Методичка +

17 марта 2018 г.

1. Если все касательные плоской кривой длины L пересекают круг радиуса ε, то
$$\max_{[0,L]} |k(s)| \leq \frac{\varepsilon}{(a+L)L},$$
где a – расстояние от точки на кривой до центра круга. А в пространстве?

2. Пусть $\gamma(s)$ плоская кривая. Предположим, что существует константа l такая, что площадь между касательной и отрезком кривой длины l постоянна и равна S для каждой точки на кривой. Верно ли, что кривизна кривой должна быть постоянной?

3. Пусть γ – плоская кривая, параметризованная натурально вектор-функцией $\vec{r}(s)$. Обозначим через α – угол между $\vec{r}(s)$ и вектором главной нормали кривой. Положим $r = |\vec{r}(s)|$. Покажите, что
$$r' = \sin\alpha, \quad \alpha' = k + \frac{\cos\alpha}{r},$$
где k - кривизна кривой.

4. Пусть $\vec{\gamma}$ – кривая на поверхности $F^2 \subset E^3$, параметризованная натурально вектор-функцией $\vec{r}(s)$. Обозначим через α – угол между $\vec{r}(s)$ и вектором главной нормали кривой, а через θ – угол между $\vec{r}(s)$ и единичным вектором нормали поверхности. Положим $r = |\vec{r}(s)|$. Покажите, что
$$\begin{aligned} r' &= \sin\alpha\sin\theta, \\ \alpha' &= \operatorname{ctg}\theta(k_n\cos\alpha - \varkappa_g\sin\alpha) + k_g + \frac{\cos\alpha}{r\sin\theta}, \\ \theta' &= k_n\sin\theta + \varkappa_g\cos\theta + \frac{\sin\alpha\cos\theta}{r}, \end{aligned}$$
где k_g, k_n и $\varkappa_g$ – геодезическая кривизна, нормальная кривизна и геодезическое кручение кривой, соответственно.

   Обозначим через β – угол между $\vec{r}(s)$ и вектором касательной кривой $\vec{\gamma}$. Тогда
$$\cos\beta = \sin\alpha\sin\theta.$$

5. Пусть (u, v) – координаты точки, являющейся образом точки (x, y, z) при стереографической проекции из верхней половины двуполостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, Докажите, что

$$x = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \qquad y = \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \qquad z = \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}.$$

6. Пусть (u, v) – координаты точки, являющейся образом точки (x, y, z) при стереографической проекции из северного полюса сферы $x^2+y^2+z^2 = 1$. Докажите, что

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \qquad z = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

7. Пусть $\{x(t), y(t)\}$ кривая на поверхности с конформной метрикой

$$ds^2 = e^A(dx^2 + dy^2).$$

Покажите, что ее геодезическая кривизна может быть выражена формулой

$$k_g = e^{-A}k_0 - \big\langle \nu_g, \operatorname{grad} A \big\rangle = e^{-A}k_0 - dA(\nu_g),$$

где k_0 – кривизна этой кривой на евклидовой плоскости, а ν_g – единичный положительно ориентированный вектор геодезической нормали кривой.

8. Покажите, что кривыми постоянной геодезической кривизны на сфере являются окружности и только они.

9. Докажите, что стереографическая проекция сферы на экваториальную плоскость является конформным отображением, приводящим первую квадратичную форму сферы радиуса R к виду:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$$

10. Докажите, что при стереографической проекции из северного полюса сферы окружности, не проходящие через полюс, переходят в окружности на плоскости, а окружности, проходящие через полюс – в прямые.

11. Проверьте, что при стереографической проекции сферы на экваториальную плоскость, прообразом окружности

$$x = a + r\cos t, \quad b + r\sin t$$

является окружность с геодезической кривизной

$$k_g = \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2}{R^2 r},$$

а прямая

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2$$

в окружность с геодезической кривизной

$$k_g = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

12. Найдите дифференциал отображения стереографического проектирования. Найдите образ вектора $\{1, 1\}$, касательного к сфере в точке $(u, v) = (\pi/4, 0)$.

13. Покажите, что геодезическая кривизна окружности внешнего радиуса r на сфере радиуса R равна
$$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$$

14. На плоскости Лобачевского с метрикой Пуанкаре $ds^2 = \frac{R^2(dx^2+dy^2)}{y^2}$ $(y > 0)$ геодезическая кривизна k_g евклидовой окружности
$$\{x = x_0 + r\cos t, y = y_0 + r\sin t\}$$
выражается формулой
$$k_g = \frac{y_0}{R\,r},$$
а геодезическая кривизна евклидовой прямой
$$\{x = a_1 t + b_1, y = a_2 t + b_2\}$$
выражается формулой
$$k_g = \frac{1}{R}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

15. Пусть $\{x(t), y(t)\}$ кривая на плоскости Лобачевского с метркой Пуанкаре
$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2} \ (y > 0).$$
Покажите, что ее геодезическая кривизна может быть выражена формулой
$$k_g = \frac{1}{R}\left(y k_0 + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}\right),$$
где k_0 – кривизна этой кривой на евклидовой плоскости.

16. Покажите, что суммарный ориентированный угол поворота $\Delta\alpha$ касательного векторного поля вдоль кривой на плоскости Лобачевского с метрикой Пуанкаре выражается формулой

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \int\limits_\gamma \frac{dx}{y},$$

где $\Delta\alpha_0$ – суммарный поворот этого поля вдоль той же кривой на евклидовой плоскости.

17. Покажите, что геодезическая кривизна координатных линий данной поверхности вычисляются как

$$k_g(u^1, u_0^2) = \frac{\sqrt{\det g}}{(g_{11})^{3/2}}\,\Gamma_{11}^2(u^1, u_0^2), \quad k_g(u_0^1, u^2) = -\frac{\sqrt{\det g}}{(g_{22})^{3/2}}\,\Gamma_{22}^1(u_0^1, u_2).$$

В частности,

- на поверхности касательных пространственной кривой $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + t\tau(s)$

$$k_g = \left[0, -\frac{k' + k(1 + t_0^2 k^2)}{(1 + t_0^2 k^2)^{3/2}}\right];$$

- на поверхности главных нормалей $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + t\nu(s)$

$$k_g = \left[0, \frac{k - t_0(k^2 + \varkappa^2)}{(1 - t_0 k)^2 + t_0^2 \varkappa^2}\right];$$

- на поверхности бинормалей $\vec{r} = \vec{\rho}(s) + t\beta(s)$

$$k_g = \left[0, -\frac{t_0 \varkappa^2}{1 + t_0^2 \varkappa^2}\right],$$

  где k и $\varkappa$ – кривизна и кручение базовой кривой. В частности, для простой винтовой линии геодезическая кривизна эквидистант базовой кривой постоянна (окружности по Дарбу). Но эти линии не замкнуты, даже для поверхности касательных, которая изометрична плоскости.

18. На поверхности

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = a\,\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

найдите кривые, пересекающие кривую $v = const$ под постоянным углом θ. Такие кривые на поверхностях вращения называются *локсодромами*.

19. Найдите локсодромы относительно заданного семейства геодезических линий на двумерной поверхности[1]. В частности, найдите локсодромы на поверхности вращения.

[1]Указание: введите полугеодезическую систему координат

20. Пусть $\vec{r}$ – регулярная параметризация поверхности $F^2 \subset E^3$. Положим $r = |\vec{r}|$ и обозначим через θ угол между $\vec{r}$ и нормалью к поверхности в соответствующей точке. Покажите, что
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|\operatorname{grad} r|_S}{r},$$
где $|\operatorname{grad} r|_S$ – модуль градиента функции r на единичной сфере $S : \vec{\rho} = \frac{1}{r}\vec{r}$. Утверждение верно для гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$. Обоснуйте.

    В частности, для кривой на плоскости
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r_\omega}{r},$$
где ω – угол между $\vec{r}$ и фиксированным направлением (полярный угол). Спирали
$$\vec{r} = e^{\omega \operatorname{tg}\theta}\{\cos\omega, \sin\omega\}$$
составляют единственное с точностью до поворота на постоянный угол семейство кривых с постоянным углом $\theta \neq 0$.

21. Поверхность в E^3 называется поверхностью постоянного наклона, если радиус-вектор $\vec{r}$ точки поверхности образует постоянный угол $\theta \in [0, \pi/2]$ с нормалью к поверхности в этой точке. Покажите, что при $\theta \neq 0$ проекция радиус-вектора на касательную плоскость является (каноническим) главным направлением, а соответствующая главная кривизна равна $k = -\frac{\cos\theta}{|\vec{r}|}$.

22. Покажите, что локально поверхность постоянного наклона задается радиус-вектором вида
$$\vec{r} = u\sin\theta\big(\cos\varphi(u)\,\vec{e}(v) + \sin\varphi(u)\,\vec{e}(v) \times \vec{e}\,'(v)\big),$$
где $\vec{e}(v)$ – локальная натуральная параметризация кривой на единичной сфере и $\varphi(u) = \cot\theta \ln u$.

23. Докажите, что кривизна C^2 - регулярной кривой пропорциональна кручению тогда и только тогда, когда найдется такой постоянный вектор $\vec{a}$, что $\langle\vec{a}, \vec{\tau}\rangle = const$, где $\vec{\tau}$ – единичный векторо касательной к кривой.

24. Покажите, что нормальная кривизна кривой k_n, ее геодезическое кручение $\varkappa_g$, гауссова кривизна K и средняя кривизна H поверхности связаны соотношением
$$k_n^2 + \varkappa_g^2 = 2Hk_n - K.$$
В частности, вдоль асимптотической линии $\varkappa = \varkappa_g = -K$, где $\varkappa$ – пространственное кручение кривой (теорема Бельтрами-Эннепера).

25. Покажите, что гауссова и средняя кривизны поверхности и ее λ-эквидистанты связаны соотношением

$$K^* = \frac{K}{\det(I - \lambda A)} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K^2};$$

$$H^* = \frac{1}{2} trace((I - \lambda A)^{-1} A) = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K^2},$$

где A – матрица Вейнгартена, I – единичная матрица.

26. Покажите, что формулу для средней кривизны λ- эквидистантной поверхности $F^n \subset E^{n+1}$ можно записать в виде

$$H^* = \frac{1}{n} \frac{d}{d\lambda} \ln \Big(\det(I - \lambda A) \Big)$$

27. Нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности и ее λ- эквидистанты связаны соотношением

$$k_n^* = \frac{k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2)}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2};$$

$$\varkappa_g^* = \frac{\varkappa_g}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

28. Покажите, что геодезическая кривизна кривой на поверхности и ее образа на λ - эквидистантной поверхности связаны соотношением

$$k_g^* = \frac{k_g - \lambda(\varkappa_g' + 2k_n \varkappa_g) + \lambda^2(k_n \varkappa_g' - \varkappa_g k_n' + k_g(k_n^2 + \varkappa_g^2))}{((1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2)^{3/2}}.$$

В частности, для линии кривизны

$$k_g^* = \frac{k_g}{1 - \lambda k_n}.$$

29. Асимптотическая линия на поверхности переходит в асимптотическую линию эквидистанты тогда и только тогда, когда гауссова кривизна поверхности в точках этой линии равна 0.

30. Поверхности

$$\Phi_1 : \vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k_1} \vec{n} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k_2} \vec{n},$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, называются фокальными (для данной поверхности). Покажите, что фокальные поверхности взаимно ортогональны (в точках, отвечающих одной и той же нормали поверхности).

31. Фокальными гиперповерхностями гиперповерхности F^n, параметризованной вектор - функцией $\vec{r} : D^n \to F^n \subset E^{n+1}$ называются гиперповерхности, параметризованные вектор-функциями $\vec{\rho}_i = \vec{r} + \frac{1}{k_i}\vec{n}$, где k_i – главные кривизны гиперповерхности, а $\vec{n}$ – поле единичных нормалей гиперповерхности. Покажите, что фокальные поверхности гиперповерхности $\vec{r} : D^n \to F^n \subset E^{n+1}$ и только они являются поверхностями, на которых падает ранг нормального экспоненциального отображения, то есть отображения $F : D^n \times I\!R \to E^{n+1}$ заданного в виде $\vec{\rho}(u,t) = \vec{r}(u) + t\vec{n}(u)$, где $\vec{n}(u)$ – поле единичных нормалей гиперповерхности.

32. Пусть $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(u)$ параметризованная пространственная кривая, $\vec{a}$ – единичное векторное поле в точках кривой $\vec{\gamma}$. Поверхность

$$\Phi : \vec{r} = \vec{\gamma}(u) + v\vec{a}(u) \quad (\vec{a}\,' \neq \vec{0})$$

называется общей параметризованной линейчатой поверхностью. Покажите, что гауссова кривизна общей параметризованной линейчатой поверхности вычисляется по формуле

$$K = -\frac{(\vec{a}\,', \vec{\gamma}\,', \vec{a})^2}{\left(|\vec{\gamma}\,' + v\vec{a}\,'|^2 - \left\langle \vec{\gamma}\,', \vec{a}\right\rangle^2\right)^2}$$

33. Покажите, что нормаль к общей линейчатой поверхности стационарна вдоль каждой образующей тогда и только тогда, когда гауссова кривизна поверхности $K = 0$.

34. Линия на общей линейчатой поверхности $\vec{r} = \vec{\gamma}(u) + v\vec{a}(u)$, параметризованная вектор-функцией

$$\vec{\rho} = \vec{\gamma} - \frac{\left\langle \vec{\gamma}\,', \vec{a}\,'\right\rangle}{|\vec{a}\,'|^2}\,\vec{a}$$

называется линией сжатия (стрикционной линией). Покажите, что стрикционная линии есть геометрическое место точек поверхности, где равна нулю геодезическая кривизна ортогональных траекторий образующих.

35. Покажите, что стрикционная линия есть геометрическое место точек поверхности, в которых минимальна гауссова кривизна поверхности вдоль соответствующей образующей.

36. (Формула Бертрана-Пюизе) Обозначим через r радиус геодезической окружности с центром точке q на поверхности, а через L_r – ее длину. Тогда для Гауссовой кривизны поверхности имеет место формула

$$K(q) = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L_r}{r^3}.$$

37. Обозначим через F_r – площадь геодезического круга радиуса r с центром в точке q на поверхности. Тогда для Гауссовой кривизны поверхности имеет место формула

$$K(q) = \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - F_r}{r^4}.$$

38. Кривая постоянной геодезической кривизны на поверхности называется окружностью Дарбу. Если каждая окружность на поверхности является окружностью Дарбу, то гауссова кривизна поверхности постоянна. Обратное неверно (приведите пример). Однако, если каждая окружность Дарбу замкнута, то поверхность имеет постоянную гауссову кривизну.

39. (Теорема Якоби) Пусть γ – регулярная замкнутая кривая в E^3, нормальный сферический образ которой γ^* не имеет самопересечений. Тогда γ^* делит сферу на две равновеликие части.

40. Пусть γ – регулярная замкнутая геодезическая на выпуклой поверхности в E^3 класса C^2. Тогда ее сферический образ которой γ^* не имеет самопересечений. Тогда ее нормальный сферический образ γ^* делит сферу на две равновеликие части.

41. Покажите, что дивергенция единичного векторного поля ξ на поверхности с точностью до знака равна геодезической кривизне ортогональных траекторий этого поля

$$k_g(\gamma) = \pm div(\xi).$$

В частности, для семейства линий на плоскости, заданного уравнением $F(x, y) = const$ имеет место формула

$$\pm k = div\left(\frac{grad\, F}{|grad\, F|}\right) = \partial_x \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right) + \partial_y \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right).$$

42. Покажите, что геодезическая кривизна кривой $f(u^1, u^2) = c$ на двумерной поверхности выражается формулой

$$k_g = -div\Big(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}\Big)\Big|_{f=c} = -\Big(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g}\Big|_{f=c} + \nabla\left(f, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g}\right)\Big|_{f=c}\Big);$$

43. Покажите, что выражение для средней кривизны гиперповерхности $f(u^1, \dots, u^n) = c$ в римановом пространстве (F^n, g) может быть приведено к виду

$$H\Big|_{f=c} = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g}\Big|_{f=c} + \nabla\left(f, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g}\right)\Big|_{f=c}\right).$$

44. Покажите, что средняя кривизна координатной гиперповерхности $u^k = c = const$ может быть сведена к формуле

$$H\Big|_{u^k=c} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{\sqrt{g^{kk}}}\left(-g^{ij}\Gamma^k_{ij} + \frac{1}{g^{kk}}g^{ik}g^{jk}\Gamma^k_{ij}\right)\Big|_{u^k=c} =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(g^{kk})^{3/2}}\begin{vmatrix} g^{kk} & g^{ki} \\ g^{kj} & g^{ij} \end{vmatrix}\Gamma^k_{ij}\right)_{u^k=c}.$$

45. Покажите, что геодезическое кручение натурально параметризованной линии $\vec{\gamma}$ на поверхности равно высоте параллелограмма, построенного на векторах γ' и $A\gamma'$, опущенной на строну единичной длины.

46. Для гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$, определим геодезическое кручение поверхности формулой

$$\varkappa_g(X) = \frac{\sqrt{|AX|^2|X|^2 - \langle AX, X\rangle^2}}{|X|^2}.$$

Покажите, что геодезическое кручение равно второй кривизне (кручению) геодезической линии поверхности, проходящей через данную точку в направлении вектора X.

47. Пусть (e_1, e_2) ортонормированные векторные поля на двумерной поверхности F^2. Пусть γ – натурально кривая на поверхности, образующая в точке, отвечающей параметру s на кривой угол $\alpha(s)$. Покажите, что для геодезической кривизны кривой γ имеет место формула (формула Лиувилля):

$$k_g(\gamma) = \frac{d\alpha}{ds} + k_g^{(1)}\cos\alpha + k_g^{(2)}\sin\alpha,$$

где $k_g^{(1)}$ и $k_g^{(2)}$ – геодезические кривизны интегральных траекторий полей e_1 и e_2, соответственно, вычисленные в точках кривой.

48. Пусть (e_1, e_2) ортонормированные векторные поля на двумерной поверхности F^2. Обозначим через k_1 и k_2 ориентированные геодезические кривизны интегральных траекторий полей e_1 и e_2 соответственно. Тогда для гауссовой кривизны поверхности имеет место формула

$$K = e_1(k_2) - e_2(k_1) - (k_1^2 + k_2^2).$$

49. Две пространственные кривые, имеющие во всех своих точках общие главные нормали образуют пару кривых Бертрана. Покажите, что

- расстояние a между точками этих кривых, соединенных общей главной нормалью, постоянно;

- угол ω между касательными в этих точках (и, как следствие, между соприкасающимися плоскостями) постоянен;
- кривизна k каждой из кривых Бертрана связана с ее кручением $\varkappa$ соотношением:
$$k \sin \omega + \varkappa \cos \omega = \frac{\sin \omega}{a}$$

50. (Теорема Бельтрами) В гиперболической точке поверхности кривизна асимптотической линии равна $3/2$ от кривизны сечения поверхности ее касательной плоскостью.