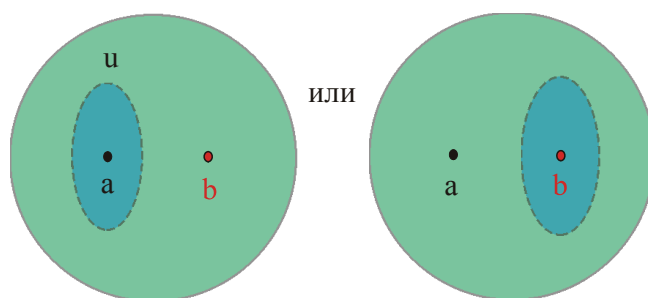


§11. Аксиомы отделимости

Понятие топологического пространства было введено в самом общем виде. Рассмотрим ограничения, накладываемые на топологические пространства.

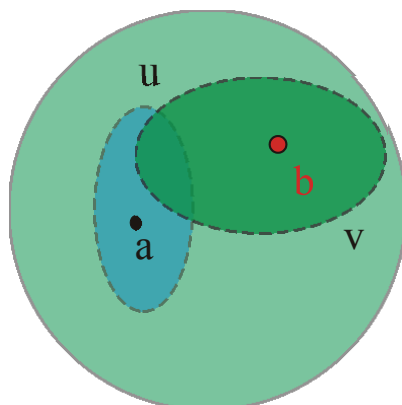
Определение Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 если для двух различных точек этого пространства, по крайней мере для одной из них существует окрестность не содержащая другую точку. Пространства удовлетворяющие аксиоме отделимости T_0 называются T_0 пространства или пространства Колмогорова.



Колмогоров Андрей Николаевич 12.4.1903 - 20.10.1987. Крупнейший отечественный математик. Окончил 1925г. Московский государственный университет, с 1931г. профессор этого университета. Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного, где ему принадлежат фундаментальные работы по тригонометрическим рядам, теории множеств, теории интеграла и приближения функций. В дальнейшем А.Н. Колмогоров внес фундаментальный вклад в топологию, математическую логику, теорию дифференциальных уравнений, механику. Особенно крупный вклад внес А.Н. Колмогоров в теорию вероятностей и теорию случайных процессов. Он имеет крупные достижения в прикладных областях: теории стрельбы, теории массового обслуживания, математических методах в биологии, математической лингвистике.

Замечание. Не все пространства удовлетворяют аксиоме отделимости T_0 . Примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости T_0 , является слипшееся двоеточие.

Определение Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 если для каждой из двух различных точек этого пространства существует окрестность не содержащая другую точку. Пространства удовлетворяющие аксиоме отделимости T_1 называются T_1 пространства или пространства Рисса.





Рисс Фридьеш (Riesz Frigyes) 22.1.1880-28.2.1956 -венгерский математик. Учился в Цюрихе, Будапеште, Гёттингене и Париже. Основные труды по функциональному анализу. Изучал векторные пространства интегрируемых функций, исследовал системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, является одним из основателей теории топологических пространств.

Теорема

1. Топологическое пространство тогда и только тогда является пространством Рисса, когда любое его одноточечное множество замкнуто.

2. Топологическое пространство тогда и только тогда является пространством Рисса, когда для любой его точки x пересечение всех ее окрестностей совпадает с одноточечным множеством $\{x\}$.

▷ Пусть топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Рассмотрим произвольное одноточечное множество $\{x\}$. Возьмем произвольную точку $y \in X$, $y \neq x$. По аксиоме T_1 для точки y существует окрестность U_y , не содержащая точку x . Следовательно $\exists U_y \cap \{x\} = \emptyset$. Это означает, что произвольная точка y , отличная от точки x не является точкой прикосновения одноточечного множества $\{x\}$. Следовательно, это одноточечное множество замкнуто.

Предположим, что все одноточечные множества некоторого топологического пространства замкнуты. Тогда для двух произвольных различных точек $y \neq x$ множества $X \setminus \{x\}$ и $X \setminus \{y\}$ являются открытыми множествами. Кроме того $y \in X \setminus \{x\}$, а $x \in X \setminus \{y\}$. Таким образом у двух различных точек пространства X найдены окрестности не содержащие другую точку, следовательно, пространство X - является пространством Рисса.

2. Если топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 , то пересечение всех окрестностей точки x $\bigcap_{\alpha} U_{\alpha} = \{x\}$, так как для любой точки $y \neq x$ существует окрестность, не содержащая x (поэтому $y \notin \bigcap_{\alpha} U_{\alpha}$). Обратное утверждение очевидно. ◁

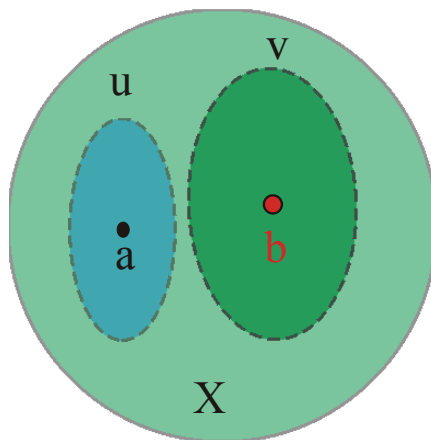
Примером пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости T_1 является слипшееся двоеточие, а связанное двоеточие удовлетворяет этой аксиоме отделимости.

Сформулируем (без доказательства) некоторые свойства пространств Рисса. Если топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 то выполняются следующие свойства:

- В каждой окрестности любой предельной точки множества A содержится бесконечное число точек из A ;
- Любое конечное множество точек замкнуто;
- Производное множество любого множества T_1 пространства замкнуто;

Определение Свойство топологического пространства, сохраняющееся в подпространствах называется **наследственным**.

Определение Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 , если любые две различные точки этого пространства можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости T_2 называют T_2 пространства или **хаусдорфовыми** пространствами.



Хаусдорф Феликс (Hausdorff Felix) 8.11.1868-26.1.1942 - немецкий математик. В 1891 окончил Лейпцигский университет, с 1902 г. профессор этого университета. С 1921 года профессор Боннского университета. Основные труды по теории множеств, топологии и функциональному анализу. Он впервые ввел понятие меры множества и топологического предела. В 1942 году покончил жизнь самоубийством, узнав, что он и его семья должны быть отправлены в концлагерь.

Теорема Топологическое пространство X является пространством Хаусдорфа тогда и только тогда, когда для произвольной точки $x \in X$ пересечение замыканий всевозможных ее окрестностей совпадает с одноточечным множеством $\{x\}$.

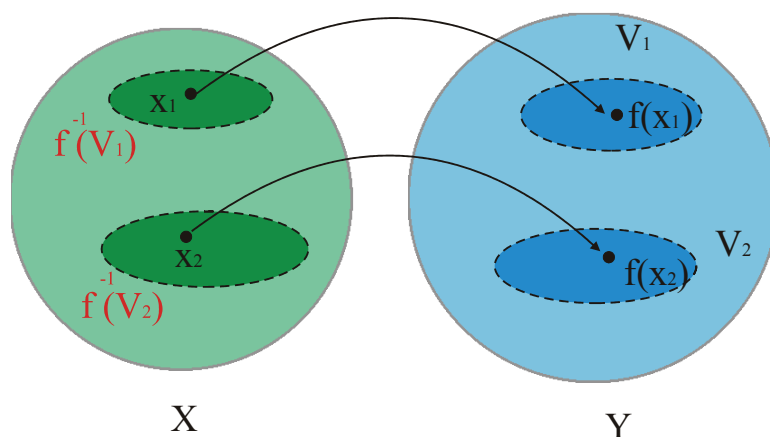
▷ Пусть $\forall x \in X$. А пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 .

Пусть $\{U_\alpha\}$ - семейство всех окрестностей точки x . Очевидно, что $x \in \bigcap_{\alpha} \overline{U_\alpha}$. Предположим, что некоторая точка $y \neq x$ также принадлежит указанному пересечению. Тогда при любом α $y \in \overline{U_\alpha}$. Это означает, что все окрестности точки y пересекаются с окрестностями точки x . Получили противоречие с выполнением аксиомы отделимости T_2 . Следовательно $\{x\} = \bigcap_{\alpha} \overline{U_\alpha}$.

Наоборот. Пусть x и y две различные точки топологического пространства X и $\{x\} = \bigcap_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}$. Из того факта, что $y \notin \bigcap_{\alpha} \bar{U}_{\alpha}$ следует, что $y \notin \bar{U}_{\alpha} \Rightarrow y \in X \setminus \bar{U}_{\alpha}$ и это множество открыто. Очевидно, что $X \setminus \bar{U}_{\alpha} \cap \bar{U}_{\alpha} = \emptyset$. Таким образом две различные точки топологического пространства X , отделены непересекающимися окрестностями. \triangleleft

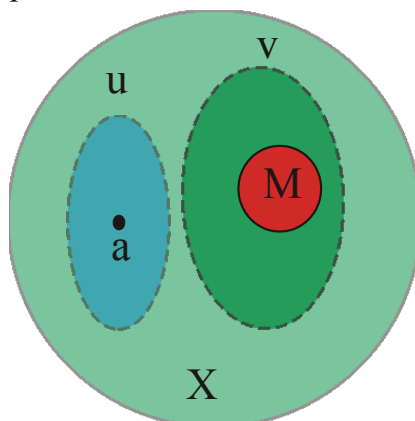
Теорема Для хаусдорфовости пространства X необходимо и достаточно, чтобы для пары различных точек x_1 и x_2 из X существовало непрерывное отображение f пространства X в хаусдорфово пространство Y такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

\triangleright Для доказательства необходимости в качестве пространства Y возьмем пространство X , а в качестве отображения f тождественное отображение на X .



Достаточность: Пусть x_1 и x_2 - различные точки в X и $f: X \rightarrow Y$ непрерывное отображение, а V_1 и V_2 непересекающиеся окрестности точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ в хаусдорфовом пространстве Y . В силу непрерывности отображения f прообраз окрестности - окрестность. Очевидно, что $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$, следовательно пространство X - хаусдорфово. \triangleleft

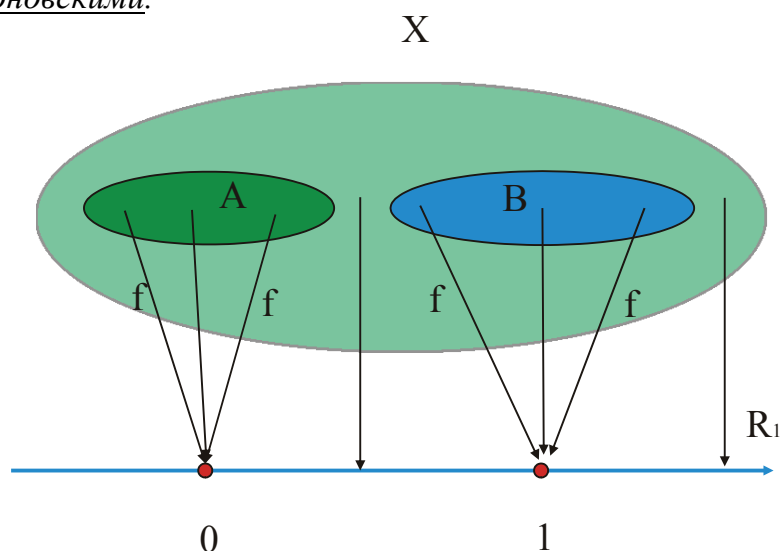
Определение Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_3 , если его любое замкнутое множество и не содержащая в этом точку можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_3 называют T_3 пространством или **регулярным** пространством.



Теорема (Критерий регулярности) T_1 пространство X регулярно тогда и только тогда, когда любая его точка x обладает регулярной системой окрестностей, т.е. любая ее окрестность U $\dot{\eta}\dot{\alpha}\dot{\delta}\dot{\alpha}\dot{\epsilon}\dot{\delta}$ $\zeta\dot{\alpha}\dot{\epsilon}\dot{\iota}\dot{\delta}\dot{\alpha}\dot{\delta}\dot{\alpha}\dot{\delta}$ $\dot{\epsilon}\dot{\delta}\dot{\alpha}\dot{\eta}\dot{\delta}\dot{\iota}\dot{\eta}\dot{\delta}\dot{\iota}\dot{\delta}$ $\dot{\delta}\dot{\alpha}\dot{\delta}\dot{\delta}\dot{\delta}\dot{\delta}$.

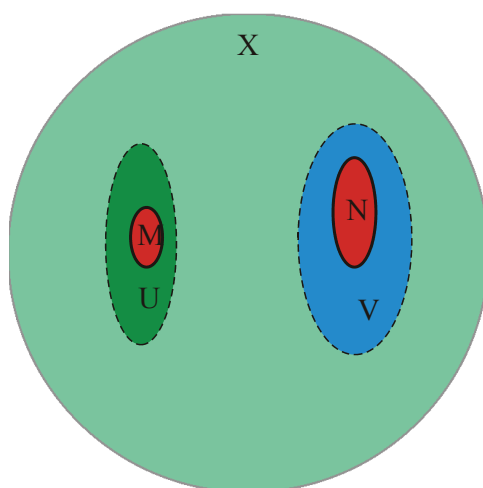
Данное утверждение примем без доказательства.

Определение Говорят, что топологическое T_1 пространство удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{\frac{3}{2}}$, если для любой точки x_0 и произвольного множества F существует непрерывная функция f , равная 0 в точке x_0 и 1 во всех точках F . Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости $T_{\frac{3}{2}}$ называются вполне регулярным или тихоновскими.



Тихонов Андрей Николаевич (р. 17.10.1906) Советский математик, дважды Герой Социалистического труда, академик. Окончил в 1927 г МГУ. Профессор с 1936 г. этого университета. Первые работы посвящены топологии и функциональному анализу. Им введено понятие произведения топологических пространств (тихоновское произведение) доказан ряд важных теорем топологии. Значительны труды в теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике и вычислительной математике. Под руководством А.Н. Тихонова разработаны алгоритмы решения многих прикладных задач. Совместно с А.А. Самарским разработана теория однородных разностных схем.

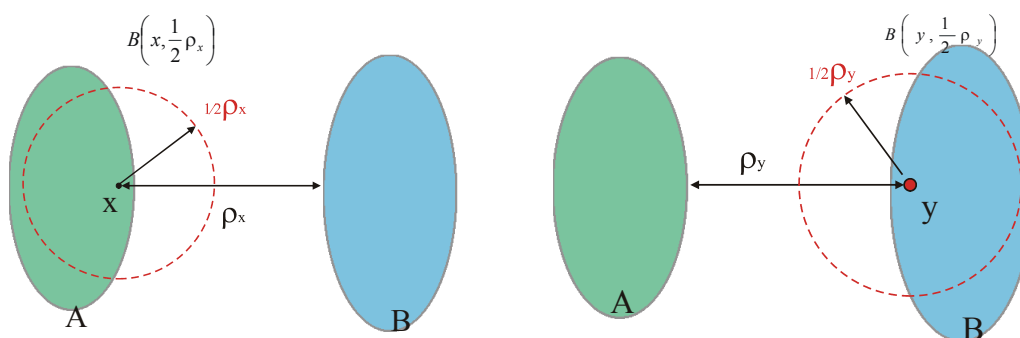
Определение. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_4 , если любые два непустых непересекающихся замкнутые множества можно отделить непересекающимися окрестностями. Пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости T_4 называют **T_4 пространствами** или **нормальными пространствами**.



Теорема. Всякое метрическое пространство нормально

▷ Пусть (X, ρ) - произвольное метрическое пространство. A и B два непустых непересекающихся замкнутых множества этого пространства. Пусть $x \in A \Rightarrow x \notin B$. Более того $x \notin \bar{B}$ (так как замкнутое множество B содержит все свои точки прикосновения). Тогда расстояние от точки x до множества B

$$\rho_x = \rho(x, B) = \inf_{y \in B} \{\rho(x, y)\} > 0.$$

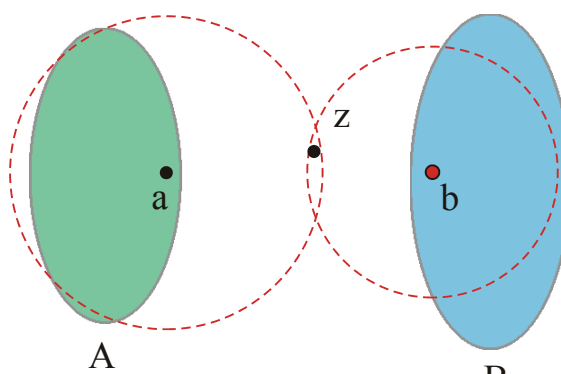


Аналогично $\rho_y = \rho(y, A) > 0$ для любой точки $y \in B$. Построим два множества:

$$U = \bigcup_{x \in A} B\left(x, \frac{1}{2}\rho_x\right), \quad V = \bigcup_{y \in B} B\left(y, \frac{1}{2}\rho_y\right),$$

где $B\left(x, \frac{1}{2}\rho_x\right)$ - открытый шар с центром в точке x и радиуса $\frac{1}{2}\rho_x$. Очевидно, что множества U и V являются открытыми окрестностями множеств A и B соответственно. Докажем, что они не пересекаются. Предположим противное, т.е. $\exists z \in U \cap V$. Тогда существуют такие точки $a \in A$ и $b \in B$ для которых

$$\rho(a, z) < \frac{1}{2}\rho_a \quad \text{и} \quad \rho(b, z) < \frac{1}{2}\rho_b.$$



Пусть для определенности $\rho_a \geq \rho_b$. Воспользуемся аксиомой треугольника

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, z) + \rho(b, z) < \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b) \leq \rho_a,$$

т.е. мы получили, что

$$\rho(a, b) < \rho_a$$

и получили противоречие с определением расстояния ρ_a . Тем самым теорема доказана.

Теорема Пространство Рисса нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U существует такая окрестность V , что $\bar{V} \subset U$.

§12. Сходимость в топологических пространствах

Определение Последовательность точек $\{x_n\}$ топологического пространства X называется **сходящейся** к точке $x_0 \in X$, если любая окрестность x_0 содержит все точки последовательности, за исключением, быть может их конечного числа. При этом саму точку x_0 называют **пределом последовательности** и обозначают $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

В метрических пространствах последовательность может иметь только один предел, а в топологических пространствах - несколько. Так в тривиальных топологических пространствах любая последовательность точек сходится к каждой точке $x \in X$, так как эта точка x имеет только одну окрестность - все множество X и эта окрестность содержит все точки последовательности.

В произвольном метрическом пространстве точка x_0 тогда и только тогда принадлежит замыканию некоторого множества, когда в этом множестве существует последовательность, сходящаяся к x_0 . В топологическом пространстве справедливо утверждение:

Если последовательность точек множества A топологического пространства (X, τ) сходится к некоторой точке $x_0 \in X$, то $x_0 \in \bar{A}$

Обратное утверждение не всегда верно.

Теорема В топологическом пространстве. Удовлетворяющем первой аксиоме счетности, точка x_0 тогда и только тогда является точкой прикосновения множества A этого пространства, когда в A существует последовательность, сходящаяся к точке x_0 .

▷ Предположим, что x_0 является точкой прикосновения множества A , и множества $\{u_n\}$ образуют счетную базу системы окрестностей в точке x_0 . Эту базу можно считать монотонно убывающей, действительно, если база в точке x_0 состоит из множеств $\{v_n\}$ то можно построить монотонно убывающее семейство множеств $\left\{u_n = \bigcap_{i=1}^n v_i\right\}$, образующее базу в точке x_0 .

Так как $x_0 \in \bar{A}$, то в любой окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка из множества A . Выберем в каждой окрестности u_n по одной точке $x_n \in A$. Полученная последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 . Обратное утверждение очевидно.

Определение Топологическое пространство, в котором для каждого множества A и любой точки $x \in \bar{A}$ существует последовательность точек множества A , сходящихся к x , называется **пространством Фреше-Урысона**.

<http://kvant.mccme.ru>

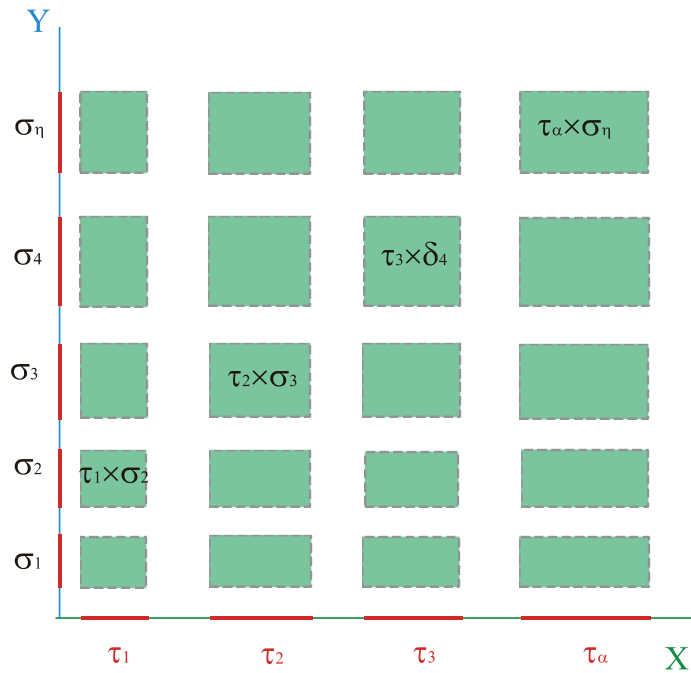


Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

Урысон Павел Самуилович (22.1.1898- 17.8.1924) отечественный математик. Окончил МГУ в 1919 г. Был сотрудником Института математики и механики МГУ и профессором 2- московского университета (ныне Московский педагогический университет). В 1921-1922 годах впервые в нашей стране прочитал в Московском университете курс лекций по топологии. Трагически погиб, утонув в реке Луара во Франции.

Произведение топологических пространств.

Пусть (X, τ) и (Y, σ) два топологических пространства.



Обозначим через β - семейство множеств вида $\{\tau_i \times \sigma_j\}$, где $\tau_i \in \tau$, $\sigma_j \in \sigma$.

Легко заметить, что множества семейства β образуют базу некоторой топологии μ на декартовом произведении $X \times Y$.