§ 9. Связность

Понятие связности есть математически строгое отражение интуитивного представления о целостности геометрической фигуры.

<u>Определение</u> *Топологическое пространство X называется* ***несвязным****, если его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств*

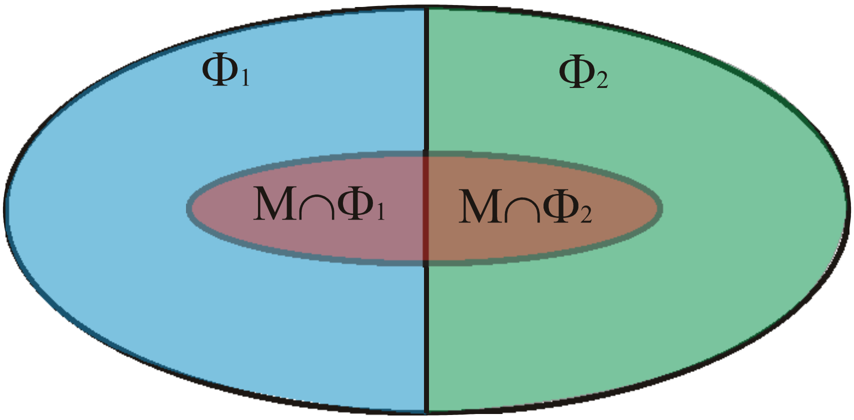
$$X = \Phi_1 \bigcup \Phi_2 ,$$

в противном случае пространство называется ***связным.***

<u>Замечание</u> Множества Φ_1, Φ_2 связаны соотношениями $\Phi_1 = X \setminus \Phi_2$, $\Phi_2 = X \setminus \Phi_1$ поэтому эти множества одновременно и открыты и замкнуты. Все дальнейшие утверждения данного параграфа сформулированные для открытых множеств будут справедливы для замкнутых множеств и наоборот.

Множество М топологического пространства X называется связным, если оно является связным рассматриваемое как подпространство.

<u>Теорема</u> 1 *Пусть в топологическом пространстве X даны два непустых непересекающихся замкнутых множества* Φ_1 и Φ_2 *и непустое связное множество М, содержащееся в объединении множеств* $\Phi_1 \cup \Phi_2$ *тогда множество М содержится в каком-нибудь одном множестве* Φ_1 *или* Φ_2.



$\triangleright$ Имеем, что $M \subset \Phi_1 \bigcup \Phi_2$. Представим множество М в виде

$$M = \left(M \bigcap \Phi_1 \right) \bigcup \left(M \bigcap \Phi_2 \right).$$

Так как Φ_1 и Φ_2 замкнуты, то множества $M \bigcap \Phi_1$ и $M \bigcap \Phi_2$ замкнуты в М. Так как множество М связно, то одно из множеств $M \bigcap \Phi_1$ или $M \bigcap \Phi_2$ должно быть пустым, откуда и следует утверждение теоремы. $\triangleleft$

<u>Теорема</u> 2 *Если для любых двух точек x и y пространства X можно найти связное множество* C_{xy}, *содержащее эти точки, тогда все пространство X связно.*

$\triangleright$ Предположим, что все пространство X несвязно т.е.

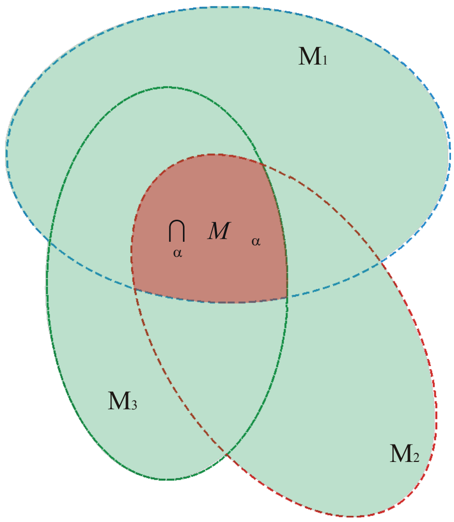
$$X = \Phi_1 \bigcup \Phi_2 ,$$

где Φ_1 и Φ_2 непустые непересекающиеся множества. Возьмем $x \in \Phi_1$, а $y \in \Phi_2$. Тогда связное множество C_{xy}, имеющее с множеством Φ_1 общую точку x должно содержаться в этом множестве. С другой стороны $y \in \Phi_2 \bigcap C_{xy}$ и, следовательно, множество C_{xy} должно содержаться во множестве Φ_2. Но множества Φ_1 и Φ_2 не пересекаются. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleleft$

<u>Терема</u> 3 *Присоединяя к связному множеству С любое число точек прикосновения, получим связное множество.*

$\triangleright$ Предположим противное, тогда полученное множество C_0 представимо в виде $C_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 непустые непересекающиеся замкнутые множества. Тогда связное множество $C \subset \Phi_1 \cup \Phi_2$ и по теореме 1 оно должно содержаться в одном из двух множеств, входящих в объединение. Пусть $C \subset \Phi_1$. Тогда, так как Φ_1 - замкнуто, то любая точка прикосновения множества $C \subset \Phi_1$ должна также принадлежать множеству Φ_1, получили, что $C_0 \subset \Phi_1$, а следовательно $\Phi_2 = \varnothing$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. $\triangleleft$

<u>Теорема</u> 4 *Пусть в топологическом пространстве X, дана система (любой мощности) связных множеств M_α, причем пересечение всех этих множеств не пусто. Тогда их объединение является связным множеством.*



$\triangleright$ Предположим, что $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ не связно, т.е.

$$M = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

тогда связные множества M_α должны содержаться либо в Φ_1, либо в Φ_2. По условию теоремы существует точка а, принадлежащая всем множествам M_α. Пусть $a \in \Phi_1$, тогда все $M_\alpha \subset \Phi_1$, а $\Phi_2 = \varnothing$. Получили противоречие, доказывающее теорему. $\triangleleft$

<u>Определение</u> ***Компонентой топологического пространства*** *называется любое его максимальное связное множество.*

Если топологическое пространство связно, то оно является единственной своей компонентой.

<u>Теорема</u> 5 *Каждое связное множество топологического пространства содержится в некоторой компоненте. Любая компонента топологического пространства является замкнутым множеством; любые различные компоненты отделены.*

▹ 1. Пусть М - произвольное непустое связное множество. Обозначим через К - объединение всех связных множеств, содержащих М. Эти множества пересекаются (по М). По теореме 4 множество К связно. Если некоторое связное множество А содержит К, то А⊃М и, значит А⊂К. Следовательно А=К. Это означает что, К - максимальное связное множество, т.е. компонента, содержащая множество М.

2. Пусть К - произвольная компонента топологического пространства. По определению компоненты множество К связно. Но замыкание множества К, также связно. Учитывая максимальность компоненты К получаем включение $K \supset \overline{K}$. С учетом обычного включения $K \subset \overline{K}$ получаем $K = \overline{K}$. Последнее равенство означает замкнутость множества К.

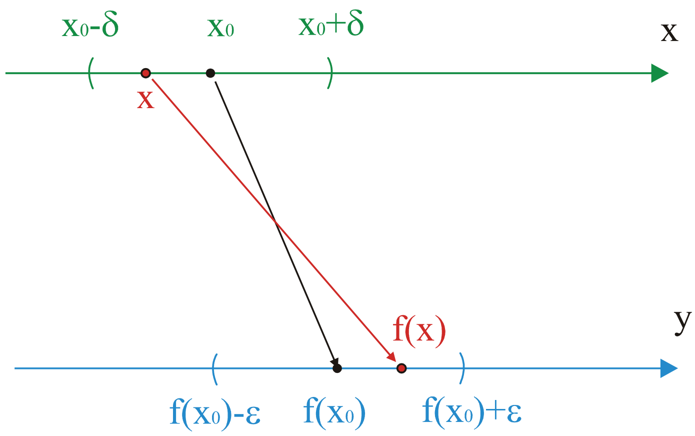
3. Если K_1 и K_2 - две различные не отделенные компоненты. Тогда $K_1 \cup K_2$ связно по теореме 4, причем каждое из множеств K_1 и K_2 и содержится в объединении $K_1 \cup K_2$, что противоречит определению компоненты. Итак две различные компоненты отделены. ◃

<u>Определение</u> *Открытое и связное множество топологического пространства называется* ***областью.***

<u>Определение</u> *Топологическое пространство называется* ***локально связным****, если семейство его областей образует базу топологии.*

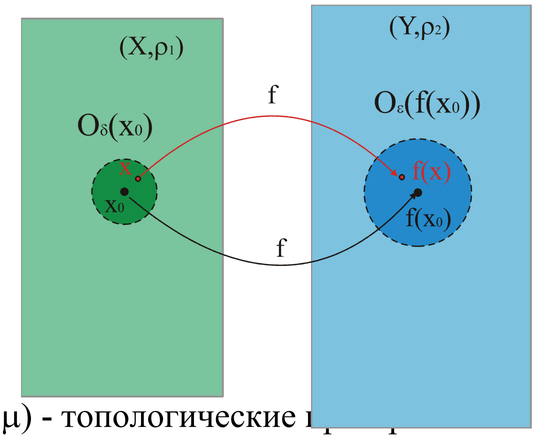
§ 10. Непрерывные отображения топологических пространств

Представим интерпретацию классического понятия непрерывной функции:



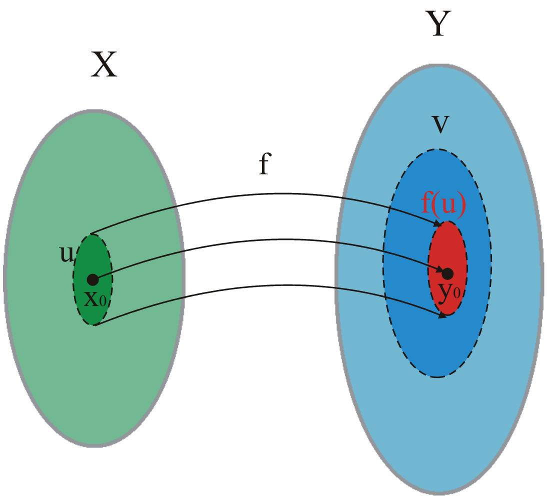
Обобщение этого понятия ведет к понятию непрерывного отображения в метрических пространствах:

<u>Определение</u> *Отображение f метрического пространства* (X, ρ_1) *в метрическое пространство* (Y, ρ_2) *непрерывно в точке* x_0 *если для любого положительного числа* ε *существует такое положительное число* δ*, что из неравенства* $\rho(x, x_0) < \delta$ *следует неравенство* $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.



Пусть (X,τ) и (Y,μ) - топологические [illegible] $f:X\to Y$ - отображение из X в Y.

Определение *Отображение f называется* ***непрерывным в точке*** x_0 *∈X, если для любой окрестности* v *точки* $y_0=f(x_0)$ *существует такая окрестность и точки* x_0*, что* $f(u)\subset v$*. Отображение f называется непрерывным на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке x∈X.*



Примеры.

1. Для произвольных метрических пространств X и Y постоянное отображение является непрерывным.
2. Тождественное отображение топологического пространства самого на себя является непрерывным.
3. Непрерывную функцию можно рассматривать как непрерывное отображение из топологического пространства R^1 в топологическое пространство R^1.

Теорема. Пусть $f:X\to Y$ - отображение топологических пространств, тогда эквивалентны следующие условия:

1. f непрерывно на X;
2. $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;
3. для всякого B замкнутого в Y, $f^{-1}(B)$ замкнуто в X;
4. для всякого V открытого в Y, $f^{-1}(V)$ открыто в X.

Доказательство. 1)⇒2) т.к. если $x\in\overline{A}$, то пусть W окрестность точки $f(x)$ в Y, тогда существует окрестность U точки x в X, т.ч. $f(U)\subset W$ (т.к. f непрерывно на X) и $U\cap A\neq\phi$, т.е. существует

$y \in U \cap A$, но тогда $f(y) \in W \cap f(A)$, т.е. $f(y) \in \overline{f(A)}$.

2) $\Rightarrow$3) Пусть B замкнуто в Y, положим $A = f^{-1}(B)$, тогда из (2) следует $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$, т.о. $f(\overline{A}) \subset B$, но тогда $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$, следовательно $\overline{A} = A$ (т.к. $A \subset \overline{A}$), т.о. A - замкнуто.

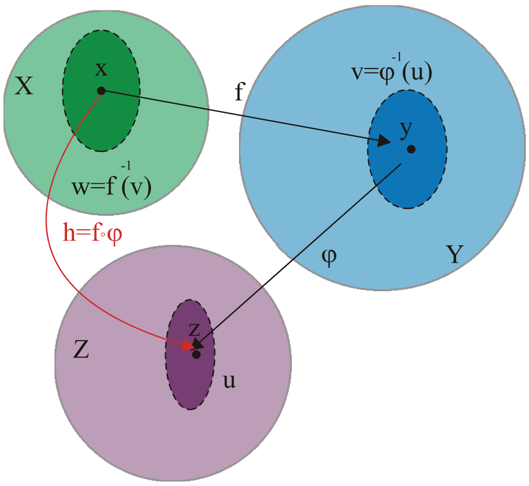
3) $\Rightarrow$4) Пусть V открыто в Y, и пусть $U = f^{-1}(V)$, тогда $Y \setminus V$ - замкнуто в Y и $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) = X \setminus U$ - замкнуто. Т.о. U - открыто в X.

4) $\Rightarrow$1) Пусть $x \in X$, и V окрестность точки $f(x)$ в Y, тогда (см. определение окрестности) существует открытое множество $W \subset V$, т.ч. $f(x) \in W$, тогда $f^{-1}(W)$ открыто в X и $x \in f^{-1}(W)$, т.е. $f^{-1}(W)$ - окрестность точки x в X. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 2 *Отображение f топологического пространства* (X,τ) *в пространство* (Y,μ) *непрерывно тогда и только тогда, когда образ замыкания произвольного множества A пространства X содержится в замыкании образа множества, т.е.* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

Данное утверждение примем без доказательства.

<u>Теорема</u> 3. *Если f- непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, а* φ*- непрерывное отображение Y в топологическое пространство Z, то композиция* $\varphi \circ f$ *является непрерывным отображением X в Z.*



$\triangleright$ Возьмем произвольное открытое множество u пространства Z. В силу непрерывности отображения $\varphi: Y \to Z$, прообраз $\varphi^{-1}(u)$ есть открытое множество топологического пространства Y. Аналогично $f^{-1}(\varphi^{-1}(u))$ при непрерывном отображении $f: X \to Y$ открыт в X. Так как $f^{-1}(\varphi^{-1}(u)) = (\varphi \circ f)^{-1}$, то мы получили, что при отображении $\varphi \circ f$ прообраз открытого множества открыт. Следовательно отображение непрерывно. $\triangleleft$

Открытые и замкнутые отображения

Выше было доказано, что при непрерывном отображении прообраз непрерывного отображения открыт, а замкнутого замкнут. Для образов при непрерывных отображениях такого рода утверждения не имеют место. Рассмотрим несколько примеров:

Примеры

1. Непрерывное отображение $f: R^1 \to R^1$, где $f(x) = arctgx$ отображает бесконечный интервал $f: R^1 \to R^1$ в интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$., т.е. открытое и замкнутое множество в отрытое но не замкнутое множество.
2. Непрерывное отображение $f: R^1 \to R^1$, где $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ отображает открытое и замкнутое множество $R = (-\infty;+\infty)$ в полуинтервал $(0;1]$ который не является ни открытым ни замкнутым множеством.

Определение Непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется ***открытым****, если при этом отображении образ открытого множества открыт.*

Определение Непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется ***замкнутым****, если при этом отображении образ замкнутого множества замкнут.*

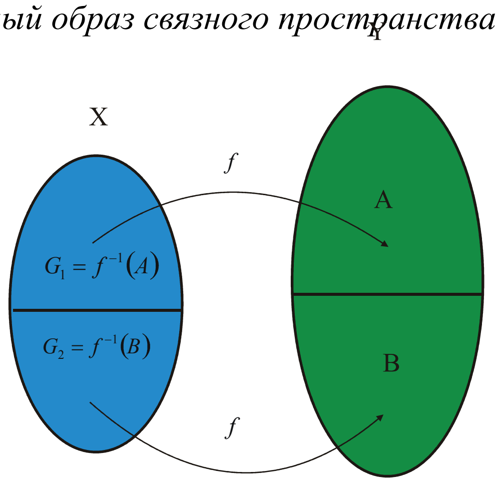
Примером одновременно открытого и замкнутого отображения является тождественное отображение.

Отображение вложения $i: A \to X(A \subset X,\ i(x) = x)$ открыто тогда и только тогда, когда множество A отрыто в X, и замкнуто тогда и только тогда, когда A замкнуто в X.

Очевидно, что композиция отрытых отображений - открытое отображение; композиция замкнутых отображений - замкнутое отображение.

Непрерывные отображения связных пространств.

Теорема Непрерывный образ связного пространства связен



▷ Пусть отображение $f : X \to Y$ непрерывно и сюръективно, т.е. $f(X) = Y$. Предположим, что пространство Y несвязно. Тогда его можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств, т.е. $Y = A \cup B$. Рассмотрим $G_1 = f^{-1}(A)$ и $G_2 = f^{-1}(B)$. В силу непрерывности отображения эти множества открыты (замкнуты), не являются пустыми множествами и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, кроме того, очевидно, что $X = G_1 \cup G_2$. Таким образом получили, что связное пространство X представлено в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (замкнутых) множеств. Полученное противоречие доказывает теорему. ◁

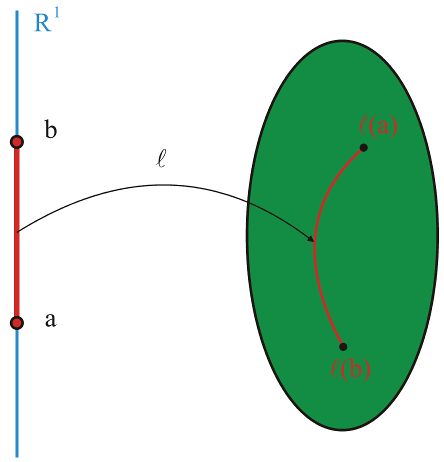
<u>*Следствие*</u> *Если топологическое пространство связно и непрерывная функция $f : X \to R^1$ принимает в точках X значения* ***a*** *и* ***b,*** $(a \neq b)$ *то в некоторой точке X она принимает любое значение, лежащее между* ***a*** *и* ***b.***

(Данное следствие обобщает теорему анализа о промежуточном значении).

Пусть X - топологическое пространство. ***Путем*** *в X называется непрерывное отображение отрезка [a;b] числовой прямой в X. Путь $l:[a;b] \to X$ называют* ***соединяющим*** *точки x_1 и x_2 в X, если $l(a) = x_1$, $l(b) = x_2$. Пространство, любые две точки которого можно соединить путем называется* ***линейно связным.***

<u>*Теорема*</u> *Всякое линейно связное пространство связно.*

▷ Пусть x_1 и x_2 - произвольные точки линейно связного пространства X. Тогда существует непрерывное отображение $l:[a;b] \to X$, такое что $l(a) = x_1$, $l(b) = x_2$. В топологическом пространстве R^1 - отрезок [a;b] - связен, следовательно при непрерывном отображении его образ также связен. Следовательно по теореме 2 предыдущего параграфа пространство X - связно. ◁



<u>*Замечание*</u>: Обратное утверждение не верно. Например, пространство $X = A_1 \cup A_2$,

где

$$A_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \middle| x_1 \in \left(0; \frac{1}{\pi}\right], x_2 = \sin\frac{1}{x_1} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 ; x_1 = 0, x_2 = [-1;1] \right\}$$

с естественной топологией является связным пространством, но не линейно связным.

Гомеоморфизм. Топологически эквивалентные пространства

<u>*Определение*</u> *Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение одного топологического пространства на другое называется* ***гомеоморфизмом.***

Если существует гомеоморфное отображение одного пространства на другое, то пространства называются ***гомеоморфными.***

Из теорем этого параграфа вытекает утверждение:

1. *Гомеоморфизм является одновременно открытым и замкнутым отображением;*
2. *Взаимно однозначное открытое (замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.*
3. *Взаимно однозначное отображение* $f: X \to Y$ *является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого множества* $A \subset X$ $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Очевидно. что тождественное преобразование - гомеоморфизм, обратное к гомеоморфизму - гомеоморфизм, композиция двух гомеоморфизмов - гомеоморфизм. Следовательно отношение гомеоморфности является отношением эквивалентности.

<u>Определение</u> *Два топологических пространства называются* ***топологически эквивалентными*** *или имеющими один топологический тип, если существует гомеоморфизм одного пространства на другое.*

У топологически эквивалентных пространств топологии являются образами и прообразами. Поэтому такие пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами.

<u>*Примеры*</u>

1. Любое отображение дискретного пространства в топологическое пространство непрерывно. Следовательно два дискретных пространства гомеоморфны, тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение одного пространства на другое.
2. Числовая прямая гомеоморфна интервалу (0;1). Гомеоморфизм устанавливает функция $y = \frac{1}{\pi} arctgx + \frac{1}{2}$.
3. Сфера и поверхность куба в пространстве R^3 гомеоморфны. (На сфере и кубе естественная топология индуцируется топологией пространства R^3). Если совместить центры сферы и куба, то гомеоморфизмом будет отображение проектирования из общего центра.

Свойство топологического пространства, сохраняющееся при гомеоморфизме, называют ***топологическим инвариантом*** или ***топологическим свойством.***

Другими словами, топологический инвариант - это такое свойство топологического пространства, которым обладают все гомеоморфные данному пространства.

Примерами топологических инвариантов являются связность, выполнимость первой или второй аксиом счетности, а также аксиом отделимости. Иногда и саму топологию определяют как науку о топологических инвариантах.