Так как $\overline{\overline{M}\cup\overline{N}} = \overline{M}\cup\overline{N}$, то из включения (*) получаем $\overline{M\cup N} \subset \overline{M}\cup\overline{N}$. Из двух противоположных включений следует равенство $\overline{M\cup N} = \overline{M}\cup\overline{N}$ что и требовалось доказать.

Имеет место следующая

<u>Теорема</u> (Куратовского) *Пусть на произвольном множестве X задан оператор, ставящий в соответствие каждому подмножеству* $A\subset X$ *множество* A^c *таким образом, что выполняются следующие условия:*

1. $\varnothing^c=\varnothing$;
2. $A\subset A^c$ *для любого множества* $A\subset X$;
3. $A^{cc}=A^c$;
4. $(A\cup B)^c=A^c\cup B^c$ *для любых множеств* $A\subset X$ *и* $B\subset X$;

Если λ *семейство всех множеств A* ($A\subset X$), *для которых* $A^c=A$, *а* τ *семейство подмножеств X, состоящее из дополнений к множествам из* λ, *то* τ*- топология на X, причем для каждого множества* $A\subset X$ *множество* A^c *совпадает с* $\overline{A}$ *- замыканием A в топологическом пространстве* (X,τ).

Биографическая справка

Куратовский Кажимеж (Kuratowski Kazimerz) 2.2. 1986-18.6.1980 - польский математик. С 1927 проф. Политехникума во Львове, с 1934 профессор университета в Варшаве, с 1948 директор математического института Польской АН. Основные труды по теории множеств, топологии и теории функций действительного переменного.

<u>Определение</u> *Точка* x_0 *топологического пространства X называется* ***предельной точкой*** *множества A, если любая окрестность этой точки, содержит хотя бы одну точку из A, отличную от* x_0.

Очевидно. что всякая предельная точка является точкой прикосновения. Обратное не верно. Так изолированные точки могут являются точками прикосновения но не являются предельными точками.

Очевидно, что каждая точка множества $\overline{M}\setminus M$ является предельной. Таким образом замыкание $\overline{M}$ состоит из точек трех видов:

- изолированные точки;
- предельные точки, принадлежащие множеству;
- предельные точки, не принадлежащие множеству;

<u>Определение</u> *Совокупность всех предельных точек множества M называется* ***производным множеством*** *и обозначается* M'.

<u>Определение</u> *Множество M топологического пространства X называется* ***совершенным,*** *если оно совпадает со своим производным множеством.*

Очевидно, что множество совершенно тогда и только тогда, когда оно во - первых замкнуто, во- вторых лишено изолированных точек.

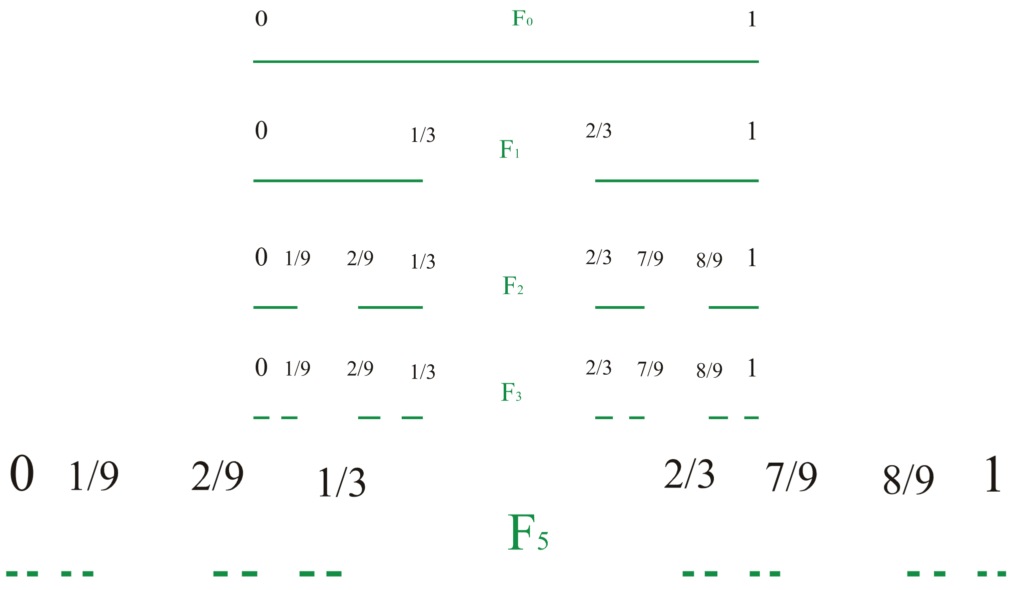
Примером совершенного множества является множество на числовой прямой, построенное создателем классической теории множеств, немецким математиком Георгом Кантором.

Рассмотрим замкнутое множество [0;1]. Обозначим его F_0. Разделим этот отрезок на три равные части и удалим из него средний интервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ длиной $\frac{1}{3}$. Оставшееся множество $\left[0;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};1\right]$ обозначим F_1. С каждым из оставшихся отрезков поступим как и с предыдущим: разделим на три равные части и удалим средний интервал. Таким образом из F_1 удаляются два интервала $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$, имеющие длину $\frac{1}{3^2}$. Объединение оставшихся четырех отрезков обозначается F_2.

Продолжая этот процесс мы получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга множеств:

$$F_0\supset F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_n\supset F_{n+1}\ldots$$

Замкнутое множество $F=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$, которое является пересечением построенных выше множеств называется ***канторовым совершенным множеством или канторывым дисконтинуумом.***



Приведем (без доказательства) два утверждения, которые описывают некоторые свойства этого множества:

<u>Теорема</u> *Канторов дисконтинуум является совершенным множеством.*

<u>Теорема</u> *Канторов дисконтинуум имеет мощность континуума.*

§ 6 Внутренность, внешность, граница

<u>Определение</u> *Точка x множества A топологического пространства (X,τ) называется* ***внутренней точкой*** *множества A, если существует окрестность U точки x, целиком содержащаяся в A. Множество A° всех внутренних точек множества A называется* ***внутренностью*** *(или ядром) множества A.*

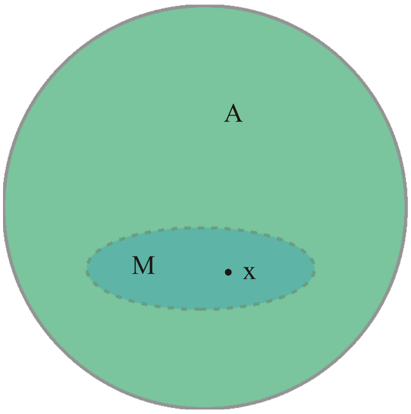
<u>Теорема</u> *если A - произвольное множества топологического пространства, то*

1. *Внутренность A° множества A является открытым множеством;*
2. *Множество A° является наибольшим открытым множеством, содержащимся в A;*
3. *Множество A отрыто тогда и только тогда, когда $A=A^\circ$;*
4. *Множество всех точек из A, не являющихся предельными для $X\backslash A$ равно A°;*
5. $\overline{X\setminus A} = X\setminus A^\circ$;

▹ Докажем некоторые свойства

1. Пусть $x\in A^\circ$, тогда x - внутренняя точка множества A т.е. существует окрестность $U\subset A$. Но множество U является окрестностью каждой своей точки. Следовательно все точки множества U - внутренние для A, поэтому $U\subset A^0$. Следовательно множество A^0 является окрестностью каждой своей очки и поэтому является открытым множеством.

2. Возьмем произвольное отрытое множество M входящее в A.



Пусть произвольная точка $x\in M$, так как M является окрестностью каждой своей точки, то оно является окрестностью и для x. Имеем $x\in M\subset A$. Получаем, что точка x является внутренней точкой множества A, т.е. $x\in A^0$. Тем самым доказано включение $M\subset A^0$. Это означает, что любое отрытое множество, входящее в A, входит и в A^0, следовательно внутренность A^0 является максимальным отрытым множеством, содержащимся в A.

3. Если A отрыто, то оно совпадает с максимальным отрытым множеством, входящим в A, т.е. $A=A^0$.

Наоборот, если $A=A^0$, то A - открытое множество, т.к. A^0 - отрыто.

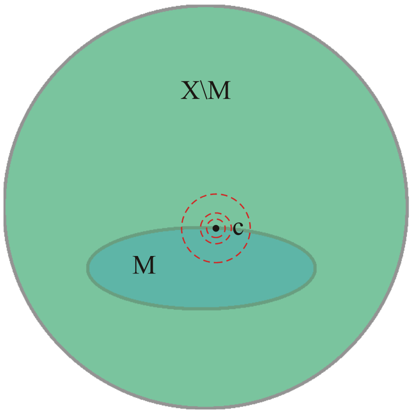
<u>*Примеры*</u>

1. В тривиальном пространстве (X,τ) у каждой точки только одна окрестность - X. Тогда $X^0=X$, $\varnothing^0=\varnothing$.
2. В дискретном топологическом пространстве все множества открыты (и замкнуты одновременно). Внутренностью каждого множества будет являться само множество.
3. В топологическом пространства R^1 (т.е. на числовой прямой) внутренностью сегмента [a;b] является интервал (a;b).

<u>*Определение*</u> *Точка с называется* ***граничной точкой множества M,*** *если она является точкой прикосновения одновременно для двух мно-*

*жеств: M и X\M. Совокупность всех граничных точек множества M называется **границей** множества M.*

Будем обозначать границу множества A b(A). Сформулируем теорему о свойствах границы.



Теорема *Если A - произвольное множество топологического пространства, то*

1. b(A) $b(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^{\circ}$;
2. $X \setminus b(A) = A^{\circ} \cup (X \setminus A)^{\circ}$;
3. $\overline{A} = A \cup b(A)$;
4. $A^{\circ} = A \setminus b(a)$;
5. *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $b(A) \subset A$;*
6. *Множество A открыто тогда и только тогда, когда $A \cap b(A) = \varnothing$.*

Данное утверждение примем без доказательства.

Определение *Точка x называется внешней точкой множества A, если она является внутренней точкой дополнения множества A. Совокупность всех внешних точек множества A называется внешностью этого множества.*

§ 7. База топологии. Аксиомы счетности

Известен факт, что в метрических пространствах открыты те и только те множества, которые можно представить в виде объединения открытых шаров. Эта идея привела к введению в топологических пространствах нового понятия.

Определение *Пусть (X, τ) - топологическое пространство. Базой топологии τ называется семейство подмножеств β, удовлетворяющее следующим свойствами:*

1. $\beta \subset \tau$;
2. *Для каждой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует такое множество $V \in \beta$, что $x \in V$ и $V \subset U$.*

База топологии определяется неоднозначно. На числовой прямой базу топологии образует семейство всех отрытых интервалов. Но семейство отрытых интервалов с рациональными концами также будет образовывать базу. В метрическом пространстве семейство открытых шаров образует базу метрического пространства. Множество шаров с рациональными радиусами так же образует базу.

Докажем теорему (критерий базы), которая часто принимается за определение базы

<u>Теорема</u> *Подмножество β топологии τ топологического пространства (X, τ) тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждое непустое множество из τ представимо в виде объединения некоторого количества множеств из β.*

$\triangleright$ Пусть β - база топологии и A - произвольное отрытое множество, т.е. $A \in \tau$.

Пусть $x_1 \in A \Rightarrow \exists U_1 \in \beta, \quad x_1 \in U_1 \subset A$;

$x_2 \in A \Rightarrow \exists U_2 \in \beta, \quad x_2 \in U_2 \subset A$;

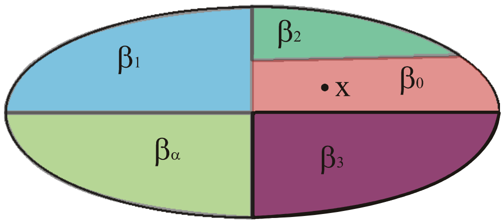
....

Переберем все точки множества A и найдем объединение всех включений, получаем

$$A \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \subset A \Leftrightarrow A = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} .$$

Таким образом получили, что A есть объединение множеств из β.

U(x)



Пусть теперь $\beta \subset \tau$ и любое открытое множество можно представить в виде объединения множеств из β. Докажем, что β - база топологии τ. Возьмем произвольную точку x и произвольную окрестность U этой точки. Так как $U=\bigcup_{\alpha}\beta_{\alpha}$, где $\beta_{\alpha} \in \beta$. Очевидно, что $x \in \bigcup_{\alpha}\beta_{\alpha}$, следовательно $\exists \beta_0, \ x \in \beta_0$. Обозначим $V=\beta_0$. Мы получили, что для произвольной точки x и любой ее окрестности U существует множество $V \in \beta$ такое, что $x \in V$ и $V \subset U$. Следовательно β - база топологии τ. $\triangleleft$

<u>Следствие</u> *Если на некотором множестве заданы две топологии, имеющие одну и ту же базу, то эти топологии совпадают.*

Имеет место следующая

<u>Теорема</u> *Семейство множеств $\beta = \{U_{\alpha},\}$ является базой некоторой топологии на множестве $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ тогда и только тогда, когда для любых двух множеств U, $V \in \beta$ b и каждой точки $x \in U \cap V$ существует такое множество $W \in \beta$, что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.*

<u>Определение</u> ***Конечным пресечением*** *множеств некоторой совокупности называется пересечений любой конечной совокупности этих множеств.*

<u>Определение</u> Пусть (X, τ) топологическое пространство. Семейство μ подмножеств X называется ***предбазой*** *топологии τ, если совокупность всех конечных пересечений множеств из μ образует базу топологии τ.*

Другими словами, μ - предбаза топологии τ, если каждое множество из τ представимо в виде объединения конечных пересечений из μ.

<u>Определение</u> Если в топологическом пространстве (X, τ) существует счетная база, то топологическое пространство (X, τ) называют ***удовлетворяющим второй аксиоме счетности.***

<u>Определение</u> Множество A топологического пространства (X, τ) называется ***всюду плотным в X,*** *если замыкание этого множества совпадает с пространством X, т.е.* $\overline{A} = X$.

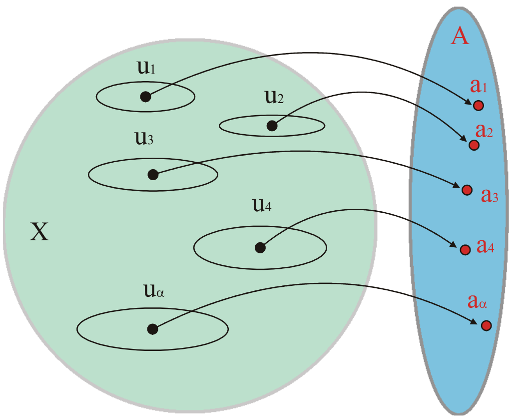
<u>Определение</u> Топологическое пространство называется ***сепарабельным****, если в нем существует счетное, всюду плотное множество.*

Примеры

1. Числовая прямая удовлетворяет второй аксиоме счетности. Роль счетной базы выполняет система открытых интервалов с рациональными концами. числовая прямая является также сепарабельным пространством, так как множество рациональных чисел счетно и всюду плотно в пространстве R^1.
2. В дискретном пространстве (X, τ) минимальной базой является семейство всех одноточечных множеств. Следовательно это пространство будет удовлетворять второй аксиоме счетности если носитель топологии будет счетным множеством.

<u>Теорема</u> Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.

▹ Пусть (X, τ) топологическое пространство и β=$\{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ его счетная база.



Выделим из множества u_1 элемент a_1, из множества u_2 элемент a_2 и т.д. Обозначим $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Очевидно, что A не более чем счетное множество. Рассмотрим $X \setminus \overline{A}$. Так как $\overline{A}$ замкнуто, то $X \setminus \overline{A}$ открыто. Следовательно как любое открытое множество оно может быть представлено в виде объединения некоторого количества множеств из базы т.е.

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup_i u_i .$$

Элемент $\begin{cases} a_1 \in A \\ a_1 \in u_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \overline{A} \Rightarrow a_1 \notin X \setminus \overline{A}$ следовательно u_1 не входит в объединение $\bigcup_i u_i$. Такие рассуждения справедливы для всех элементов a_i множества A. Следовательно ни одно из множеств базы не входит в объединение. Это означает, что $X \setminus \overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow X = \overline{A}$. Последнее равенство, учитывая счетность множества A, означает сепарабельность топологического пространства X. ◁

П. Система окрестностей точки. Первая аксиома счетности

<u>*Определение*</u> ***Системой окрестностей точки x*** *топологического пространства (X, τ) называется совокупность всех окрестностей этой точки.*

<u>*Определение*</u> *Семейство окрестностей точки x называется* ***базой*** *системы окрестностей точки x или базой в x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из совокупности.*

<u>*Определение*</u> *Говорят, что топологическое пространство* ***удовлетворяет первой аксиоме счетности,*** *если система окрестностей произвольной точки обладает счетной базой.*

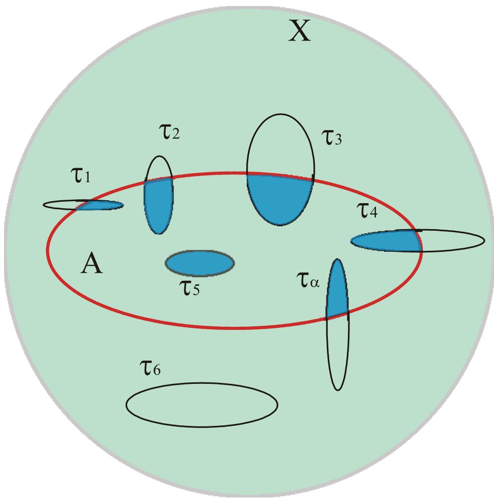
Примером пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности является любое метрическое пространство. Базой системы окрестностей точки образуют здесь отрытые шары с центром в точке и имеющие рациональный радиус.

Очевидным является утверждение: Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

§ 8. Подпространства и отделенность

В метрическом пространстве каждое подмножество образует так же метрическое пространство. Аналогичная идея имеет место и в топологических пространствах.

Пусть (X,τ) топологическое пространство и A - подмножество множества X. Обозначим через τ_A систему множеств, являющихся всевозможными пересечениями A и всех подмножеств из топологической структуры τ:



Другими словами множества системы τ_A представляют собой множества вида $\tau_j \cap A$, где $\tau=\{\tau_j\}$- топология. Докажем, что совокупность τ_A удовлетворяет аксиомам топологического пространства.

1. Так как X, $\varnothing \in \tau$ $\varnothing=\varnothing\cap A$, $A=X\cap A$, следовательно $\varnothing, A\in\tau_A$;
2. Пусть множества U_α принадлежат семейству τ_A, тогда
   $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \bigcup\limits_\alpha (V_\alpha \cap A) = \left(\bigcup\limits_\alpha V_\alpha\right) \cap A$, где множества $V_\alpha \in \tau$. Так как
   $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha \in \tau$, то $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau_A$;
3. Выполнение третьей аксиомы доказывается аналогично п.2.

*<u>Определение</u> Семейство τ_A называется **топологией на A, индуцированной топологией** τ. Топологическое пространство (A, τ_A) называется **подпространством** топологического пространства (X, τ).*

<u>Определение</u> Множества A и B топологического пространства (X, τ) называются отделенными в этом пространстве, если выполнены следующие два условия:

1. $\overline{A} \cap B = \varnothing$;
2. $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

т.е. если в каждом из множеств нет ни точек другого множества ни его предельных точек.

Например множества A=(0;1) и B=(1;2) в пространстве R^1 являются отделенными.

<u>Определение</u>. Пусть на множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2, если $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорят что топология τ_1 мажорирует топологию τ_2, если кроме того $\tau_1 \neq \tau_2$ то говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2.

Замечание. Если топология τ_1 мажорирует топологию τ_2, то всякое множество из X открытое в топологии τ_2 открыто и в топологии τ_1.

<u>Теорема</u>. Пусть τ_1 и τ_2 две топологии на множестве X, тогда эквивалентны следующие утверждения:

а) τ_1 мажорирует τ_2.

б) тождественное отображение из $X_1 \to X_2$ (где $X_i -$ множество

X наделенное топологией τ_i $i=1,2$) непрерывно.

в) Всякая окрестность точки $x \in X$ в топологии τ_2 является окрестностью точки x в топологии τ_1.

г) Для всякого $A \subset X$ замыкание A в топологии τ_1 содержится в замыкании A в топологии τ_2.

д) Всякое множество из X, замкнутое в топологии τ_2, замкнуто в топологии τ_1.

Доказательство. а) $\Rightarrow$б) Пусть τ_1 мажорирует τ_2. Рассмотрим тождественное отображение $1_X : X_1 \to X_2$, если V открыто в X_2, т.е. $V \in \tau_2$, то $(1_X)^{-1}(V) = V \in \tau_1$, т.е. $(1_X)^{-1}(V)$ открыто в X_1, что и означает отображение $1_X : X_1 \to X_2$ непрерывно.

б) $\Rightarrow$в) Пусть V_x - окрестность точки x в X_2, т.к. $(1_X)(x) = x$ и по предположению 1_X - непрерывно, то $V_x = (1_X)^{-1}(V_x)$ окрестность точки x в X_1.

в) $\Rightarrow$г) Пусть $A \subset X$ и пусть $\overline{A}_i$ - замыкание A в топологии τ_i ($i=1,2$).

Если $x \in \overline{A}_1$ и V_x - окрестность точки x в топологии τ_2, тогда V_x - окрестность точки x в топологии τ_1 и следовательно $V_x \cap A \neq \phi$, т.е. $x \in \overline{A}_2$. Т.о. $\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2$.

г) $\Rightarrow$д) Пусть B замкнуто в X_2, тогда $\overline{B}_2 = B$, то из (2) следует $\overline{B}_1 \subset \overline{B}_2 = B$, т.о. $\overline{B}_1 = B$, что и означает B замкнуто в X_1.

д) $\Rightarrow$а) Пусть V открыто в X_2, тогда $X \setminus V$ - замкнуто в X_2 и следовательно $X \setminus V$ - замкнуто в X_1 и поэтому V открыто в X_1.
Т.о. доказано, что если $V \in \tau_2$ то $V \in \tau_1$, т.е. $\tau_2 \subset \tau_1$.
Теорема доказана.

Пусть $f : X \to Y$, где X - множество, Y - топологическое пространство, если τ такая топология в X, что отображение f непрерывно, то f будет непрерывным отображением и для всякой топологии мажорирующей топологию τ.

<u>Определение</u>. Пусть $f : X \to Y$, где X - множество, Y - топологическое пространство, слабеющая топология на X, относительно которой отображение f непрерывно, называется прообразом топологии на Y относительно отображения f.

Замечание. Т.о. если τ - прообразом топологии на Y относительно отображения f, то τ состоит из всех множеств вида $f^{-1}(V)$, где V открыто в Y.

<u>Определение</u>. Пусть $f_i : X \to Y_i$ (где $i \in I$) - семейство отображений, где X - множество, $(Y_i)_{i \in I}$ - семейство топологических пространств, топология τ на X такая, что для всякого топологического пространства Z отображение $h : Z \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны $f_i \circ h$ для всякого $i \in I$ называется инициальной топологией на X относительно семейства $f_i : X \to Y_i$.

<u>Лемма</u>. Пусть τ инициальная топология на X относительно

семейства $f_i : X \to Y_i$, если τ' такая топология на X, что все отображения $f_i : X \to Y_i$ непрерывны, то τ' мажорирует τ.

Доказательство. Обозначим X - топологическое пространство с топологией τ, а X' - с топологией τ', и пусть $1_X : X' \to X$ - тождественное отображение , тогда $f_i \circ 1_X = f_i$ - непрерывны, следовательно отображение $1_X : X' \to X$ непрерывно, что и означает τ' мажорирует τ.

Следствие. Инициальная топология на X относительно семейства отображений $f_i : X \to Y_i$ - единственна.

Доказать самостоятельно.

Покажем что инициальная топология на X относительно семейства $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ существует. Пусть $U_i = f^{-1}(V_i)$, где V_i открыто в Y_i. Рассмотрим в X множество всех подмножеств вида $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_k}$, это множество является базой некоторой топологии τ на X (проверить самостоятельно). Относительно топологии τ все отображения f_i - непрерывны, и поэтому если $h : Z \to X$ непрерывное отображение, то и все $f_i \circ h$ - непрерывны.

Пусть теперь непрерывны все $f_i \circ h : Z \to Y_i$, покажем что в этом случае непрерывно отображение h, для этого достаточно проверить в случае когда открытыми в X берутся базисные множества топологии τ. Имеем $h^{-1}\left(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_k}\right) = h^{-1}\left(U_{i_1}\right) \cap \ldots \cap h^{-1}\left(U_{i_k}\right)$, но $f_i \circ h$ - непрерывны, поэтому $h^{-1}\left(U_{i_s}\right) = h^{-1}\left(f_{i_s}^{-1}\left(V_{i_s}\right)\right) = \left(f_i \circ h\right)^{-1}\left(V_{i_s}\right)$ ($s = 1,2,\ldots k$) открыто в Z, следовательно, $h^{-1}\left(U_{i_1}\right) \cap \ldots \cap h^{-1}\left(U_{i_k}\right)$ - открыто в Z. Т.о. $h : Z \to X$ - непрерывное отображение. Топология τ на X - инициальная топология относительно семейства отображений $f_i : X \to Y_i$. Кроме того, очевидно, что инициальная топология на X относительно семейства $f_i : X \to Y_i$ является слабейшей топологией на X, относительно которой непрерывны все отображения $f_i : X \to Y_i$.

Важнейшим примером инициальной топологии является произведение топологий.

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ - семейство топологических пространств и $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, слабеющая топология на $\prod\limits_{i\in I} X_i$ относительно которой непрерывны все $pr_i : X \to X_i$ называется произведением топологий пространств X_i.

<u>Определение</u>. Пусть $\{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ семейство отображений, причем X - множество, $\{Y_i\}_{i\in I}$ - семейство топологических пространств, топология τ на X, такая что для всякого топологического пространства Z отображение $h : X \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все отображения $h \circ f_i$ ($i \in I$) называется финальной топологией на X относительно семейства $\{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$.

<u>Лемма</u>. Пусть τ - финальная топология на X относительно семейства $f_i : Y_i \to X$, если τ' такая топология на X, что все

отображения $f_i : Y_i \to X$ непрерывны, то τ мажорирует τ'.

Доказательство. аналогично для инициальных топологий Также как и для инициальных топологий следует единственность финальной топологии на X относительно семейства отображений $f_i : Y_i \to X$. Покажем что финальная топология на X относительно семейства отображений $f_i : Y_i \to X$ существует. Рассмотрим множество всех подмножеств V в X таких, что $f_i^{-1}(V)$ открыто в Y_i для всякого $i \in I$. Множество таких подмножеств в X является некоторой топологией τ на X. (проверить самостоятельно). Очевидно, что в этой топологии на X непрерывны все отображения f_i, и поэтому если h - непрерывно, то и все $h \circ f_i$ - непрерывны.

Пусть теперь непрерывны все $h \circ f_i : Y_i \to Z$. Покажем что в этом случае h - непрерывно, пусть U открыто в Z, тогда $h^{-1}(U) = V$ и $f_i^{-1}(V) = f_i^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ f_i)^{-1}(U)$ открыто в Y_i $(i \in I)$, что и означает V открыть в τ на X. Таким образом топология τ на X является финальной относительно семейства отображений $f_i : Y_i \to X$.

Кроме того, очевидно, что финальная топология на X относительно семейства отображений $f_i : Y_i \to X$ сильнейшая топология на X, относительно которой непрерывны все отображения $f_i : Y_i \to X$.

Простым , но очень важным примером финальной топологии является фактортопология. Пусть X - топологическое пространство и на X (как множестве) задано отношение эквивалентности, тогда возникает фактор множество X / R и естественная проекция $\pi : X \to X / R$, сильнейшая топология на X / R, при которой непрерывна проекция π, называется фактортопологией топологии пространства X.