§ 3 Понятие топологического пространства. Примеры

В теории метрических пространств отрытые множества, окрестности предельные точки и другие понятия определяются с использованием понятия метрики. Возможен другой подход: определить сначала семейство множеств, называемых открытыми, а затем строить содержательную теории. Таким образом мы приходим к следующему определению:

Пусть X - множество элементов произвольной природы. Семейство τ его подмножеств, называемых ***открытыми множествами*** *называется* ***топологической структурой (топологией)*** *если выполнены следующие три условия (аксиомы топологического пространства)*

1. *Пустое множество и все множество X принадлежат τ;*
2. *Объединение любого количества множеств из τ принадлежит τ;*
3. *Пересечение конечного числа множеств из τ содержится в τ.*

Множество X с заданной на нем топологической структурой называется топологическим пространством.

Множество X носит название носителя топологии.

Как следует из определения из одного множества, задавая различные топологические структуры, можно получить несколько топологических пространств.

Примеры:

1. Пусть множество $X = \{a, b\}$, а семейство *τ состоит из наименьшего количества множеств* $\tau = \{X, \varnothing\}$. Проверкой можно убедиться, что выполнены аксиомы топологического пространства. Следовательно τ - топология, называемая **тривиальной топологией**. А пара (X, τ) называется тривиальным топологическим пространством (в случае двухэлементного носителя топологии оно называется ***слипшемся двоеточием****)*.
2. Множество X, то же, что и в примере 1. Семейство $\tau_1 = \{X, \varnothing, a\}$ или *(*$\tau_1 = \{X, \varnothing, b\}$*)*. Оно также является топологией. Пара (X, τ) в этом случае называется ***связанным двоеточием.***
3. Пусть множество X по-прежнему состоит из двух точек. Определим семейство *τ:* $\tau_2 = \{X, \varnothing, a, b\}$. Заметим, что в данном случае семейство τ состоит из всех подмножеств множества X τ = G(X). Это семейство является топологической структурой и называется ***дискретной топологией.*** В нашем случае пара *(X, τ)* называется ***простым двоеточием***.
4. Если (X, ρ) - произвольное метрическое пространство. Тогда в силу теоремы о свойстве системы открытых множеств метрического пространства это семейство удовлетворяет аксиомам топологического пространства. Таким образом всякое метрическое пространство является топологическим.
5. Обозначим единичный отрезок $I = [0;1]$. Семейство τ построим как всевозможные пересечения $I \bigcap u$, где u произвольные открытые множества из пространства R^1. Можно показать, что для семейства τ выполняются аксиомы топологического пространства. Введенная таким образом топология называется естественной топологией на I.

П. 2 Сравнение топологий.

Определение

Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии определенные на одном множестве. Если любое множество из топологии τ_2 входит в топологию τ_1, то говорят что топология τ_1 ***сильнее*** *топологии τ_2, а топология τ_2* ***слабее,*** *чем топология τ_1.*

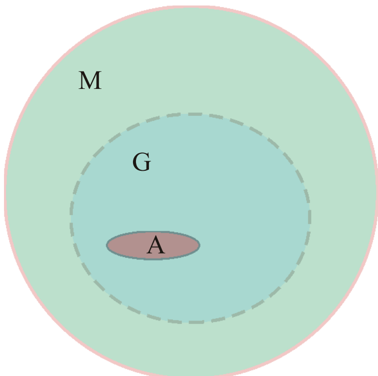
Самая слабая из всех топологий - тривиальная топология; самая сильная - дискретная.

П. 3 Окрестности. Характеристическое свойство открытых множеств.

Определение:

Окрестностью *множества A называется любое множество M, содержащее отрытое множество G⊃A.*

Как следует из определения окрестностью множества A будет являться и само отрытое множество G.



Примеры:

1. Если (X, τ) тривиальное топологическое пространство, то любая произвольная точка имеет только одну окрестность - само множество X.
2. В дискретном топологическом пространстве все множества (в том числе и одноточечные) отрыты, следовательно окрестностью точки будет любое множество, содержащее эту точку.
3. В пространстве R^1 окрестностью точки ***a*** будет являться не только интервал $(a-\delta, a+\delta)$, но и любой интервал (или их объединение), содержащий эту точку.

Теорема (Характеристический признак открытого множества)

Множество топологического пространства открыто тогда и только тогда, когда является окрестностью каждой своей точки.

▹ Необходимость.

Если G - открыто, то можно записать включение $\forall x \in G \subset G$, причем $G \in \tau$. По определению G является окрестностью.

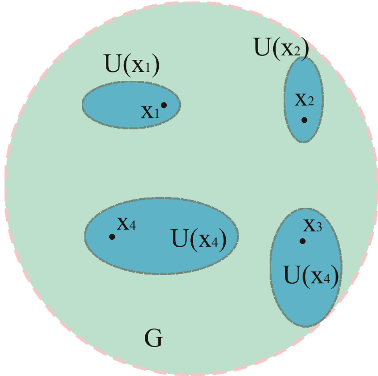
Достаточность.

Пусть некоторое множество G является окрестностью каждой своей точки. Тогда можно записать

для точки. $x_1 \quad \exists\, U(x_1), \quad x_1 \in U(x_1) \subset G, \qquad U(x_1) \in \tau$

для точки. $x_2 \quad \exists\, U(x_2), \quad x_2 \in U(x_2) \subset G, \qquad U(x_2) \in \tau$

………………………………………………………



Переберем все точки множества G и найдем объединение множеств участвующих во включениях, получим:

$$\bigcup_{\alpha} x_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha}) \subset G\,. \; (*)$$

Множество, стоящее в левой части включения есть множество G. Тогда включение (*) примет вид

$$G \subset \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha}) \subset G\,.$$

Откуда следует, что

$$G = \bigcup_{\alpha} U(x_{\alpha})\,.$$

Объединение любого количества открытых множеств, есть множество открытое, следовательно G- открытое множество. ◁

§ 4 Замкнутые множества. Свойства системы замкнутых множеств.

*<u>Определение</u> Множество A топологического пространства называется **замкнутым,** если его дополнение открыто.*

Если множество G открыто то его дополнение X\G замкнуто, так как множество X\(X\G)=G открыто. Если множество X\G замкнуто, то его дополнение X\(X\G) открыто. Таким образом имеет место следующее утверждение: *множество топологического пространства является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.*

<u>Примеры</u>

1. Если (X,τ) произвольное топологическое пространство, то X и ∅ являются замкнутыми множествами (одновременно и открытыми по аксиоме топологического пространства), так как X\∅=X - открытое множество и X\X=∅ - также открытое множество.
2. Если (X,τ) - дискретное пространство, то все множества в нем являются замкнутыми и открытыми.
3. В пространстве R^1, замкнутым множеством, например, будет являться отрезок [a;b], т.к. его дополнение R\[a;b]=(-∞,a)∪(b,+ ∞) - открыто.
4. В пространстве "связное двоеточие" $X = \{a,b\}$, $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ замкнутыми множествами являются X, ∅, $\{b\}$. Других замкнутых множеств в этом пространстве нет.

<u>Теорема</u> Система всех замкнутых множеств топологического пространства (X,τ) обладает следующими свойствами:

1. *X и $\varnothing$ являются замкнутыми множествами;*
2. *Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто;*
3. *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

$\triangleright$ Первое утверждение доказано в примере №1.

2. Пусть $\{F_\alpha\}$ система замкнутых множеств. Тогда, с учетом того факта, что замкнутое множество есть дополнение отрытого, получаем $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha=\bigcap\limits_\alpha (X\setminus G_\alpha)=X\setminus\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, т.к. объединение открытых множеств есть множество открытое, а его дополнение - замкнуто, то множество $X\setminus\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ - замкнуто.
3. Аналогично найдем объединение конечного числа замкнутых множеств: $\bigcup\limits_{n=1}^{k} F_n=\bigcup\limits_{n=1}^{k}(X\setminus G_n)=X\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{k} G_n$, так как пересечение конечного числа отрытых множеств G_k есть множество открытое , то множество $X\setminus\bigcap\limits_{n=1}^{k} G_n$ - замкнуто. $\triangleleft$

Свойства системы замкнутых множеств, целиком ее характеризуют, поэтому возможен подход, когда эти свойства принимают за систему аксиом при определении топологического пространства. Таким образом имеет место, следующая

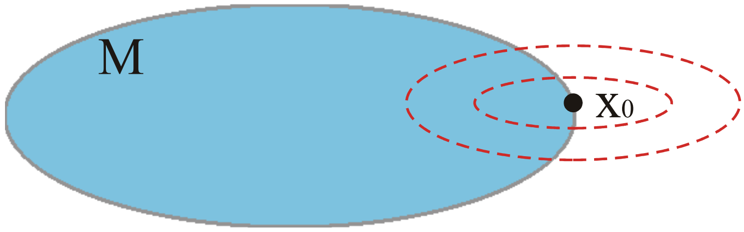
<u>Теорема</u> Пусть X - произвольное множество и λ семейство его подмножеств, обладающее следующими свойствами:

1. *X, $\varnothing\in\lambda$;*
2. *Пересечение любого количества множеств из λ принадлежит λ;*
3. *. Объединение конечного числа множеств из λ принадлежит λ.*

Обозначим через τ, семейство дополнений всевозможных множеств из λ. Тогда τ является топологией на X, а λ - система замкнутых множеств топологического пространства $(X,\ \tau)$.

§ 5 Замыкание множества. Оператор замыкания

*<u>Определение</u> Точка x_0 топологического пространства X называется **точкой прикосновения** множества M, если любая окрестность этой точки имеет с множеством M непустое пересечение.*



*<u>Определение</u> Совокупность всех точек прикосновения множества M называется **замыканием** множества M и обозначается $\overline{M}$. Операция присоединения к множеству всех его точек прикосновения называется **операцией замыкания.***

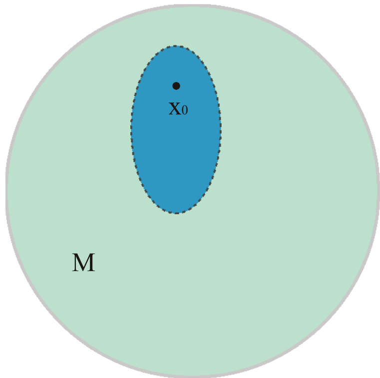
<u>Пример</u>

В метрическом пространстве замыканием открытого шара является замкнутый шар.

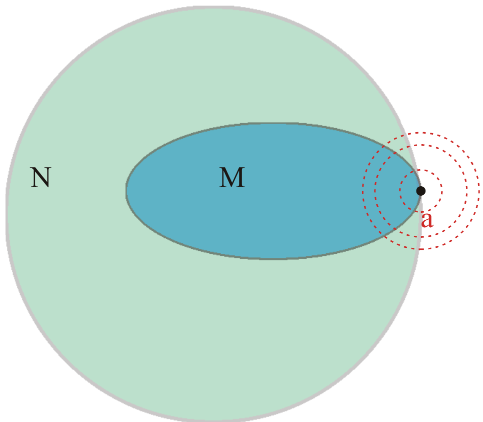
<u>*Теорема*</u>: *Операция замыкания обладает следующими свойствами:*

1. $M \subset \overline{M}$;
2. Если $M \subset N$ то $\overline{M} \subset \overline{N}$ (монотонность операции замыкания);
3. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;
4. $\overline{M \bigcup N} = \overline{M} \bigcup \overline{N}$;

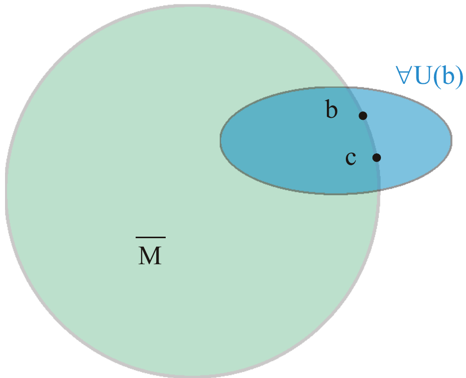
$\triangleright$ Первое свойство вытекает непосредственно из определения, действительно пусть $\forall x_0 \in M$ и произвольная окрестность этой точки $U(x_0) \bigcap M \supset \{x_0\} \neq \varnothing$, что означает что точка x_0 является точкой прикосновения множества M.



2. Пусть $\forall a \in \overline{M} \Rightarrow \forall U(a) \bigcap M \neq \varnothing$, т.к. $M \subset N$ то $U(a) \bigcap N \neq \varnothing$ следовательно $a \in \overline{N} \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$.



3. В силу свойств 1 и 2 $M \subset \overline{M} \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Докажем противоположное включение, т.е. $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$.



Пусть $\forall b \in \overline{\overline{M}}$ это означает, что произвольная окрестность точки b имеет с множеством $\overline{M}$ непустое пересечение, т.е.

$$\forall U(b) \bigcap \overline{M} \neq \varnothing \Rightarrow \begin{cases} \exists c \in U(b) \\ c \in \overline{M} \end{cases} \Rightarrow U(b) \bigcap M \neq \varnothing \Rightarrow b \in \overline{M},$$

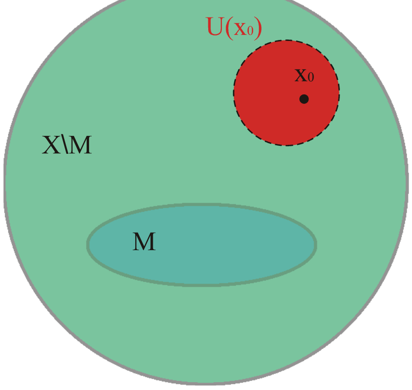
последнее означает, что $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$.

(Свойство 4 будет доказано ниже).

<u>*Теорема*</u> *Множество М топологического пространства X, замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием* $\overline{M}$.

▹ <u>Необходимость</u>. Пусть М замкнуто, тогда G=X\M открыто. Докажем, что $\overline{M} \subset M$, т.е. каждая точка прикосновения принадлежит М. Пусть. Так как множество G открытое, то оно является окрестностью каждой своей точки, следовательно существует окрестность $U(x_0) \subset G$. Тогда $U(x_0) \bigcap M = \varnothing$. Следовательно точка x_0 не является точкой прикосновения множества М. Следовательно $\overline{M} \subset M$. Ранее было доказано $M \subset \overline{M}$, следовательно $M = \overline{M}$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $M = \overline{M}$ докажем, что G=X\M является открытым множеством, а потому М - замкнуто. Пусть произвольная точка $x_0 \in G \Rightarrow x_0 \notin M$. Так как $M = \overline{M}$ то $x_0 \notin \overline{M}$ т.е. не является точкой прикосновения множества М. Следовательно существует такая окрестность этой точки, которая не пересекается с множеством М.



Мы получили, что множество G=X\M является окрестностью каждой своей точки. Следовательно G - отрыто, а М - замкнуто. ◃

<u>*Следствие*</u> *Замыкание* $\overline{M}$ *множества М из пространства X является замкнутым множеством в топологическом пространстве X.*

<u>*Теорема*</u> *Замыкание любого множества M пространства X совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих M.*

$\triangleright$ Пусть M произвольное множество топологического пространства X и $N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$, где пересечение происходит по всем замкнутым множествам, содержащим множество M. По построению множества N оно является замкнутым и является подмножеством любого замкнутого множества, содержащего M, в частности, является подмножеством $\overline{M}$, т.к. это множество замкнуто и содержит M. Таким образом $N \subset \overline{M}$.

Докажем обратное включение. Для этого возьмем произвольное замкнутое множество F⊃M. Так как для замкнутого множества $F = \overline{F}$ из монотонности операции замыкания получим $M \subset F \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{F} = F$. Таким образом, замыкание $\overline{M}$ содержится в каждом замкнутом множестве F, содержащим M, следовательно $\overline{M}$ будет содержаться и в пересечении таких множеств, т.е. $\overline{M} \subset N$. Два противоположные включения означают, что множества равны т.е. $\overline{M} = N \quad \triangleleft$.

Докажем свойство 4 операции замыкания.

Рассмотрим произвольные множества M и N. Имеют место очевидные включения $\begin{cases} M \subset M \bigcup N \\ N \subset M \bigcup N \end{cases}$. Используем монотонность операции замыкания

$$\begin{cases} M \subset M \bigcup N \\ N \subset M \bigcup N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{M} \subset \overline{M \bigcup N} \\ \overline{N} \subset \overline{M \bigcup N} \end{cases} \Rightarrow \overline{M} \bigcup \overline{N} \subset \overline{M \bigcup N};$$

С другой стороны

$$\begin{cases} M \subset \overline{M} \\ N \subset \overline{N} \end{cases} \Rightarrow M \bigcup N \subset \overline{M} \bigcup \overline{N} \Rightarrow \overline{M \bigcup N} \subset \overline{\overline{M} \bigcup \overline{N}}. \quad (*)$$