отображения p_1: $X \times Y \to X$ и p_2: $X \times Y \to Y$ действующие по закону $p_1(x,y) = x \in X$, $p_2(x,y) = y \in Y$ называются проектированиями на координатные пространства.



<u>Теорема.</u> Для произвольных топологических пространств отображения проектирования их произведения на координатные пространства непрерывны и открыты.

▹ Пусть $(X \times Y, \mu)$ произведение топологических пространств и p_1: $X \times Y \to X$ и p_2: $X \times Y \to Y$ отображения проектирования. Докажем, что при отображении p_1 прообраз открытого множества открыт. Множество $p_1^{-1}(u) = u \times Y$ является произведением двух открытых множеств и, следовательно, открыто в $X \times Y$. Таким образом отображение p_1 непрерывно.



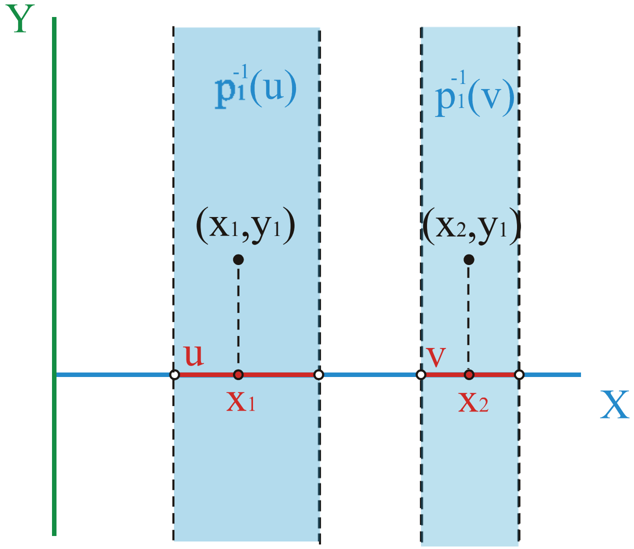
Докажем открытость отображения p_1. Найдем образ $p_1(u \times v)$, где $u \in \tau, v \in \delta$. По определению $p_1(u \times v) = u$ т.е. при непрерывном отображении образ открытого множества открыт, что означает открытость отображения p_1.

<u>Теорема.</u> Для произвольных топологических пространств (X,τ) и (Y,σ) *топология произведения является наименьшей среди тех топологий на декартовом произведении* $X \times Y$, *относительно которых проектирования на координатные пространства непрерывны.*

Данное утверждение примем без доказательства.

<u>Теорема.</u> Произведение хаусдорфовых пространств есть хаудорфово пространство. Произведение регулярных пространств регулярно.

Докажем первое утверждение теоремы.



Пусть топологические пространства X и Y - хаусдорховы. Возьмем две различные точки $a=(x_1,y_1)$ и $b=(x_2,y_2)$. Если точки различные, то, по крайней мере, они отличаются одной из компонент. Пусть $x_1 \neq x_2$. Воспользуемся тем. что пространство X хаусдорфово. Тогда точки x_1 и x_2 этого пространства можно отделить непересекающимися окрестностями u и v. Рассмотрим множества $p_1^{-1}(u)$ и $p_1^{-1}(v)$. Эти множества являются окрестностями (т.к. при непрерывном отображении прообраз окрестности- окрестность), они не пересекаются (т.к. $p_1^{-1}(u) \cap p_1^{-1}(v) = \varnothing$). Кроме того $a \in p_1^{-1}(u)$ $b \in p_1^{-1}(v)$. Следовательно, и пространство $X \times Y$ хаусдорфово.

Замечание

Можно доказать, что

- произведение сепарабельных пространств сепарабельно;
- произведение пространств Рисса, является просранством Рисса;
- произведение связных пространств связно;

Однако произведение нормальных пространств не всегда нормально.

Пусть $f_1: X_1 \to Y_1$, $f_2: X_2 \to Y_2$, где X_1, X_2, Y_1, Y_2 - топологические пространства. Отображение f произведения $X_1 \times X_2$ в произведение $Y_1 \times Y_2$,.действующее по закону $f((x_1,x_2)) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ называется **произведением отображений** f_1 и f_2. Обозначается $f = f_1 \times f_2$.

Фактор - топология

Известно, что при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт.

Поставим несколько иную задачу: пусть f отображает топологическое пространство (X,τ) в некоторое множество Y. Необходимо задать топологию на Y таким образом, что бы отображение f стало непрерывным. (Одно из решений вопроса - задание на Y тривиальной топологии). Имеет место следующая

<u>Лемма.</u> Если $f:X\to Y$ и τ - топология на X, то семейство μ подмножеств Y, прообразы которых при отображении f открыты в X образуют топологию на Y.

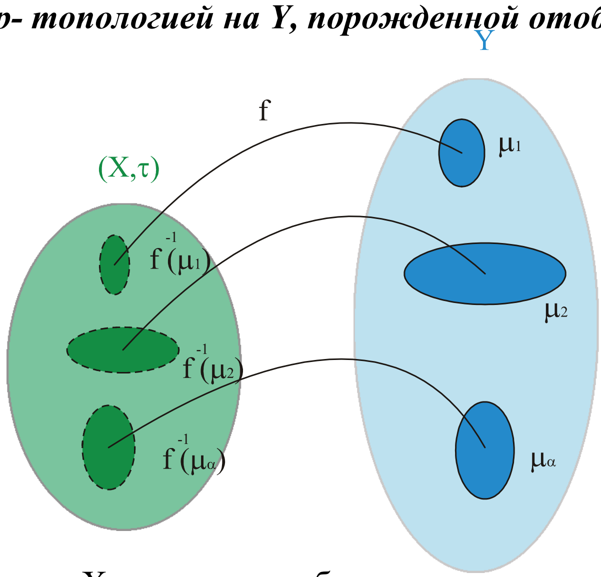
▹ Покажем выполнение аксиом топологического пространства:

$f^{-1}(\varnothing)=\varnothing, f^{-1}(Y)=X$, то $\varnothing, Y\in\mu$. Воспользуемся свойством прообразов: пусть $u_\alpha\in\mu\Rightarrow f^{-1}(u_\alpha)\in\tau$, тогда $f^{-1}\left(\bigcup\limits_\alpha u_\alpha\right)=\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(u_\alpha)\in\tau$

это означает, что $\bigcup\limits_\alpha u_\alpha\in\mu$. Аналогично доказывается выполнение третьей аксиомы топологического пространства. ◃

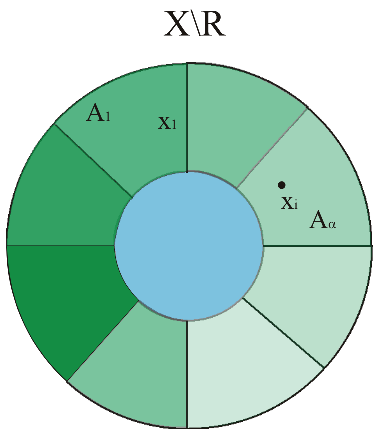
<u>Замечание</u> Можно показать, что топология μ - наибольшая среди тех топологий на Y, относительно которых отображение f непрерывно.

<u>Определение</u> *Семейство μ подмножеств Y, прообразы которых при отображении f топологического пространства X в множество Y открыты в X, называются **фактор- топологией на Y, порожденной отображением f.***



Определим на X, некоторым образом, отношение эквивалентности R. Рассмотрим фактор - множество X/R.

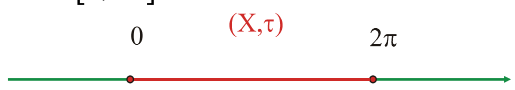
<u>Определение</u> *Отображение $p:X\to X/R$, ставящее в соответствие каждому элементу $x\in X$ класс эквивалентности, которому он принадлежит, называется **фактор - отображением** или **отображением отождествления.***

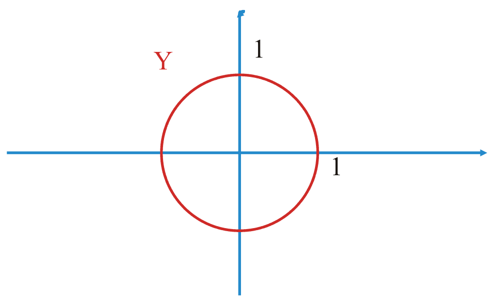


<u>Определение</u> Пусть X некоторое топологическое пространство, R - отношение эквивалентности в X, p- фактор отображение X на фактор- множество X/R. Фактор- множество X/R, наделенное фактор- топологией относительно отображения p называется ***фактор- пространством*** *пространства X по отношению эквивалентности R.*

<u>Примеры</u>

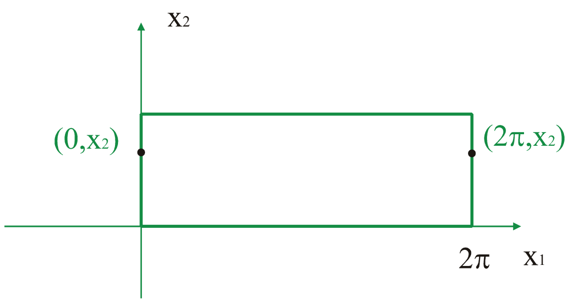
1. Рассмотрим топологическое пространство $X=[0;2\pi]$ с естественной топологией и множество $\mathrm{Y}=\{x,y\in R^2 : x^2+y^2=1\}$ точек единичной окружности с центром в начале координат. Отображение f можно определить формулой $f(t)=(\cos t,\sin t)$, где $t\in[0;2\pi]$.

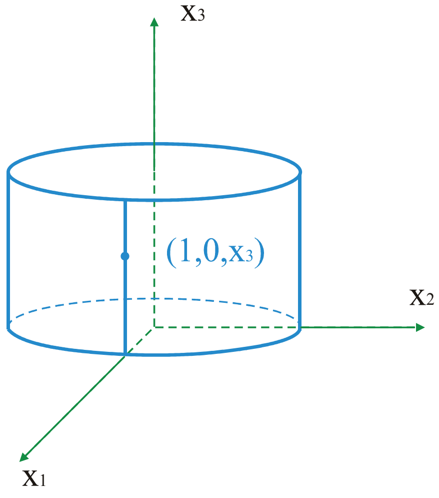




Фактор- топология на Y, порождаемая отображением f, совпадает с естественной топологией. Например множество точек окружности, лежащих между точками (0;-1) и (0;1) принадлежит фактор - топологии μ, так как прообразом этого множества является множество $\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ является открытым множеством в X.

Определим отношение эквивалентности:0 ~ 2π и для всех t $\in(0;2\pi)$ t ~ t. Получим один класс эквивалентности $\{0;2\pi\}$, состоящий из двух точек; остальные классы эквивалентности - одноточечные. Можно показать, что фактор пространство X/R гомеоморфно пространству Y. В этом случае говорят, что фактор пространство X/R получено из отрезка $[0;2\pi]$ путем отождествления его концов.





2. Аналогичный пример. Пусть X – прямоугольник

$$X=\{(x_1,x_2)\in R^2, x_1\in[0;2\pi], x_2\in[0;1]\}$$

с топологией, индуцированной R^2. Множество Y :

$$Y=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : x_1^2+x_2^2=1, x_3\in[0;1]\}$$

Т.е. поверхность цилиндра единичного радиуса и единичной высоты. Определим отображение:

$$f:X\to Y \quad f(x_1,x_2)=(\cos x_1,\cos x_2,x_3)$$

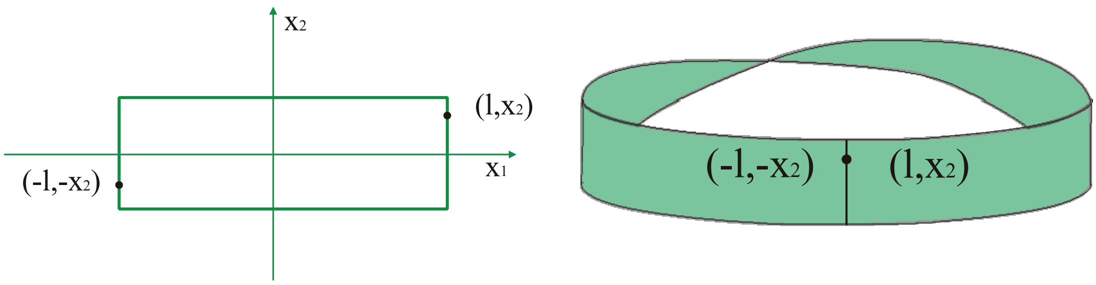
Фактор топология совпадает с естественной топологией. Определим отношение эквивалентности

$$(0;x_2)\sim(2\pi;x_2)$$

Все остальные точки эквивалентны сами себе. В результате получим фактор пространство (поверхность цилиндра) из прямоугольника путем склеивания его двух противоположных сторон.

3. ***Листом Мёбиуса*** называют поверхность, полученную прямоугольника поворотом одного из концов на 180° и склеиванием его противоположных концов. Определим математический лист Мёбиуса в терминах топологии.

$X=\{(x,y)\in R^2 : x\in[-l;l], y\in(-1;1)\}$. Это прямоугольник в пространстве R^2 с естественной топологией. Зададим на этом прямоугольнике отношение эквивалентности: (l,y) ~ $(-l,-y)$, если y∈(-1;1) и (x,y) ~ (x,y) для всех остальных точек. Таким образом мы получили фактор - пространство гомеоморфное листу Мёбиуса.

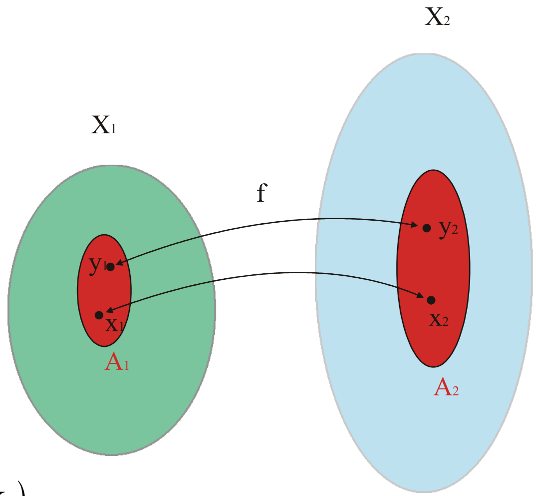


Топологическая сумма пространств. Склеивание пространств по непрерывному отображению.

Пусть (X_i,τ_i) набор топологических пространств (i=1,2,...n), носители топологии здесь не пересекаются. Обозначим $X=\bigcup_i^n X_i$ и τ семейство множеств из X, допускающих представление в виде $\bigcup_{i=1}^n u_i$, где $u_i\in\tau_i$. Тогда пара (X,τ) называется ***топологической суммой пространств*** (X_i,τ_i).

Пусть (X_1,τ_1) и (X_2,τ_2) - топологические пространства, причем $X_1\cap X_2=\varnothing$ и непрерывное отображение $f:A_1\to A_2$, где $A_1\subset X_1$, $A_2\subset X_2$. На множестве $X_1\cup X_2$ введем отношение эквивалентности:

если точка $y \in A_2$ то $y \sim f^{-1}(y)$; если точка не участвует в отображении, то она эквивалентна сама себе. Обозначим фактор - пространство $(X_1 \cup X_2)/R = X_1 \bigcup_f X_2$. Про топологическое пространство $X_1 \bigcup_f X_2$ говорят, что оно получено ***приклеиванием*** топологического пространства X_1 к топологическому пространству X_2 по непрерывному отображению f.



Если $(X_1 \cup X_2)$ топологическая сумма пространств, $A_1 = \{x_1\}$, $A_2 = \{x_2\}$ Отображение $f : A_1 \to A_2$ в данном случае непрерывно. В этом случае пространство $X_1 \bigcup_f X_2$ называется ***букетом*** и обозначается $X_1 \vee X_2$.