§2. Метрические пространства

Одним из часто встречающихся в математике понятий является понятие ***расстояния***. Оно используется в аналитической геометрии при изучении свойств геометрических объектов в евклидовых пространствах, в математическом анализе при определении такого фундаментального понятия как предел числовой последовательности (или функции) и.д. Обобщив некоторые понятия, французский математик ***М. Фреше*** построил теорию метрических пространств.

П.1 Понятие метрического пространства.

Пусть X произвольное непустое множество. Говорят, что на X задана ***метрика*** (расстояние), если для каждой паре элементов $x,y \in X$ поставлено в соответствие единственное неотрицательное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее следующим трем условиям (аксиомам метрического пространства)

1. $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома тождества);
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для $\forall x,y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x,y)+\rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ $\forall x,y,z \in X$ (аксиома треугольника);

Пара (X, ρ) т.е. множество X с заданной на нем метрикой называется **метрическим пространством.**

Если (X, ρ)- метрическое пространство и $A \subset X$, то пара (A, ρ), где $\rho(x,y)$ расстояние между точками $x,y \in A$ равно расстоянию между этими точками в пространстве (X, ρ), также будет являться метрическим пространством и называется **подпространством** пространства (X, ρ).

Примеры:

1. На любом непустом множестве X можно определить метрику следующим образом:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y;\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

Такое пространство называется *пространством изолированных точек.*

2. Пусть X - множество действительных чисел. В качестве расстояния между точками возьмем функцию

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств функции абсолютная величина числа. Полученное метрическое пространство называется *одномерным арифметическим пространством или числовой прямой*.

3. Пусть X - множество упорядоченных наборов n вещественных чисел. Тогда для любых двух его точек $x=(x_1,x_2,...x_n)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ определим расстояние

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\ ;$$

Получим метрическое пространство, называемое *n-мерным арифметическим пространством,* которое обозначается R^n.

4. Множество оставим прежним, а метрику определим иначе

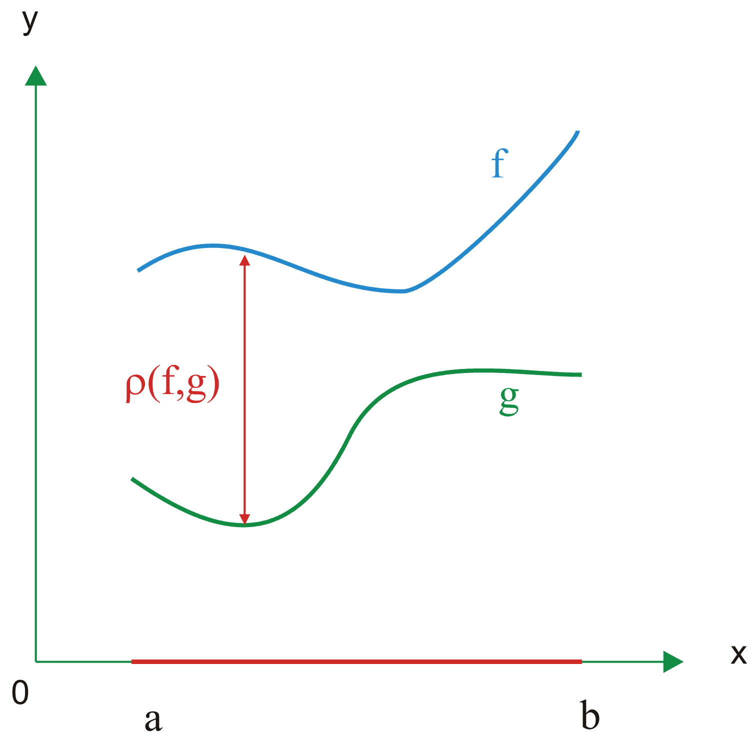
$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|\ .$$

Полученное пространство обозначают R_n^0.

5. Воспользуемся множеством вех функций, непрерывных на отрезке [a;b]. Расстоянием между двумя его элементами будем вычислять по формуле

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|.$$

Получили пространство непрерывных на [a;b] функций (обозначается $C_{[a;b]}$).



6. Возьмем множество числовых последовательностей, квадраты членов которых образуют сходящийся числовой ряд. Метрику определим аналогично метрики примера 3, т.е. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ $y=(y_1,y_2,\dots,y_n,\dots)$

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}\ ;$$

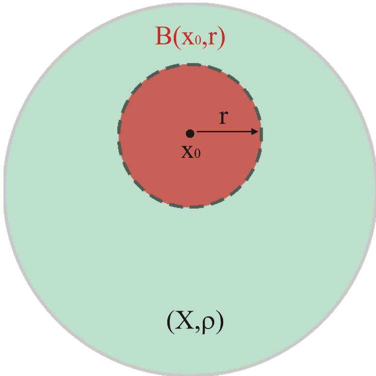
Получили метрическое пространство, называемое *координатным пространством Гильберта.*

П.2 Основные определения.

Пусть (X,ρ) произвольное метрическое пространство.

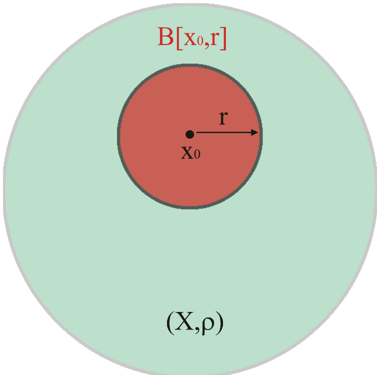
Открытым шаром радиуса r и с центром в точке x_0 называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше r

$$B(x_0,r)=\{x\in X|\rho(x_0,x)<r\}.$$

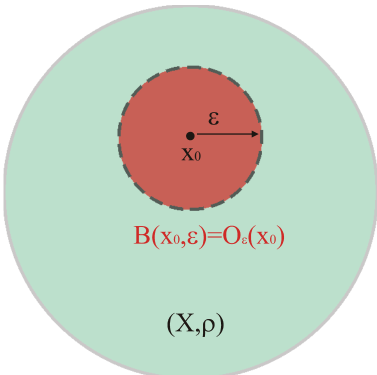


Замкнутым шаром радиуса r и с центром в точке x_0 называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше или равно r

$$B[x_0,r]=\left\{x\in X\middle|\rho(x_0,x)\le r\right\}.$$



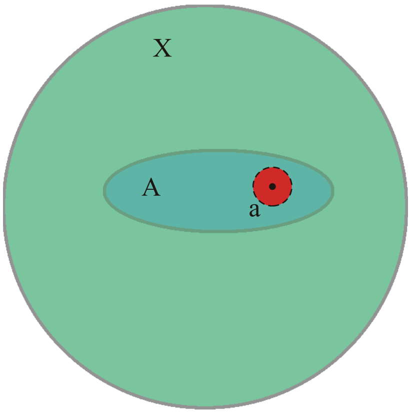
Окрестностью точки а *(сферической окрестностью)* называется открытый шар с центром в этой точке и радиуса ε.



В пространстве R^1 открытым шаром $B(x_0,r)$ является интервал (x_0-r,x_0+r).

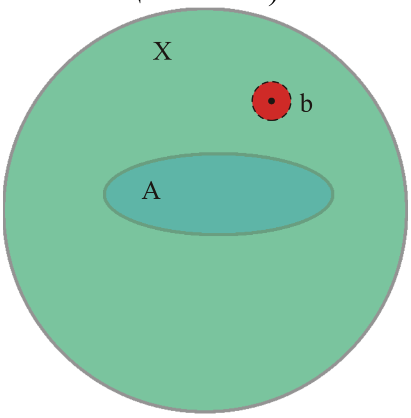
Пусть A - произвольное множество метрического пространства (X,ρ).

Точка $a\in A$ называется ***внутренней точкой множества*** A, если существует окрестность этой точки, целиком входящая во множество A. Совокупность всех внутренних точек множества A называется ***внутренностью*** множества A и обозначается A^0 (другое обозначение intA). Множество, состоящее только из внутренних точек называется ***отрытым.***



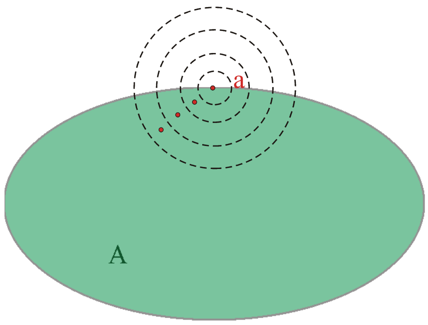
Внутренняя точка

Точка b называется ***внешней точкой*** множества A, если она является внутренней точкой дополнения т.е. множества X\A (т.е. существует окрестность точки b, не имеющая с множеством A общих точек).

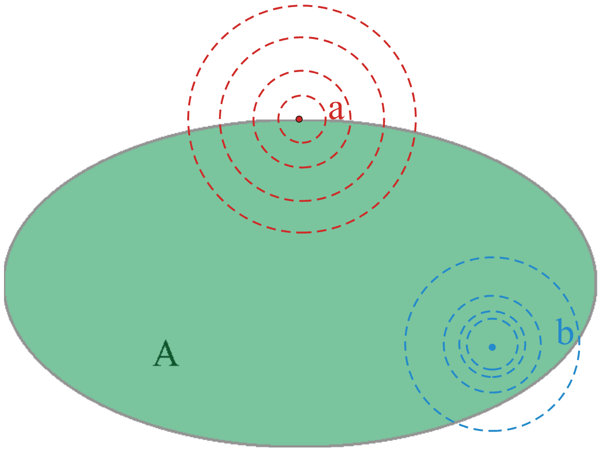


Внешняя точка

Точка $a \in A$ называется ***предельной точкой множества A,*** если в любой окрестности точки содержится бесчисленное количество точек из множества A. Множество всех предельных точек множества A называется ***производным множеством*** и обозначается A'



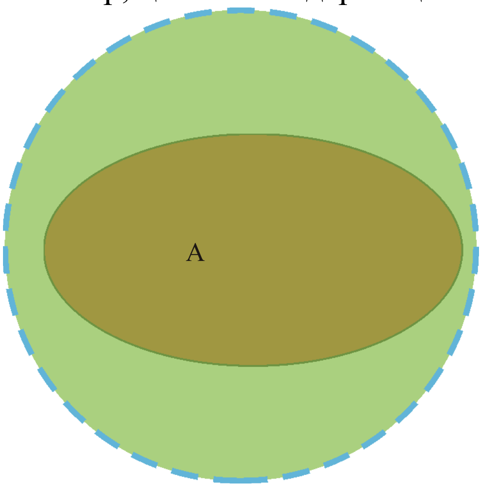
Точка a называется ***<u>точкой</u> <u>прикосновения</u> <u>множества</u> A,*** если в любая окрестность точки a имеет с множеством A непустое пересечение.



Замечание: *Каждая предельная точка является точкой прикосновения, но не наоборот.*

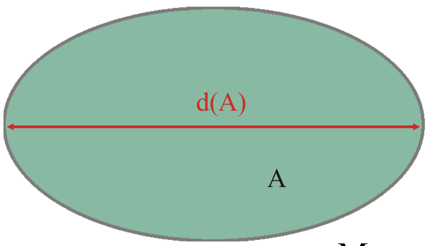
Точка множества А, не являющуюся предельной точкой называется ***изолированной точкой*** (если точка изолированная, то существует такая окрестность этой точки, которая содержит из множества только саму эту точку). Каждая точка прикосновения или предельная точка или изолированная.

Множество М метрического пространства (X,ρ) называется ***ограниченным*** если существует открытый шар, целиком содержащий множество М.



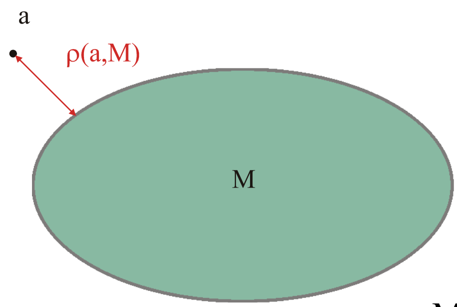
Диаметром множества М называется число

$$d(M) = \sup_{x,y \in M} \rho(x,y)$$



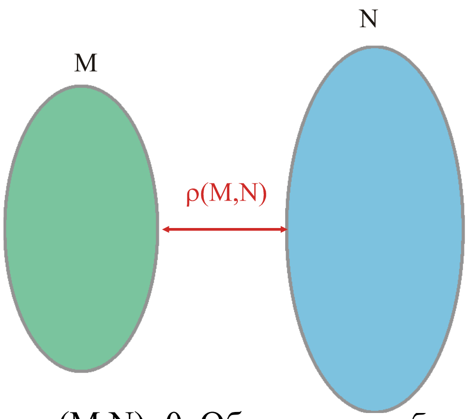
Расстоянием от точки а до множества М называется число

$$\rho(a,M) = \inf_{x \in M} \rho(a,x).$$



Расстоянием между двумя множествами M и N называется число

$$\rho(M,N)=\inf_{x\in M,y\in N}\rho(x,y)$$



Если $M\bigcap N\neq\varnothing$ то ρ(M,N)=0. Обратное, вообще говоря не верно.

Примеры:

1) В пространстве R^1 множество $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ обладает следующими свойствами:

- все точки изолированные (внутренних точек не имеется $A^0=\varnothing$).
- точка $0\notin A$ является точкой прикосновения этого множества;
- множество ограничено;
- диаметр множества d(A)=1;
- множеством внешних точек является множество

$$B=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)$$

2) Множество C=(a;b)$\subset R^1$ обладает следующими свойствами:

- множество C открыто, т.к. все его точки внутренние;
- множество точек прикосновения совпадает с производным множеством C^0=[a;b];
- изолированных точек нет;
- множество C ограничено;
- диаметр множества d(C)=b-a;

П.3 Понятие сходимости.

Последовательность точек $x_1,x_2,x_3,\ldots$ метрического пространства (X,ρ) называется ***сходящейся*** к точке **a,** если

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$$

т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \mathrm{n}_0,\ \ \forall \mathrm{n} > \mathrm{n}_0\ \ \Rightarrow \rho(\mathrm{x}_\mathrm{n}, a) < \varepsilon$. При этом точку **а** называют ***пределом*** последовательности и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

<u>*Теорема*</u> 1 *Последовательность точек метрического пространства может иметь только один предел.*

▹ Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a_1) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a_2) = 0.$$

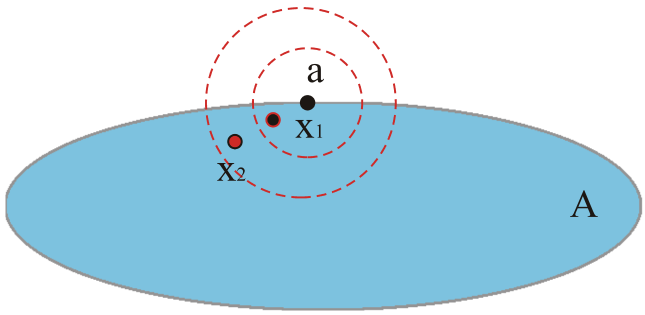
Тогда в неравенстве треугольника для точек a_1 и a_2 ($a_1 \neq a_2$)

$$\rho(a_1, a_2) \le \rho(a_1, x_n) + \rho(x_n, a_2)$$

правая часть стремится к нулю, а левая часть постоянна и отлична от нуля. Полученное противоречие доказывает теорему. ◃

<u>*Теорема*</u> 2 *Точка **a** метрического пространства* (X,ρ) *является точкой прикосновения множества А, тогда и только тогда, когда во множестве А существует последовательность точек, сходящихся к точке **a.***

▹ Если точка ***a*** точка прикосновения множества А, то любая ее окрестность, в частности, открытый шар $B\left(a, \dfrac{1}{n}\right)$ имеет с множеством А непустое пересечение, следовательно в каждом таком шаре существует хотя бы одна точка $x_n \in A$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$. Следовательно $x_n \to a$. ◃



<u>*Теорема*</u> 3 *Точка **a** метрического пространства* (X,ρ) *является предельной точкой множества А, тогда и только тогда, когда во множестве А существует последовательность попарно различных точек, сходящихся к точке **a.***

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

<u>*Определение*</u>.

Последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *пространства (X,ρ) называется* ***фундаментальной*** *если для любого числа ε>0 найдется такое число N, что для всех n, m >N выполняется неравенство:* $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Определение.

Метрическое пространство в котором всякая фундаментальная последовательность сходится называется ***полным***.

В терминах теории метрических пространств известный критерий Коши сходимости числовой последовательности означает полноту метрического пространства R^1.

Полными являются пространства R^n, $\mathrm{R}_0^n, \mathrm{C}_{[a;b]}$.

П.4 Замыкание множества. Свойства операции замыкания.

<u>Определение</u>: Присоединение к множеству всех его точек прикосновения называется ***замыканием множества.***

Замыкание множества М обозначается $\overline{\mathrm{M}}$.

Определение: Множество М метрического пространства (X,ρ) *называется* ***замкнутым*** *если оно совпадает со своим замыканием.*

Операция замыкания обладает следующими свойствами:

1. $A \subset \overline{A}$;
2. $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$;
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
4. $\overline{M \bigcup N} = \overline{M} \bigcup \overline{N}$;

(Доказательство этих свойств будет приведено для более общего случая топологических пространств).

П.5 Свойства открытых и замкнутых множеств метрического пространства.

<u>Теорема</u> 4 *Множество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

$\triangleright$ Пусть F замкнутое множество. И точка $x_0 \in X \setminus F$. Так как множество F содержит все свои точки прикосновения, то x_0 не является таковой, а следовательно существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в дополнении множества F т.е. в $X \setminus F$. Таким образом мы получаем, что произвольная точка $X \setminus F$ является внутренней, а само множество - открыто.

Предположим теперь, что множество $X \setminus F$ - отрытое множество. Докажем, что множество F содержит все свои точки прикосновения. Пусть точка $y_0 \in \overline{F}$ (т.е. y_0 точка прикосновения множества F) и $y_0 \notin F$. Тогда $y_0 \in X \setminus F$, в силу открытости множества $X \setminus F$ существует окрестность $B(y_0, \varepsilon) \subset X \setminus F$. Тогда точка y_0 не является точкой прикосновения множества F. Получили противоречие с тем что $y_0 \notin F$, следовательно множество F содержит все свои точки прикосновения т.е. замкнуто. $\triangleleft$

<u>Теорема</u> 5 (О свойствах системы открытых множеств)

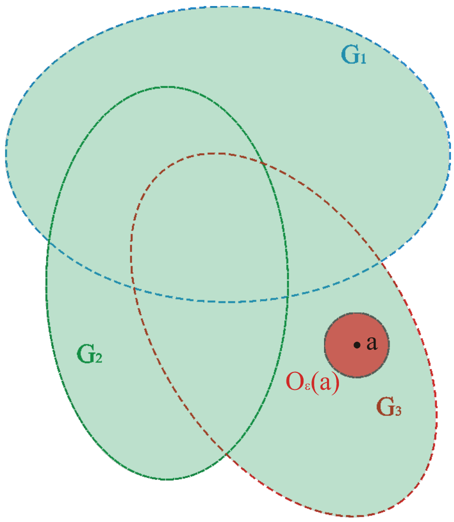
Отрытые множества обладают следующими свойствами:

1. Все пространство X и $\varnothing$ - открытые множества;
2. Объединение любого количества открытых множеств, есть множество открытое.
3. Пересечение конечного числа открытых множест есть множество открытое.

1 утверждение теоремы очевидно.

Пусть множества G_α - открыты в метрическом пространстве (X,ρ). Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$. Так как точка x_0 принадлежит объединению множеств, то существует по крайней мере, одно множество G_β, которое содержит эту точку. Множество G_β - открытое, следовательно все его точки внутренние. Значит существует такой открытый шар

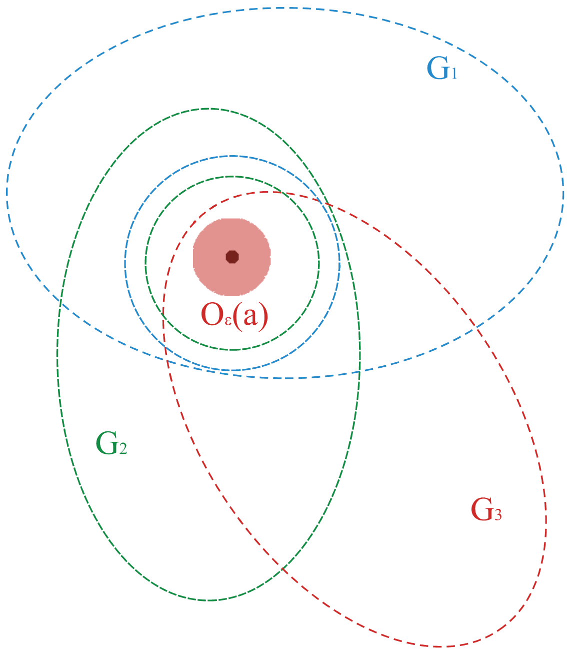
$B(x_0,\varepsilon)\subset G_\beta$.Следовательно $B(x_0,\varepsilon)\subset\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$. Таким образом произвольная точка $x_0\in G$ оказалась внутренней, следовательно множество G - открытое.



3. Выберем произвольную точку $y_0\in\widetilde{G}=\bigcap\limits_{n=1}^{k}G_n$. Так как все множества $G_1,G_2,\ldots,G_n$ открытые то

$$\exists\ B(y_0,\varepsilon_1)\subset G_1,\ \exists\ B(y_0,\varepsilon_2)\subset G_2,\ldots,\exists\ B(y_0,\varepsilon_k)\subset G_k.$$

Все сферические окрестности точки y_0 отличаются лишь радиусами. Обозначим $\varepsilon=\min\limits_{1\le i\le k}\{\varepsilon_i\}$. Тогда сферическая окрестность $B(y_0,\varepsilon)$ будет входить во <u>**все**</u> множества $G_1,G_2,\ldots,G_n$, а следовательно и в пересечение этих множеств. Таким образом произвольная точка $y_0\in\widetilde{G}$ оказалась внутренней, следовательно множество $\widetilde{G}$ - открытое. $\triangleleft$



<u>Теорема</u> Семейство всех замкнутых множеств обладает следующими свойствами:

1. Все пространство X и $\varnothing$ -являются замкнутыми множествами;
2. Объединение конечного числа замкнутых множеств - замкнуто;
3. Пересечение любого числа замкнутых множеств - замкнуто.

Доказательство теоремы основано на применении формул Де Моргана.

Замечание:

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть и не открыто. Рассмотрим, например, в пространстве R^1 пересечение множеств $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\{0\}.$. Результат пересечения одноточечное множество $\{0\}$ не является отрытым множеством в R^1.