**Российский государственный университет**
**Имени Иммануила Канта**

Кафедра математического анализа

В.Н. Худенко,

# УЧЕБНО МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ТОПОЛОГИИ

Калининград 2008

Введение :

Топология, как наука, сформировалась по общему мнению в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре (на рубеже XIX и XX столетий). Начало топологических исследований можно отнести к середине XIX века к работам Римана. Им была сделана попытка сформулировать понятие многомерного многообразия, ввести понятие связности.

Пуанкаре так определял содержание Analysis situs (геометрия положения) “Analysis situs есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур не только в обычном пространстве, но также в пространстве более трех измерений.

Отдельные результаты по топологии были получены Л. Эйлером, Жорданом, Г. Кантором и др. Но только после того как в начале XX века М. Фреше и Ф. Хаусдорф заложили основы тории метрических и топологических пространств, топология стала самостоятельным разделом математики.

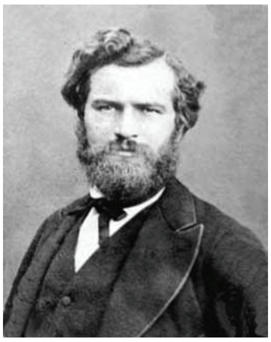
В 20 - 30 годах сложилась Московская топологическая школа, яркими представителями которой являются П.С. Александров, П.С. Урысон, А.Н. Колмогоров, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин.

Топология находит широкое применение в дифференциальной геометрии, в теории относительности, в математическом и функциональном анализе, современной алгебре, теоретической физике и других разделах математики.

Пуанкаре Жуль Анри (Poincaré Jules Henri 1854-1912) – французский математик и астроном. Учился в Политехнической, а затем в Горной школах Парижа. С 1886 года профессор Парижского университета. Большой цикл работ Пуанкаре касается дифференциальных уравнений. Докторская диссертация посвящена особым точкам систем дифференциальных уравнений. Построил качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых на плоскости. Эти и некоторые другие работы привели Пуанкаре к созданию топологии.

Леонард Эйлер (Euler Leonard 1707-1783) математик механик физик.
Во время учебы в Базельском университете слушал лекции Иоганна Бернулли. С 1727 года работает в только что созданной Петербургской Академии наук. В Петербурге Эйлер прожил с 1727 по 1741 и с 1966 до конца жизни. За первый период подготовил к печати 80 трудов. Работал по многим направлениям, даже участвовал в составлении карт России, подготовил фундаментальный труд по теории кораблестроения. 25 лет прожил в Берлине, где фактически руководил

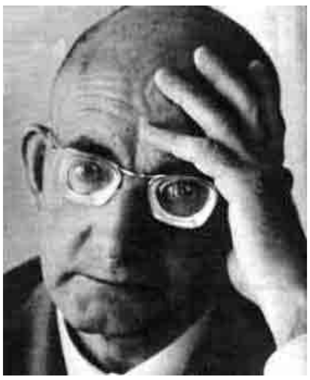
Берлинской академией наук. Живя в Берлине не переставал работать для Петербургской АН. Во второй период в Петербурге, несмотря на почти полную слепоту подготовил боле 400 трудов, в том числе несколько больших книг.



Жордан Мари Энмон Камиль (Jordan Marie Ennemond Camille 1838-1922) – французский математик. Основные труды по алгебре, теории функций, топологии и кристаллографии. Ему принадлежат первые систематические труды по теории групп и группам Галуа и трехтомный труд по анализу.

Кантор Георг (Cantor Georg 1845-1918) – немецкий математик. Окончил Берлинский университет в 1867. 1879-1913 профессор университета в г. Галле. Разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел. Общепризнанный основоположник терии множеств. Ввел понятие предельной точки множества, производного множества, построил пример совершенного множества, развил одну из теорий иррациональных чисел.

Фреше Морис Рене (Fréchet Maurice René 1878-1973) французский математик. Основные труды по топологии и функциональному анализу, где ввел современные понятия метрического пространства, компактности, полноты и др. Работал также в области теории вероятностей. Работал в Страсбургском университете (1919-1927 гг.) и Парижском университете (1928-1949).

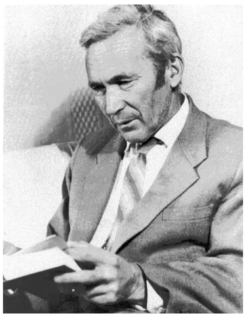


Александров Павел Сергеевич 1896-1982 советский математик, член Академии наук (с 1953 г., член-корреспондент с 1929), герой социалистического труда. В 1917 г. Окончил Московский университет, с 1929 года его профессор. Создатель отечественной топологической школы. Ввел вместе с П.С. Урысоном понятие бикомпактного пространства. Ввел ряд фундаментальных понятий топологии (нерв покрытия, аппроксимация общих топологических пространств полиэдрами и т.д.).

http://kvant.mccme.ru

Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

Урысон Павел Самуилович (1898-1924). Отечественный математик. Окончил Московский университет 1919 году. Был сотрудником института математики и механики Московского университета, профессором 2-го Московского университета (ныне Московский государственный педагогический университет). Основные труды по топологии. В 1921-1922 годах впервые в нашей стране прочел курс топологии. Погиб от несчастного случая при купании во Франции.



Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987) отечественный математик член Академии наук, герой социалистического труда. В 1925 г. Окончил Московский университет с 1931 года профессор этого университета. Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного где ему принадлежат фундаментальные результаты по тригонометрическим рядам, теории меры, теории множеств, тории интеграла, теории приближений функций. В дальнейшем внес существенный вклад в развитие конструктивисткой логики, топологии, функционального анализа, и особенно, - в теории вероятностей.

Тихонов Андрей Николаевич род 1906 г. Отечественный математик. В 1927 г. Окончил Московский университет, с 1936 года преподает в нем, с 1970 года декан факультета вычислительной математики и кибернетики. С 1953 г. в работает в Институте прикладной математики им. Келдыша. Первые работы по топологии и функциональному анализу, введено понятие тихоновского произведения пространств, теорема о бикомпактности произведения бикомпактных пространств и т.д.

Л. Понтрягин.

Понтрягин Лев Семенович (1908-1988 гг.). В 13 лет в результате несчастного случая лишился зрения. Окончил Московский университет (1929). С 1939 года зав. отделом Института математики им. В.А. Стеклова и одновременно профессор Московского университета. Основные труды по топологии и математической теории оптимальных процессов. В топологии открыл общий закон двойственности и построил теорию характеров непрерывных коммутативных групп, получил ряд важных результатов в теории гомотопий.

# ГЛАВА I ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

## Некоторые сведения из теории множеств

Множество - одно из основных неопределяемых понятий.

Под *множеством* понимают рассматриваемую как единое целость совокупность (семейство, набор и т.д. ) предметов произвольной природы.

Множество А состоящее из элементов $x_\alpha$, где α пробегает некоторое множество N, называемое ***множеством индексов***, обозначается $A=\{x_\alpha, \alpha \in N\}$.

Примеры задания множеств:

$$A=\{(x_1,x_2)\in R^2 : x_1^2+x_2^2\le 4\}$$

$$B=\{(x_1,x_2)\in R^2 : x_1\in(1;2), x_2\in[-2;\infty)\}$$

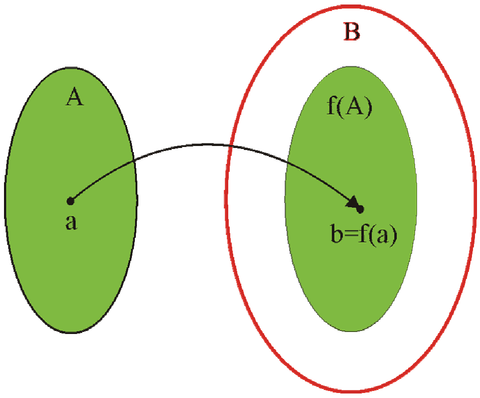
Множеством является пустое множество, т.е. множество, не содержащее никаких элементов (обозначается $\varnothing$)

Приняты обозначения $a\in B$, $A\subset B$.

*Два множества называются равными* $A=B$, если $A\subset B$, и $B\subset A$.

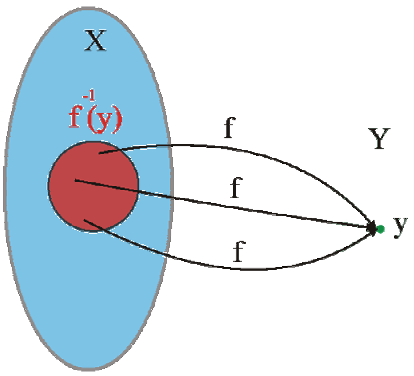
П.2 *Отображение множеств.*

*Пусть задано два непустых множества X и Y. Если каждому элементу x ∈X поставлен в соответствие единственный элемент y∈Y, то говорят что задано отображение из X в Y и пишут* $f: X\to Y$.




Элемент y ∈Y *называют образом элемента x и обозначают* $y=f(x)$.

Пусть $y\in B$ . Совокупность всех элементов $x\in X$, имеющих у своим образом называется ***прообразом (полным прообразом)*** элемента у и обозначают $f^{-1}(y)$.



Если $A \subset X$, то множество всех образов элементов из А обозначается $f(A)$. Пусть $B = f(A)$. Если $B = Y$ то отображение $f$ называется *сюръективным*.

Если $f(x) = y_0$ для любых $x \in X$, то отображение $f$ называется *постоянным.*

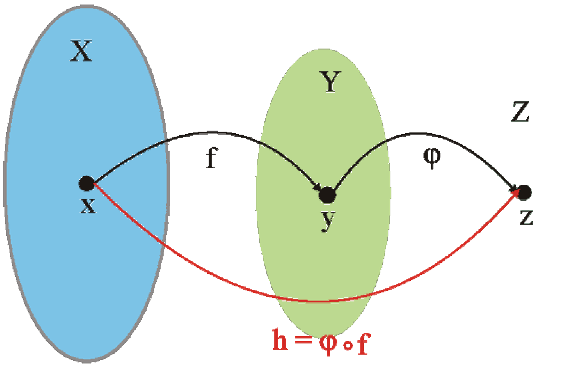
Если f(x) = x для любого $x \in X$, то отображение называется ***тождественным*** на X и обозначается $I_x$.

Если при отображении $f: X \to Y$ для любых $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ то отображение $f$ называется *инъективным.*

Отображение $f$ одновременно являющееся инъективным и сюръективным называют *биективным* или *взаимно- однозначным.*

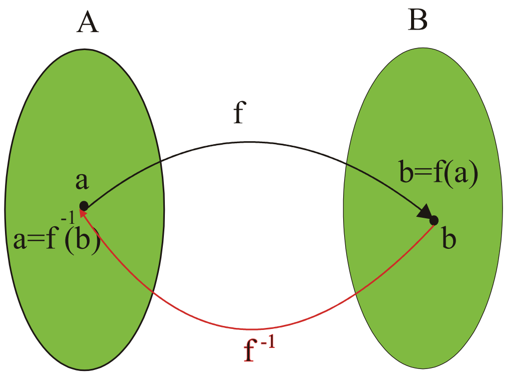
Отображение $i: A \to X$, где $A \subset X$, ставящее в соответствие каждому элементу $x$ его самого, т.е. $i(x) = x$ для $\forall x \in A$ называется *вложением* (или *отображением включения*).

Пусть имеются два отображения: $f: X \to Y$ и $\varphi: Y \to Z$, тогда отображение $\psi: X \to Z$, такое что $\psi(x) = \varphi(f(x))$ для $\forall x \in X$ называется *композицией отображений* и обозначается $\psi = \varphi \circ f$.




***Определение*** Отображение $f^{-1}$ называют *обратным* к отображению $f$, если элементу $b \in B$ ставится в соответствие элемент $a \in A$, образом которого при отображении $f$ является $b$:

$$f^{-1} : B \to A \Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A : a = f^{-1}(b).$$

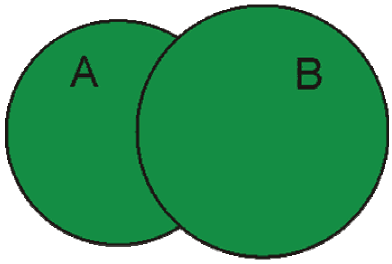



П. 3 *Операции над множествами*

Пусть задано произвольное семейство множеств $X = \{A_\alpha, \alpha \in N\}$. Множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит, по крайней мере, одному из множеств $A_\alpha$ называют ***объединением*** множеств семейства X и обозначают $\underset{\alpha \in N}{\cup} A_\alpha$.

Для объединения множеств справедливы законы коммутативности и ассоциативности:

1. $A \cup B = B \cup A$;    2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.



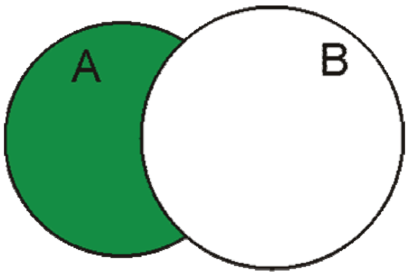

A∪B

***Разностью*** между множествами А и В (или ***дополнением*** множества В до множества А, если $B \subset A$) называются те элементы множества А, которые не входят во множество В.

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

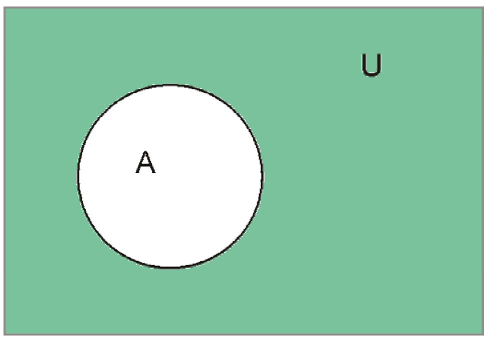
Очевидные свойства этой операции:

1. $A \setminus A = \varnothing$,    2. $A \setminus \varnothing = A$.



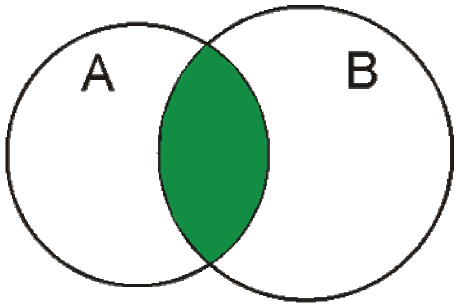

A \ B

Дополнение до универсального множества.




U \ A

Пусть задано произвольное семейство множеств $X = \{A_\alpha, \alpha \in N\}$. Множество, состоящее из всех тех элементов, каждый из которых принадлежит каждому из множеств $A_\alpha$ называют ***пересечением*** множеств семейства X и обозначают $\bigcap_{\alpha\in N} A_\alpha$. Для этой операции также справедливы законы коммутативности и ассоциативности.




A∩B

В дальнейшем будут использоваться формулы де Моргана:

$$1.\ A\setminus\bigcup_\alpha B_\alpha=\bigcap_\alpha(A\setminus B_\alpha);\quad 2.\ A\setminus\bigcap_\alpha B_\alpha=\bigcup_\alpha(A\setminus B_\alpha);$$

Докажем первое равенство. Пусть $x\in A\setminus\bigcup_\alpha B_\alpha \Rightarrow \begin{cases} x\in A, \\ x\notin \bigcup_\alpha B_\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in A, \\ x\notin B_\alpha, \forall\alpha \end{cases} \Rightarrow$

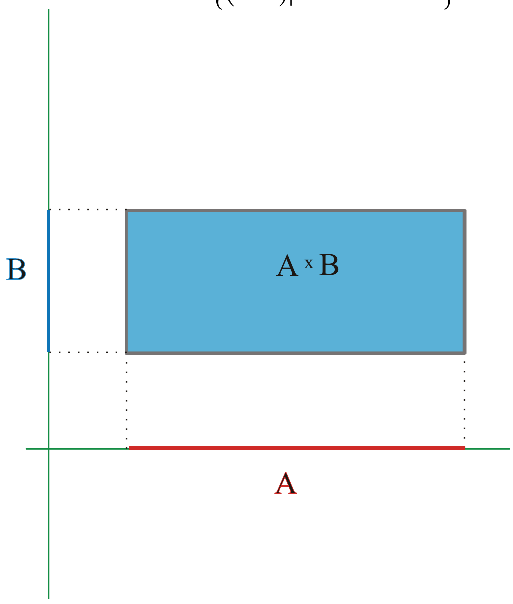
$$\Rightarrow x\in A\setminus B_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow x\in\bigcap_\alpha A\setminus B_\alpha.$$

Пусть $y\in\bigcap_\alpha A\setminus B_\alpha \Rightarrow y\in A\setminus B_\alpha,\forall\alpha \Rightarrow \begin{cases} y\in A, \\ y\notin B_\alpha,\forall\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y\in A, \\ y\notin\bigcup_\alpha B_\alpha \end{cases} \Rightarrow y\in A\setminus\bigcup_\alpha B_\alpha.$$

Введем еще одну операцию над множествами. Пусть A и B два произвольные множества. ***Декартовым произведением*** (или просто произведением) множества A на множество B называется множество упорядоченных пар (a,b), т.е.

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}.$$




Данное определение допускает обобщение на любое конечное число слагаемых.

*П. 4 Общие свойства отображений.*

Рассмотрим отображение $f: X \to Y$.

<u>*Теорема*</u> *1: Для любых двух множеств A и B из X образ объединения равен объединению образов; образ пересечения содержится в пересечении образов:*

$$f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B);$$
$$f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$$

<u>*Теорема*</u> *2: Для любых двух множеств M и N из Y прообраз объединения равен объединению прообразов; прообраз пересечения равен пересечению прообразов:*

П.5 *Мощность множества.*

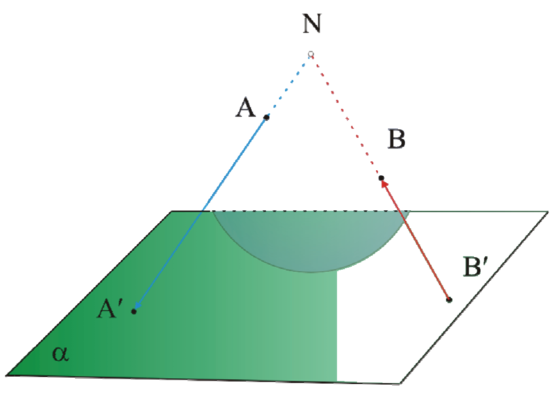
Если между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу $a \in A$ поставлен в соответствие один и только один элемент $b \in B$, и наоборот, каждому элементу $b \in B$ соответствует один и только один элемент $a \in A$. Тогда множества A и B называются ***эквивалентными*** и обозначают A~B.

Примером эквивалентных множеств является два множества, содержащих одинаковое число элементов.

Множество точек отрезка $[0,1]$ эквивалентно множеству точек отрезка $[2,4]$ взаимно однозначное соответствие осуществляет функция (возможно подобрать и другую)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2), \quad \text{где} \quad x \in [2;4].$$

Еще одним примером эквивалентных множеств является так называемая "стереографическая проекция", показывающая, что множество точек сферы (с выколотым северным полюсом S) эквивалентно множеству точек плоскости α.




Проектирование с центром в точке S устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками $\widetilde{M}$ сферы и M плоскости. Интересен факт, что эта конструкция была известна математикам древней Греции.

Конечные множества различаются по количеству элементов. Возникает вопрос о возможности различать "количественно" различать бесконечные множества.

Пусть A - произвольное множество. Поставим этому множеству в соответствие число $m(A)$, называемое ***кардинальным числом*** или ***мощностью*** множества A. При этом

$$m(A) = m(B) \Leftrightarrow \mathrm{A} \sim \mathrm{B}$$

Мощность конечного множества $m(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = n$. Мощность пустого множества $m(\varnothing) = 0$. Мощность множества натуральных чисел: $m(N) = \mathrm{a}$. Каждое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным множеством.

Мощность множества $m((0;1]) =$ C. Множество с кардинальным числом C называется ***множеством мощности континуум.***

Пусть A и B два множества и m=$m(A)$, n=$m(B)$. Будем считать, что m>n, если B эквивалентно некоторому подмножеству множества A и не эквивалентно самому множеству A.

П. 6 *Элементарные мощности*

<u>*Теорема*</u> *Каждое бесконечное множество имеет счетное подмножество.*

Доказательство: Пусть A - произвольное множество. Выберем какой - ни будь его элемент $x_1 \in A$. Рассмотрим множество $A \setminus \{x_1\}$, которое не пустое и бесконечное. Выделим из этого множества элемент $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$. Далее рассматриваем бесконечное множество $A \setminus \{x_1, x_2\}$ и т.д. Так мы прейдем к определению подмножества $M \subset A$, $M = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, которое является счетным множеством.

Следствие:

*Если m является мощностью некоторого бесконечного множества то $m \geq a$*

Для счетных множеств справедливы следующие утверждения:

1. *Объединение счетного и конечного числа дизъюнктных множеств есть множество счетное.*
2. *Объединение конечного числа счетных дизъюнктных множеств есть множество счетное.*
3. *Объединение счетного числа счетных дизъюнктных множеств есть множество счетное.*

Докажем последнее утверждение

Для доказательства рассмотрим счетное семейство счетных множеств

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ...\}, A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ...\}, ..., A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, ...\}$

Пронумеруем элементы объединения этих множеств в следующем порядке:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14}\ldots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & a_{24}\ldots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow \\
a_{31} & \rightarrow & a_{32} & \rightarrow & a_{33} & & a_{34}\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Этим мы показали, что множество $B = \bigcup_n A_n$ эквивалентно множеству натуральных чисел, т.е. счетно.

Имеет место следующая

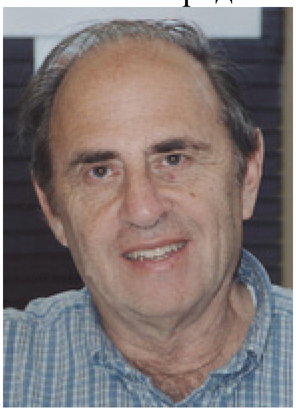
<u>*Теорема*</u> *Множество чисел* $(0;1]$ *несчетно.*

Доказательство: Так как $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\} \subset (0;1]$ то с ≥ а. Покажем, что с ≠ а. Предположим противное, т.е. что любое число принадлежащее множеству $(0;1]$ можно занумеровать. Запишем эти числа, представив их в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots$$
$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим некоторую дробь $\alpha_0 = 0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$, где $a_1 \neq a_{11}, a_2 \neq a_{22}, \ldots\ a_n \neq a_{nn}$. Очевидно, что $\alpha_0 \in (0;1]$. Кроме того среди выписанных дробей этой дроби нет. Следовательно, мы получили противоречие, которое доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что С > а. Возникает вопрос о существовании множества промежуточной мощности. Г. Кантор предположил, что такого множества нет. Такое предположение было в математике названо континуум - гипотезой.



Только в середине 60-х годов американским математиком П. Коэном было доказано, что принятие или отрицание этой гипотезы не противоречит аксиомам теории множеств, т.е. континуум - гипотеза является одной из аксиом теории множеств.