Ю. Г. БОРИСОВИЧ, Н. М. БЛИЗНЯКОВ,
Я. А. ИЗРАИЛЕВИЧ, Т. Н. ФОМЕНКО

Введение в топологию

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

*Рекомендовано Государственным комитетом
Российской Федерации по высшему образованию
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Математика»*

МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1995

ББК 22.152
В24
УДК 515.12 (075.8)

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований согласно проекту 95-01-00048

Рецензенты:

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина;

профессор *А. С. Мищенко.*

Введение в топологию /Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко: Учеб. пособие.—2-е изд., доп.—М.: Наука. Физматлит, 1995.—416 с.—ISBN 5-02-014118-6.

Содержит материал, составляющий основу топологических знаний. Излагаются понятия и теоремы общей и гомотопической топологий, дается классификация двумерных поверхностей, основные понятия гладких многообразий и их отображений, рассматриваются элементы теории Морса и теории гомологий с приложениями к неподвижным точкам.

В книге использованы иллюстрации академика РАН А. Т. Фоменко.

1-е издание —1980 г.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика». Может быть использована преподавателями.

Ил. 130. Библиогр. 87 назв.

Учебное издание

БОРИСОВИЧ Юрий Григорьевич, БЛИЗНЯКОВ Николай Михайлович, ИЗРАИЛЕВИЧ Яков Аронович, ФОМЕНКО Татьяна Николаевна

Введение в топологию

Редакторы *Д. Б. Фукс, Е. Ю. Ходан.* Художественный редактор *Т. Н. Кольченко.*
Технический редактор *Е. В. Морозова.* Корректор *О. Ф. Алексеева.*
Оператор верстки *А. В. Чудинов.* График *М. В. Ивановский.*

ИБ № 32673

ЛР № 020297 от 27.11.91. Подписано к печати с оригинал-макета 27.06.95. Формат 60×90/16. Бумага кн.-журн. Усл. печ. л. 26. Усл. кр.-отт. 26,25. Уч.-изд. л. 26,8. Тираж 5000 экз. Заказ № 2911 . С-030.

Издательская фирма «Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

В $\frac{1602060000-030}{053(02)-95}$ Без объявл.

ISBN 5-02-014118-6

Оглавление

Глава V. ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ 335

Предисловие

Роль топологии — дисциплины, введенной в учебные планы математических факультетов в середине 70-х годов, — в системе университетского образования, на наш взгляд, весьма значительна. Без привлечения топологических понятий вряд ли возможно построить курсы математического анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, механики, функционального анализа, отвечающие современному состоянию этих математических дисциплин. Необходимо уже на младших курсах знакомить студентов с топологическими методами исследования.

Опыт чтения топологии для младших курсов показал, что нужна книга, доступная студентам с минимальной математической подготовкой (общие сведения по теории множеств, курс общей алгебры, начала линейной алгебры и математического анализа), вводящая читателя в круг основных понятий современной топологии и содержащая определенный запас топологических фактов и методов.

Данное пособие — один из возможных вариантов начального курса топологии, на выборе которого, безусловно, отразились и личные вкусы авторов, и их опыт педагогической и исследовательской работы. В нем излагаются разделы топологии, наиболее тесно связанные с фундаментальными общематематическими курсами и приложениями; учебный материал позволяет лектору выбирать различные варианты построения курса топологии и вести факультативные занятия.

Отметим ряд методических особенностей нашего пособия. Изложение общей топологии мы стремились вести активно, вводя конструктивные элементы, например, связанные с понятием факторпространства. По этой причине оно вводится гораздо ранее других общетопологических понятий и дает возможность сразу изучать важные примеры многообразий как топологические пространства (двумерные поверхности, проективные пространства, пространства орбит и др.), на которых позднее (гл. IV) появляются и гладкие структуры. Теория двумерных поверхностей излагается не в одном месте, а рассредоточивается по гл. I, II, III в соответствии с развитием основных понятий топологии. В теории гомотопий вводится понятие категории и функтора и объясняется идея алгебраизации топологических задач. Функториальная точка зрения обеспечивает единство изложений гомотопической и гомологической теорий и позволяет естественно завершить описание различных теорий гомологий аксиоматикой Стинрода—Эйленберга, компенсируя в некоторой степени отсутствие в пособии доказательства инвариантности симплициальной теории гомологий. Далее, вычислительная техника в гомотопиях (гл. III) ограничивается вычислением фундаментальных групп окружности и замкнутых поверхностей, однако равенство $\pi_n(S^n)\simeq\mathbb{Z}$, $n\geqslant 2$, (и ряд других) сообщается без доказательства и служит для пропедевтического введения степени отображения сфер и характеристики векторного поля (с выводом теоремы Брауэра и основной теоремы алгебры); в гомологиях (гл. V) техника доведена до уровня точных последовательностей, в частности, вычисляются группы $H_k(S^n, \mathbb{Z})$, $H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$, $H_k(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ и доказываются теоремы Брауэра, Лефшеца и Хопфа о неподвижных точках. Хотя все подготовлено, чтобы развить технику дальше, мы сознательно останавливаемся на этом уровне, имея в виду целевое назначение данного пособия.

Понятие гладкого многообразия, гладкой структуры, касательного расслоения (гл. IV) разрабатывались как можно более детально, обращалось внимание на связи с механикой, динамическими системами, теорией Морса. Нам представляется, что уже на раннем этапе изучения теории гомологий необходимо знакомиться с рядом ее вариантов (сингулярная, симплициальная, клеточная), так как даже в простейших приложениях читатель может встретиться с любым из них; в гл. V излагаются указанные выше варианты.

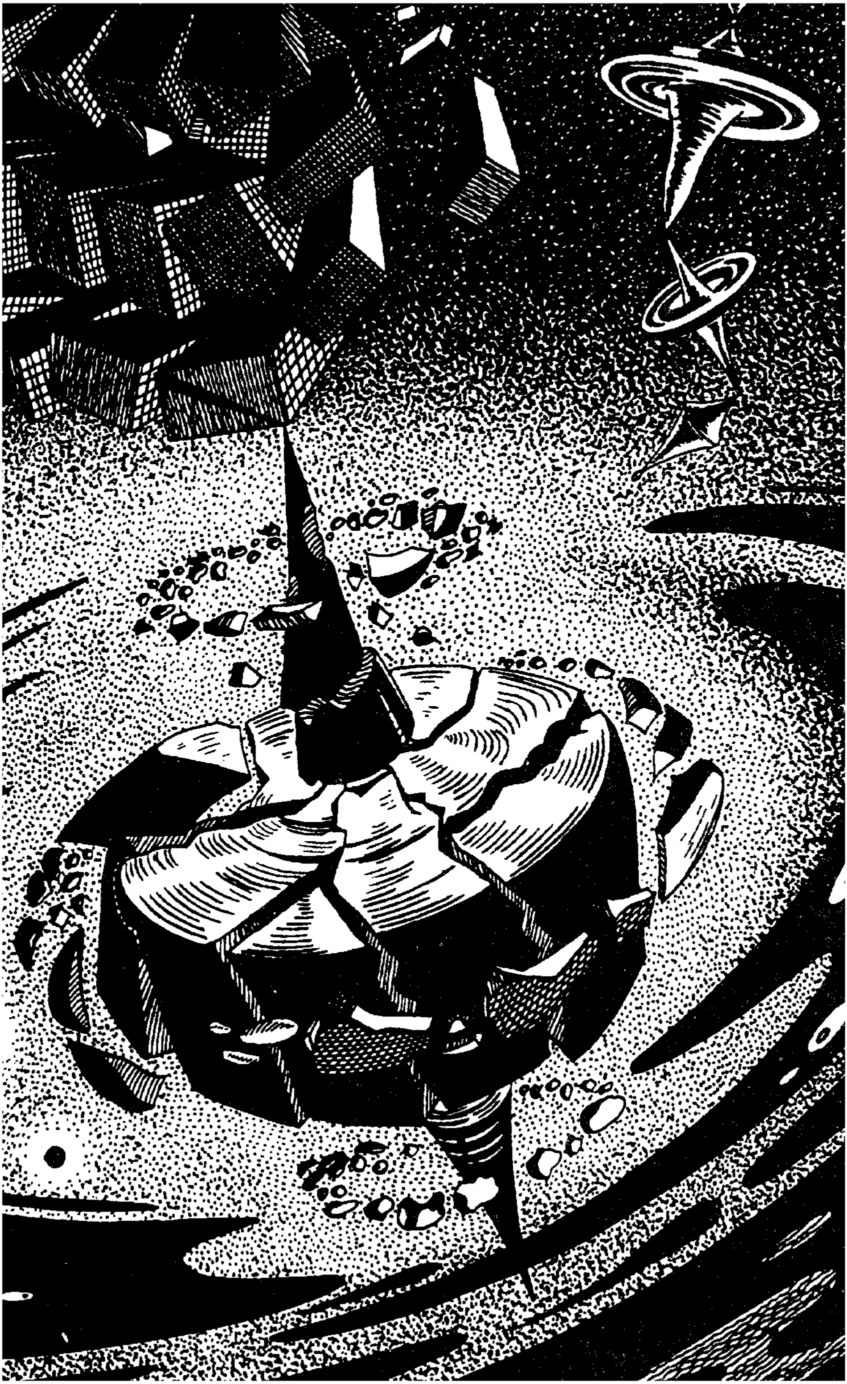
Мы получили много откликов на первое издание этой книги и признательны их авторам за ряд полезных предложений и критических замечаний. Многие из них учтены при подготовке второго издания. Кроме того, нами введен новый материал и расширен прежний (добавлен материал по теории гладких многообразий, теории накрытий, теории неподвижных точек; вводная глава дополнена параграфом о некоторых приложениях топологии в физике; расширено изложение гомологий и когомологий, переработан и несколько сокращен раздел общей топологии).

Читателю — студенту I—II курсов — следует иметь в виду, что в отдельных параграфах (§ 4 гл. I; § 5 гл. II; § 9 гл. IV) используются элементарные факты теории функций комплексного переменного; при первом чтении можно опустить эти места без ущерба для понимания дальнейшего. Упражнения в тексте параграфа часто заменяют простое рассуждение и имеют целью активизировать работу читателя. Петитом набран дополнительный к основному материал. Мы фиксируем окончание доказательства теорем знаком ■; в случае необходимости отделить текст примера от последующего текста используется знак ◆. При ссылках на предыдущий материал в пределах одной главы мы не указываем номер главы.

Отметим, что в основу книги положены лекции, прочитанные Ю. Г. Борисовичем студентам математического факультета Воронежского университета. Их текст, составленный Н. М. Близняковым и Т. Н. Фоменко, был затем существенно и неоднократно переработан с привлечением дополнительного материала лектором совместно с Н. М. Близняковым (гл. IV), Я. А. Израилевичем (гл. IV, V), Т. Н. Фоменко (гл. II, III, V). Рисунки к тексту выполнены Т. Н. Фоменко, иллюстрации на обложке и перед главами выполнены по просьбе авторов академиком РАН А. Т. Фоменко, которому авторы выражают глубокую благодарность.

В заключение нам хотелось бы выразить искреннюю благодарность академикам Д. В. Аносову, С. П. Новикову, А. Т. Фоменко, а также профессорам С. В. Матвееву, А. С. Мищенко, М. М. Постникову, Е. Г. Скляренко, Ю. П. Соловьёву, Д. Б. Фуксу, А. В. Чернавскому, способствовавшим улучшению книги. Авторы благодарят коллектив сотрудников и аспирантов кафедры алгебры и топологических методов анализа ВГУ за полезные обсуждения и замечания. Особую признательность авторы выражают Г. Н. Борисович за техническую помощь в подготовке рукописи и за постоянную поддержку и внимание.

Авторы



ГЛАВА I

Первые понятия топологии

Цель данной главы — подготовить читателя к систематическому изучению разделов топологии, излагаемых в следующих главах. Здесь дается доступный широкому кругу читателей обзор проблем, исследование которых привело к формированию топологии как математической дисциплины, ее интенсивному развитию в настоящее время, включая некоторые приложения в современной физике.

§ 1. Что такое топология?

> Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, приводили меня к Analysis situs.
>
> *А. Пуанкаре*

1. Топология как наука сформировалась, по общему мнению, в трудах великого французского математика Анри Пуанкаре в конце XIX в. Первые наблюдения топологического характера восходят к Л. Эйлеру и К. Гауссу. Начало топологических исследований можно отнести к работам Б. Римана (середина XIX в.). В его исследованиях по теории функций были развиты новые методы, основывающиеся на геометрических представлениях. Им была сделана попытка сформулировать понятие многомерного многообразия и ввести высшие порядки связности. Эти понятия были уточнены Э. Бетти (1871). Но только А. Пуанкаре, исходя из потребностей теории функций и дифференциальных уравнений, ввел целый ряд важнейших топологических понятий, развил содержательную теорию и применил ее к исследованиям в различных разделах математики и механики. Его идеи и поставленные им проблемы до сих пор существенно влияют на развитие топологии и ее приложений.

А. Пуанкаре так определял содержание Analysis situs * (как тогда называли топологию): «Analysis situs есть наука, которая позволяет нам узнавать качественные свойства геометрических фигур

---

* Analysis situs — геометрия положения (перевод с латинского), этот термин как название дисциплины ввел Б. Риман; термин «топология» (от греч. τοπος — место, λογος — закон) ввел И. Б. Листинг (1847).

не только в обычном пространстве, но также и в пространстве более трех измерений. Analysis situs в трех измерениях является для нас познанием почти интуитивным; напротив, Analysis situs в более чем трех измерениях представляет громадные трудности, и чтобы начать пытаться их преодолевать, нужно быть очень убежденным в крайней важности этой науки. Если эта важность не всеми понята, то это потому, что об этом недостаточно размышляли» [61, т. III, с. 633].

Чтобы уяснить, что понимается под качественными свойствами геометрических фигур, представим себе сферу в виде резиновой оболочки и разрешим сжимать и растягивать ее любым способом без разрывов и не «склеивающим» различные ее точки в одну. Такие преобразования сферы называются *гомеоморфизмами*, а различные фигуры, получающиеся при гомеоморфизмах, — *гомеоморфными* между собой. Так вот, качественные свойства сферы — это свойства, общие всем гомеоморфным ей фигурам, или, как говорят, сохраняющиеся при гомеоморфизмах.

Очевидно, можно говорить о гомеоморфизмах и качественных свойствах и других фигур. Качественные свойства принято также называть *топологическими*. В данном примере очевидно такое топологическое свойство сферы, как ее целостность (связность). Более глубокие свойства обнаружатся при попытке установить гомеоморфизм сферы, например, с кругом (или с шаром). Легко прийти к убеждению, что такой гомеоморфизм невозможен. Однако чтобы доказать это, необходимо указать различные топологические свойства для сферы и круга (шара). Такими свойствами являются «стягиваемость» круга (шара) в одну из своих точек посредством «плавного» его изменения, сжатия по радиусам к центру и «нестягиваемость» сферы по себе ни к одной из своих точек. Полезно обратить внимание и на топологическое различие между волейбольной и велосипедной камерами. Эти интуитивные представления нуждаются в строгом обосновании.

Упражнение 1°. Исходя из наглядных представлений убедитесь, что: а) круговое кольцо не гомеоморфно кругу; б) число «дыр» в геометрической фигуре является ее топологическим свойством.

Исследования Пуанкаре дали начало одному из направлений в топологии — комбинаторной, или алгебраической, топологии. Ее метод заключается в сопоставлении геометрическим фигурам по некоторому, общему для всех фигур, правилу алгебраических объектов (групп, колец и т. п.) так, что определенным отношениям между фигурами соответствуют алгебраические отношения между объектами. Изучение свойств алгебраических объектов проливает свет на свойства геометрических фигур. Алгебраические объекты, построенные А. Пуанкаре, суть группы гомологий и фундаментальная группа.

Развитие метода алгебраической топологии неизбежно привело к объединению с теоретико-множественными идеями (Г. Кантор — конец XIX в.; Ф. Хаусдорф — первое десятилетие XX в.). Действительно, исследование качественных свойств множеств в пространствах любого числа измерений в дальнейшем вылилось в понятие топологического пространства — фундаментальное понятие, пронизывающее всю математику. Оно связано не только с рассмотрением геометрических фигур в конечномерных пространствах: развитие теории функции действительного переменного и функционального анализа привело к построению функциональных пространств, которые, как правило, бесконечномерны.

«Первые достаточно общие определения топологического пространства даны в работах М. Р. Фреше, Ф. Рисса и Ф. Хаусдорфа. Окончательно определение топологического пространства было сформулировано польским математиком К. Куратовским и П. С. Александровым» [28].

Топологические пространства и их непрерывные отображения, изучение их общих свойств составили содержание одного из разделов топологии, известного под названием «общая топология».

Объединение алгебраического и теоретико-множественного направлений в топологии осуществилось в работах Л. Э. Брауэра при изучении понятия размерности пространства (1908—1912) и в дальнейшем получило существенное развитие в трудах Дж. У. Александера, С. Лефшеца, П. С. Александрова, П. С. Урысона, Х. Хопфа, Л. А. Люстерника, Л. Г. Шнирельмана, М. Морса, А. Н. Тихонова, Л. С. Понтрягина, А. Н. Колмогорова, Э. Чеха и др. Работы советских математиков составляют глубокий и обширный вклад в развитие всей топологии в целом.

Дать точное описание достигнутых результатов (и даже постановок задач) невозможно без знакомства с началами общей и алгебраической топологии. Здесь мы дадим лишь определенное представление о некоторых задачах, стимулировавших топологические исследования.

Если S^1 — окружность на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, то множество $\mathbb{R}^2 \backslash S^1$ распадается на два взаимно дополнительных открытых множества: внутренность A и внешность B по отношению к S^1. Окружность S^1 играет роль перегородки между A и B. Можно ли провести непрерывный простой путь из произвольной точки $a \in A$ в произвольную точку $b \in B$ так, чтобы он не пересекал перегородку S^1? (*Простым непрерывным путем* называют гомеоморфное отображение отрезка $[0, 1]$ числовой оси в плоскость.) Ответ отрицателен. Действительно, если $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x, y плоскости $\mathbb{R}^2$ и $\gamma(t)$ — такой путь, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$, то функция $f(t) = \rho(\gamma(t), 0)$, где 0 — центр окружности, непрерывна и $f(0) < r$, $f(1) > r$, где r — радиус окружности S^1. По свойству непрерывных функций $f(t)$ принимает значение r в некоторой точке t_0, следовательно, $\gamma(t_0) \in S^1$.

Заменим теперь окружность S^1 ее гомеоморфным образом Γ (такая кривая называется *простой замкнутой*). Возникает вопрос: разбивается ли множество $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ на непересекающиеся открытые множества, границей каждого из которых является Γ? Ответ утвердительный (теорема Жордана), но доказательство уже использует тонкие топологические понятия. При этом кривая Г так же, как и S^1, обладает свойством перегородки, разделяющей два открытых множества.

Задача еще более усложнится, если вместо простой замкнутой кривой рассмотреть гомеоморфный образ n-мерной сферы, лежащий в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве. Обобщение теоремы Жордана на этот случай было дано Л. Э. Брауэром в 1911—1913 гг. Глубокое обобщение этого результата привело к созданию теорем двойственности (Дж. У. Александер, Л. С. Понтрягин, П. С. Александров и др.), долгое время определявших развитие алгебраической топологии.

Другая важная задача — обобщение понятия размерности. Размерность евклидова пространства хорошо известна как алгебраическое понятие. Является ли оно топологическим свойством, т. е. будут ли гомеоморфные евклидовы пространства иметь одинаковую размерность? Положительный ответ был дан А. Лебегом (1911).

Что же касается геометрических фигур, лежащих в евклидовых пространствах, то следовало первоначально сформулировать для них понятие *размерности*. Идея такого определения была высказана еще А. Пуанкаре. Размерность пустого множества полагается равной -1, и далее по индукции: если мы уже знаем, что такое размерность до $n-1$, то размерность n некоторого множества A ($\dim A = n$) означает, что его можно разбить на сколь угодно мелкие части множеством размерности $n-1$ и нельзя этого сделать множеством размерности $n-2$. Эти идеи получили уточнение и развитие в работах Л. Э. Брауэра, К. Менгера, П. С. Урысона, П. С. Александрова и др.

Еще одно важное направление в топологии, тесно связанное с приложениями, — теория неподвижных точек. Уже в алгебре и началах анализа мы встречаемся с вопросом существования решений уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — многочлен или более сложная функция. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$f(x) + x = x, \tag{2}$$

или (обозначив $F(x) = f(x) + x$) уравнению

$$F(x) = x. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) называются *неподвижными точками отображения* F. Если уравнение (1) векторное, т. е. представляет собой систему из n уравнений с n неизвестными, $n > 1$, то эквивалентное уравнение (3) тоже векторное и, следовательно, неподвижные точки лежат в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Чрезвычайно важной задачей является отыскание достаточно общих и эффективных признаков существования неподвижных точек.

Л. Э. Брауэром получен замечательный результат, находящий широчайшие приложения в современных исследованиях. Он формулируется удивительно просто: всякое непрерывное отображение выпуклого ограниченного замкнутого множества в себя имеет неподвижную точку. Выпуклое множество может рассматриваться как в трехмерном, так и в многомерном евклидовом пространстве. Например, непрерывное отображение в себя замкнутого (т. е. рассматриваемого вместе с границей) круга в плоскости или шара в пространстве обязательно имеет неподвижную точку.

Упражнение 2°. Покажите, что аналог теоремы Брауэра для кругового кольца неверен.

Теорема Брауэра получила дальнейшее развитие в работах Х. Хопфа, С. Лефшеца и др. Она получила обобщение и на случай отображений функциональных пространств (О. Д. Келлог, Дж. Д. Биркгоф, Ю. П. Шаудер, Ж. Лере), что расширило область ее приложений. Следует отметить, что еще А. Пуанкаре интересовался теоремами существования неподвижных точек, сводя к ним некоторые задачи небесной механики.

2. Подчеркнем, что задачи, описанные выше, далеко не составляют всей проблематики топологии. Приведем другие примеры. В работах Б. Римана впервые было введено понятие *n-мерного многообразия* как пространства, в котором точки обладают n числовыми координатами, определенными, по крайней мере, на достаточно малых участках пространства. В современной математике различают топологические и гладкие многообразия. Это связано с теми или иными возможностями согласования систем координат, заданных на отдельных участках многообразия. Участки многообразия могут пересекаться, и пересечения получают таким образом различные системы координат, при этом каждая система координат может быть выражена через другую непрерывным или гладким (дифференцируемым) преобразованием. В первом случае многообразие называют топологическим, во втором — гладким.

Являясь обобщением понятия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, понятие многообразия охватило целый ряд геометрических объектов, возникавших в классической механике, дифференциальных уравнениях, теории поверхностей. Пуанкаре придал окончательную форму понятию многообразия и развил начала анализа на таких пространствах.

В дальнейшем эти концепции получили развитие в теории гладких многообразий (Ж. де Рам, Л. С. Понтрягин, Х. Уитни и др.). Следуя методу алгебраической топологии, таким пространствам сопоставили новые алгебраические объекты — «кольца когомологий внешних дифференциальных форм». Сами гладкие многообразия также удалось «организовать» в «кольцо внутренних гомологий» (В. А. Рохлин, начало 50-х годов). Алгебраические объекты иного типа — *гомотопические группы* π_n, $n > 1$, топологического пространства — были введены в 30-х годах В. Гуревичем; они явились глубоким обобщением понятия *фундаментальной группы* π_1 А. Пуанкаре. Группы π_n — «важнейшие инварианты, играющие фундаментальную роль в построении топологии» [51, с. 25]. Проблема их вычисления геометрическими методами занимала важное место в топологии (Л. С. Понтрягин, Г. Ф. Фрейденталь, В. А. Рохлин, 30-е—начало 50-х годов). С конца 20-х годов разносторонне исследуются *группы гомологий* H^n, $n \geqslant 0$, топологических пространств (формально-алгебраическое определение которых предложено Э. Нётер). Определяется «двойственная» по отношению к гомологиям теория «когомологий» (А. Н. Колмогоров, Дж. У. Александер, середина 30-х годов). Накопление различных алгебраических объектов в топологии привело к выделению и развитию «гомологической алгебры». В 30—40-е годы нашего столетия возникла из дифференциальной геометрии и развилась в самостоятельное направление теория *расслоенных пространств* (расслоений). Расслоенное пространство можно представить как непрерывную совокупность пространств — слоев, гомеоморфных друг другу и «занумерованных» точками другого пространства — базы расслоения. Простейший пример — совокупность нормалей или касательных плоскостей к двумерной поверхности в евклидовом пространстве (базе расслоения). Однако в общем случае и слои, и база расслоения могут быть устроены значительно сложнее. Проблема классификации расслоений, построения их инвариантов («характеристических классов») была решена в работах Л. С. Понтрягина, Х. Уитни, Э. Штифеля, Чжень Шень Шеня.

3. В послевоенный период произошла существенная перестройка топологии. К началу 50-х годов был накоплен богатый запас результатов в области алгебраической топологии. Назрела задача выработки единого взгляда на все многообразие полученных фактов, создания новых общих методов. Такая перестройка топологии шла под общим влиянием французской топологической школы (Ж. Лере, Р. Том, А. Картан, Ж.-П. Серр и др.).

Развитие топологии с 50-х годов шло бурными темпами и в чрезвычайно большом числе направлений. В этом развитии активное участие принимали советские математики. Перечислим некоторые наиболее крупные направления, следуя обзору [51].

В этот период в центре внимания топологов по-прежнему находятся гладкие многообразия и расслоенные пространства и их отображения. Развивается теория гомотопий, когомологических операций, спектральной последовательности расслоений; интенсивно развивается теория характеристических классов и кобордизмов; исследуются геометрическая и гомотопическая структуры гладких многообразий; развиваются теория категорий и функторов, общие вопросы теории гомологий; интенсивно развиваются K-теория и тесно связанная с ней теория индекса эллиптических операторов; развивается теория слоений, теория конечных и компактных групп преобразований, вычисляются когомологии алгебр Ли векторных полей; продолжает активно развиваться направление «общая топология».

Ряд важнейших достижений этого периода связан с именами таких математиков, как Ж. Лере, Ж.-П. Серр, Р. Ботт, Ф. Хирцебрух, Р. Том, Дж. Ф. Адамс, М. Атья, Дж. Милнор, С. П. Новиков, М. М. Постников.

В частности, развитие топологии привело к решению ряда стоявших перед топологами крупных проблем: создание Ж. Лере фундаментального алгебраического метода вычисления гомологических групп с помощью спектральной последовательности; полное решение М. М. Постниковым проблемы определения гомотопического типа пространств; исследование числа «гладких структур» на данном топологическом многообразии (т. е. способов превратить его в гладкое многообразие; отметим эффектный результат Дж. Милнора о существовании на семимерной сфере S^7 двадцати восьми гладких структур); доказательство С. П. Новиковым «топологической инвариантности» классов Понтрягина. Исследована проблема триангуляции гладких многообразий, т. е. возможности их разбиения на правильно примыкающие *симплексы*. Фигуры, составленные из симплексов (так называемые полиэдры), рассматривал еще А. Пуанкаре при построении теории гомологий. Напомним, что симплекс — это выпуклая оболочка линейно независимых точек в евклидовом пространстве или ее гомеоморфный образ; указанные точки называются вершинами симплекса, а уменьшенное на единицу их число — размерностью симплекса. Всякое подмножество вершин симплекса также определяет симплекс — грань исходного симплекса; правильное примыкание симплексов в полиэдре означает, что симплексы могут пересекаться только по их общей грани. Один из принципиальных вопросов классической топологии: допускают ли два гомеоморфных полиэдра размерности n «одинаковые», с комбинаторной точки зрения, триангуляции? Эта так называемая «основная проблема комбинаторной топологии» была решена для размерности $n \leqslant 3$ Е. Е. Мойсом, а для старших размерностей она решается, вообще говоря, отрицательно (случай $n = 4$ удалось исследовать лишь в 80-е годы — М. Фридман, С. Дональдсон); С. П. Новиков, Р. Керби, Л. Зибенман исследовали возможное число неэквивалентных триангуляций многообразия.

4. Назовем еще ряд крупных достижений в самой топологии и ее приложениях: классификация многомерных ($n \geqslant 5$) многообразий (С. П. Новиков, Ч. Уолл, У. Браудер); вычисление числа и классификация линейно независимых векторных полей на сферах (Дж. Ф. Адамс); доказательство А. В. Чернавским локальной стягиваемости группы непрерывных гомеоморфизмов топологического замкнутого компактного многообразия M^n (или пространства $\mathbb{R}^n$); доказательство усилиями ряда топологов — А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва, Г. Г. Каспарова — высказанной С. П. Новиковым «гипотезы о высших сигнатурах» в случае произвольных многообразий и дискретных подгрупп групп Ли; топологическое решение проблемы вычисления индекса эллиптических операторов (М. Атья, И. Зингер); общее решение А. Т. Фоменко проблемы существования минимальных поверхностей в классе бордизмов и др. (мы привели далеко не полный список полученных топологами к настоящему времени важных результатов). Подробности развития топологии читатель может найти в цитировавшейся выше «Истории отечественной математики» [28], а также в фундаментальном обзоре [51]. Отметим одну важную черту современного этапа развития топологии — широчайшее проникновение ее методов во многие разделы современной математики: вариационное исчисление в целом, геометрию в целом, топологию групп Ли и однородных пространств, топологию комплексных и алгебраических многообразий, качественную (топологическую) теорию динамических систем и слоений, топологические методы в гамильтоновой механике, топологию эллиптических и гиперболических уравнений с частными производными; проникновение методов топологии в классический анализ привело к возникновению новой математической теории — теории особенностей, которую В. И. Арнольд (один из создателей этой теории, как и Р. Том) охарактеризовал как «грандиозное обобщение исследования функций на максимум и минимум» [8]; с 60-х годов развивается «глобальный анализ» — топология бесконечномерных многообразий и их отображений, — смыкающийся с вариационным исчислением в целом и с классическим нелинейным функциональным анализом (точнее, с той его топологической частью, которая связана с теорией критических значений Морса—Смейла и топологией фредгольмовых отображений).

К настоящему времени топология стала мощным инструментом математического исследования, а ее язык приобрел универсальное значение.

Замечательным фактом является возникновение в 70—80-е годы XX века комплекса приложений топологии в современной физике — факт, значимый не только для физики, но и для самой топологии. «В ряде случаев без топологических понятий оказалось невозможным понять суть реальных физических явлений... Топология нашла себе ряд блестящих применений в самых разнообразных задачах для описания качественных, устойчивых свойств различных математических и физических объектов...» [51, с. 6—7].

Естественно отметить и обратное влияние физических проблем на развитие топологии. Академик С. П. Новиков, энергично пропагандирующий взаимосвязи топологии и физики и активно участвующий в развитии этого направления, выступая на открытии международной конференции по топологии и ее приложениям (СССР, 1987 г.), подчеркнул, что наиболее важные идеи за последние 10 лет пришли в топологию из внешнего мира, и выразил уверенность, что в XXI веке топология станет необходимым инструментом приложений к анализу, с которым должен быть знаком каждый.

§ 2. Обобщение понятий пространства и функции

1. Метрическое пространство. Как уже говорилось, в топологии выработано существенно более широкое понятие пространства, чем евклидово. Вначале мы сделаем первый шаг и рассмотрим понятие метрического пространства (менее общее, чем понятие топологического пространства). Это вызвано как большей простотой, так и широким использованием этого понятия в современной математике.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ для каждой пары его точек $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ определено расстояние

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{3}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{1/2}.$$

При изучении $\mathbb{R}^3$ существенно используются следующие свойства расстояния:

I. $\rho(x, y)\geqslant 0$ для любых x, y.

II. $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$.

III. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$.

IV. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ для любых $x, y, z\in\mathbb{R}^3$ (неравенство треугольника).

На $\mathbb{R}^3$ могут существовать и другие вещественные функции от пары точек x, y, удовлетворяющие свойствам I—IV.

Упражнение 1°. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3) — координаты точек $x, y\in\mathbb{R}^3$. Покажите, что функция $\rho(x, y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}|\xi_i-\eta_i|$ удовлетворяет свойствам I—IV.

Такие функции могут существовать также и на множествах иной природы.

Упражнение 2°. Пусть X — произвольное множество. Положим $\rho(x, y)=0$, если x и y — совпадающие элементы в X, и $\rho(x, y)=1$ в противном случае. Покажите, что такая функция ρ удовлетворяет свойствам I—IV.

Функции ρ из упражнений 1° и 2° естественно назвать *расстояниями между элементами* соответствующих множеств.

Чтобы ввести общее понятие расстояния, напомним определение произведения двух множеств. Если X и Y — два множества, то их произведением $X\times Y$ называют множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y), где $x\in X$, $y\in Y$. В частности, определено произведение $X\times X$.

Определение 1. Множество X вместе с отображением ρ: $X\times X\to\mathbb{R}^1$ (в числовую ось), сопоставляющим каждой паре $(x, y)\in X\times Y$ вещественное число $\rho(x, y)$ и удовлетворяющим свойствам I—IV, называется *метрическим пространством* и обозначается (X, ρ).

Отображение ρ называют *расстоянием* или *метрикой пространства* X. Элементы множества X называют обычно точками.

Всякое множество можно превратить в метрическое пространство, наделив его метрикой, описанной в упражнении 2°. Такое метрическое пространство называется *дискретным*. Однако такой способ «метризации» малосодержателен.

Пример 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — подмножество евклидова пространства. Расстояние в $\mathbb{R}^3$ в то же время может служить расстоянием в X. Метрика в X получается в этом случае сужением метрики в $\mathbb{R}^3$. ◆

Если (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество, то $(Y, \bar{\rho})$ — также метрическое пространство, где $\bar{\rho}$: $Y \times Y \to \mathbb{R}^1$ — сужение отображения ρ на подмножество $Y \times Y$.

Говорят, что метрика в Y *индуцируется* (является наследственной) метрикой из X, а Y называют *подпространством метрического пространства* X.

Ряд примеров метрических пространств естественно возникает в задачах анализа.

Пример 2. Рассмотрим множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Его обычно обозначают $C_{[0, 1]}$. Если $x(t)$, $y(t)$ — две непрерывные функции из $C_{[0, 1]}$, то положим

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|. \qquad (1)$$

Упражнение 3°. Проверьте, что функция (1) является метрикой. ◆

Множество $C_{[0, 1]}$ с описанной выше метрикой называется *пространством непрерывных функций*; оно играет важную роль в анализе.

Упражнение 4°. Пусть A — произвольное множество,. X — множество ограниченных вещественных функций на A. Если f: $A \to \mathbb{R}^1$, g: $A \to \mathbb{R}^1$ — произвольные элементы X, то положим

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|.$$

Покажите, что ρ — метрика в X.

Упражнение 5°. Пусть p — простое число. Если $n > 0$ — целое и в разложении на простые множители содержит степень p^α, то положим $v_p(n) = \alpha$. Распространим функцию v_p с множества целых положительных чисел на множество $\mathbb{Q} \backslash 0$ рациональных чисел без нуля формулой $v_p(\pm r/s) = v_p(r) - v_p(s)$. Положим

$$\rho(x, y) = p^{-v_p(x-y)}, \qquad x \neq y,$$
$$\rho(x, x) = 0$$

для произвольных x, y из $\mathbb{Q}$. Покажите, что функция $\rho(x, y)$ определена корректно и является метрикой в $\mathbb{Q}$ (p-адическое расстояние).

2. Сходящиеся последовательности и непрерывные отображения. В метрическом пространстве (X, ρ) естественно вводятся понятия, обобщающие начальные понятия математического анализа.

Отображение $n \mapsto x_n$ множества натуральных чисел в метрическое пространство (X, ρ) называется *последовательностью точек* этого пространства и обозначается $\{x_n\}$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке a (имеет предел a), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $n_0(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

Этот факт часто записывают так:

$$x_n \xrightarrow{\rho} a, \text{ или, проще, } x_n \to a.$$

Упражнение 6°. Пусть $\left\{x_n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^n\right)\right\}$ — последовательность точек трехмерного евклидова пространства; пусть ρ — евклидова материка. Докажите, что $x_n \xrightarrow{\rho} a$ тогда и только тогда, когда $\xi_i^n \to \xi_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$ при $n \to \infty$, где $a = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$.

Рассматривая последовательность непрерывных функций $x_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, как последовательность в метрическом пространстве $C_{[0, 1]}$, можно говорить о сходимости этой последовательности к элементу $x_0 = x_0(t)$: $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Такая сходимость часто называется *равномерной* на отрезке $[0, 1]$.

Упражнение 7°. Покажите, что последовательность функций $x_n(t) = n^2te^{-nt}$ на отрезке $[0, 1]$ сходится к нулевой функции поточечно (т. е. при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$), но не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Определим понятие непрерывного отображения метрического пространства (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2).

Определение 2. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества X в множество Y. Если для всякой точки $x_0 \in X$ и всякой последовательности $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0$ в X последовательность образов в Y сходится к $f(x_0)$: $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$, то отображение f называется *непрерывным отображением метрического пространства* (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2).

Очевидно, что это определение является обобщением понятия непрерывной числовой функции; оно охватывает широкий класс отображений геометрических фигур в евклидовых пространствах.

Если свойство непрерывности, выраженное определением 2, рассмотреть в фиксированной точке x_0, то получим определение непрерывного отображения в точке x_0.

Упражнение 8°. Пусть S^2 — сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Положим $f(x) = -x$ (центральная симметрия). Докажите, что f непрерывно.

Упражнение 9°. Приведите пример непрерывного отображения плоского квадрата в себя, имеющего неподвижные точки только на границе.

Очевидно, эквивалентное определение непрерывного отображения метрических пространств можно дать и на языке ε, δ:

отображение $f: X \to Y$ *непрерывно*, если для любого $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, что $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, как только $\rho_1(x, x_0) < \delta$.

Если в этом определении δ не зависит от выбора точки x_0, то отображение f называется *равномерно непрерывным*.

Упражнение 10°. Пусть $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Докажите, что отображение $F: C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$, где $F(x(t)) = f(x(t))$, непрерывно.

Напомним, что отображение множеств $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если каждый элемент из Y является образом некоторого элемента из X; *инъективным*, если различные элементы из X отображаются в различные элементы из Y; *биективным*, если отображение сюръективно и инъективно одновременно.

Теперь мы подошли к определению гомеоморфизма метрических пространств.

Определение 3. Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств называется *гомеоморфизмом*, а пространства X, Y — *гомеоморфными*, если 1) f биективно, 2) f непрерывно, 3) обратное отображение f^{-1} непрерывно.

Это определение уточняет то представление о гомеоморфных фигурах, которое на интуитивном уровне обсуждалось в § 1. Таким образом, получает твердую почву и понятие о топологических свойствах фигур; *топологическими свойствами метрических пространств* называются такие свойства, которые сохраняются при гомеоморфизмах. Гомеоморфные метрические пространства называют *топологически эквивалентными*.

Упражнение 11°. Докажите, что: 1) кольцо в $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно цилиндру в $\mathbb{R}^3$; 2) кольцо без края (внутренность кольца) гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ без точки, S^2 без двух точек.

Упражнение 12°. Докажите, что отображение полуинтервала $[0, 1)$ на окружность в комплексной плоскости, задаваемое функцией $z = e^{i2\pi t}$, $0 \leqslant t < 1$, не является гомеоморфизмом (метрика в комплексной плоскости задается формулой $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$).

Упражнение 13°. Докажите, что: 1) замкнутые шар и куб в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфны; 2) сфера S^2 с выколотой точкой N (пространство $S^2 \backslash N$, где N — северный полюс сферы) гомеоморфна плоскости $\mathbb{R}^2$. (Используйте стереографическую проекцию.)

Если отображение $f: X \to Y$ является гомеоморфизмом на свой образ $f(X)$, рассматриваемый как подпространство в Y, то f называют *вложением пространства X в Y*.

Если $X \subset Y$, то имеется естественное вложение X в Y: $f(x) = x$.

§ 3. От метрического пространства к топологическому (наглядный материал)

1. Метод «склейки». Обсудим идею введения более общего понятия пространства, чем метрическое, — понятия топологического пространства — и дадим первоначальное представление о таких пространствах. Сначала опишем прием построения новых пространств, который сразу выводит нас за рамки метрических пространств.

Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство (можно для наглядности представлять себе X как некоторое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^3$). Пусть X разбито на непересекающиеся подмножества A_α:

$$X = \bigcup_\alpha A_\alpha; \quad A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing, \quad \text{если } \alpha \neq \beta.$$

Если все точки из X, попадающие в какое-нибудь A_α, назвать эквивалентными и затем «склеить» в одну точку [*] a_α, то получится новое множество $Y = \bigcup\limits_\alpha a_\alpha$. Оно называется *фактормножеством* по данной эквивалентности. Заметим, что Y не является подмножеством X, следовательно, к «пространству» Y метрика ρ, вообще говоря, не имеет никакого отношения.

Путем склейки можно получить ряд известных поверхностей в евклидовом пространстве. Рассмотрим некоторые из них. Пусть X — прямоугольник (рис. 1). Если «склеить» те точки на сторонах ab и cd, которые лежат на общей горизонтали, то получим фактормножество, которое можно отождествить с цилиндром (рис. 2).

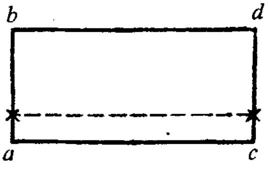


Рис. 1

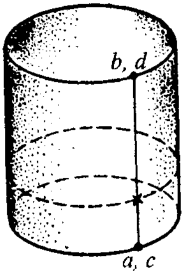


Рис. 2

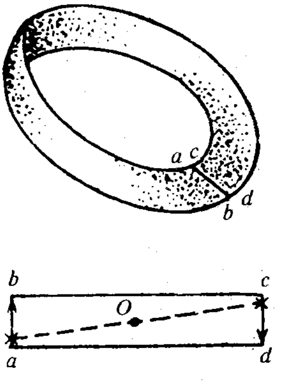


Рис. 3

---

[*] Строго это означает, что каждое множество A_α эквивалентных точек из X рассматривается как один элемент нового множества.

Если «склеить» точки, диаметрально противоположные относительно центра O прямоугольника, лежащие на сторонах ab и dc, то получим «лист Мёбиуса» (рис. 3).

Можно изготовить модель листа Мёбиуса из листа бумаги, склеив противоположные стороны соответствующим образом. Эта модель наглядно демонстрирует ряд свойств листа Мёбиуса.

Лист Мёбиуса имеет ряд замечательных свойств: у него один край — замкнутая линия $adbca$, в противоположность цилиндру он имеет одну сторону, так как его можно закрасить непрерывным движением кисти в один цвет, не переходя через край (эти свойства

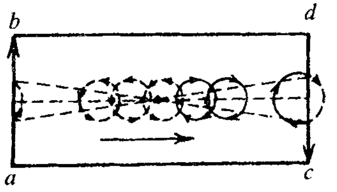


Рис. 4

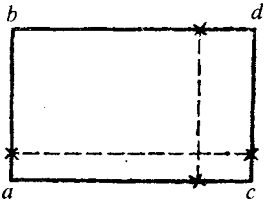


Рис. 5

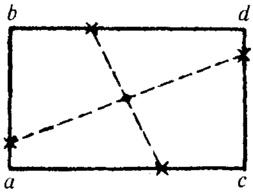


Рис. 6

легко наблюдать на бумажной модели). Лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность. Напомним, что поверхность ориентируема, если любой достаточно малый кружок на поверхности с фиксированным направлением обхода его границы при любом «плавном» перемещении по поверхности в случае возвращения в исходное положение сохранит первоначальное направление обхода границы (предполагается, что кружок не пересекал край поверхности); в противном случае поверхность неориентируема. Неориентируемость листа Мёбиуса ясна из рис. 4.

Если на листе $abcd$ привести склейку сторон ab и cd по точкам, лежащим на общей горизонтали, и одновременно склейку сторон bd и ac по точкам, лежащим на общей вертикали, то получится поверхность, называемая *тором* (рис. 5).

Если же склеить стороны ab и cd равно как и bd и ac, по диаметрально противоположным точкам относительно центра (рис. 6), то фактормножество не удается реализовать в виде фигуры в трехмерном евклидовом пространстве. Точнее, такая попытка склеить эквивалентные точки привела бы к поверхности, которая должна пронизывать сама себя без самопересечений. Мы могли бы поместить эту поверхность в $\mathbb{R}^3$, только разорвав ее на части подходящим образом, но это нарушило бы молчаливо подразумеваемый принцип «непрерывности» склейки (точки, близкие к эквивалентным точкам, при склейке переходят в близкие точки). Полученное фактормножество называется *проективной плоскостью*, его обозначают $\mathbb{R}P^2$.

Заметим, что прямоугольник $abdc$ гомеоморфен кругу с границей $abdc$, и проективную плоскость можно описать иначе как круг (рис. 7), у которого склеены диаметрально противоположные точки его границы, или, наконец, как полусферу, диаметрально противоположные точки края которой склеены в одну (рис. 8).

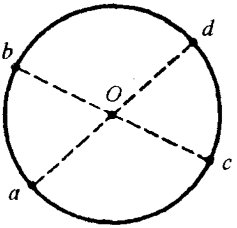


Рис. 7

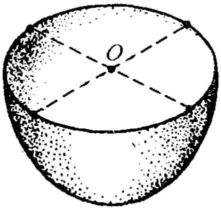


Рис. 8

Таким образом, операция образования фактормножества в первых трех из рассмотренных случаев приводит снова к фигурам в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а в последнем случае дает новый объект, не реализуемый а $\mathbb{R}^3$.

Упражнения. 1°. Проверьте, что цилиндр, тор, сфера — ориентируемые поверхности, а проективная плоскость неориентируема.

2°. Подходящими склейками (факторизациями) получите окружность из отрезка, сферу из круга, окружность из $\mathbb{R}^1$, тор из $\mathbb{R}^2$.

2. О понятии топологического пространства. Поясним теперь, как возникает идея топологического пространства. Выше уже отмечалось, что всегда фактормножество естественным образом можно расположить в метрическом пространстве и, следовательно, индуцировать в нем метрику. Одна из функций метрики — характеризовать степень близости двух точек; в определении непрерывного отображения метрика играет именно такую роль (сравните с § 2). Можно геометризовать понятие близости, введя в рассмотрение шары

$$D_r(x_0) = \{x \in X\colon \rho(x, x_0) < r\}, \quad r > 0,$$

с центром в точке x_0 радиуса r; тогда точка x ε-близка к точке x_0, если $x \in D_\varepsilon(x_0)$.

Легко проверить, что непрерывность отображения $f\colon X \to Y$ двух метрических пространств можно охарактеризовать следующим эквивалентным способом так: пусть $x_0 \in X$ — произвольная (фиксированная) точка и $y_0 = f(x_0)$ — элемент Y; тогда для всякого шара $D_\varepsilon(y_0)$ найдется такой шар $D_\delta(x_0)$, что $f(D_\delta(x_0)) \subset D_\varepsilon(y_0)$.

Можно сказать, что свойство непрерывности отображения выражается в сохранении близости точек. Понятие близости позволяет точно сформулировать интуитивно данное нам понятие окрестности точки: часть Ω метрического пространства является окрестностью своей точки x_0, если каждая точка, достаточно близкая к x_0, принадлежит Ω. Таким образом, в метрических пространствах появляются структуры окрестностей.

«Однако так определенные пространства обладают большим числом свойств, которые можно сформулировать независимо от лежащего в их основе понятия расстояния. Например, каждое подмножество, содержащее окрестность точки x_0, также есть окрестность точки x_0; пересечение двух окрестностей точки является окрестностью точки x_0. Эти и некоторые другие свойства влекут массу следствий, которые выводятся из них совершенно независимо от понятия «расстояние», первоначально легшего в основу определения окрестностей. Так получаются предложения, в которых совсем нет речи о величине, расстоянии и т. п.» [15, с. 12].

Если в множестве X не введено расстояние, то понятие близости лишается точного смысла и данное выше определение окрестности непригодно. Однако плодотворным оказывается обратный процесс: для каждого элемента $x_0 \in X$ задать в множестве X некоторую систему подмножеств $\{\Omega(x_0)\}$ так, чтобы выполнялись основные свойства (аксиомы), объявить их системой окрестностей и назвать элементы из окрестности $\Omega(x_0)$ Ω-близкими к x_0. Говорят в этом случае, что множество X наделено *топологической структурой*, или топологией, и называют его *топологическим пространством*, а элементы X называют точками.

«Как только топологические структуры определены, понятию непрерывности легко уже придать точный смысл. Интуитивно функция непрерывна в некоторой точке, если ее значение сколь угодно мало изменяется, покуда аргумент остается достаточно близким к рассматриваемой точке. Мы видим, что понятие непрерывности будем иметь точный смысл каждый раз, когда пространство аргументов и пространство значений функции будут топологическими пространствами» [15, с. 14].

Таким образом, заменяя шары в определении непрерывного отображения окрестностями, получаем понятие непрерывного отображения, а затем и понятие гомеоморфизма топологических пространств. Гомеоморфные топологические пространства называются *топологически эквивалентными*.

Пример. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Расширенная плоскость комплексного переменного $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ является топологическим пространством: шаровые окрестности точек $z \in \mathbb{C}$ и окрестности точки ∞ вида

$$D_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > r\} \cup \infty,$$

а также подмножества, содержащие их, задают топологическую структуру на $\bar{\mathbb{C}}$.

Упражнение 3°. Установите гомеоморфизм расширенной плоскости комплексного переменного и сферы S^2 так, чтобы северный полюс N был образом точки ∞, а южный полюс — точки 0.

Указание. Используйте стереографическую проекцию $S^2\backslash N$ на экваториальную плоскость $\mathbb{C}$

$$u=\frac{x+iy}{1-z}, \quad (x, y, z)\in S^2\backslash N.$$

В метрическом пространстве топологическая структура фактормножества возникает естественным образом из топологической структуры метрического пространства путем склеивания окрестностей. Таким образом, фактормножество становится топологическим пространством (*факторпространством*).

3. Склейка двумерных поверхностей. Изучим подробнее факторпространства, получающиеся при склейке плоских фигур. Рассмотрим многоугольник П в плоскости $\mathbb{R}^2$ и индуцируем в нем метрику из $\mathbb{R}^2$. Очевидно, шаровые окрестности точки $x \in П$ состоят из пересечений с П открытых кругов с центром в точке x. Таким образом, достаточно малые шаровые окрестности точки x — открытые круги, если x не лежит на границе многоугольника, и секторы открытого круга (вместе с ограничивающими радиусами), если x лежит на границе (рис. 9).

Пусть имеются два многоугольника, П и П′; отметим две их стороны, a и a'. Можно склеить П и П′ по этим сторонам, задав гомеоморфизм α: $a \to a'$ и объявив эквивалентными образ и прообраз. Топология факторпространства $(П \cup П')/R$ по этой эквивалентности состоит из открытых кругов для внутренних точек $x \in П$, $x' \in П'$, из склеившихся секторов для эквивалентных точек $x \in a$, $x' \in a'$ и из множеств, содержащих названные окрестности. Рис. 10 иллюстрирует случай, когда отождествление выполняется соединением многоугольников по равным сторонам a, a'.

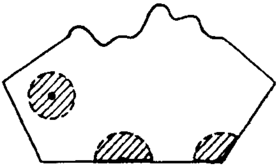


Рис. 9

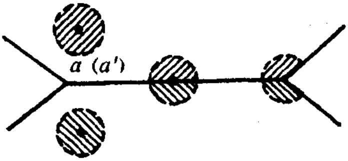


Рис. 10

Аналогичным образом можно склеивать две стороны одного многоугольника (см. примеры п. 1).

Упражнения. 4°. Опишите топологии цилиндра, тора, листа Мёбиуса, проективной плоскости.

5°. Проверьте, что приведенные выше (п. 1) примеры факторпространств гомеоморфны их реализациям в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Проверьте, что разные модели (рис. 6, 7, 8) проективной плоскости гомеоморфны.

Перейдем к склеиваниям поверхностей. Склеим в пятиугольнике, изображенном на рис. 11, стороны, обозначенные одинаковыми буквами. Стрелки указывают закон склеивания соответствующих сторон (начало ориентированного отрезка склеивается с началом другого, конец — с концом). Показатель —1 при буквенном обозначении некоторых сторон напоминает о несовпадении для этих сторон направления, задаваемого стрелками, с направлением, задаваемым обходом многоугольника по часовой стрелке. Удобное описание схемы склейки можно получить, записывая последовательно обозначения сторон в «слово», обходя многоугольник по часовой стрелке. Например, если начинать со стороны a, то схема склейки будет $aba^{-1}b^{-1}c$. Такая схема характеризует склейку, так как полностью определяет в многоугольнике склеиваемые стороны и закон склеивания. Нетрудно убедиться, что это факторпространство можно получить и другим топологически эквивалентным способом (рис. 12); здесь факторпространство представляет тор с вырезом по кривой c (рис. 13, где штриховыми линиями обозначены линии склейки aa^{-1} и bb^{-1}). Тор с дырой называется *ручкой*.

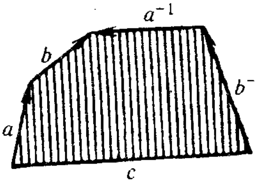


Рис. 11

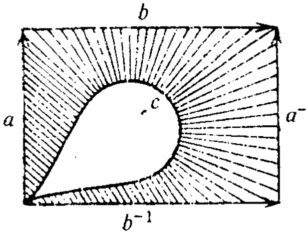


Рис. 12

Рассмотрим склейку соседних сторон треугольника. Если ориентации противоположны, т. е. схема склейки $aa^{-1}c$ (рис. 14), то факторпространство топологически эквивалентно сфере с дырой (рис. 15).

Рассмотрим склейку соседних сторон с одинаковой ориентацией, т. е. по схеме aac (рис. 16). Этот треугольник представим как результат склейки двух прямоугольных треугольников по общей высоте d (рис. 17) с указанной ориентацией. Поменяем порядок склейки этих треугольников: сначала отождествим гипотенузы a, а затем катеты d (рис. 18). Получится лист Мёбиуса (ср. с рис. 3), причем последнее факторпространство гомеоморфно исходному (рис. 16).

Теперь, вырезав в сфере S^2 кружок, можно к сфере с дырой приклеить либо ручку, либо лист Мёбиуса по свободному краю c; по-

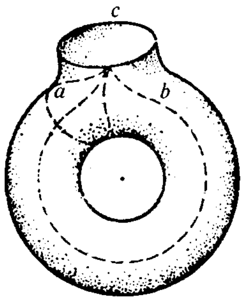


Рис. 13

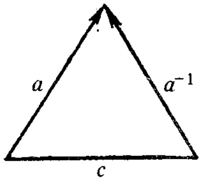


Рис. 14

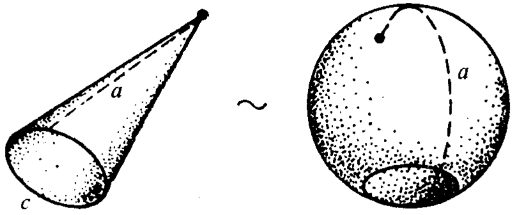


Рис. 15

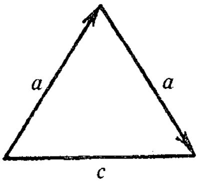


Рис. 16

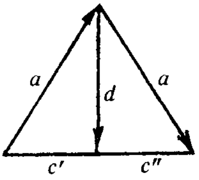


Рис. 17

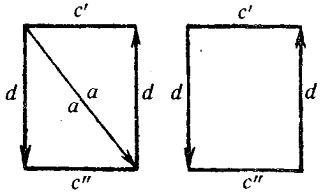


Рис. 18

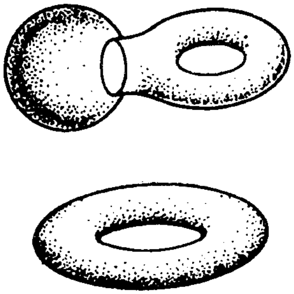


Рис. 19

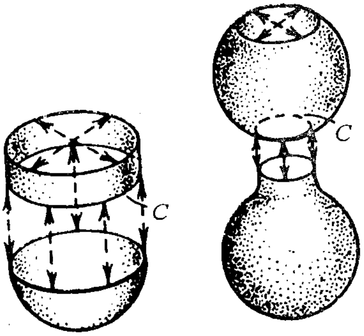


Рис. 20

следний можно представлять как окружность S^1 (граница вырезанного кружка). В первом случае получаем тор (рис. 19) (убедитесь в топологической эквивалентности фигур на рисунке). Во втором — проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. Убедимся в этом.

Проективная плоскость (см. рис. 8) топологически эквивалентна факторпространству, изображенному на рис. 20. Действительно,

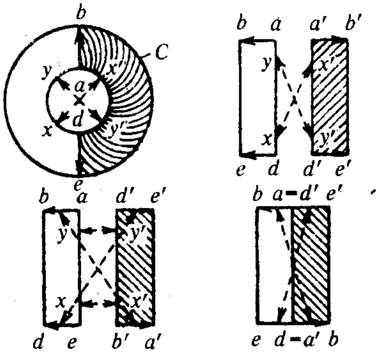


Рис. 21

остается показать, что верхний «колпачок» (рис. 20) — лист Мёбиуса с краем c. Представив его как плоское кольцо с отождествлением диаметрально противоположных точек внутренней окружности, выполним топологические преобразования (рис. 21), приводящие к листу Мёбиуса.

Дальнейшие построения можно развивать в двух направлениях:

1) вырезать в сфере p кружков и приклеить к ним p ручек;

2) вырезать q кружков и приклеить q листов Мёбиуса.

Таким образом можно получить два ряда поверхностей

$$\begin{array}{l} M_0, M_1, \ldots, M_p, \ldots, \\ N_0, N_1, \ldots, N_q, \ldots \end{array} \tag{1}$$

(очевидно, M_0 и N_0 — это сфера S^2).

Обсудим свойства этих поверхностей. Прежде всего легко убедиться, что они получены из конечного числа выпуклых многоугольников склейкой их сторон и последующих топологических преобразований. Такие пространства будем называть *конечно-триангулируемыми*, а разбиение пространства на «криволинейные» многоугольники — *триангуляцией* *. Поверхности M_p, N_q связаны в том смысле, что состоят из единого «куска», не разбиваются на две непересекающиеся группы многоугольников. Это следует из того, что любые две вершины многоугольников триангуляции соединяет непрерывный путь, состоящий из сторон. Рассматриваемые

---

* Определение триангуляции поверхности дано в гл. II.

поверхности не имеют края, так как любая граничная сторона многоугольника склеена с другой (в точности с одной) стороной. Отсюда следует, что каждая точка такой поверхности имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу; такие пространства называются *двумерными многообразиями.*

Конечно-триангулируемые связные двумерные многообразия называются *замкнутыми поверхностями.* Если бы мы клеили не все пары сторон многоугольников, оставив некоторые стороны свободными, то получилась бы *незамкнутая поверхность* (или *поверхность с краем*). Точка на крае имеет окрестность, гомеоморфную полукругу. Пример — сфера S^2 с несколькими дырами.

Отметим также, что поверхности M_p ориентируемы и их можно поместить в $\mathbb{R}^3$ как двусторонние поверхности без самопересечений. Напротив, поверхности N_q неориентируемые (называемые односторонними по аналогии с листом Мёбиуса), не допускают вложения в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений (но в $\mathbb{R}^4$ допускают!).

В гл. II будет доказано, что всякая замкнутая поверхность гомеоморфна какой-то поверхности типа M_p и N_q (числа p, q называются *родом поверхности*). Поверхности M_p и N_q, $q \geqslant 1$, никогда не гомеоморфны, так как ориентируемость поверхности — топологическое свойство. Две различные поверхности типов M_p, $M_{p'}$ (или N_q, $N_{q'}$) также не могут быть гомеоморфны (см. следующий пункт). Таким образом, список (1) дает полную топологическую классификацию замкнутых поверхностей. Если к сфере приклеить p ручек и $q \geqslant 1$ листов Мёбиуса (проделав $p + q$ дыр), то полученная поверхность будет топологически эквивалентной сфере, к которой приклеено $2p + q$ листов Мёбиуса.

Упражнения 6°. К сфере с двумя дырами приклейте цилиндр по его краям. Докажите, что полученная поверхность гомеоморфна сфере с приклеенной ручкой, т. е. тору.

7°. Покажите, что кольцо и лист Мёбиуса можно получить из круга приклеиванием к его границе прямоугольника по двум сторонам.

8°. Докажите эквивалентность следующих определений $\mathbb{R}P^2$ данным выше: 1) в S^2 отождествляются диаметрально противоположные пары точек; 2) в листе Мёбиуса край сжимается в одну точку; 3) край листа Мёбиуса заклеивается кругом по некоторому гомеоморфизму граничных окружностей.

9°. Определите $\mathbb{R}P^1$, отождествляя диаметрально противоположные точки окружности S^1. Покажите, что: 1) $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно окружности S^1; 2) $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$; 3) существует окрестность $\mathbb{R}P^1$ в $\mathbb{R}P^2$, гомеоморфная листу Мёбиуса.

10°. Докажите эквивалентность следующих определений поверхности N_2 (бутылки Клейна): 1) прямоугольник (рис. 22), стороны которого склеены по схеме $aba^{-1}b$; 2) кольцо со склеенными окружностями края с обращением направления обхода (такую склейку можно представить следующим образом: «перевернуть» внутреннюю окружность вокруг какого-либо диаметра, после чего склеить точки внутренней и внешней окружности, оказавшиеся на одном радиусе; на рис. 22 x , y — склеиваемые точки); 3) два листа Мёбиуса, склеенные по краю; 4) кольцо, к каждой окружности края которого приклеен лист Мёбиуса.

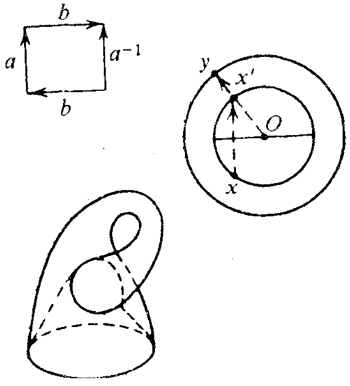


Рис. 22

Топологическое пространство, гомеоморфное выпуклому многоугольнику, будем называть *топологическим многоугольником*. Соответственно образы вершин (сторн) назовем *вершинами* (*ребрами*) топологического многоугольника. Без ограничения общности можно считать, что триангуляция поверхности состоит из топологических многоугольников, примыкающих друг к другу ребрами (чтобы этого добиться, нужно выпуклые многоугольники, отождествлением сторон которых получается поверхность, предварительно разбить на достаточно мелкие многоугольники, например треугольники). Ниже рассматриваются только такие триангуляции.

Для всякой триангулированной поверхности П определим число $\chi(\Pi) = e - k + f$, гдн e — число вершин, k — число ребер, f — число многоугольников триангуляции, называемое *характеристикой Эйлера поверхности* П. Она обладает замечательным свойством — не зависит от триангуляции, т. е. является топологическим инвариантом поверхности.

Упражнение 11°. Убедитесь, что эйлерова характеристика сферы S^2 равна 2, тора — 0, диска — 1, ручки — (—1), листа Мёбиуса — 0.

Нетрудно доказать топологическую инвариантность характеристики Эйлера $\chi(S^2)$ для сферы S^2, если воспользоваться теоремой Жордана *, которая утверждает: всякая простая замкнутая кривая, т. е. кривая, гомеоморфная окружности, разбивает сферу или плоскость на две непересекающиеся области, границей которых она является.

Итак, рассмотрим некоторую триангуляцию S^2. К ней можно последовательно прийти, фиксировав вершину (*) и вычерчивая одно ребро за другим, первое ребро проводим из вершины (*) в новую вершину, а затем следим, чтобы каждое последующее ребро начиналось в вершине уже начерченных ребер. Будем подсчитывать на каждом шаге число возникших вершин e, число ребер k и число областей f, ограниченных замкнутой простой кривой из ребер. В начальной ситуации положим $e = 1$, $k = 0$, $f = 1$ (верши-

---

* Доказательство теоремы Жордана достаточно длинно, и мы его не приводим.

на (*) и дополнительная к ней область). Легко заметить, что число $e-k+f$ при добавлении нового ребра не меняется. Действительно, если ребро идет в новую вершину, то новых областей не появится, а числа e и k увеличатся на 1. Если новое ребро соединит две старые вершины, то оно замкнет некоторый путь из ребер и появится новая область (по теореме Жордана), так что k и f увеличатся на 1, а e не изменится. Начертив последнее ребро, мы восстановим триангуляцию полностью, и тогда $e-k+f=$ $=\chi(S^2)$; в начальной же ситуации $e-k+f=2$. Следовательно, $\chi(S^2)=2$.

Если Π_1, Π_2 — две поверхности с краями l_1, l_2, гомеоморфными S^1, то они могут быть склеены краями по гомеоморфизму α: $l_1 \to l_2$. Пусть $\Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2$ обозначает полученное факторпространство. Докажем формулу

$$\chi(\Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2)=\chi(\Pi_1)+\chi(\Pi_2). \tag{2}$$

Триангулируем Π_1 и Π_2 так, чтобы на краях l_1, l_2 получились гомеоморфные триангуляции (из l вершин и такого же числа ребер — триангуляция S^1). После склейки числа вершин, ребер и многоугольников будут равны e_1+e_2-l, k_1+k_2-l, f_1+f_2 соответственно. Формула (2) следует из равенства

$$(e_1+e_2-l)-(k_1+k_2-l)+(f_1+f_2)=$$
$$=(e_1-k_1+f_1)+(e_2-k_2+f_2).$$

Формула (2) в некоторых случаях удобна для вычислений эйлеровой характеристики.

Пусть ${}_pS^2$ — сфера с p дырами. Если вклеить обратно p дисков, то получим S^2. Формула (2) дает равенство $\chi(S^2)=\chi({}_pS^2)+p$, откуда $\chi({}_pS^2)=2-p$.

Поверхность M_p получается склеиванием ${}_pS^2$ с p ручками, эйлерова характеристика каждой из которых равна (-1). Из (2) получаем $\chi(M_p)=2-2p$. Аналогично получаем $\chi(N_q)=2-q$, так как эйлерова характеристика листа Мёбиуса равна нулю. Так как $\chi(M_{p_1})=\chi(M_{p_2})$ только при $p_1=p_2$ и $\chi(N_{q_1})=\chi(N_{q_2})$ только при $q_1=q_2$, то вследствие топологической инвариантности эйлеровой характеристики поверхности M_{p_1}, M_{p_2} при $p_1 \neq p_2$ не могут быть гомеоморфны, равно как и поверхности N_{q_1}, N_{q_2} при $q_1 \neq q_2$.

Интересные приложения эйлерова характеристика имеет в теории выпуклых многогранников. Можно представлять поверхность выпуклого многогранника склеенной из конечного числа выпуклых многоугольников (его граней) по тождественным отображениям склеивающихся ребер. Сразу получаем формулу Эйлера для выпуклого многогранника:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

где α_0 — число вершин, α_1 — число ребер, α_2 — число граней многогранника. Действительно, слева — эйлерова характеристика поверхности многогранника, очевидно, гомеоморфной S^2.

Если в каждой вершине сходятся m граней и каждая грань — выпуклый n-угольник, то говорят, что тип многогранника $\{n, m\}$.

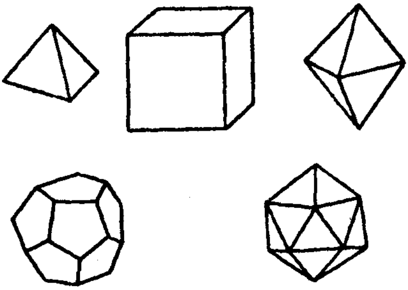


Рис. 23

Если n-угольники правильные, то многогранник называется правильным. Зная тип $\{n, m\}$, можно вычислить α_0, α_2, α_2. Действительно, в каждой вершине сходятся m ребер, поэтому $\alpha_0 m = 2\alpha_1$; в каждой грани — n ребер, отсюда $\alpha_2 n = 2\alpha_1$ (каждое ребро соединяет две вершины и входит в две грани). Таким образом,

$$\frac{\alpha_0}{m^{-1}} = \frac{\alpha_1}{2^{-1}} = \frac{\alpha_2}{n^{-1}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{4mn}{2n + 2m - mn},$$

откуда вычисляются значения α_0, α_1, α_2. Естественное условие положительности α_0, α_1, α_2 приводит к неравенству между целыми положительными n, m:

$$2n + 2m - nm > 0, \text{ откуда } (n-2)(m-2) < 4.$$

Легко видеть, что имеем всего пять решений:

$$\{3, 3\}, \quad \{4, 3\}, \quad \{3, 4\}, \quad \{5, 3\}, \quad \{3, 5\}. \qquad (3)$$

В элементарной геометрии известно пять видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (рис. 23), типы которых как раз совпадают с (3).

Таким образом, дана полная классификация многогранников типа $\{n, m\}$.

§ 4. Понятие римановой поверхности

Один из путей, приводящих к основным топологическим понятиям, связан с изучением алгебраических функций и их интегралов; от был открыт Риманом еще в середине прошлого столетия.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0, \quad a_0(z) \neq 0, \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами, являющимися полиномами от комплексного переменного z; его корни будут функциями $w = w(z)$ от z, при некоторых условиях — аналитическими. Например, если в точке z_0 все корни уравнения (1) различны, то в окрестности точки z_0 существуют n функций $w_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, аналитически зависящих от z.

Аналитическая функция $w = w(z)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется *алгебраической функцией*. Уравнение (1) определяет несколько ветвей $w_i(z)$ алгебраических функций, число которых, вообще говоря, меняется и которые переходят друг в друга при изменении z. Поэтому говорят о многозначной алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением (1), и о ее ветвях $w_i(z)$. Риман выдвинул идею замены z-плоскости $\mathbb{C}$ такой поверхностью, на которой функция $w(z)$ будет однозначной, а ее ветви $w_i(z)$ будут значениями $w(z)$ на отдельных участках поверхности (такие поверхности называются *римановыми поверхностями*).

Построить такую поверхность нетрудно. Будем рассматривать расширенную плоскость $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ комплексного переменного (z-сферу) и декартово произведение $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, состоящие из упорядоченных пар (z, w). Окрестности в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ естественно определить как декартовы произведения окрестностей (и все содержащие их множества). Тогда алгебраическое уравнение (1) определяет в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ подмножество — график многозначной алгебраической функции $w(z)$ над комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, состоящий из тех пар $(z, w) \in \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, которые удовлетворяют уравнению (1). Это и есть риманова поверхность Π многозначной алгебраической функции $w(z)$: действительно, проекция $\Pi \to \tilde{\mathbb{C}}$, задаваемая по правилу

$$(z, w) \to w, \tag{2}$$

определяет однозначную функцию на римановой поверхности, принимающую значения всех ветвей многозначной функции. Интересен вопрос о строении поверхности Π и о распределении на ней ветвей функции w. Для изучения таких вопросов полезно расширять график Π, присоединяя к Π некоторые «бесконечно удаленные» точки из $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$; полученное так расширение $\tilde{\Pi}$ множества Π называют полной римановой поверхностью.

Простейшая многозначная алгебраическая функция связана с уравнением второй степени

$$w^2 = a_1(z)w + a_2(z) = 0. \tag{3}$$

Замена переменных $v = 2w + a_1$ приводит это уравнение к более простому виду $v^2 - p(z) = 0$, где $p(z)$ — многочлен. Поэтому вместо уравнения (3) рассмотрим уравнение

$$w^2 - p(z) = 0. \tag{4}$$

Пусть $p(z) = z$. Тогда для алгебраического уравнения $w^2 - z = 0$ определена риманова поверхность — график Π_1 в $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$, на котором функция w однозначна. Присоединив к Π_1 точку (∞, ∞), получим «расширение» $\tilde{\Pi}_1$ — полную риманову поверхность.

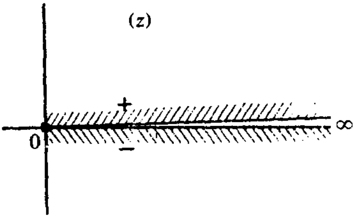


Рис. 24

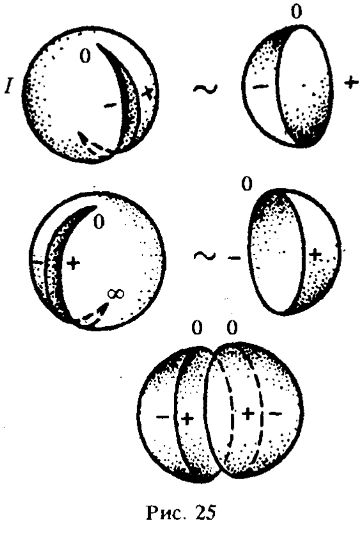


Рис. 25

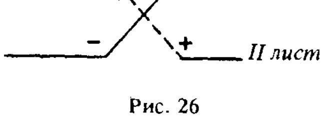


Рис. 26

Покажем, что $\tilde{\Pi}_1$ гомеоморфна $\tilde{\mathbb{C}}$, т. е. двумерной сфере S^2. Действительно, отображение (2)

$$w = w(t), \text{ где } t = (z, w) \cup \Pi_1,$$

с обратным отображением $t = (w^2, w)$ задает, как нетрудно проверить, гомеоморфизм $\tilde{\Pi}_1$ на w-сферу S^2. Дадим другую конструкцию римановой поверхности, используемую обычно в теории функций комплексного переменного. Уравнение (4) определяет двузначную алгебраическую функцию $w = \sqrt{z}$; если $z = re^{i\varphi}$, то два значения ее, $w_1 = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$, $w_2 = -\sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$, отличаются знаком и переходят друг в друга при движении точки z по замкнутому пути, обходящему точку $z = 0$. Чтобы предупредить переход ветви w_1 в ветвь w_2, проведем разрез на z-сфере вдоль положительной вещественной полуоси (рис. 24). Этот разрез соединит точки 0 и ∞. К разрезу примыкают два края (берега): (+) — верхний, (−) — нижний. Рассмотрим объединение (непересекающееся) двух листов (экземпляров), I и II, разрезанной z-сферы. Объявим лист I носителем ветви w_1, II — ветви w_2 (полагая $w_i = \infty$ при $z = \infty$ на каждом листе I, II). На двулистной поверхности I $\cup$ II функция w однозначна. Чтобы уловить эффект перехода ветви w_1 в ветвь w_2, склеим (—) берег I листа с (+) берегом II листа и (+) берег I листа с (—) берегом II листа. Получим факторпространство Π'_1, являющееся двулистной римановой поверхностью функции $w = \sqrt{z}$. Нетрудно усмотреть, что Π'_1 гомеоморфно сфере S^2; на рис. 25 показана склейка листов I и II после предварительного топологического преобразования их в полусферу путем раздвигания берегов, приводящая к сфере S^2. Хотя Π'_1 и не лежит в $\mathbb{R}^3$ (листы I и II пронизывают друг друга, см. схему склейки, рис. 26), однако наглядно демонстрируется взаимосвязь ветвей w_1 и w_2. Можно и непосредственно проверить, что отображение w: $\Pi'_1 \to \widetilde{\mathbb{C}}$, задаваемое многозначной функцией $w = \sqrt{z}$, также гомеоморфизм на w-сферу S^2. Итак, $\widetilde{\Pi}_1$ и Π'_1 гомеоморфны между собой и гомеоморфны сфере S^2.

Зададим проекцию $\widetilde{\Pi}_1 \to \widetilde{\mathbb{C}}$ формулой $z(t) = z$ и отождествим $\widetilde{\mathbb{C}}$ с S^2; имеем диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Pi}_1 \arrow[rr, "w=w(t)"] \arrow[dr, "z=z(t)"'] & & S^2\ (w\text{-сфера}) \arrow[dl, "z=w^2"] \\
& \begin{matrix} S^2 \\ (z\text{-сфера}) \end{matrix} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{\Pi}_1 \arrow[dr, "z=z(t)"'] & & S^2\ (w\text{-сфера}) \arrow[ll, "t=(w^2,\, w)"'] \arrow[dl, "z=w^2"] \\
& \begin{matrix} S^2 \\ (z\text{-сфера}) \end{matrix} &
\end{tikzcd}$$

Эти диаграммы коммутативны, т. е. суперпозиция двух отображений (в направлении стрелок) равна третьему отображению (замыкающая стрелка). Горизонтальные отображения в диаграммах — взаимно обратные гомеоморфизмы.

Отображение $S^2 \xrightarrow{z=w^2} S^2$ называется *двулистным* (*разветвленным*) *накрытием* сферы S^2 с точками ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ (проверьте, что обход точки $z = \infty$ также приводит к изменению ветви).

Это накрытие поясняет идею подстановок, применяемых в анализе для рационализации подынтегральной функции в известных интегралах $\int R(z, \sqrt{z})\,dz$, где $R(z, w)$ — рациональная функция двух переменных z, w. Пусть R задана на некоторой области в $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$; рассмотрим интеграл

$$\int_{z_0}^{z} R(z, \sqrt{z})\,dz = \int_{\gamma} R(z, \sqrt{z})\,dz, \qquad (5)$$

понимаемый как криволинейный интеграл по некоторому пути γ в z-плоскости $\mathbb{C}$, не пересекающему разрез 0∞ и соединяющему точки z_0, z, где $\sqrt{z}$ — одна из ветвей многозначной алгебраической функции $w=\sqrt{z}$. Точка $t=(z, \sqrt{z})$ лежит на римановой поверхности Π_1 и пробегает путь $\tilde{\gamma}\subset\Pi_1$, когда z пробегает путь $\gamma\subset\mathbb{C}$. Подынтегральная функция в (5) задана на кривой $\tilde{\gamma}$: $R(z, \sqrt{z})=R(t)$, $t\in\tilde{\gamma}$. С помощью гомеоморфизма w-сферы и $\tilde{\Pi}_1$: $t=(w^2, \omega)$ найдем путь $\sim\tilde{\gamma}$ на w-сфере S^2, гомеоморфный $\tilde{\gamma}$. Связь между z-сферой и w-сферой дается отображением $z=w^2$, что и позволяет преобразовать интеграл (5):

$$\int\limits_{\gamma} R(z, \sqrt{z})\, dz=\int\limits_{\tilde{\gamma}} 2R(w^2, w)w\, dw=\int\limits_{w_0}^{w_1} R(w^2, w)w\, dw,$$

где w_0 и w_1 — начало и конец пути $\tilde{\gamma}$ на w-плоскости $\mathbb{C}$. Последний интеграл — интеграл от рациональной функции.

Пусть теперь $p(z)=a_0z^2+a_1z+a_2$, где $a_0, a_1, a_2\in\mathbb{C}$, $a_1^2-4a_0a_2\neq 0$, $a_0\neq 0$. Обозначив через r_1 и r_2 корни многочлена $p(z)$, $r_1\neq r_2$, получим алгебраическую функцию

$$w=\sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)}. \tag{6}$$

Очевидно, она также двузначна. Исследование, аналогичное проведенному выше, показывает, что одна ветвь переходит в другую как при обходе точки r_1, так и при обходе точки r_2, а обход обеих точек (по замкнутому пути, окружающему точки r_1 и r_2), как и точки ∞, не меняет значение ветви. Следовательно, риманова поверхность Π_2' рассматриваемой функции получится из двух экземпляров z-сферы, разрезанных вдоль отрезка $\overline{r_1r_2}$, причем берега листов I и II склеиваются так же, как и в первом примере. Заметим, что Π_2' содержит две бесконечно удаленных точки, ∞_1 и ∞_2, лежащие на листах I и II и не являющиеся точками ветвления. Очевидно, что пространство по-прежнему топологически эквивалентно сфере. Снова имеем двулистное накрытие сферы S^2 с двумя точками ветвления, $z=r_1$, $z=r_2$.

Рассмотрим график Π_2 многозначной алгебраической функции $w=w(z)$ над комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ для алгебраического уравнения

$$w^2-a_0\cdot(z-r_1)(z-r_2)=0. \tag{6'}$$

Полезно заметить, что если выколоть из $\mathbb{C}$ точки r_1 и r_2, то оставшаяся часть графика Π_2 над $\mathbb{C}\setminus\{r_1, r_2\}$ (обозначим ее $\hat{\Pi}_2$) гомеоморфна части графика Π_1 над $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (обозначим ее $\hat{\Pi}_1$). Этот гомеоморфизм, как нетрудно проверить, задается отображением Φ: $(z, w)\mapsto(v, \tau)$, где

$$\tau=\frac{z-r_1}{z-r_2}, \quad v=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\cdot\frac{w}{z-r_2},$$

и преобразует уравнение (6') к уравнению $v^2-\tau=0$, риманову поверхность Π_1 которого мы рассмотрели выше. Однако, если расширение $\tilde{\Pi}_1$ было получено естественно и просто, то расширение $\tilde{\Pi}_2$ осуществить более сложно, и мы его не рассматриваем. Однако выше построен его гомеоморфный образ Π'_2.

Таким образом, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\Pi}_2 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \widehat{\Pi}_1 \arrow[r, "v=v(t)"] \arrow[d] & S^2\ (v\text{-сфера}) \arrow[dl, "\tau=v^2"] \\
S^2\ (z\text{-сфера}) \arrow[r, "\tau=\frac{z-r_1}{z-r_2}"] & S^2\ (\tau\text{-сфера}) &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

(где $t=(\tau, v)$ и где не все отображения являются гомеоморфизмами).

Если дан интеграл

$$\int_{z_0}^{z} R(z, \sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)})\,dz = \int_{z_0}^{z} R(z, w(z))\,dz$$

по некоторому пути γ, принадлежащему $\mathbb{C}\backslash\{r_1, r_2\}$, то горизонтальные отображения диаграммы (7) позволяют преобразовать его в интеграл на v-сфере S^2:

$$\int_{v_0}^{v} \tilde{R}(v^2, v)dv,$$

где $\tilde{R}$ — рациональная функция. Это объясняет, почему формальная подстановка Эйлера

$$v=\sqrt{\tau}=\sqrt{\frac{z-r_1}{z-r_2}}$$

приводит к рационализации подынтегрального выражения.

Мы придем к существенно новому результату, если рассмотрим многочлен $p(z)$ третьей степени. Итак, рассмотрим алгебраическую функцию вида

$$w=\sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}, \tag{8}$$

где r_1, r_2, r_3 попарно различны. Функция w имеет две ветви, но «соединяются» они между собой более сложным образом. Обход одной точки r_i приводит к изменению ветви функции w, обход любых двух сохраняет ветвь, обход всех трех точек, как и обход точки ∞, меняет ветвь. Чтобы «запретить» эти переходы, достаточно сделать разрезы $\overline{r_1r_2}$ и $\overline{r_3\infty}$ на z-сфере. Тогда каждая ветвь функции w однозначна на таком листе с разрезами. Чтобы одна ветвь переходила в другую нужным образом, склеим экземпляры I и II соответственно по разрезам $\overline{r_1r_2}$ и $\overline{r_3\infty}$, причем берега склеиваются, как ранее. Полученное топологическое пространство Π'_3, очевидно, является римановой поверхностью функции (8). Существенным отличием поверхности Π'_3 от поверхности Π'_2 является то, что она топологически эквивалентна сфере с ручкой (рис. 27 — здесь разрезы сначала расширяются в «дыры», от них вытягиваются затем трубки, края которых и склеиваются нужным способом). Естественное отображение $\Pi_3' \to \overline{\mathbb{C}}$ является двулистным накрытием S^2 с точками ветвления r_1, r_2, r_3, ∞.

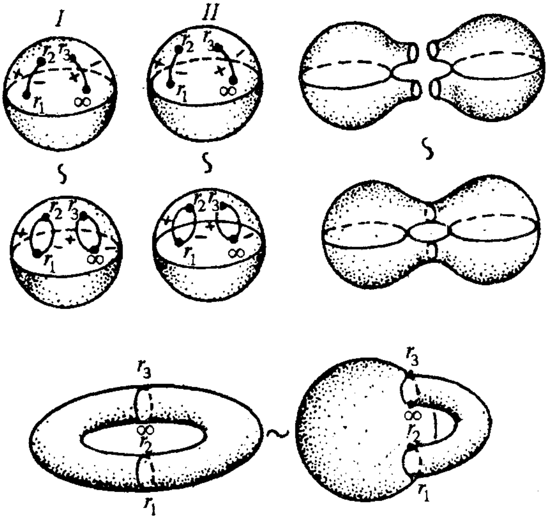


Рис. 27

Для функции $w = \sqrt{a_0(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)}$, где r_1, r_2, r_3, r_4 попарно различны, будем иметь риманову поверхность Π_4', гомеоморфную Π_3'. Это следует из того, что два разреза, $\overline{r_1r_2}$ и $\overline{r_3r_4}$, разделяют однозначные ветви и точка r_4 играет роль точки ∞ предыдущего примера (последняя не является точкой ветвления).

Отметим, что интегрирование рациональных функций, заданных на поверхностях Π_3, Π_4, приводит к теории эллиптических интегралов.

Несложно исследовать и случай алгебраической функции

$$w = \sqrt{a_0(z-r_1)\dots(z-r_n)}, \qquad (9)$$

где r_i попарно различны между собой. На z-сфере делаем $n/2$ разрезов $\overline{r_1r_2}, \dots, \overline{r_{n-1}r_n}$, если n четно, и $(n+1)/2$ разрезов $\overline{r_1r_2}, \dots, \overline{r_{n-2}r_{n-1}}$, $\overline{r_n\infty}$, если n нечетно. Взяв два экземпляра z-сферы с такими разрезами, склеиваем их по соответствующим разрезам. Построения, аналогичные изображенным на рис. 27, дадут сферу с $\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{n-2}{2}$ или с $\frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ ручками. Это и есть риманова поверхность функции (9). Число ручек p (род поверхности) связано с числом V точек ветвления римановой поверхности равенством $V = 2(p+1)$.

Таким образом, многозначная алгебраическая функция, определяемая уравнением (3), имеет риманову поверхность, топологически эквивалентную сфере с ручками. Это утверждение справедливо для любой многозначной алгебраической функции.

Упражнение 1°. Постройте риманову поверхность алгебраической функции $w^n - z = 0$, $n > 2$ целое, и убедитесь, что она n-листная и топологически эквивалентна сфере.

Изучение неалгебраических аналитических функций $w(z)$, удовлетворяющих уравнению $f(z, w) = 0$ с неалгебраической аналитической функцией f, в z-плоскости также приводит к римановым поверхностям, на которых аналитические функции однозначны.

Упражнение 2°. Рассмотрите логарифмическую функцию, определяемую уравнением $e^w - z = 0$, и постройте ее риманову поверхность.

§ 5. Немного об узлах

Понятие узла интуитивно представляется несложным. Простейшими примерами узлов являются «простой узел» (рис. 28) и «восьмерка» (рис. 29), которые нетрудно изобразить с помощью нити. Всякие попытки перевести «простой узел» в «восьмерку», не протаскивая концы через петлю, окончатся неудачей. Таким образом, эксперимент показывает, что эти узлы различны. Возникает вопрос о математической классификации узлов.

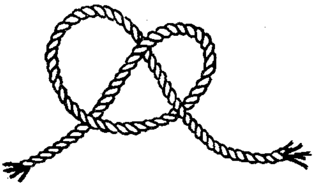


Рис. 28

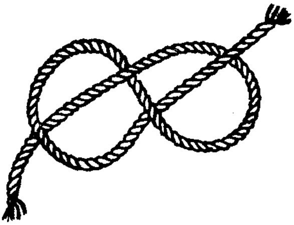


Рис. 29

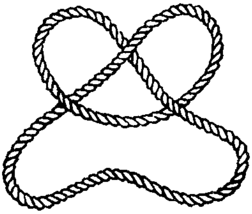


Рис. 30

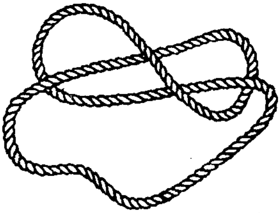


Рис. 31

Мы можем запретить протаскивание концов через петлю, если отождествим (склеим) концы веревки (рис. 30 и 31). Тогда естественным будет следующее определение.

Определение 1. *Узлом* называется гомеоморфный образ окружности S^1 в $\mathbb{R}^3$.

Примеры: а) тривиальный узел (рис. 32); б) «простой узел», или «клеверный лист», или «трилистник» (рис. 28, 30); в) «восьмерка», или четырехкратный узел (рис. 29, 31).◆

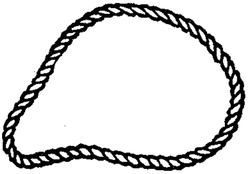


Рис. 32

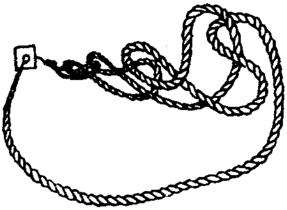


Рис. 33

Заметим, что в силу определения все узлы гомеоморфны. Поэтому для классификации узлов классифицируют вложения (гомеоморфизмы), с помощью которых окружность может быть вложена в $\mathbb{R}^3$.

Определение 2. Узлы K_1 и K_2 *эквивалентны*, если существует гимеоморфизм $\mathbb{R}^3$ на себя, отображающий K_1 на K_2.

Более точная классификация узлов основана на понятии изотопии пространства $\mathbb{R}^3$. Непрерывное отображение H: $[0, 1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ называется *изотопией*, если при каждом $t \in [0, 1]$ отображение H гомеоморфно отображает $\mathbb{R}^3$ на себя, причем при $t = 0$ — это тождественное отображение. Таким образом, изотопия — это семейство гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра t и непрерывно меняющихся с увеличением t, начиная с тождественного при $t = 0$.

Определение 3. Узлы K_1 и K_2 принадлежат одному *изотопическому типу*, если существует изотопия $H(T, x)$ пространства $\mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^3$, такая, что $H(1, K_1) = K_2$.

Упражнение 1°. Покажите, что принадлежность к одному изотопическому типу является отношением эквивалентности.

Существуют примеры узлов, эквивалентных в смысле определения 2, но принадлежащих к разным изотопическим типам. Так, «трилистник» и зеркальный образ «трилистника», т. е. узел, симметричный «трилистнику» относительно некоторой плоскости в $\mathbb{R}^3$, не принадлежат к одному изотопическому типу (доказательство этого требует развития специальной техники). В то же время «восьмерка» и ее зеркальный образ принадлежат к одному изотопическому типу.

Основные свойства удобно изучать на узлах, завязанных сравнительно просто.

Определение 4. *Полигональным узлом* называется узел, являющийся объединением конечного числа прямолинейных отрезков.

Определение 5. Узел, эквивалентный полигональному, называется *ручным*. Узел, не эквивалентный полигональному, называется *диким*.

Примеры. Тривиальный узел, «трилистник», «восьмерка» — ручные узлы. На рис. 33 приведен пример дикого узла. Число петель в этом узле возрастает неограниченно, в то время как их размер неограниченно уменьшается при приближении к точке p. Интересно, что если бы число петель было конечным, то узел был бы эквивалентен тривиальному узлу.◆

Вопрос о классификации узлов тесно связан со свойствами пространств, дополнительных к узлам. Например, если какой-то топологический инвариант дополнений узлов K_1, K_2 различен, то узел K_1 не эквивалентен K_2 (и не изотопен). Полезным топологическим инвариантом является фундаментальная группа дополнения узла (см. гл. III). Заметим также, что множество всех классов эквивалентности узлов (или изотопической эквивалентности) можно наделить алгебраической структурой. Понятие об этой структуре можно дать следующим образом: назовем *композицией* (*умножением*) $K_1 * K_2$ двух узлов, K_1, K_2, последовательное завязывание их одного за другим; порядок завязывания узлов несуществен, точнее, узел $K_1 * K_2$ эквивалентен узлу $K_2 * K_1$. Таким образом определяется композиция классов эквивалентности узлов, которая коммутативна и ассоциативна. Класс эквивалентности тривиального узла играет роль единицы. Однако попытка решить уравнение $K * X = 1$ (развязать K посредством завязывания узла X) не удается, кроме случая $K = 1$. Следовательно, классы эквивалентных узлов образуют не группу, а только полугруппу.

§ 6. О некоторых приложениях топологии в физике

В физике конденсированных состояний изучаются различные упорядоченные структуры в веществах, и топологические представления необходимо возникают при исследовании устойчивости тех или иных дефектов, возникающих в этих структурах. Этими дефектами являются: в кристаллах — дислокации (нарушения порядка кристаллической структуры), в жидких кристаллах — дисклинации (нарушения непрерывности в поле направлений молекул), вихри — в сверхтекучих жидкостях He^3, He^4 и ферромагнетиках и другие устойчивые геометрические конфигурации. Топологическая основа некоторых из этих явлений будет описана в этом параграфе.

1. Понятие векторного поля и его особой точки (или особой линии) первым появляется при математическом описании дефектов. Векторным полем на области $U \subset \mathbb{R}^3$ трехмерного евклидова пространства называют обычно отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$, сопоставляющее каждой точке $x \in U$ вектор $F(x) \in \mathbb{R}^3$, $F(x) \neq 0$ (мы отождествляем точки x с их радиус-векторами $\vec{x}$); если от каждой точки

$x \in U$ отложить выходящий из нее вектор $\vec{F}(x)$, то возникающая (рис. 34) геометрическая ситуация и называется векторным полем на U. При этом желательно требовать непрерывную зависимость вектора $\vec{F}(x)$ от точки x (т. е. непрерывность отображения $F\colon U \to \mathbb{R}^3\backslash 0$). Однако это требование не всегда удовлетворяется для всех точек из U — в отдельных точках (называемых «особыми») или на кривых $\gamma \subset U$ («особых линиях») поле $\vec{F}$ может оказаться разрывным или даже неопределенным; в частности, нулевое значение $\vec{F}(x) = \vec{0}$ также считается неопределенным (не определено направление вектора). В подобных случаях говорят о векторном поле с особенностями.

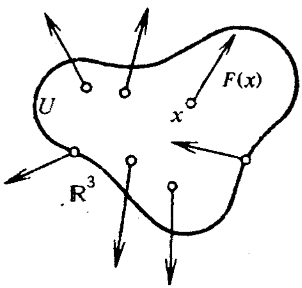


Рис. 34

Например, если область U занята физическим веществом — ферромагнетиком, — то в ее точках определен магнитный момент — вектор $\vec{M}$ (даже в отсутствие внешнего магнитного поля), если температура ниже критической, характерной для данного вещества. Возникающее векторное поле $\vec{F}(x) = \vec{M}(x)$ на области U может иметь особые точки и особые линии. Простейший тип особой точки имеем в случае поля, направленного по радиус-векторам $\vec{x}$: $\vec{M}(x) = M(x)\cdot\vec{x}/|\vec{x}|$, где $M(x) \neq 0$ — числовая непрерывная функция на U, $0 \in U$; здесь в точке $x = 0$ поле не определено, $x = 0$ — особая точка, называемая «еж».

Если вектор $\vec{M}(x)$ во всякой точке, где он определен, параллелен подпространству $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $\vec{M}(x) \in \mathbb{R}^2$ и в любой плоскости Π_{x^0}, проходящей через точку $x^0 \in U^1$ и параллельной $\mathbb{R}^2$, на сечении $V_{x^0} = U \cap \Pi_{x^0}$ задано векторное поле $\vec{M}\colon V_{x^0} \to \mathbb{R}^2$, которое может иметь в плоской области V_{x^0} особую точку x^0_*; при параллельном переносе плоскости Π_{x^0} (меняя x^0) эти особые точки x^0_* могут слиться в особую линию l векторного поля $\vec{M}$ на U (рис. 35); особая линия l называется «вихрем» поля $\vec{M}$. Вихри естественно появляются при движениях сплошных сред — жидкостей и газов, когда частицы среды описывают круговые движения вокруг некоторой линии l. Обычно под вихрем понимают именно это круговое движение среды, линию l называют при этом «осью» вихря. При математическом описании вихрей удобно «вихрь» отождествлять с «осью» вихря.

Роль векторного поля $\vec{M}$ здесь играет поле скоростей $\vec{v}(x)$ точек среды x, l — особая линия векторного поля $\vec{v}(x)$.

Замечательным фактом является открытие и исследование вихревых движений в сверхтекучем гелии He^4. Жидкость He^4 при температурах T, близких к абсолютному нулю, ведет себя как смесь двух компонент — «нормальной» (плотность ρ_n, скорость $\vec{v}_n$) и «сверхтекучей» (плотность ρ_s, скорость $\vec{v}_s$), $\rho_s + \rho_n = \rho$ — полная плотность; имеем при $T = 0$ $\rho_n = 0$, $\rho_s = \rho$. Именно сверхтекучая компонента He^4 образует вихри, устойчивые, несмотря на силы вязкого трения. Вихри в жидкостях и газах не обладают такой устойчивостью.

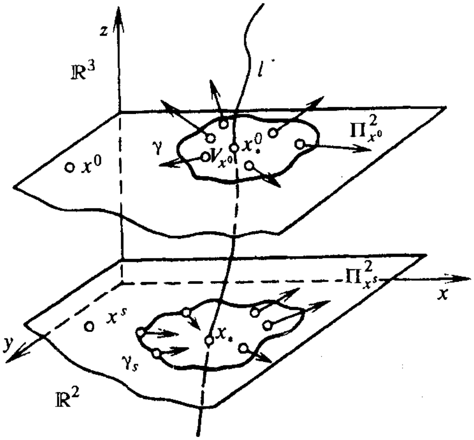


Рис. 35

2. Чтобы уяснить топологические причины устойчивости и законы эволюции вихрей в ферромагнетике и сверхтекучем He^4, необходимо ввести простейшие топологические инварианты.

Фиксируем двумерную плоскость $\Pi^2 \subset \mathbb{R}^3$ и путь $\gamma \subset \Pi^2$, гомеоморфный окружности и снабженный ориентацией (фиксированным направлением обхода). Пусть задано непрерывное отображение f: $\gamma \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, также снабженную ориентацией. Когда точка $p \in \gamma$ пробегает путь $\overset{\frown}{p_0 p}$ от фиксированной точки $p_0 \in \gamma$ в направлении ориентации γ, точка $q = f(p)$ на S^1 пробегает путь на S^1, идущий (в зависимости от положения точки p) либо в направлении ориентации, либо против нее и отсчитываемый от точки $q = f(p_0)$ (рис. 36). Когда точка p сделает один полный обход пути γ, точка $q = f(p)$ в итоге сделает k_+ полных витков вокруг S^1 в направлении ориентации S^1 и k_- — в противоположном направлении.

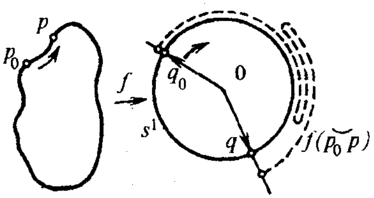


Рис. 36

Степенью отображения f ориентированной кривой γ в S^1 называется разность $k_+ - k_-$, обозначаемая $\deg f$. Эту степень можно определить и как суммарное число полных поворотов радиус-вектора $\vec{q}$, считая полный поворот в направлении ориентации за $+1$ и в противоположном направлении — за -1.

Понятие степени очевидным образом распространяется и на непрерывные отображения $f\colon \gamma \to \Gamma$ замкнутых ориентированных путей γ, Γ и $\mathbb{R}_3$, не обязательно лежащих в плоскости, но гомеоморфных окружности.

3. Степень $\deg f$ является топологическим инвариантом (точнее говоря, гомотопическим): она сохраняется, если непрерывно менять («гомотопировать») отображение f. Это означает, что если f включается в семейство отображений $f_\lambda\colon \gamma \to \Gamma$, зависящее от числового параметра λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, так, что $f_1 = f$ и точка $q' = f_\lambda(p)$ непрерывно зависит от переменных $(\lambda, p) \in [0, 1] \times \gamma$, то для каждого отображения семейства f_λ степень $\deg f_\lambda$ постоянна для всех λ из промежутка $[0, 1]$.

Таким образом, при непрерывном изменении отображения f (без резких скачков, без разрывов) нельзя уменьшить суммарное число положительных и отрицательных петель образа $f(\gamma)$, накрученных на Γ, т. е. число $k_+ - k_-$.

Другое важное свойство степени $\deg f$ состоит в следующем: если γ, γ_1, γ_2 — пути, гомеоморфные окружности, с фиксированными ориентациями и $f\colon \gamma \to \gamma_1$, $g\colon \gamma_1 \to \gamma_2$ — непрерывные отображения, степени которых $\deg f$, $\deg g$, то степень $\deg (gf)$ суперпозиции $gf\colon \gamma \to \gamma_2$ равна произведению степеней f, g: $\deg (gf) = (\deg g)(\deg f)$. Это свойство проверяется подсчетом суммарного числа петель образа $(gf)(\gamma)$, накрученных на γ_2, через аналогичные суммы для образов $f(\gamma)$, $g(\gamma_1)$.

Сопоставим каждому отображению $f\colon \gamma \to \Gamma$ класс $[f]$ всех гомотопных ему отображений $f'\colon \gamma \to \Gamma$. Нетрудно убедиться, используя наглядные соображения, что отношение гомотопности отображений является отношением эквивалентности. Следовательно, множество всех непрерывных отображений из γ в Γ разбивается на множества непересекающихся классов $\{[f]\}$, называемых гомотопическими классами. Для всех отображений f' из класса $[f]$ $\deg f' = \deg f$, поэтому каждому классу можно сопоставить целое число: $[f] \to \deg f$. Нетривиальный факт — указанное соответствие является биективным (см. § 3 гл. III). Поэтому целое $n = \deg f$ является гомотопическим инвариантом класса отображений $[f]$, и удобно этот класс нумеровать индексом n: $[f]_n$. Класс $[f]_0$ состоит из всех отображений, гомотопных постоянному отображению $f_0\colon \gamma \to q_*$ пути γ в постоянную точку $q_* \in \Gamma$.

4. Вернемся теперь к магнитному вихрю в ферромагнетике (рис. 35) и к вихрю в сверхтекучем He^4.

В плоскости Π_{x^0} возьмем ориентированный замкнутый путь γ, на котором нет особых точек и внутри которого имеется единственная особая точка x_0; пусть он гомеоморфен окружности и один раз обегает особую точку x_0; пусть $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — ориентированная окружность единичного радиуса с центром в 0. Векторное поле $\vec{M}$, рассматриваемое только в точках $x \in \gamma$, задает отображение f: $\gamma \to S^1$, где

$$\overrightarrow{f(x)} = \frac{\vec{M}(x)}{|\vec{M}(x)|}, \qquad x \in \gamma. \tag{1}$$

Для отображения (1) определена степень $\deg f$, называемая вращением векторного поля $\vec{M}$ на γ; будем обозначать последнее $\varkappa(\vec{M}; \gamma)$.

Будем теперь плоскость Π_{x^0} непрерывно перемещать параллельно самой себе в положение Π_{x^1}, а контур γ через промежуточные положения γ_s (в соответствующей плоскости Π_{x^s}) — в контур $\gamma_1 \subset \Pi_{x^1}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, причем $\gamma_{s=0} = \gamma$, $\gamma_{s=1} = \gamma_1$. Предполагается, что все контуры γ_s окружают особую линию l, гомеоморфны исходному $\alpha(s)$: $\gamma \to \gamma_s$, ориентированы одинаково и что гомеоморфизм $\alpha(s)$ сохраняет ориентацию (т. е. $\deg \alpha(s) = +1$), непрерывно зависит от параметра s и $\alpha(0) = 1_\gamma$: $\gamma \to \gamma$ — тождественное отображение γ в себя. Векторное поле $\vec{M}(x)$, рассматриваемое на контуре γ_s, можно «перенести» гомеоморфизмом $\alpha(s)$: $\gamma \to \gamma_s$ на контур γ по формуле $\vec{F}_s(x) = \vec{M}(\alpha(s)(x))$, $x \in \gamma$. Семейство $\vec{F}_s(x)$ на γ, очевидно, непрерывно зависит от (x, s), следовательно, является гомотопией на γ векторных полей $\vec{F}_1(x) = \vec{M}(\alpha(1)(x))$, $F_0(x) = \vec{M}(x)$. В силу свойств степени имеем

$$\varkappa(\vec{M}, \gamma) = \varkappa(\vec{F}_1, \gamma) = (\deg \alpha(1))\varkappa(\vec{M}, \gamma_1) = \varkappa(\vec{M}, \gamma_1),$$

где последее вращение — вращение поля $\vec{M}$ на γ_1 в плоскости Π_{x^1}.

Это общее вращение поля $\vec{M}$ в произвольной плоскости Π_{x^1} называется топологическим индексом $\varkappa(l)$ вихря l в ферромагнетике (или топологическим зарядом вихря). Требуемые выше условия выполняются, например, для ферромагнетика, имеющего «легкую плоскость намагничивания» $\mathbb{R}^2$ (физическая терминология). В этом случае условие устойчивости вихря в ферромагнетике (при гомотопиях поля намагниченности $\vec{M}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$) состоит в отличии от нуля степени $\deg f$, или, равносильно, вращения $\varkappa(\vec{M}, \gamma)$.

Рассмотрим сверхтекучую компоненту He^4. При температурах, близких к абсолютному нулю, возникающая в He^4 сверхтекучая часть жидкости («сверхтекучий конденсат») описывается на языке квантовой механики комплекснозначной волновой функцией $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$; имеем $\Psi(x) = |\Psi(x)| e^{i\Phi(x)}$, где $|\Psi|$ — модуль комплексного числа, Φ — фаза волновой функции. При этом, если сверхтекучий конденсат находится в равновесном состоянии ($\vec{v_s} = 0$), то $|\Psi|$ — постоянен (не зависит от x), Φ — неопределенная константа; если сверхтекучий конденсат находится в неравновесном состоянии ($\vec{v_s} \neq 0$ тождественно), то $|\Psi|$ остается константой, а $\Phi = \Phi(x)$ становится функцией точки $x \in \mathbb{R}^3$, причем поле скорости сверхтекучей компоненты находится по формуле $\vec{v_s}(x) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{grad} \Phi$, где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса атома He^4.

Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$, занятая сверхтекучим конденсатом. Для всякой точки $x \in U$, в которой $\vec{v_s}(x) \neq 0$, определена фаза $\Phi(x)$, которой соответствует луч в $\mathbb{R}^2$, выходящий из нуля под углом $\Phi(x)$, отсчитываемым против часовой стрелки от фиксированного направления. Для точки $x \in U$, в которой $\vec{v_s}(x) = 0$, угол $\Phi(x)$ не определен. Таким образом, на области U возникает векторное поле единичных векторов $\vec{d}(x)$, $d\colon\ U \to S^1$, направленных по лучам, соответствующим значениям фазы $\Phi(x)$, за исключением особых точек, в которых фаза $\Phi(x)$ не определена. Если выбрать замкнутый ориентированный путь γ в U, на котором нет особых точек, то для отображения $d\colon\ \gamma \to S^1$ определена степень $\deg\, d$ (при фиксированной ориентации на S^1).

Рассмотрим теперь вихрь в сверхтекучем He^4 с вихревой линией l; на l не определено значение фазы Φ и она состоит из особых точек поля $\vec{d}(x)$. В качестве γ выберем ориентированный замкнутый путь, один раз охватывающий вихревую линию l. Как и для вихря в ферромагнетике, степень $\deg\, d$ отображения $d\colon\ \gamma \to S^1$ называется топологическим индексом (или топологическим зарядом) вихря. Устойчивость вихря в сверхтекучем He^4 снова характеризуется отличием от нуля топологического индекса вихря.

5. Устойчивость вихрей в ферромагнетике и сверхтекучем He^4 с физической точки зрения означает, что они наблюдаемы в естественных условиях, несмотря на внешние воздействия, от которых полностью избавиться невозможно. С математической стороны эта устойчивость обусловлена, как показывается ниже, условием отличия от нуля топологического индекса вихря и связана, таким образом, с гомотопическими свойствами окружности S^1.

Если магнитное поле $\vec{M}(x)$ или сверхтекучую скорость $\vec{v_s}(x)$ (соответсвующую фазу $\Phi(x)$) достаточно мало изменить равномерно для всех x, то новые значения $\vec{M_1}(x) = \vec{M}(x) + \Delta\vec{M}(x)$, $(\vec{v_1})_s(x) = \vec{v_s}(x) + \Delta\vec{v_s}(x)$ (фаза $\Phi_1(x) = \Phi(x) + \Delta\Phi(x)$) при достаточно малых приращениях будут гомотопны прежним. Такие гомотопии, например, могут быть записаны в виде $\vec{M}_\lambda(x) = \vec{M}(x) + \lambda\Delta\vec{M}(x)$, $\Phi_\lambda(x) = \Phi(x) + \lambda\Delta\Phi(x)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; эти гомотопии порождают гомотопии векторных полей $\overrightarrow{f(x)}$, $\overrightarrow{d(x)}$, т. е. отображения $f_\lambda\colon \gamma \to S^1$, $d_\lambda\colon \gamma \to S^1$ (f_λ определено формулой (1)), зависящие от параметра λ непрерывно и совпадающие с $f_0 = f$, $d_0 = d$ при $\lambda = 0$ и с f_1, d_1 — отвечающими полями $\vec{M}_1(x)$, $(\vec{v}_1)_s(x)$ — при $\lambda = 1$.

Следовательно, $\deg f_\lambda$, $\deg d_\lambda$ не меняются при изменении λ: $\deg f_0 = \deg f_1$, $\deg d_0 = \deg d_1$. Таким образом, малые физические возмущения не меняют степень на контуре γ. Если топологический индекс $\deg f$ или $\deg d$ вихря был отличен от нуля, то и после возмущения $\deg f_1 \neq 0$ или $\deg d_1 \neq 0$ на кривой γ. А отсюда следует центральное утверждение о том, что кривая γ охватывает особую линию измененного векторного поля $\vec{M}_1(x)$ или $(\vec{v}_1)_s(x)$. Действительно, выбирая кривую γ окружностью (лежащей в плоскости Π_{x^0}) и предполагая, что ограничиваемый ею замкнутый круг $D \subset \Pi_{x^0}$ не имеет особой точки поля $\vec{M}_1$ или $(\vec{v}_1)_s$ (следа пересечения особой линии вихря с D), получим продолжение отображения $f_1\colon D \to S^1$ $(d_1\colon D - S^1)$ с окружности γ на круг D. Зададим деформацию круга D к своему центру a: $\varphi_\lambda(x) = a + \lambda(x - a)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Она порождает гомотопию $\tilde{f}_\lambda(\tilde{d}_\lambda)\colon \gamma \to S^1$ по формуле $\tilde{f}_\lambda(x) = f(\varphi_\lambda(x))$ (аналогично для $\tilde{d}_\lambda$). При $\lambda = 1$ $\tilde{f}_1(x) = f_1(x)$, при $\lambda = 0$ $\tilde{f}_0(x) = f_1(a)$ — постоянное отображение; мы показали, таким образом, что отображение $f_1\colon \gamma \to S^1$ гомотопно постоянному, если оно продолжается на D (и аналогично для $d_1\colon \gamma \to S^1$). Очевидно, что степень $\deg \tilde{f}_0$ ($\deg \tilde{d}_0$) постоянного отображения равна нулю, а из свойства сохранения степени при гомотопии следует, что и $\deg \tilde{f}_1 = 0$ (и аналогично $\deg \tilde{d}_1 = 0$), что противоречит ранее установленному выводу об отличии $\deg f_1$ ($\deg d_1$) от нуля. Таким образом, убеждаемся в наличии особой точки векторного поля $\vec{M}_1(x)$ или $\vec{d}_1(x)$ внутри круга D; передвигая D вдоль линии вихря l, получим семейство особых точек, которые сливаются в линию вихря l_1 поля $\vec{M}_1(x)$ или поля $(\vec{v}_1)_s(x)$.

Следовательно, малые физические возмущения магнитного поля в ферромагнетике (в плоскости $\mathbb{R}^2$) или поля скорости сверхтекучей компоненты He^4 не могут уничтожить вихрь ненулевого топологического индекса — в этом и состоит высказанное выше утверждение об устойчивости вихрей. Фактически установлено более сильное утверждение о «топологической устойчивости»: вихрь сохраняется при всякой гопотопии $\vec{M}_\lambda(x)$, $(\vec{v}_\lambda)_s(x)$, не обязательно малой, но такой, чтобы были определены и непрерывны гомотопии f_λ: $\gamma \to S^1$, d_λ: $\gamma \to S^1$.

Что касается вихрей топологического индекса 0, то они топологически неустойчивы (т. е. могут быть разрушены в процессе гомотопии).

6. Имеется чисто физическая причина появления окружности S^1 в анализе вихрей в п. 5. Согласно известному принципу физики, наблюдаемые в экспериментах устойчивые состояния вещества соответствуют локальным минимумам энергии. Энергия вычисляется по заданному полю (векторному, тензорному и др.), описывающему состояние вещества. Например, в случае ферромагнетика энергия определяется векторным полем магнитного момента $M(x)$, в случае гелия He^4 — волновой функцией $\Psi(x)$. Так называемые «вырожденные состояния» вещества характеризуются неединственностью поля, на котором энергия принимает значение локального минимума. Например, для ферромагнетика энергия может иметь минимальное значение, когда векторы $\vec{M}(x)$ ортогональны определенной кристаллической оси (т. е. лежат в некоторой двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$), при этом имеют постоянный модуль $|\vec{M}(x)|$ и могут иметь любое направление (это как раз случай «легкой плоскости» намагничивания). Множество всех таких векторов $\vec{M}(x)$ образует окружность S^1 радиуса $|\vec{M}(x)| = \mathrm{const}$ и называется областью вырожденных (по параметру намагниченности) состояний ферромагнетика. Если энергия ферромагнетика зависит только от модуля намагниченности $|\vec{M}| = \mathrm{const}$, то область вырождения — двумерная сфера S^2; этот случай соответствует аморфному (изотропному) веществу.

Случай сверхтекучего гелия He^4 отличен от случая ферромагнетика — он связан с квантовой механикой: для сверхтекучего конденсата в равновесии фаза Φ волновой функции $\Psi = |\Psi| \exp(i\Phi)$ остается произвольной, модуль $|\Psi|$ постоянным, энергия не зависит от Φ, следовательно, имеем вырождение по фазе Φ и область вырожденных состояний — множество всевозможных значений функции Ψ на комплексной плоскости — является окружностью S^1 радиуса $|\Psi|$.

Топологические индексы вихрей, рассмотренные выше, определяются отображениями f, d: $\gamma \to S^1$ замкнутых кривых в области вырождения ферромагнетика (с легкой плоскостью намагничивания) и сверхтекучего He^4. Таким образом, наличие топологически устойчивых вихрей в этих веществах связано с топологическими свойствами области вырождения, которой является для них окружность S^1.

7. В физике, однако, встречаются области вырождения, отличные от S^1. Уже случай изотропного ферромагнетика демонстрирует двумерную область вырождения — сферу S^2. Нетрудно сделать вывод об отсутствии топологически устойчивых вихрей в этой ситуации. Если D — произвольный круг с границей γ (окружностью), то любое отображение $f\colon \gamma \to S^2$ гомотопно постоянному отображению $f_0\colon \gamma \to \vec{c} \in S^2$. Такая гомотопия, например, осуществляется движением точек кривой $f(\gamma)$ на S^2 к фиксированной точке $\vec{c}$ по меридианам, идущим из $(-\vec{c})$ в $\vec{c}$ (для простоты можно считать, что $(-\vec{c})$ не лежит на образе $f(\gamma)$). Следовательно, $\deg f = \deg f_0 = 0$, и круг D не обязательно пересекается с линией топологически устойчивого вихря. Этот факт — следствие топологических свойств области вырождения — сферы S^2.

Но в силу тех же свойств в изотропном ферромагнетике существуют и наблюдаются более простые топологические особенности — изолированные особые точки векторного поля $\vec{M}(x)$; пример особой точки типа «еж» обсуждался в п. 1. Для построения топологического индекса особой точки необходимо задать отображение f (см. (1), п. 4) на сфере $S^2_\varepsilon(x^*)$ достаточно малого радиуса ε с центром в особой точке x^*, действующее в единичную сферу S^2, т. е. $f\colon S^2_\varepsilon(x^*) \to S^2$. Для такого отображения обобщается понятие степени отображения, обозначаемой по-прежнему $\deg f$. Конструкция степени значительно сложнее, чем для отображений окружности в окружность. Во-первых, сферы необходимо ориентировать, ориентировав их касательные плоскости так, чтобы ориентации в близких точках были одинаковы. Во-вторых, необходимо определить алгебраическое число слоев образа $f(S^2_\varepsilon)$, лежащих на сфере S^2; при этом слою приписывается число $(+1)$, если его ориентация совпадает с ориентацией S^2, и число (-1) в противном случае. Придание точного смысла этим словам в случае непрерывных отображений — довольно длинная работа (основания для этого содержатся в гл. III, § 4; гл. IV, § 5; гл. V, § 6); для случая дифференцируемых отображений определение $\deg f$ можно дать методами дифференциальной геометрии (см., например, [53]). В этом параграфе мы будем пользоваться не строгим, но наглядным описанием $\deg f$, данным выше. Свойства степени отображений окружностей (п. 3) верны и для степени отображений сфер. Таким образом, для ферромагнетика с магнитным векторным полем $\vec{M}(x)$ и особой точкой x^* определено целое число $\deg f$, называемое топологическим индексом особой (изолированной) точки x^* и обозначаемое $\varkappa(x^*)$; это число не зависит от радиуса $\varepsilon > 0$ сферы $S^2_\varepsilon(x^*)$, если ε достаточно мало. Это число $\varkappa(x^*)$ физики называют топологическим зарядом особой точки x^*.

В случае особой точки типа «еж» (п. 1) имеем $\varkappa(x^*) = +1$. Топологический индекс $\varkappa(x^*)$ играет ту же роль при исследовании особых точек, что и топологический индекс $\varkappa(l)$ при исследовании вихрей. Особая точка топологически устойчива, если $\varkappa(x^*) \neq 0$; такая точка физически наблюдаема и сохраняется при гомотопиях магнитного поля; напротив, если $\varkappa(x^*) = 0$, то особая точка x^* может быть устранена при подходящей гомотопии магнитного поля, т. е. является топологически неустойчивой.

В начале 70-х годов нашего столетия были изучены области вырождения сверхтекучих фаз гелия He^3. Этих фаз оказалось две, называемых A, B, из них наиболее сложная и интересная — фаза A. Область вырождения фазы A характеризуется множеством четверок $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v})$ векторов из $\mathbb{R}^3$, где первые тройки $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — всевозможные ортонормированные реперы с фиксированной ориентацией, а $\vec{v}$ — произвольный единичный вектор (векторы $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, $\vec{v}$) имеют определенный физический смысл [16], который мы не обсуждаем). Множество ориентированных реперов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ можно отождествить с группой $\mathrm{SO}(3)$ — группой ортогональных матриц 3×3 или группой вращения твердого тела. Множество векторов $\vec{v}$ — единичная сфера S^2. Следовательно, область вырождения A-фазы — декартово произведение $S^2 \times \mathrm{SO}(3)$(его размерность равна 5). При определенных физических условиях вектор $\vec{v}$ фиксируется, и тогда область вырожденных состояний сводится к группе $\mathrm{SO}(3)$. В этой ситуации не работает степень отображения и необходимо привлекать более сложный аппарат гомотопической топологии — понятие фундаментальной группы. Соответствующий анализ показывает, что имеется два класса вихрей: один — топологически устойчивые вихри, другой — топологически неустойчивые. Экспериментально удается наблюдать не только устойчивые, но и неустойчивые вихри, помещая A-фазу во вращающийся сосуд. Наблюдаемые новые явления, такие, как вихрь с концом, вихревое течение без особой линии, вихри на поверхности, допускают теоретическое объяснение на основе топологических представлений.

8. Как выше было замечено, для исследования более сложных, чем сфера S^2 или окружность S^1, областей вырождения необходимо использовать более сложный аппарат теории гомотопий. Вначале заметим, что понятие гомотопии и гомотопических классов естественно распространяется и на отображения $f\colon X \to Y$ произвольных множеств, лежащих в евклидовых (и даже в метрических и топологических пространствах); совокупность всех таких отображений снова разбивается на гомотопические классы $\{[f]\}$, классы эквивалентности, совокупность которых обозначается через $\pi(X, Y)$. Однако описание этих классов становится более сложным и является одной из важных задач гомотопической топологии.

Наиболее часто рассматриваются отображения $f\colon S^n \to Y$ n-мерной единичной сферы в Y, $n \geqslant 1$, гомотопические классы которых $\pi[S^n, Y]$ называются n-мерными гомотопическими классами.

Путь $[f]$ — гомотопический класс из $\pi[S^n, Y]$. Отображения класса $[f]$ называют n-мерными сфероидами (или «петлями» при $n = 1$). Полезно зафиксировать точку $x_0 \in S^n$, точку $y_0 \in Y$ и ограничить класс сфероидов $f\colon S^n \to Y$ условием $f(x_0) = y_0$ — сфероиды в отмеченной точке y_0. Их образы можно представлять себе как сильно деформированные сферы, прикрепленные к точке y_0. Для гомотопии f_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, сфероида f также вводится условие $f_\lambda(x_0) = y_0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; это означает, что хотя образ $f_\lambda(S^n)$ и перемещается в Y при изменении λ, однако он всегда прикреплен к неизменной точке y_0. Тогда соответствующие гомотопические классы сфероидов («петель» при $n = 1$) в точке y_0 обозначаются через $\pi_n(Y, y_0)$.

Важное свойство множества $\pi_n(Y, y_0)$ — в нем вводится понятие произведения, и $\pi_n(Y, y_0)$ становится группой (коммутативной при $n > 1$). Проще всего описать операцию произведения при $n = 1$. Пусть S^1 ориентирована. Если $f\colon S^1 \to Y$ — петля из класса $[f]$, то при движении точки x по S^1, начиная от точки x_0, в направлении ориентации точка $y = f(x)$ описывает путь в Y с началом и концом в точке y_0 («петлю») в точке y_0. Пусть f, g — две петли в точке y_0 из классов $[f]$, $[g] \in \pi_1(Y, y_0)$; тогда можно рассмотреть «сложную» петлю в точке y_0, составленную из петли f, проходимой вначале, и петли g, проходимой следом за ней, причем эта двойная петля соответствует одному полному обходу окружности S^1 точкой x (рис. 37).

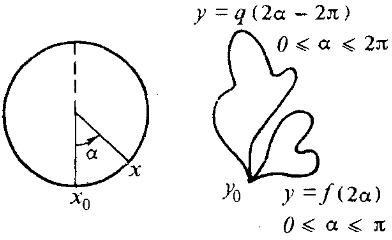


Рис. 37

Двойная петля и определяет класс из $\pi_1(Y, y_0)$, равный по определению произведению $[f] \circ [g]$ класса $[f]$ на класс $[g]$ (в указанном порядке). Петля $e\colon S^1 \to y_0 \in Y$ (постоянное отображение) определяет класс $[e]$, являющийся единицей в $\pi_1(Y, y_0)$: $[e] \circ [f] = [f] \circ [e] = [f]$ для любого $[f] \in \pi_1(Y, y_0)$. Любая петля из класса $[e]$ гомотопна постоянному отображению e. Обратный элемент $[f]^{-1}$ определяется петлей f, но проходимой в обратном направлении: $y = f(2\pi - \alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Нетрудно проверить справедливость аксиом группы.

Умножение гомотопических классов в $\pi_n(Y, y_0)$ при $n > 1$ описывается сложнее, и мы отсылаем читателя к гл. III, где подробно изложены начальные сведения о группах π_1 и π_n, $n > 1$. Группа $\pi_1(Y, y_0)$ называется фундаментальной группой пространства Y в точке y_0. Для линейно связанных пространств (в которых любые две точки возможно соединить путем) группа $\pi(Y, y_0)$ не зависит от выбора точки y_0 (т. е. $\pi_1(Y, y_0)$ и $\pi_1(Y, y_1)$ изоморфны для любых точек y_0, y_1). Действительно, если петля $f \in \pi_1(Y, y_1)$, то ее можно «перенести» в $\pi_1(Y, y_0)$, где ей соответствует петля $\tilde{f}$, составленная изт трез частей, $\overrightarrow{y_0y_1}$, f, $\overrightarrow{y_1y_0}$, проходимых в указанном порядке, где $\overrightarrow{y_0y_1}$ — путь, соединяющий точку y_0 с y_1 и проходимый в направлении от y_0 к y_1, а $\overrightarrow{y_1y_0}$ — обратный путь. Это правило и задает изоморфизм групп $\pi_1(Y, y_1)$, $\pi_1(Y, y_0)$.

Указанный изоморфизм позволяет отождествлять группы $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_1(Y, y_1)$ для линейно связанных пространств, и они обозначаются символом $\pi_1(Y)$.

Приведем ряд примеров. Если $Y = S^1$, то $\pi_1(S^1)$ — коммутативная группа, изоморфная группе целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению; этот факт записывают равенством $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Аналогичное утверждение имеем и для $Y = S^n$, $n > 1$: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Образующий элемент γ_n группы $\pi_n(S^n)$, $n \geqslant 1$, содержит тождественное отображение 1_{S^n}: $S^n \to S^n$; следовательно, произвольный элемент $[f] \in \pi_n(S^n)$ имеет вид $[f] = k\gamma_n$. Целое k вляется по определению степенью отображения $f\colon S^n \to S^n$, обозначаемой $\deg f$. В частном случае $f\colon S^1 \to S^1$ число k имеет следующее геометрическое истолкование: петля f гомотопна петле, получаемой повторением петли 1_{S^1}: $S^1 \to S^1$ в положительном направлении k раз, если $k > 0$, и в отрицательном $|k|$ раз, если $k < 0$, при $k = 0$ петля f гомотопна постоянной петле e.

Таким образом, в рассматриваемом случае $[f] = (\deg f)\gamma_1$ для f: $S^1 - S^1$, и, более общо, $[f] = (\deg f)\gamma_n$, если $f\colon S^n \to S^n$, $n > 1$; тем самым устанавливается однозначная связь между гомотопическим классом $[f]$ и степенью $\deg f$ отображения f. В частности, при $Y = S^2$ мы получаем определение $\deg f$ для случая отображений $f\colon S^2 \to S^2$, необходимое при рассмотрении особых точек ферромагнетика. Если $Y \neq S^n$, то, вообще говоря, такой связи может не быть или потребуется обобщение понятия степени $\deg f$; это зависит от алгебраического строения гомотопической группы $\pi_n(Y)$. Так, например, при классификации вихрей сверхтекучей фазы A гелия He^3 необходимо рассматривать отображения — петли $f\colon S^1 \to \mathrm{SO}(3)$ — и иметь их гомотопическую классификацию. Так как $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$, то, как и выше, имеем выражение гомотопического класса $[f] = k\gamma_*$, где γ_* — образующий класс в $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$, а $k \in \mathbb{Z}_2$ — вычет по mod 2, принимающий значения либо 0, либо 1. Определяя $\deg_2 f$ — степень по mod 2 — равенством $\deg_2 f = k$, приходим к обобщению целочисленной степени. При этом основные свойства степени сохраняются (проверьте в качестве упражнения!), и мы получаем два типа вихрей: топологически устойчивых с топологическим индексом вихря 1 и топологически неустойчивых с индексом 0.

9. Особые точки и особые линии (вихри) возникают и в другом классе веществ — так называемых жидких кристаллах, интенсивно изучающихся физиками в последние 20 лет. Под этим именем известен ряд состояний вещества, в которых наблюдается определенная «структура порядка», промежуточная между упорядоченностью обычных жидкостей и упорядоченностью твердых кристаллических тел.

«Эта вспышка интереса была вызвана многими причинами. Во-первых, жидкие кристаллы ускорили революцию в технике устройств визуального представления информации (дисплеев)... Во-вторых, жидкокристаллическое состояние присуще многим биологически активным системам, в том числе и человеческому телу... В-третьих, и это важнее всего с нашей точки зрения, физика жидких кристаллов оказалась необычайно сложной» [73, с. 21—22].

Наиболее просто такая структура выражена в «нематических» жидких кристаллах (или кратко — «нематиках»), которые состоят из удлиненных (стержнеобразных) молекул; молекулы нематика имеют одну (продольную) ось симметрии. Для нематиков характерен ориентационный порядок осей симметрии молекул, когда оси близких молекул почти параллельны. Задавая в каждой точке x нематика направление («директор»), определяемое осью молекулы, проходящей через x, получим «поле направлений» директора. Поле директора определяет состояние нематика подобно тому, как поле намагниченности ферромагнетика определяет состояние последнего. Для аналитического задания поля директора удобно каждому направлению сопоставить единичный вектор $\vec{d}(x)$ в $\mathbb{R}^3$, параллельный директору в точке x; на области $U \subset \mathbb{R}^3$, занятой нематиком, возникает векторное поле $\vec{d}(x)$. Поле директора определяется векторным полем $\vec{d}(x)$, но его следует отличать от векторного поля $\vec{d}(x)$, так как векторы $\pm\vec{d}(x)$ задают одно и то же направление. Концы вектора $\pm\vec{d}(x)$ задают на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^3$ пару центрально-симметричных точек, которую можно считать точкой $\hat{d}(x)$, проективного пространства $\mathbb{R}P^2$, получаемого из двумерной сферы S^2 склейкой (отождествлением) диаметрально противоположных точек; напомним, что $\mathbb{R}P^2$ можно получить и из полусферы, склеивая диаметрально противоположные точки на экваторе (см. § 3). Таким образом, поле директора полностью характеризуется отображением $\hat{d}\colon U \to \mathbb{R}P^2$ области U в проективное пространство $\mathbb{R}P^2$. Именно $\mathbb{R}P^2$ является областью вырожденных состояний нематика, так как для направлений осей молекул нет каких-либо физических ограничений (в отличие от ряда других типов жидких кристаллов).

Естественно требование непрерывности отображения $\hat{d}$ на всей области U, однако это не всегда возможно и возникают (как и для векторного поля) особые точки (и особые линии) в области U, в которых (и на которых) отображение не определено или терпит разрыв. Особые линии наблюдаются оптически в виде тонких нитей в нематике, откуда и происходит название «нематик» (от греческого — «нить»). На рис. 38, 39 приведены две картины поля директора в нематике в случае плоского поля $\hat{d}(x)$ (т. е. $\hat{d}(x) \in \mathbb{R}^2$); вихрь здесь представлен центральной точкой.

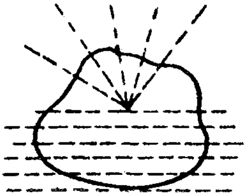


Рис. 38

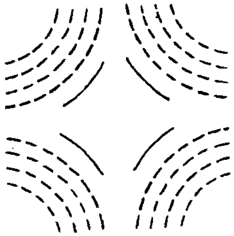


Рис. 39

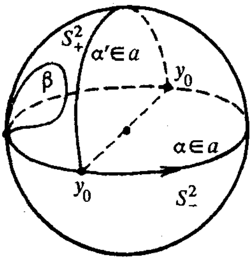


Рис. 40

Топологическая классификация вихрей определяется по прежнему сценарию. Возьмем окружность S^1, окружающую особую линию, и рассмотрим на ней поле директора, определяемое отображением $\hat{d}\colon S^1 \to \mathbb{R}P^2$. Гомотопический класс $[\hat{d}] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Структура группы $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ известна: $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, где образующая $a \in \mathbb{Z}_2$ — гомотопический класс, содержащий петлю α — экватор (полусферы) со склеенными диаметрально противоположными точками, $a^1 = 0$ — класс постоянной петли (см. гл. III, § 4). Таким образом, определена обобщенная степень $\deg_2 \hat{d}$, принимающая одно из двух значений, 0 или 1. Следовательно, имеется лишь два топологически различных типа вихрей: один отвечает значению $\deg_2 \hat{d} = 0$, другой — значению $\deg_2 \hat{d} = 1$; первый топологически неустойчив, второй топологически устойчив. На рис. 38 представлен пример топологически устойчивого вихря, петля $\widehat{d}$ которого совпадает с петлей-экватором α; следовательно, $\deg_2 \widehat{d} = 1$. Гомотопический класс a этой петли содержит и другие петли в $\mathbb{R}P^2$, которые на полусфере выглядят как кривые, начало и конец которых лежат на экваторе и являются концами диаметра (см. рис. 40). Для этих петель направление $\widehat{d}(x)$ выходит из плоскости $\mathbb{R}^2$, и тем не менее они не гомотопны в $\mathbb{R}P^2$ постоянной петле. Произведение двух таких петель уже попадает в 0 — класс постоянной петли в $\mathbb{R}P^2$. В этот класс попадают все те петли, начало и конец которых на полусфере совмещены. Например, вихрь на рис. 39 характеризуется петлей из класса 0. Все указанные заключения можно усмотреть геометрически, предполагая, что отмеченная точка $y_0 \in Y = \mathbb{R}P^2$, в которой вычисляется группа $\pi_1(Y, y_0)$, задается концами диаметра на экваторе.

Следовательно, ввиду топологического отличия областей вырождения состояний у изотропного ферромагнетика и у нематика (S^2 и $\mathbb{R}P^2$ соответственно) получаем различные физические выводы: о ненаблюдаемости вихрей в первом случае и наблюдаемости — во втором (вихрей с топологическим индексом $\deg_2 \widehat{d} = 1$). Эксперименты согласуются с теорией. При этом физики называют топологически устойчивые вихри «вихрями силы 1/2», подчеркивая, что направление $\widehat{d}(x)$ при прохождении петли меняется на угол $1/2(2\pi)$, т. е. на угол π. Если же направление $\vec{d}(x)$ меняется на угол $N \cdot (2\pi)$, N целое, то вихрь называется «силы N»; в нашей классификации вихрь силы N имеет топологический индекс $\deg_2 \widehat{d} = 0$ и топологически неустойчив (пример такого вихря силы $N = -1$ изображен на рис. 39).

Эксперименты показывают сильную размытость линии вихря силы $N = \pm 1$, что интерпретируется как «вытекание вихря в третье измерение»; последнее означает, что директор вблизи линии дисклинации поворачивается и ориентируется вдоль этой линии, и таким образом особая линия вихря перестает существовать. Топология предсказывает несуществование дисклинаций целочисленной силы N. Именно обнаружение эффекта вытекания вихря в третье измерение, а также исследование дефектов в веществах с более сложными областями вырождения (как He^3) привело в 1976 г. советских физиков Г. Е. Воловика, В. П. Минеева, а также французов — Г. Тулуза, М. Клемана — к необходимости топологического описания дефектов с использованием гомотопической топологии. Оказывается, что мультипликативные свойства группы π_1 определяют способы, которыми вихри могут комбинировать друг с другом: слияние вихрей (при этом происходит сложение их топологических индексов) или распад вихря на несколько вихрей с суммарным сохранением топологического индекса (заряда) — важные законы для физики конденсированных состояний вещества.

Для нематика, как и для ферромагненика, возможно появление точечных дефектов, т. е. особых точек в поле направлений директора

$\hat{d}(x)$. Если x^* — такая точка, то для определения ее топологического индекса (заряда) необходимо окружить x^* сферой $S^2_\varepsilon(x^*)$ (как в случае ферромагнетика) достаточно малого радиуса ε, не содержащей других особых точек, и рассмотреть отображение $\hat{d}$: $S^2_\varepsilon(x^*) \to \mathbb{R}P^2$; его гомотопический класс $[\hat{d}] \in \pi_2(\mathbb{R}P^2, y_0)$, где $y_0 = \hat{d}(x_0)$, x_0 — отмеченная точка в $S^2_\varepsilon(x^*)$. Так как $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа (с образующей γ_2, порожденной отображением склейки диаметрально противоположных точек $\overline{\gamma}_2$: $S^2 \to \mathbb{R}P^2$), то $[\hat{d}] = k\gamma_2$, где $k \in \mathbb{Z}$ и называется целочисленной степенью deg $\hat{d}$. Эта степень не зависит от $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \to 0$ и называется топологическим индексом (или зарядом) $\varkappa(x^*)$ особой точки x^* (аналогично и для ферромагнетика можно более строго определить $\varkappa(x^*) = k$, где $[f] = k\gamma_2$, γ_2 — образующая свободной группы $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$). Топологически устойчивые особые точки имеют $\varkappa(x^*) \neq 0$, однако точечные дефекты с $|\varkappa(x^*)| > 1$ экспериментально не наблюдаются (точечные дефекты естественно наблюдаются, когда нематик заключен в цилиндрический капилляр и на его границе директор ортогонален стенке капилляра). Более общим образом ограничивающие вещество поверхности могут индуцировать новые классы дефектов, так как они могут изменить топологию области вырождения, равно как и другие классы нематиков, например, двуосные, дефекты которых напоминают дефекты сверхтекучей A-фазы He^3. Заметим, что область вырождения последней SO(3) гомеоморфна $\mathbb{R}P^3$, поэтому (см. § 4 гл. III) $\pi_2(\mathrm{SO}(3))\sigma\pi_2(\mathbb{R}P^3) = 4$, откуда следует отсутствие в He^3 топологически устойчивых точечных особенностей.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В первой главе затронут материал из многих разделов топологий, по которым будут сделаны литературные указания после соответствующих глав. Здесь мы укажем источники для первого знакомства с предметом, а также книги, систематически излагающие (на том или ином уровне) курс топологии.

Систематическое изложение основных понятий топологии для начинающих — [14, 26, 69].

Элементарное изложение отдельных вопросов имеется в [17, 18, 32, 38].

Доказательство теоремы Жордана о замкнутой простой кривой — [1, 6].

Начальные сведения о метрических пространствах и их отображениях можно найти в [33, 40].

Наглядный материал, иллюстрирующий понятие топологического пространства (§ 3), можно пополнить по книгам [14, 17, 18, 27, 32, 38]; в частности, в [14, 34] излагается классификация двумерных поверхностей, в [14] дается представление о расслоенных пространствах.

Начальные сведения о римановых поверхностях см. в [84], а применения к эллиптическим интегралам — [66].

Начальные сведения по теории узлов — [14, 34]; систематическое изложение теории узлов — [36].

Систематическими начальными курсами по топологии являются книги [34, 64], по топологии и дифференциальной геометрии – [49, 53], а также серия книг [58–60].

Глубокое изложение идей, методов и результатов современной топологии в их развитии дано в фундаментальном труде [51]; первые две главы его и начало третьей могут быть использованы при первоначальном синтетическом изучении топологии.

По истории развития топологии в СССР см. также [28].

Приложения топологии к исследованию критических функций на гладких многообразиях (теория Морса, теория Люстерника–Шнирельмана) см. [44, 57, 74, 75].

О приложениях топологии к теории особенностей можно узнать из обзора [8], написанного для широкого круга читателей, а также из специальной монографии [10, 11]; роль топологии в проблеме минимальных поверхностей подробно освещена в монографиях [21, 75] (см. также [38]).

О приложениях топологии к физике конденсированных состояний вещества (некоторые описаны в § 6) можно ознакомиться по обзорам [16, 20, 30, 73]. О топологии пространства в современных физических теориях элементарных частиц популярно рассказывается в [29]. И, наконец, об обратном влиянии идей теоретической физики на современную топологию многообразий можно узнать из специальной монографии [77]: во введении и первой главе ее описаны результаты С. Дональдсона и М. Фридмана (1981–1982 гг.) о классификации четырехмерных многообразий, полученные при изучении пространства решений уравнений Янга–Миллса в теоретической физике. Из этих результатов вытекает, в частности, что классическое пространство $\mathbb{R}^4$ допускает не стандартные гладкие структуры (так называемые«фальшивые»), и даже в несчетном количестве (К. Таубс, 1987 г.). Укажем и на фундаментальную монографию [86], посвященную топологическим методам в квантовой теории поля и теории конденсированных сред.

ГЛАВА II

Общая топология

Как уже отмечалось выше, понятие метрического пространства недостаточно для развития ряда важных проблем математики. В XX столетии в математике возникла и развилась более общая концепция пространства — понятие топологического пространства. К настоящему времени это понятие стало универсальным в том смысле, что «структура» топологического пространства, являясь достаточно богатой и содержательной, обычно предшествует введению других геометрических структур. Язык теории топологических пространств стал общепринятым во всех разделах математики, связанных с понятием пространства. Эта глава посвящена изложению теории топологических пространств и их непрерывных отображений.

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ;

3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X. Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ), подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Там, где это не вызовет недоразумений, мы часто вместо (X, τ) будем писать просто X.

Пример 1. X — числовая прямая $\mathbb{R}^1$. Топологию на $\mathbb{R}^1$ можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество $\varnothing$, всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha} (a_\alpha, b_\alpha)$ (проверьте!).

Пример 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

Пример 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

Пример 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{$всевозможные подмножества из $X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \backslash U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \backslash F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}^1$ с топологией примера 1; замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ с топологией примера 2.

В силу двойственного характера операций в теории множеств совокупность $\{F\}$ всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) удовлетворяет следующим свойствам:

1) $X, \varnothing \in \{F\}$;

2) пересечение любой совокупности множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$;

3) объединение любого конечного числа множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$.

Эти свойства полностью характеризуют замкнутые множества топологического пространства (X, τ), а следовательно, и топологию τ (так как множества из τ — это дополнения замкнутых множеств) и могут быть приняты в качестве аксиом топологического пространства. Таким образом, топологию на X можно задать, указав совокупность $\{F\}$ подмножеств X, удовлетворяющую свойствам 1) — 3); в этом случае топологией на X будет совокупность $\{X \backslash F\}$.

Различные топологии на одном и том же множестве образуют частично упорядоченное множество.

Определение 1. Говорят, что топология τ на X *слабее* (*грубее*) топологии τ' на X ($\tau \prec \tau'$), если из того, что $U \in \tau$, следует, что $U \in \tau'$, т. е. если $\tau \subset \tau'$. Топология τ' в этом случае *сильнее* (*тоньше*) топологии τ.

Заметим, что для всякой топологии τ имеем $\tau_0 \prec \tau \prec \tau_1$. Ясно, что существуют и несравнимые топологии. Топологии τ' и τ'' несравни-

Таким образом, покрытие $\{S_\alpha\}$ множества X определяет на X топологию, открытыми множествами которой являются всевозможные объединения $\bigcup\left(\bigcap_{\alpha\in K} S_\alpha\right)$ и пустое множество.

Определение 3. Семейство $\{S_\alpha\}$ по отношению к топологии, которую оно порождает, называется *предбазой* этой топологии.

Примеры. 5. Пусть $X = \mathbb{R}^1$. Множества вида $S_\alpha = \{x\colon x < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, и $S_\beta = \{x\colon x > \beta\}$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, образуют предбазу топологии числовой прямой $\mathbb{R}^1$, указанной в примере 1.

6. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ есть n-мерное векторное пространство. В качестве базы топологии на $\mathbb{R}^n$ можно взять систему множеств $B = \{V_{a,b}\}$, где $V_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ a_i < \xi_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, ξ_i — координата вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — произвольные векторы в $\mathbb{R}^n$, причем $a_i < b_i$.

Такие множества $V_{a,b}$ называются *открытыми параллелепипедами* в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 2°. Докажите, что описанная в примере 6 система параллелепипедов образует базу топологии на $\mathbb{R}^n$. Убедитесь, что в случаях $n = 1, 2$, топология, определяемая этой базой, совпадает с топологиями на $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, указанными в примерах 1, 2.

В дальнейшем, если не будет указано, какая именно топология рассматривается на $\mathbb{R}^n$, мы будем считать, что $\mathbb{R}^n$ снабжено топологией, база которой указана в примере 6.

В топологическом пространстве естественно выбирать базу топологии с возможно меньшим количеством элементов. Например, в $\mathbb{R}^1$ множества $V = (t_1, t_2)$, где t_1, t_2 рациональны, образуют базу топологии из счетного числа элементов.

Аналогично в $\mathbb{R}^n$ можно выбрать базу топологии, состоящую из счетного множества параллелепипедов с рациональными вершинами, т. е. вида

$$V_{r_1,r_2} = \{x\colon r_1^i < \xi_i < r_2^i,\ \ i = 1, \ldots, n\},$$

где r_1, r_2 — рациональные векторы в $\mathbb{R}^n$.

2. Окрестности. Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $x \in X$ — произвольная точка.

Определение 4. *Окрестностью точки* $x \in X$ называется всякое подмножество $\Omega(x) \subset X$, удовлетворяющее условиям: 1) $x \in \Omega(x)$; 2) существует $U \in \tau$ такое, что $x \in U \subset \Omega(x)$.

Можно рассматривать совокупность всех окрестностей данной точки x. Эта совокупность обладает следующими свойствами:

1) объединение любой совокупности окрестностей точки x есть окрестность точки x;

2) пересечение конечного числа окрестностей точки x — окрестность точки x;

3) всякое множество, содержащее некоторую окрестность точки x, является окрестностью точки x.

Теорема 3. *Подмножество A $(A \neq \varnothing)$ топологического пространства (X, τ) открыто тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую окрестность каждой своей точки.*

Доказательство. Пусть A открыто, $x \in A$. Тогда ясно, что A — окрестность x, следовательно, A содержит окрестность любой своей точки. Пусть для каждого $x \in A$ существует окрестность точки x, целиком лежащая в A. По определению окрестности в ней содержится некоторое открытое множество U_x, $x \in U_x$. Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{x \in A} U_x$ всех таких множеств. Оно открыто и совпадает с A. Действительно, так как всякая точка множества A принадлежит $\bigcup\limits_{x \in A} U_x$, то $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$. С другой стороны, для каждого x имеем $U_x \subset A$, т. е. $\bigcup\limits_{x \subset A} U_x \subset A$. Поэтому $A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, значит, A открыто. ■

Окрестности используют для отделения точек друг от друга.

Определение 5. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек, x, y, найдутся такие окрестности $U(x)$, $U(y)$ этих точек, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Топологическое пространство (X, τ) с тривиальной топологией не является хаусдорфовым, если оно содержит более одной точки (проверьте!).

Свойства окрестностей точки, рассмотренные выше, можно положить в основу следующего определения топологического пространства, объявляя их аксиомами.

Определение 6. *Топологическое пространство* — это множество X, для каждой точки x которого указана непустая система подмножеств $\{\Omega_\alpha(x)\}$, называемых *окрестностями точки* x, удовлетворяющих следующим свойствам: 1) x принадлежит каждой своей окрестности $\Omega_\alpha(x)$; 2) если множество $U \subset X$ содержит некоторое $\Omega_\alpha(x)$, то U — также окрестность точки x; 3) для любых окрестностей $\Omega_{\alpha_1}(x)$, $\Omega_{\alpha_2}(x)$ точки x их пересечение $\Omega_{\alpha_1}(x) \cap \Omega_{\alpha_2}(x)$ также является окрестностью точки x; 4) для всякой окрестности $\Omega_\alpha(x)$ точки x найдется такая окрестность $\Omega_{\alpha_1}(x) \subset \Omega_\alpha(x)$, которая является окрестностью каждой своей точки.

Упражнение 3°. Покажите, что множества, являющиеся окрестностью каждой своей точки, и $\varnothing$ образуют топологию на X.

3. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ), (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ, σ соответственно. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств.

Определение 7. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ).

Упражнения. 4°. Сформулируйте определение непрерывного отображения в терминах базы топологии.

5°. Покажите, что числовая непрерывная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ задает непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

6°. Докажите, что $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X для каждого замкнутого множества F в Y.

Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf\colon X \to Z$ по правилу $(gf)\colon x \mapsto g(f(x))$.

Теорема 4. *Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.*

Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение 8. Два топологических пространства, (X, τ), (Y, σ), называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f\colon X \to Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f\colon X \to Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Заметим, что это определение по форме в точности повторяет определение гомеоморфизма метрических пространств, введенное в § 2 гл. I.

Определение 9. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым* (*замкнутым*), если образ каждого открытого (замкнутого) множества в X открыт (замкнут) в Y.

Упражнение 7°. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм тогда и только тогда, когда определено отображение f^{-1}: $X \to Y$ и отображения f и f^{-1} одновременно открыты и замкнуты.

Таким образом, гомеоморфизм преобразует открытые множества в открытые, а замкнутые — в замкнутые.

Сопоставление каждому открытому множеству U пространства X его образа $f(U)$ при гомеоморфизме $f\colon X \to Y$ устанавливает биективное соответствие между топологиями пространства X и Y. Поэтому любое свойство пространства X, формулируемое в терминах топологии этого пространства, будет верным и для пространства Y, гомеоморфного X, и так же будет формулироваться в терминах топологии Y. Таким образом, гомеоморфные пространства X и Y обладают идентичными свойствами и с этой точки зрения являются неразличимыми.

Свойства топологических пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются *топологическими свойствами* *. В этой связи отметим задачу, долгое время считавшуюся основной задачей топологии (и не решенную полностью до сих пор), — дать эффективный способ различать негомеоморфные пространства.

Упражнения. 8°. Покажите, что гомеоморфизм задает соответствие баз и предбаз гомеоморфных пространств.

9°. Покажите, что отношение гомеоморфизма есть отношение эквивалентности.

10°. Покажите, что интервал $(-1, +1)$ числовой оси гомеоморфен всей числовой оси, предъявите формулу гомеоморфизма.

11°. Покажите, что отрезок и интервал на числовой оси не гомеоморфны.

Существует весьма полезное расширение понятия гомеоморфизма — *локальный гомеоморфизм*. Это такое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, что для всякой пары точек x, y, $y = f(x)$, найдутся окрестности $U(x)$, $V(y)$ такие, что $f\colon U(x) \to V(y)$ — гомеоморфизм.

Упражнение 12°. Убедитесь, что отображение $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, задаваемое формулой $y = x^2$, — локальный гомеоморфизм.

4. Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X. Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y, когда X — топологическое пространство.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество в X. Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y = \{V\colon V = U \cap Y,\ U \in \tau\}.$$

Теорема 5. *Система* τ_Y *является топологией на* Y.

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X. Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ).

Подмножества топологических пространств рассматривают, как правило, с индуцированной топологией.

Если $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение топологических пространств (X, τ), (Z, σ), а Y — подпространство X, то можно рассматривать и отображение $f\colon Y \to Z$, которое называется *сужением* f на Y и обозначается $f\big|_Y$.

---

* При изучении топологических свойств гомеоморфные пространства X, Y часто не различают.

Теорема 6. *Отображение* $f\big|_Y\colon Y \to Z$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $W \in \sigma$, тогда $(f\big|_Y)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap Y$. Так как $f^{-1}(W) \in \tau$, то $(f\big|_Y)^{-1}(W) \in \tau_Y$. ■

Упражнения. 13°. Покажите, что открытое множество в подпространстве Y топологического пространства X не обязательно открыто в X. Разберите примеры для $X = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Аналогичный вопрос для замкнутых множеств в Y. Предварительно докажите, что всякое замкнутое множество F_Y в Y имеет вид $F_Y = F \cap Y$, где F — замкнутое множество в X.

14°. Пусть $A, B \subset X$ — замкнутые множества топологического пространства X и пусть $X = A \cup B$. Тогда отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f\big|_A\colon A \to Y$, $f\big|_B\colon B \to Y$ непрерывны.

Введем еще одно полезное понятие. Отображение $i\colon Y \to X$ топологических пространств Y, X называется *вложением* Y в X, если: 1) i непрерывно; 2) $i\colon Y \to i(Y)$ — гомеоморфизм, где $i(Y) \subset X$ — подпространство в X.

Вложения полезны, когда мы хотим «выделить» подпространство $Y \subset X$ из объемлющего пространства X и рассматривать его отдельно. Связь с X сохраняется посредством естественного отображения $Y \to X$, сопоставляющего элементу из Y тот же самый элемент в X, которое является вложением.

§ 2. Топология и непрерывные отображения метрических пространств. Пространства $\mathbb{R}^n$, S^{n-1}, D^n

1. Топология в метрическом пространстве. Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство с метрикой ρ. На X естественным образом можно построить топологию. Рассмотрим всевозможные множества $D_\varepsilon(x) = \{y\colon \rho(y, x) < \varepsilon\}$, где $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Множество $D_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* радиуса ε с центром в точке x.

Совокупность $\{D_\varepsilon(x)\}$ всех открытых шаров образует покрытие метрического пространства, для которого выполнен критерий базы (теорема 1 § 1). Действительно, пусть $D_{\varepsilon_1}(x_1)$ и $D_{\varepsilon_2}(x_2)$ — два открытых шара с непустым пересечением. Пусть $y \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$ и $\delta = \min\{\varepsilon_1 - \rho(y, x_1), \varepsilon_2 - \rho(y, x_2)\}$ и $z \in D_\delta(y)$; тогда

$$\rho(z, x_1) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_1) < \delta + \rho(y, x_1) \leqslant \varepsilon_1,$$
$$\rho(z, x_2) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_2) < \delta + \rho(y, x_2) \leqslant \varepsilon_2.$$

Следовательно, $z \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$, откуда $D_\delta(y) \subset D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены.

Определение 1. Топология τ_ρ, определяемая базой всех открытых шаров в метрическом пространстве (X, ρ), называется топологией, *индуцированной метрикой* ρ, или *метрической топологией*.

Таким образом, открытыми множествами топологии τ_ρ являются всевозможные объединения открытых шаров метрического пространства (X, ρ) и пустое множество $\varnothing$.

Теорема 1. *Построенная топология* τ_ρ *хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть $x \neq y$, в этом случае $\rho(x, y) = \alpha > 0$ (по свойству метрики). Взяв $\varepsilon = \alpha/3$, рассмотрим $D_\varepsilon(x)$, $D_\varepsilon(y)$. Легко видеть, что $D_\varepsilon(x) \cap D_\varepsilon(y) = \varnothing$. В самом деле, предположив противное, для точки $z \in D_\varepsilon(x) \cap D_\varepsilon(y)$ имели бы

$$\alpha = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3},$$

что невозможно. ■

Можно дать другое, эквивалентное определение открытых множеств в метрическом пространстве.

Определение 2. Множество $U \neq \varnothing$ *открыто*, если для всякой точки $x \in U$ найдется открытый шар $D_\delta(x)$ с центром в x, целиком содержащийся в U.

Заметим, что именно так мы определили в § 1 топологию на $\mathbb{R}^2$, и, следовательно, она совпадает с топологией τ_ρ, порожденной евклидовой метрикой ρ плоскости $\mathbb{R}^2$. Проверка эквивалентности двух определений открытых множеств предоставляется читателям.

Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2). Теперь можно дать два определения непрерывности отображения f: как отображения метрических и как отображения топологических пространств. Эти два определения эквивалентны, а именно верна следующая теорема.

Теорема 2. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *метрического пространства* (X, ρ_1) *в метрическое пространство* (Y, ρ_2) *непрерывно (в топологиях, индуцированных метриками) тогда и только тогда, когда для всякого* $x_0 \in X$ *и всякой сходящейся к* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *в* X *последовательность* $\{f(x_n)\}$ *сходится в* Y *к* $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение в топологиях X, Y, индуцированных метриками, и пусть $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0$. Покажем, что тогда $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$. Последнее означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $N = N(\varepsilon, x_0)$ такое, что $\rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ при $n > N$.

Рассмотрим в Y открытый шар $D_\varepsilon(f(x_0))$; обозначим его V_ε. Его прообраз $f^{-1}(V_\varepsilon)$ — открытое множество в X в силу непрерывности f, причем $x_0 \in f^{-1}(V_\varepsilon)$. Точка x_0 принадлежит $f^{-1}(V_\varepsilon)$ вместе с некоторым шаром $D_\delta(x_0)$ радиуса δ. Существует такой номер N ($N =$

$= N(\varepsilon, x_0))$, что x_n принадлежит $D_\delta(x_0)$ (и $f^{-1}(V_\varepsilon)$) при $n > N$. Но тогда $f(x_n) \in V_\varepsilon$ (т. е. $\rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$) при $n > N$. Следовательно, отображение f непрерывно как отображение метрических пространств.

Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к некоторой точке x_0 в пространстве X, выполнено условие $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$. Покажем, что в этом случае прообраз всякого открытого множества открыт. Пусть V — открытое множество в Y, $U = f^{-1}(V)$. Покажем, что U открыто в пространстве X. Воспользуемся определением 2 открытого множества. Пусть $x \in f^{-1}(V)$, тогда достаточно найти такое $\varepsilon > 0$, что $D_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(V)$. Предположим, что такого ε не существует. Тогда существуют такие последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $\{x_n\}$, что $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in D_{\varepsilon_n}(x)$, но $x_n \notin f^{-1}(V)$. Следовательно, $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$, откуда $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x)$. Заметив, что $f(x)$ принадлежит V вместе с некоторым открытым шаром, заключаем, что $f(x_n) \in V$ и $x_n \in f^{-1}(V)$, начиная с некоторого номера, в противоречие с предположением. Таким образом, отображение f непрерывно в топологиях пространств X, Y, индуцированных метрикой. ■

2. Пространство $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим важный пример метрического пространства — *евклидово пространство*

$$\mathbb{R}^n = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ -\infty < \xi_i < +\infty, \ i = 1, \ldots, n\},$$

состоящее из всех упорядоченных наборов (называемых *точками* или *векторами*) n вещественных чисел; числа ξ_i называются *координатами* точки, вектора.

Метрика (евклидова метрика) в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) вводится аналогично метрике в $\mathbb{R}^3$:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}, \tag{1}$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — два произвольных вектора в $\mathbb{R}^n$.

Проверим, что это метрика. Свойства метрики (см. § 2 гл. I) 1), 2), 3), очевидно, выполнены. Проверим свойство 4). Требуется доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}$$

для произвольных вещественных чисел ξ_i, η_i, ζ_i, $i = 1, \ldots, n$. Доказательство разбивается на две леммы.

Лемма 1 (неравенство Коши—Буняковского). *Для любых вещественных чисел* ξ_i, η_i, $i = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Для произвольного вещественного λ имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i + \lambda \eta_i)^2 \geqslant 0$, откуда $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 2\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i + \lambda^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i^2 \geqslant 0$. Рассмотрим левую часть неравенства как полином от λ. Он не может иметь двух различных вещественных корней, следовательно, дискриминант его неположителен, что и приводит к неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \ \blacksquare$$

Лемма 2 (неравенство Минковского). *Для произвольных вещественных чисел* ξ_i, η_i, $i = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 2\xi_i \eta_i + \eta_i^2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2} \right]^2.$$

Извлекая корень из обеих частей неравенства, получаем требуемое неравенство. ■

Закончим проверку свойства 4) метрики. Пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} [(\xi_i - \zeta_i) + (\zeta_i - \eta_i)]^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, ρ — метрика в $\mathbb{R}^n$. ■

Нетрудно видеть, что метрическая топология τ_ρ на $\mathbb{R}^n$, индуцированная евклидовой метрикой ρ, совпадает с топологией на $\mathbb{R}^n$, база которой указана в примере 6 § 1.

Пусть $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ — центр шара $D_r(x_0)$, а $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — его произвольная точка. Тогда координаты точки x удовлетворяют неравенству

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 < r^2. \tag{2}$$

Шар $D_r(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ часто обозначают $D_r^n(x_0)$ и называют *открытым n-диском. Замкнутым шаром (замкнутым n-диском)* $\overline{D}_r^n(x_0)$ называется множество точек x, координаты которых удовлетворяют нестрогому неравенству

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 \leqslant r^2; \tag{3}$$

$(n-1)$-мерная сфера $S_r^{n-1}(x_0)$ радиуса r с центром в точке x_0 определяется равенством

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 = r^2. \tag{4}$$

Будем называть сферу $S_r^{n-1}(x_0)$ *краем диска* $\overline{D}_r^n(x_0)$ или $D_r^n(x_0)$.

Метрика в $\mathbb{R}^n$ может быть задана и другими способами, например,

$$\rho(x, y) = \max_{i=1, \ldots, n} \{|\xi_i - \eta_i|\}. \tag{5}$$

Упражнение 1°. Опишите шар в $\mathbb{R}^n$ в метрике (5). Покажите, что евклидова метрика и метрика (5) индуцируют одинаковую топологию.

Рассмотрим комплексное n-мерное пространство $\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n = \{z\colon \ z = (z_1, \ldots, z_n),\ z_k = x_k + iy_k,\ x_k,\ y_k \in \mathbb{R}^1,\ k = 1, \ldots, n\}$. Метрика в нем вводится аналогично тому, как это было сделано в вещественном случае:

$$\rho(z', z'') = (|z_1' - z_1''|^2 + \ldots + |z_n' - z_n''|^2)^{1/2},$$

где $z' = (z_1', \ldots, z_n')$, $z'' = (z_1'', \ldots, z_n'')$ — элементы $\mathbb{C}^n$. Топологию на $\mathbb{C}^n$, индуцируемую этой метрикой, можно задать также при помощи метрики

$$\rho(z', z'') = \max_{k=1, \ldots, n} |z_k' - z_k''|.$$

Сформулируем теперь условие непрерывности отображений евклидовых пространств. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ сопоставляет каждой точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определенную точку $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, так что можно записать

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \eta_m &= f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned} \tag{6}$$

где f_i, $i = 1, \ldots, m$, — числовая функция от n переменных. Такая функция задает отображение f_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ по правилу

$$\eta_i = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{7}$$

Очевидно, что непрерывность отображения f_i эквивалентна непрерывности числовой функции $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, как она определяется в анализе.

Отображение (7) назовем i-й компонентой отображения f. Отображение f определяется заданием всех его компонент f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 3. *Отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна каждая его компонента*

$$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство следует из замечания о том, что $f(x^k) \to f(x^0)$, $k \to \infty$, эквивалентно $f_i(x^k) \to f_i(x^0)$, $k \to \infty$, для $i = 1, \ldots, m$.

3. Диск D^m гомеоморфен $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим некоторые подмножества в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Пусть S^{n-1}, D^n — сфера и открытый n-диск единичного радиуса с центром в точке $(0, \ldots, 0)$. Обозначим через S^{n-1}_+ часть сферы, где $\xi_n > 0$ (северное полушарие). Докажем, что диск D^{n-1} гомеоморфен полусфере S^{n-1}_+.

Можно считать, что пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ совпадает с подпространством точек $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ пространства $\mathbb{R}^n$, если отождествлять точки $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$. Тогда D^{n-1} и S^{n-1}_+ лежат в $\mathbb{R}^n$ и задаются так:

$$\begin{aligned} S^{n-1}_+ &= \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1, \ \xi_n > 0\}, \\ D^{n-1} &= \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 < 1, \ \xi_n = 0\}. \end{aligned}$$

В случае $\mathbb{R}^3$ имеем следующую ситуацию: S^2_+ — верхняя половина сферы без экватора, D^2 — внутренность единичного круга в $\mathbb{R}^2$ (рис. 41),

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2_+, \qquad y = (\xi_1, \xi_2, 0) \in D^2.$$

Проекция $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2, 0)$ является гомеоморфизмом полусферы S^2_+ и диска D^2.

В $\mathbb{R}^n$ поступим аналогично: проекция

$$f\colon (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$$

задает непрерывное биективное отображение S^{n-1}_+ на D^{n-1} (проверьте!). Рассмотрим обратное отображение. Легко убедиться, что оно имеет вид

$$f^{-1}\colon (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, (1-\xi_1^2-\ldots-\xi_{n-1}^2)^{1/2}) \quad (8)$$

и непрерывно. Таким образом, построен гомеоморфизм диска D^{n-1} и полусферы S^{n-1}_+. Назовем *замкнутой полусферой* $\overline{S}^{n-1}_+$ множество точек сферы S^{n-1}, удовлетворяющих неравенству $\xi_n \geqslant 0$. Ясно, что $\overline{S}^{n-1}_+ = S^{n-1}_+ \cup S^{n-2}$. Сферу S^{n-2} естественно назвать *краем полусферы* $\overline{S}^{n-1}_+$ (или S^{n-1}_+). Заметим, что S^{n-2} есть одновременно край диска $\overline{D}^{n-1}$ (или D^{n-1}). Легко усмотреть, что гомеоморфизм (8) определен и на S^{n-2} и $f^{-1}\big|_{S^{n-2}} = 1_{S^{n-2}}$. Таким образом, $\overline{D}^{n-1}$ гомеоморфно $\overline{S}^{n-1}_+$.

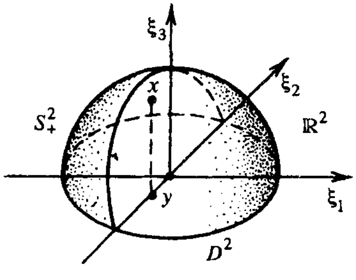


Рис. 41

Установим теперь важный гомеоморфизм.

Теорема 4. *Диск D^m гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$.*

Доказательство. Положим $m = n-1$ и воспользуемся предыдущей конструкцией. Пространство $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, перенесем параллельно так, чтобы его начало координат попало в точку $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ — северный полюс сферы S^{n-1}. Точки новой плоскости имеют вид $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1)$. Через каждую точку $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S^{n-1}_+$ проведем полупрямую $\eta_1 = t\xi_1$, $\eta_2 = t\xi_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n = t\xi_n$, $t \geqslant 0$. Она пересекает построенную плоскость в единственной точке, соответствующей значению $t(x) = 1/\xi_n$. Сопоставляя точке x эту точку пересечения, получаем отображение Φ: $S^{n-1}_+ \to \mathbb{R}^{n-1}$, задаваемое правилом

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (\xi_1/\xi_n, \ldots, \xi_{n-1}/\xi_n, 1).$$

Это отображение, как легко проверить, — гомеоморфизм. Суперпозиция гомеоморфизмов

$$\Phi f^{-1}\colon D^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

и есть искомый гомеоморфизм. ■

Упражнения. 2°. Сформулируйте критерий непрерывности отображения $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ комплексных пространств.

3°. Докажите, что $\mathbb{C}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$.

4°. Докажите, что шары в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенные с помощью метрик (1), (5), гомеоморфны.

5°. Докажите непрерывность функций

$$f(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}, \quad f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

6°. Определим диски и сферу в пространстве $\mathbb{C}^n$ условиями (2)—(4) и обозначим их соответственно $D^n_{\mathbb{C},r}$, $\overline{D}^n_{\mathbb{C},r}$, $S^{n-1}_{\mathbb{C},r}$. Докажите, что они гомеоморфны соответственно D^{2n}_r, $\overline{D}^{2n}_r$, S^{2n-1}_r.

7°. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ диски любых радиусов гомеоморфны; докажите аналогичное утверждение для сфер.

§ 3. Факторпространство и фактортопология

1. Определение фактортопологии. Дадим строгое определение топологии в факторпространстве — фактортопологии — и с новой точки зрения проанализируем примеры § 3 гл. I.

Пусть в абстрактном множестве X между некоторыми элементами $x, y \in X$ определено отношение $x \sim y$. Это отношение называется *эквивалентностью*, если выполнены следующие свойства: 1) $x \sim x$ для любого $x \in X$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или *классы эквивалентности.*

Множество $\{D_\alpha\}$ всех классов эквивалентности обозначим через X/R, где R обозначает эквивалентность в X.

Определение. Множество X/R называется *фактормножеством* множества X по отношению эквивалентности R.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, пусть в множестве X определено отношение эквивалентности R. Тогда на фактормножестве X/R можно ввести естественную топологию следующим образом: подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$, состоящее из элементов D_α, назовем открытым тогда и только тогда, когда объединение $\bigcup D_\alpha$ множеств D_α как подмножеств X открыто в пространстве (X, τ); к открытым множествам, естественно, отнесем и пустое множество. Эта совокупность открытых подмножеств в X/R является топологией и обозначается τ_R.

Упражнение 1°. Проверьте, что τ_R является топологией на X/R.

Топология τ_R называется *фактортопологией*; обычно ее имеют в виду, когда говорят о факторпространстве.

Мотивы определения топологии τ_R станут яснее, если рассмотреть отображение $\pi\colon X \to X/R$, сопоставляющее всякому элементу $x \in X$ содержащий его класс эквивалентности D_x; это отображение называется проекцией пространства X на факторпространство X/R. Легко видеть, что множество $V \subset X/R$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(V)$ открыто в X. Таким образом, проекция π непрерывна как отображение из (X, τ) в $(X/R, \tau_R)$. (Заметим, что отсюда вытекает тот принцип непрерывности «склейки», о котором упоминалось в § 3 гл. I.)

Могут существовать, конечно, и другие топологии на множестве X/R, в которых проекция π непрерывна. Следующая теорема характеризует топологию τ_R.

Теорема 1. *Топология τ_R — сильнейшая среди всех топологий на X/R, для которых отображение π непрерывно.*

Доказательство. Если $\{W\}$ — топология на X/R, в которой отображение π непрерывно, то для всякого $W \in \{W\}$ множество $\pi^{-1}(W)$ открыто в X. Следовательно, W открыто в факторпространстве X/R, т. е. $W \in \tau_R$. Это означает, что топология $\{W\}$ слабее топологии τ_R. ■

Упражнение 2°. Пусть $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$. Зададим эквивалентность $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x - y$ рационально. Покажите, что факторпространство X/R не хаусдорфово.

2. Примеры факторпространств. Рассмотрим примеры § 3 гл. I. Если X — прямоугольник $abcd$, а отношение эквивалентности R задано так, что $x \sim x$ для каждого $x \in X$ и $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \in ab$, $y \in cd$ и x, y лежат на одной горизонтали в X, то X/R — топологическое пространство, гомеоморфное цилиндру (см. рис. 1, 2).

Действительно, база топологии цилиндра образована двумерными «дисками» — пересечениями шаров в $\mathbb{R}^3$ с цилиндром (рис. 42). Если разрезать цилиндр по линии ab и развернуть в прямоугольник, то «диски» перейдут в базу топологии последнего, причем «диски», пересекающие линию ab, разрежутся на сегменты, дополняющие друг друга до круга и лежащие на противоположных концах прямоугольника. Отсюда ясно, что необходимо склеить дополнительные сегменты по линии разреза, чтобы получить базу топологии в X/R (рис. 43). Теперь легко убедиться, что, сопоставляя эквивалентным точкам прямоугольника ту точку цилиндра, в которую они «склеились», мы получаем гомеоморфизм рассматриваемого факторпространства X/R с цилиндром.

Точно так же можно исследовать топологию листа Мёбиуса (см. следующий пример «склейки» в § 3 гл. I). На рис. 44 изображены некоторые открытые множества листа Мёбиуса. Здесь сегменты «склеиваются» по центрально-симметричным точкам, лежащим на сторонах ab, cd.

В третьем примере «склейки» соответствующее факторпространство гомеоморфно тору, элементы базы его топологии изображены на рис. 45. Здесь соответствующие сегменты склеиваются не только по вертикальным основаниям, лежащим на ab, cd, но и по горизонтальным, лежащим на ac, bd.

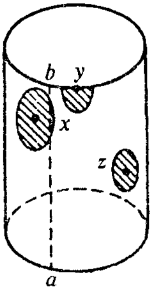


Рис. 42

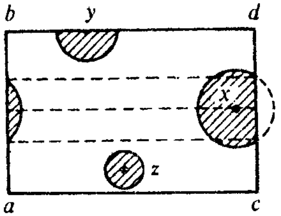


Рис. 43

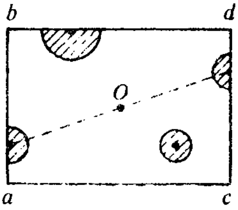


Рис. 44

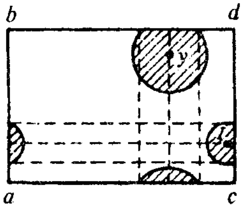


Рис. 45

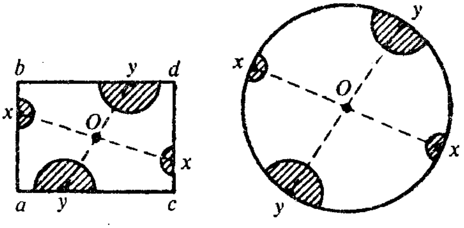


Рис. 46

Наконец, в последнем примере получаем проективную плоскость, элементы ее базы топологии изображены на рис. 46. Здесь сегменты склеиваются по диаметрально противоположным точкам своих оснований как на вертикальных, так и на горизонтальных краях прямоугольника.

Приведем еще один полезный пример образования факторпространства. Пусть $X \subset Y$ — подпространство топологического пространства X. Объявим все точки Y эквивалентными между собой, а точки $x \in X \setminus Y$ — эквивалентными самим себе. Факторпространство по этой эквивалентности обозначают X/Y, а проекцию π: $X \to X/Y$ называют *склеиванием множества* Y в точку. Например,

$S^1 = I/\{0, 1\}$ — факторпространство отрезка $I = [0, 1]$ по множеству концевых точек.

3. Отображения факторпространств. Пусть X, X' — топологические пространства и R, R' — эквивалентности в них. Рассмотрим отображение $f\colon X \to X'$. Будем говорить, что отображение f *сохраняет эквивалентность*, если из $x \overset{R}{\sim} y$ следует $f(x) \overset{R'}{\sim} f(y)$. Для таких отображений естественно определяется отображение $\hat{f}\colon X/R \to X'/R'$ факторпространств следующим образом: пусть D_α — класс эквивалентности в X' и $x \in D_\alpha$ — любой элемент, D'_β — класс эквивалентности в X', содержащий точку $f(x)$; тогда $\hat{f}(D_\alpha) = D'_\beta$.

Упражнение 3°. Покажите, что отображение $\hat{f}$ определено корректно. Отображение $\hat{f}$ называют *факторотображением*.

Теорема 2. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to X'$ сохраняет эквивалентность, то соответствующее ему факторотображение $\hat{f}\colon X/R \to X'/R'$ непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через π, π' проекции пространств X, X' на соответствующие факторпространства. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\
X/R \arrow[r, "\hat{f}"] & X'/R'
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. для каждого $x \in X$ имеем $(\hat{f}\pi)(x) = (\pi' f)(x)$. Если множество V открыто в X'/R', то $(\pi' f)^{-1}(V)$ открыто в X, так как $\pi' f$ непрерывно. Но $(\hat{f}\pi)^{-1}(V) = (\pi' f)^{-1}(V)$, следовательно, множество $(\hat{f}\pi)^{-1}(V)$ открыто в X. Поскольку $(\hat{f}\pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(V))$, то множество $\hat{f}^{-1}(V)$ открыто в X/R (по определению топологии факторпространства), и, следовательно, $\hat{f}$ непрерывно. ■

Сформулируем признак гомеоморфности факторпространств.

Теорема 3. *Если $f\colon X \to X'$ — гомеоморфизм и отображения f, f^{-1} сохраняют эквивалентность, то факторотображение $\hat{f}$: $X/R \to X'/R'$ является гомеоморфизмом.*

Действительно, в этом случае отображение f^{-1} определяет факторотображение $\widehat{f^{-1}} = (\hat{f})^{-1}$ (проверьте!) и можно применить теорему 2 как к $\hat{f}$, так и к $(\hat{f})^{-1}$.

К перечисленным в § 3 гл. I «моделям» проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ добавим еще три. Первая получается из сферы $X = S^2$, на которой склеиваются диаметрально противоположные точки (рис. 47). Вторая состоит из элементов — прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через точку нуль ($x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x, y$ лежат на одной такой прямой и $x \neq 0$, $y \neq 0$) (рис. 47).

Упражнение 4°. Опишите топологию полученных пространств как топологию факторпространств S^2/R и $(\mathbb{R}^3\backslash 0)/R$ соответственно.

Третья модель $\mathbb{R}P^2$ состоит в следующем. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ произвольную плоскость, P, не проходящую через начало координат. Зафиксируем на P точку a — проекцию на P начала координат в $\mathbb{R}^3$ Согласно только что рассмотренной второй модели $\mathbb{R}P^2$ это пространство состоит из прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало. Сопоставим каждой такой прямой точку пересечения ее с плоскостью P (если она пересекает P) или же прямую в P, проходящую через точку a, параллельную данной. Полученную прямую на плоскости P символически отождествим с бесконечно удаленной точкой, в которой пересекаются эти параллельные прямые.

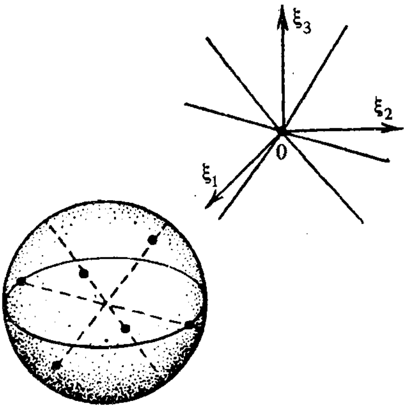


Рис. 47

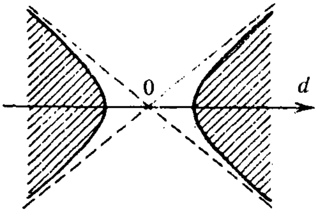


Рис. 48

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}P^2$ (второй моделью) и плоскостью P с присоединенными к ней бесконечно удаленными точками, по одной на каждое направление (прямую, проходящую через начало) в P. В полученном множестве плоскость P рассматривается с обычной топологией; *окрестность бесконечно удаленной точки*, соответствующей какому-нибудь направлению d на P, определяется как часть плоскости P (заштрихованная на рис. 48), ограниченная произвольной гиперболой с осью d. Множество всех бесконечно удаленных точек, присоединенных к плоскости P, называют также *абсолютом* или *бесконечно удаленной прямой*.

Упражнение 5°. Докажите гомеоморфизм всех реализаций $\mathbb{R}P^2$.

Рассмотрим замкнутый диск $\overline{D}^n$ и его край S^{n-1}. Отождествим все точки края. Полученное факторпространство обозначим $\overline{D}^n/S^{n-1}$.

Теорема 4. *Пространство* $\overline{D}^n/S^{n-1}$ *гомеоморфно сфере* S^n.

Доказательство. В п. 3 § 2 было показано, что диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен замкнутой полусфере $\overline{S}^n_+$. Этот гомеоморфизм тождествен на общем краю (S^{n-1}) этих множеств, следовательно, в $\overline{S}^n_+$ индуцируется отношение эквивалентности из $\overline{D}^n$ и согласно последней теореме $\overline{D}^n/S^{n-1}$ гомеоморфно $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$.

Покажем, что $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$ гомеоморфно S^n. Имеется естественное включение: $\overline{S}^n_+ \to S^n$. Обозначим южный полюс $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ сферы S^n через $*$. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение φ: $\overline{S}^n_+ \to S^n$ такое, что $\varphi(S^{n-1}) = *$ и $\varphi\big|_{S^n_+}$: $S^n_+ \to S^n \backslash \{*\}$ — гомеоморфизм. Его можно построить, например, так: если $x \in \overline{S}^n_+$ и $x \neq N$ (N — северный полюс), то через точки 0, N, x проводим двумерную плоскость, пересекающую S^n по окружности (меридиану); сдвинем x по меридиану на дугу, вдвое большую, чем дуга $\smile{xN}$, получим точку $\varphi(x)$; положим $\varphi(N) = N$. Определено факторотображение

$$\hat{\varphi}\colon\ \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n/\{*\} = S^n,$$

которое, очевидно, является гомеоморфизмом.

Произведение двух гомеоморфизмов,

$$\overline{D}^n/S^{n-1} \to \overline{S}^n_+/S^{n-1}, \qquad \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n,$$

и будет искомым гомеоморфизмом. ■

§ 4. Классификация поверхностей

1. Поверхности и их триангуляция. Вернемся к изучению замкнутых поверхностей. Данные выше определения топологического пространства, факторпространства, гомеоморфизма топологических пространств, рассмотренные примеры создают твердую базу для доказательства упомянутой в § 3 гл. I теоремы о том, что всякая замкнутая поверхность топологически эквивалентна одной из поверхностей вида M_p или N_q, т. е. сфере с приклеенными p ручками или q листами Мёбиуса. Здесь будут уточнены соответствующие понятия и дано доказательство вышеупомянутой теоремы.

Топологическое пространство X, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу, назовем *двумерным многообразием*. Удобно изучать такие пространства, разбивая их на элементарные куски, топологически эквивалентные треугольникам двумерной евклидовой плоскости. Уточним это представление.

Определение 1. *Топологическим треугольником* в X будем называть пару (T, φ), где T — подпространство в X, а $\varphi\colon \Delta \to T$ — гомеоморфизм некоторого треугольника $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ на T.

Если гомеоморфизм $\varphi\colon \Delta \to T$ зафиксирован (и когда это не может привести к недоразумению), для сокращения речи мы будем называть топологическим треугольником подпространство $T \subset X$. Образы вершин, сторон треугольника Δ (вместе с сужением гомеоморфизма φ) называются соответственно *вершинами*, *ребрами* топологического треугольника T. Для единообразия удобно и стороны треугольника Δ называть ребрами.

Определим ориентацию треугольника. Из вершин Δ можно образовать различные упорядоченные тройки точек. Считаем, что две тройки эквивалентны, если одна получается из другой циклической перестановкой. Ясно, что классов эквивалентности получается ровно два. *Треугольник Δ ориентирован*, если фиксирован один из этих классов эквивалентности. *Топологический треугольник (T, φ) ориентирован*, если ориентирован треугольник Δ. Очевидно, что ориентация треугольника Δ равнозначна заданию определенного направления обхода его вершин (по часовой или против часовой стрелки). Это направление обхода с помощью гомеоморфизма φ определяет направление обхода вершин топологического треугольника — индуцированную гомеоморфизмом φ ориентацию. Ориентация треугольника задает, очевидно, ориентации его ребер (как упорядоченные пары вершин).

Заметим для дальнейшего, что совершенно аналогично определяется ориентация n-угольника и его ребер при $n > 3$ (заданием направления обхода вершин).

Определение 2. *Триангуляцией* двумерного многообразия называется конечное множество $K = \{(T_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{k}$ топологических треугольников в X, удовлетворяющее свойствам: 1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i$; 2) пересечение любой пары треугольников из K либо пусто, либо совпадает с их общей вершиной или общим ребром.

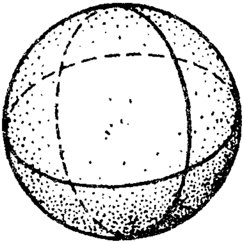


Рис. 49

Многообразие, для которого существует триангуляция, называется *триангулируемым*. Если любые две вершины треугольников из K можно соединить путем, составленным из ребер, то X назовем связным.

На рис. 49 изображен пример триангуляции сферы S^2, состоящей из восьми треугольников.

Определение 3. *Замкнутой поверхностью* будем называть связное триангулируемое двумерное многообразие.

Заметим, что рассматривавшиеся в § 3 гл. I примеры замкнутых поверхностей, триангулируемых на топологические многоугольники, являются примерами замкнутых поверхностей в смысле определения 3 (чтобы в этом убедиться, достаточно триангулировать многоугольники).

Упражнение 1°. Постройте триангуляции тора и проективной плоскости. Убедитесь, что они являются замкнутыми поверхностями.

Топологические свойства замкнутой поверхности определяются строением ее триангуляции. Для изучения последней удобно рассмотреть ее схематическое представление на плоскости. При этом можно считать, что плоские треугольники Δ_i — прообразы треугольников $T_i \subset K$ — лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Опишем такое представление. Пусть (T_i, φ_i), (T_j, φ_j) — треугольники из K и $T_i \cap T_j = a$ — их общее ребро; пусть $a_i = \varphi_i^{-1}(a)$, $a_i = \varphi_j^{-1}(a)$ — соответствующие ему ребра в Δ_i, Δ_j. Определен склеивающий гомеоморфизм

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1}\Big|_a \circ \varphi_i\Big|_{a_i}\colon\ a_i \to a_j.$$

Таким образом, триангуляции K можно сопоставить систему $\Delta = (\{\Delta_i\}_{i=1}^k, \{\varphi_{ij}\})$ треугольников плоскости вместе с гомеоморфизмами φ_{ij} для соответствующих пар ребер. Объявим в $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$ эквивалентными точки, соответствующие друг другу при гомеоморфизмах φ_{ij}. Обозначим указанную эквивалентность через R.

Лемма. *Факторпространство* $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i\right)\Big/R$ *гомеоморфно поверхности* X.

Доказательство. Гомеоморфизмы φ_i: $\Delta_i \to T_i$ естественно задают сюръективное отображение Φ: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i \to X$, причем прообраз $\Phi^{-1}(x)$ для любого $x \in X$ есть в точности класс R-эквивалентности. Фактоотображение $\overline{\Phi}$: $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i\right)\Big/R \to X$ является непрерывным отображением по теореме 2 § 3. Очевидно, что оно биективно и обратное к нему отображение $\widehat{\Phi}^{-1}$ непрерывно. ■

2. Развертка поверхности. В дальнейшем нам понадобятся системы, аналогичные системе Δ, схематически представляющей триангуляцию K поверхности X, но такие, что вместе с треугольниками в них могут входить и n-угольники ($n > 3$).

Определение 4. *Разверткой* называется система $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$, где $\{Q_i\}$ — конечный набор непересекающихся плоских многоугольников, а $\{\varphi_{ij}\}$ — конечный набор склеивающих гомеоморфизмов пар ребер многоугольников из набора $\{Q_i\}$, причем каждое ребро склеивается только с одним ребром; допускается склейка ребер одного многоугольника.

В частности, система $\Delta = (\{\Delta_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ является разверткой; говорят, что Δ — развертка поверхности X, связанная с триангуляцией K.

Заметим, что если положение многоугольника Q_i на плоскости меняется при помощи некоторого гомеоморфизма α_i, то естественно определяются и новые гомеоморфизмы $\{\alpha_j \varphi_i \alpha_i^{-1}\}$ склейки его ребер, которые мы в дальнейшем не будем отличать от гомеоморфизмов $\{\varphi_{ij}\}$.

Для произвольной развертки Q рассмотрим факторпространство $\hat{Q}$ объединения $\bigcup\limits_i Q_i$ по эквивалентности R, определяемой гомеоморфизмами $\{\varphi_{ij}\}$, $\hat{Q} = \left(\bigcup\limits_i Q_i\right)\Big/R$. Будем называть $\hat{Q}$ факторпространством развертки Q. Очевидно, факторпространство развертки — двумерное многообразие; оно допускает триангуляцию, порождаемую достаточно мелкой триангуляцией многоугольников Q_i. Таким образом, если факторпространство $\hat{Q}$ связно, то оно является замкнутой поверхностью (в дальнейшем рассматриваются только такие $\hat{Q}$). Будем называть Q в этом случае *разверткой поверхности* $\hat{Q}$.

Факторотображение индуцирует разбиение поверхности $\hat{Q}$ на образы многоугольников, образы ребер (ребра разбиения), образы вершин (вершины разбиения); разбиение, вообще говоря, не является триангуляцией.

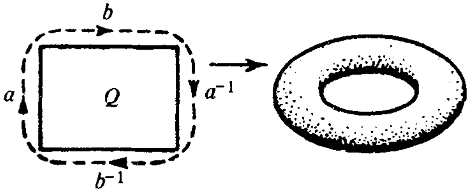


Рис. 50

На рис. 50 изображена развертка тора, представленная многоугольником. Стрелка и обозначения его ребер указывают закон склеивания тора.

В дальнейшем многоугольники развертки будем ориентировать, фиксируя какие-то ориентации каждого из них. Ориентации многоугольников задают соответствующие ориентации ребер. При склеивающем гомеоморфизме φ_{ij}: $a_i \to a_j$ двух ребер ребро a_j получает индуцированную (из ориентации ребра a_i) гомеоморфизмом φ_{ij}

ориентацию, которая, вообще говоря, может отличаться от ориентации ребра a_j.

Развертка Q называется *ориентируемой*, если при одинаковой ориентации всех ее многоугольников (например, обход вершин против часовой стрелки) гомеоморфизмы склейки ребер индуцируют в ребре-образе ориентацию, противоположную заданной. В противном случае (т. е. если хотя бы в одном ребре ориентация совпадает с индуцированной) развертку называют неориентируемой.

Поверхность X называется *ориентируемой* (*неориентируемой*) в соответствии с ориентируемостью (неориентируемостью) ее развертки.

3. Классификация разверток.

Определение 5. Две развертки, Q и Q', называются *эквивалентными*, если их факторпространства гомеоморфны.

Введем некоторые элементарные операции над разверткой, которые преобразуют ее в эквивалентную.

Подразделение. Пусть в развертке Q имеется n-угольник Q_i ($n > 3$). Проведем в нем какую-нибудь диагональ d, которая разбивает Q_i на два многоугольника, Q_i' и Q_i''. Раздвинем многоугольники Q_i' и Q_i'' и построим из Q новую развертку $\tilde{Q}$, заменив многоугольник Q_i на два многоугольника, Q_i' и Q_i''. При этом два новых ребра, d' и d'', — копии диагонали d — свяжем естественным гомеоморфизмом отождествления, а гомеоморфизмы старых ребер сохраним. Развертка $\tilde{Q}$ называется *подразделением развертки* Q; очевидно, что Q и $\tilde{Q}$ эквивалентны.

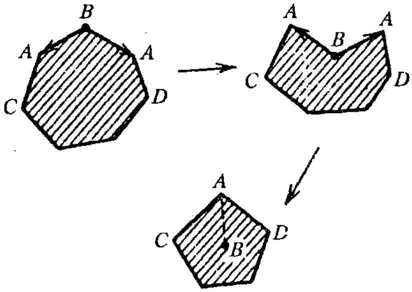


Рис. 51

Склеивание (укрупнение). Эта операция обратна первой. Два многоугольника, Q_i' и Q_i'', развертки Q склеиваются в один многоугольник Q_i по одному из гомеоморфизмов их ребер d' и d''; гомеоморфизмы остальных ребер Q_i' и Q_i'' индуцируют гомеоморфизмы ребер многоугольника Q_i.

Свертывание. Пусть в многоугольнике Q_i развертки Q склеиваются два соседних ребра с противоположными ориентациями. «Склеив» эти ребра, получим развертку $\tilde{Q}$, содержащую вместо Q_i

многоугольник, число вершин которого на два меньше, чем у Q_i; набор гомеоморфизмов развертки $\tilde{Q}$ на один меньше, чем у Q (рис. 51).

Подчеркнем, что описанные операции сохраняют класс эквивалентности развертки (убедитесь!).

Для удобства дальнейшего изложения мы будем описывать каждую развертку набором специальных слов-символов по следующему правилу. Пусть $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ — некоторая развертка. Зафиксируем для каждого многоугольника развертки какую-нибудь ориентацию (для определенности будем считать, что для всех многоугольников развертки фиксировано направление обхода по часовой стрелке). Обозначим ребра многоугольников развертки Q буквами так, чтобы склеиваемые между собой ребра многоугольников были обозначены одинаковыми буквами, а не склеиваемые — разными. Порядок склеивания ребер, задаваемый гомеоморфизмами φ_{ij}, будем указывать на рисунках с помощью стрелок, задав стрелками направления склеиваемых ребер так, чтобы начало одного ребра склеиваемой пары склеивалось с началом другого, а конец — с концом (при этом направление одного из ребер каждой склеиваемой пары можно задавать произвольно, направление другого определяется однозначно соответствующим гомеоморфизмом склейки φ_{ij}). Таким образом мы ориентируем все ребра многоугольников развертки, которые склеиваются с другими ребрами. При этом может оказаться, что ориентация некоторых ребер не совпадает с ориентацией, задаваемой фиксированным обходом многоугольников. К буквенным обозначениям таких ребер добавим показатель -1. Так же, как в § 3 гл. I, запишем последовательно обозначения ребер одного многоугольника Q_i в слово $\omega(Q_i)$, обходя последовательно ребра в заданном направлении. Слово $\omega(Q_i)$ характеризует схему «приклеивания» многоугольника Q_i в развертке Q, а набор слов для всех многоугольников развертки Q характеризует развертку Q.

Выделяют два основных типа разверток.

Определение 6. *Канонической разверткой* I *типа* называется развертка, состоящая из одного многоугольника, определяемого словом вида aa^{-1} или вида

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \ldots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}, \qquad m > 0.$$

Определение 7. *Канонической разверткой* **II** *типа* называется развертка, состоящая из одного многоугольника со словом вида $a_1a_1a_2a_2 \ldots a_ma_m$, $m > 0$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Всякая развертка эквивалентна канонической развертке* I *или* II *типа в соответствии с ее ориентируемостью или неориентируемостью.*

Доказательство. Сделаем вначале два замечания. Во-первых, легко видеть, что с помощью укрупнений всегда можно перейти от развертки, соответствующей триангуляции K поверхности X, к развертке, состоящей из одного многоугольника. Поэтому везле ниже рассматриваются только такие развертки. Во-вторых, если в слове развертки, отличном от aa^{-1}, имеются все же сочетания вида aa^{-1}, то от них можно последовательно избавляться с помощью операции свертывания по общей вершине A ребер a и a^{-1}. Слово новой развертки получается из слова старой вычеркиванием сочетания aa^{-1}.

В результате придем либо к слову из двух букв (aa^{-1} или aa), либо к слову не менее, чем из четырех букв, в котором нет сочетаний вида aa^{-1} (напомним, что поверхность замкнута). И так как слова aa, aa^{-1} описывают каноническую развертку, то дальнейшему анализу подлежит лишь последний случай.

Разобьем этот анализ на ряд шагов.

1) От полученной развертки Q' можно перейти к такой, у которой все вершины эквивалентны, т. е. склеиваются при факторизации. В самом деле, предположим, что в Q есть неэквивалентные вершины. Тогда в Q найдется ребро a, концы A, B которого не эквивалентны. Пусть b — другое ребро, примыкающее к вершине B, со второй вершиной C. Соединим A с C диагональю d. В этом случае ребро b', с которым обязано склеиваться ребро b, найдется вне треугольника ABC. Иначе либо $b = a$, либо $b = a^{-1}$, что противоречило бы неэквивалентности вершин A и B или отсутствию сочетаний вида aa^{-1}. Применим теперь операцию подразделения по диагонали d, а затем операцию укрупнения по ребру b (склеим его с ребром b'). В полученной развертке P' множество вершин, эквивалентных A, стало на одну больше, а множество вершин, эквивалентных B, — на одну меньше (рис. 52). Если при этом в слове развертки P' появились сочетания вида aa^{-1}, то уберем их с помощью операции свертывания. При этом следует отметить, что последняя перестройка не может изменить разности между множеством вершин, эквивалентных B, и множеством вершин, эквивалентных A (проверьте!).

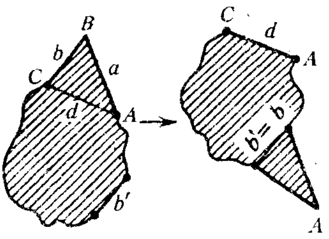


Рис. 52

Далее, если остались еще вершины, не эквивалентные A, то повторяем весь описанный прием, пока не получим развертку с искомым свойством.

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что в рассматриваемой развертке все вершины эквивалентны и в ее слове нет сочетаний вида aa^{-1}.

2) Покажем теперь, что две одинаковые буквы в слове развертки можно всегда поставить рядом. В самом деле, пусть буквы a и a не стоят рядом. Проведем тогда в многоугольнике диагональ d, соединяющую начала ребер a и a. Сделаем подразделение по d и затем укрупнение по a. В новом слове буквы a, как видно, уже не будет,

но появится сочетание dd, чего мы и добивались (рис. 53). (Нетрудно проверить, что результаты первого шага сохраняются.)

Точно так же поступаем с другими одинаковыми буквами, не стоящими рядом.

Отметим при этом, что, выполняя описанный прием, мы не разделяем других сочетаний вида aa, поскольку отделяются лишь ребра, соседние с ребром a, которые заведомо ему не эквивалентны.

3) Считая условия 1), 2) шагов выполненными, покажем, что если буквы a и a^{-1} в слове не стоят рядом, то найдутся еще буквы b, b^{-1} такие, что пары a, a^{-1} и b, b^{-1} разделяют друг друга (рис. 54).

Будем рассуждать от противного. Если такой пары b, b^{-1} нет, то между a и a^{-1} содержатся только сочетания вида cc. Но такая ситуация противоречит эквивалентности всех вершин развертки, так как она возможна лишь при условии, что вершины A, B ребра a не эквивалентны (рис. 55).

4) Таким образом, в слове развертки есть две пары: a, a^{-1} и b, b^{-1}, разделяющие друг друга. Покажем, что эту четверку можно заменить на сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$, сохраняя условия шагов 1), 2). Соединим начала ребер a и a^{-1} диагональю x и проведем по ней подразделение и затем укрупнение по ребру b (рис. 56). В полученном многоугольнике соединим концы ребер x и x^{-1} диагональю y и снова проведем подразделение по y и затем укрупнение по a (рис. 57).

Получена развертка, в слове которой вместо букв a, b, a^{-1}, b^{-1} появилось сочетание $xyx^{-1}y^{-1}$. Если при этих операциях возникнут сочетания вида cc^{-1}, то они устраняются свертыванием, а сочетания вида dd и $cdc^{-1}d^{-1}$ не разрываются. Таким образом, сохраняются условия, достигнутые на шагах 1) и 2).

В результате применения конструкций шагов 1)—4) мы преобразовали исходное слово к слову, состоящему из сочетаний вида $xyx^{-1}y^{-1}$ и aa. Если сочетаний вида aa в слове нет, то это каноническая развертка I типа.

5) Если одновременно имеются сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ и aa, то слово приводится к каноническому виду II типа следующим образом. Соединяем диагональю d общую вершину ребер a и a с общей вершиной ребер y и x^{-1}, производим подразделение по d и укрупнение по a (рис. 58). Получившиеся две пары разделенных ребер x и x, y и y превращаем в сочетания zz, ww применением операции шага 2) (рис. 59, 60); после этих операций появляется разделенная пара d^{-1}, d^{-1}, которую снова применением операции шага 2) превращаем в сочетание vv (рис. 60). Получаем слово требуемого канонического вида.

Таким образом, пара сочетаний $xyx^{-1}y^{-1}$, aa заменяется в слове сочетанием трех пар вида aa. При этом не нарушаются другие сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ или aa. Процесс можно повторить до полного исчезновения сочетаний вида $xyx^{-1}y^{-1}$. ■

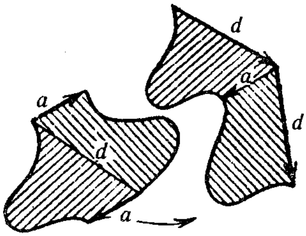


Рис. 53

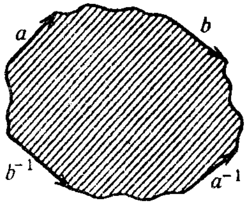


Рис. 54

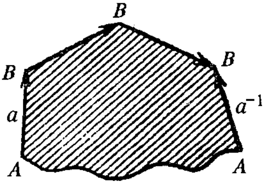


Рис. 55

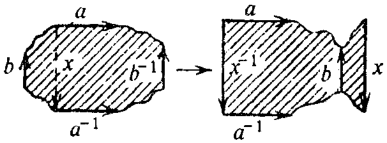


Рис. 56

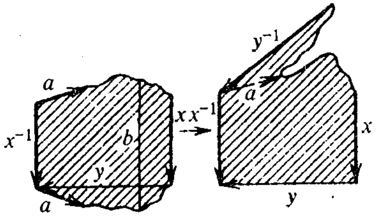


Рис. 57

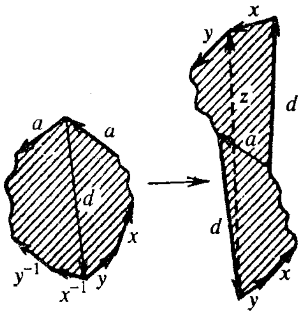


Рис. 58

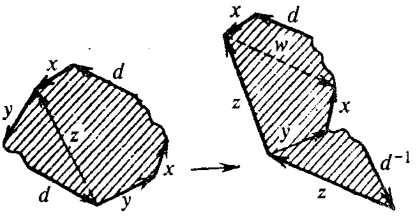


Рис. 59

Упражнение 2°. Убедитесь, что две замкнутых поверхности, X и X', развертки которых эквивалентны каноническим одного типа и с одним и тем же числом m, гомеоморфны.

4. Эйлерова характеристика и топологическая классификация поверхностей. Обратимся к геометрической интерпретации только что доказанной теоремы. В § 3 гл. I было показано, что сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ в слове канонической развертки поверхности X соответствуют ручке, а сочетание вида aa — листу Мёбиуса, приклеенным к остальной части поверхности X по своему краю. Таким образом, принадлежность канонической развертки поверхности к I и II типам означает, что эта поверхность склеена из конечного числа ручек или из конечного числа листов Мёбиуса соответственно. Такую склейку нетрудно представить как результат приклеивания этих ручек или листов Мёбиуса к сфере S^2.

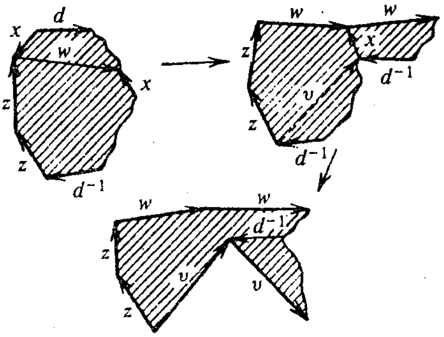


Рис. 60

Итак, мы видим, что поверхность с канонической разверткой I типа есть ориентируемая поверхность типа M_p, где p — число приклеенных к сфере ручек (*род поверхности*). Если же каноническая развертка поверхности принадлежит ко II типу, то это неориентируемая поверхность типа N_q, $q \geqslant 1$, где q — число приклеенных к сфере листов Мёбиуса (также *род поверхности*).

В процессе доказательства теоремы было также показано, что если к сфере приклеено p ручек и $q \geqslant 1$ листов Мёбиуса одновременно, то полученная поверхность неориентируема и имеет тип N_{2p+q}.

Теорема о классификации разверток позволяет сделать вывод о том, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна некоторой поверхности типа M_p, N_q. Для уточнения этого результата рассмотрим эйлерову характеристику нашей поверхности. Пусть в разбиении поверхности X имеется a_0 вершин, α_1 ребер и α_2 образов многоугольников. Число $\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ назовем *эйлеровой характеристикой* поверхности. Очевидно, это определение обобщает данное ранее (см. § 3 гл. I), так как теперь образ многоугольника, например, не является обязательно топологическим многоугольником (возможно склеивание сторон одного многоугольника).

Если X имеет тип M_p и P — его каноническая развертка со словом $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$, то, очевидно, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2p$, $\alpha_2 = 1$ и $\chi(X) = 2 - 2p$.

Если X имеет тип N_q и $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q$ — слово его канонической развертки, то $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = q$, $\alpha_2 = 1$ и $\chi(X) = 2 - q$.

Если Q — произвольная развертка поверхности X, то с помощью элементарных операций она преобразуется в каноническую развертку. Легко заметить, что элементарные операции не меняют $\chi(X)$. В самом деле, при подразделении числа α_1 и α_2 увеличиваются на 1, а α_0 не меняется; при укрупнении α_1 и α_2 уменьшаются на 1 при неизменном α_0; при свертывании α_0 и α_1 уменьшаются на 1. Следовательно, альтернированная сумма $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ не меняется. Отсюда следует важный вывод: каноническая развертка P не зависит от выбора элементарных преобразований развертки Q. Действительно, если бы Q приводилась к двум каноническим разверткам P, P', например, I типа

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} \quad \text{и} \quad \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \tilde{a}_1^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \dots \tilde{a}_{p_1} \tilde{b}_{p_1} \tilde{a}_{p_1}^{-1} \tilde{b}_{p_1}^{-1},$$

то эйлерова характеристика, вычисленная по разбиению Q, совпадала бы с результатом вычисления ее по разбиениям P, P', и мы имели бы равенство $2 - 2p = 2 - 2p_1$, откуда $p = p_1$, т. е. совпадение слов для P и P'. Аналогичное рассуждение приводится в случае разверток P, P' II типа.

Если же P — развертка I типа, а P' — II типа, то равенство $2 - 2p = 2 - q$ возможно при $q = 2p$. Поэтому вышеприведенное рассуждение устанавливает лишь невозможность иметь для развертки два канонических вида I и II типов с p и $q \neq 2p$. Общее заключение о невозможности одновременного приведения развертки к каноническим видам I и II типов следует из сохранения свойства ориентируемости (или неориентируемости) развертки при элементарных преобразованиях (проверьте!).

В итоге нами доказана первая часть следующей центральной теоремы о топологической классификации поверхностей.

Теорема 2. *Всякая замкнутая поверхность топологически эквивалентна поверхности типа M_p или N_q. Поверхности типов M_p и N_q, $q \geqslant 1$, топологически не эквивалентны, если p, q не равны нулю одновременно; поверхности $M_p(N_q)$ при различных значениях $p(q)$* также топологически не эквивалентны.

Вторая часть теоремы была объяснена в § 3 гл. I (п. 4) и выше. Это объяснение можно было бы считать доказательством, если бы были доказаны топологическая инвариантность эйлеровой характеристики $\chi(X)$ для произвольной замкнутой поверхности X (это доказано было только для случая $X = S^2$) и негомеоморфность M_p и

N_q при $q=2p$, $p>0$. Эти факты будут установлены в § 4 гл. III на основе понятия фундаментальной группы пространства.

Упражнения. 3°. Изобразите схему склеивания поверхности, каноническая развертка которой имеет слово

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}.$$

4°. Нарисуйте схему склеивания поверхности, характеризующейся словом $a_1a_1a_2a_2a_3a_3$. Укажите тип и род этой поверхности.

5°. Убедитесь, что следующие замкнутые поверхности имеют указанный тип и род:

1) сфера — $M_0=N_0$;

2) тор (сфера с одной ручкой) — M_1;

3) крендель (сфера с двумя ручками) — M_2;

4) проективная плоскость — N_1;

5) бутылка Клейна — N_2.

Нарисуйте схемы их разбиений.

6°. *Одномерным многообразием* M^1 назовем топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому интервалу числовой оси. *Триангуляцией* M^1 назовем разбиение его *на дуги* — топологические образы отрезка $[0, 1]$, примыкающие друг к другу по своим концам (вершинам); предполагаем, что M^1 состоит из конечного числа дуг. Докажите, что триангулируемое многообразие M^1 гомеоморфно окружности S^1 или нескольким ее экземплярам.

§ 5. Пространства орбит; проективные и линзовые пространства

1. Определение пространства орбит. Рассмотрим важные примеры факторпространств, возникающие при действии групп на топологических пространствах.

Пусть $H(X)$ — множество всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя. Определено произведение двух гомеоморфизмов, h_1 и h_2: $(h_1h_2)(x)=h_2(h_1(x))$, для каждого $h\in H(X)$ имеется обратное отображение $h^{-1}\in H(X)$, причем $hh^{-1}=h^{-1}h=1_x$. Таким образом, $H(X)$ — группа по умножению (вообще говоря, не коммутативная) с единицей 1_x.

Определение 1. Будем говорить, что некоторая абстрактная группа G *действует* (*слева*) *на пространстве* X, если задан гомоморфизм группы G в группу $H(X)$.

Если G действует на X, то, следовательно, каждому $g\in G$ соответствует $h_g\in H(X)$: $g\mapsto h_g$; $g_1g_2\mapsto h_{g_1}h_{g_2}$; $g^{-1}\mapsto (h_g)^{-1}$; $1_G\mapsto 1_X$.

Очевидно, что множество $\{h_g\}_{g\in G}$ — подгруппа группы $H(X)$.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка; множество $\bigcup\limits_{g\in G} h_g(x)$ называется ее *орбитой* и обозначается O_x.

Упражнение 1°. Покажите, что две орбиты, O_x, O_y, либо совпадают, либо не пересекаются.

Последнее утверждение позволяет ввести в X эквивалентность R: $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow O_x = O_y$, т. е. когда x, y принадлежат одной орбите.

Определение 2. Факторпространство X/R называется *пространством орбит группы* G и обозначается X/G.

Описанная конструкция образования факторпространств играет важную роль в современной топологии. Рассмотрим некоторые примеры.

2. Проективные пространства $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть каждой точке $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in S^n$ поставлена в соответствие диаметрально противоположная точка $Ax = (-\xi_1, \ldots, -\xi_{n+1}) \in S^n$. Отображение $A: S^n \to S^n$ является гомеоморфизмом и называется *центральной симметрией*. Очевидны соотношения $A = A^{-1}$, $A^2 = 1_{S^n}$. Следовательно, множество $\{A, 1_{S^n}\}$ является группой (по умножению), состоящей из двух элементов; она изоморфна группе (по сложению) $\mathbb{Z}_2$ вычетов по mod 2. Итак, определено действие $\mathbb{Z}_2$ на S^n.

Определение 3. Пространство $S^n/\mathbb{Z}_2$ называется *вещественным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{R}P^n$.

Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получено из S^n отождествлением диаметрально противоположных точек x, $-x$.

Рассмотрим множество $G = \mathbb{R}\backslash 0$ (все действительные числа, кроме нуля). Это группа по умножению. Зададим действие группы G на пространстве $X = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$:

$$h_\lambda(x) = \lambda x, \quad \lambda \in G, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}.$$

Очевидно, O_x — множество всех точек прямой в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через 0 и x, кроме точки 0. Следовательно, $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/D$ — множество всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало. Пространство $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$. Гомеоморфизм устанавливается соответствием: пара $(x, -x)$ соответствует прямой, проходящей через точки x, $-x$.

Упражнения. 2°. Опишите топологию факторпространства $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$ и убедитесь в гомеоморфности пространства $\mathbb{R}P^n$ и $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$.

3°. Склеим диаметрально противоположные точки края диска $\overline{D}^n$. Покажите, что полученное факторпространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим теперь комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — группа комплексных чисел по умножению. Она действует в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ по правилу $h_\lambda(x) = \lambda x$, $\lambda \in G$, $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Следовательно, $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G$ можно отождествить с множеством всех комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через нуль.

Определение 4. Пространство $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G$ называется *комплексным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{C}P^n$.

Построим другую модель $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ единичную сферу $S^n_{\mathbb{C}} = \{x\colon |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_{n+1}|^2 = 1\}$. На ней действует группа $G = \{e^{i\alpha}, 0 \leqslant \alpha < 2\pi\}$ по правилу

$$e^{i\alpha} x = (e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\alpha}\xi_2, \ldots, e^{i\alpha}\xi_{n+1}).$$

Эту группу G можно отождествить с единичной окружностью S^1 в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда S^1 действует на координату $\xi_i \in \mathbb{C}$ и орбита точки ξ_i в $\mathbb{C}$ — окружность радиуса $|\xi_i|$, если $|\xi_i| \neq 0$. Следовательно, орбита $O_x = \{e^{i\alpha} x\}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ каждой точки $x \in S^n_{\mathbb{C}}$ — большой круг на $S^n_{\mathbb{C}}$. Но $S^n_{\mathbb{C}}$ можно отождествить с S^{2n+1} и O_x можно считать большим кругом на S^{2n+1}; следовательно, действие $G = S^1$ определено на S^{2n+1}. Таким образом, имеем гомеоморфизм $S^n_{\mathbb{C}}/S^1 \to S^{2n+1}/S^1$.

Установим теперь гомеоморфизм $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G \to S^n_{\mathbb{C}}/S^1$. Этот гомеоморфизм определим, сопоставив каждой комплексной прямой (точке $\mathbb{C}P^n$) тот большой круг на $S^n_{\mathbb{C}}$ (точку $S^n_{\mathbb{C}}/S^1$), по которому комплексная прямая пересекает $S^n_{\mathbb{C}}$. Суперпозиция

$$(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G \to S^n_{\mathbb{C}}/S^1 \to S^{2n+1}/S^1$$

задает гомеоморфизм $\mathbb{C}P^n$ и S^{2n+1}/S^1.

3. Линзовые пространства. В конце п. 2 мы имели дело с группой S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1, действующей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим конечные подгруппы группы S^1, которые, как известно, являются конечными циклическими группами и изоморфны аддитивным группам $\mathbb{Z}_k$ вычетов по mod k.

Пусть

$$\xi_j \mapsto e^{2\pi i \frac{k_{j-1}}{k}} \xi_j,$$

где k_{j-1} — некоторое целое число, $0 \leqslant k_{j-1} \leqslant k$. Тогда определено действие $\mathbb{Z}_k$ в $\mathbb{C}^{n+1}$ и в $S^n_{\mathbb{C}}$:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \left(e^{2\pi i \frac{1}{k}} \xi_1, e^{2\pi i \frac{k_1}{k}} \xi_2, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_{j-1}}{k}} \xi_j, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_n}{k}} \xi_{n+1}\right).$$

Определение 5. Пространство $S^n_{\mathbb{C}}/\mathbb{Z}_k$ при условии взаимной простоты всякого k_i с k называется *обобщенным линзовым пространством* и обозначается $L(k, k_1, \ldots, k_n)$. При $n = 1$ пространство $L(k, k_1)$ называется *линзовым пространством.*

Упражнения. 4°. Покажите, что при условии взаимной простоты всякого k_i с k каждая орбита описанного выше действия группы $\mathbb{Z}_k$ состоит из k точек.

5°. Покажите, что на обобщенном линзовом пространстве следующая формула определяет действие группы S^1:

$$e^{i\alpha}(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = \left(e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_1, \ldots, e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_{n+1}\right).$$

6°. Покажите, что $L(k, k_1, \ldots, k_n)/S^1 = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

§ 6. Операции над множествами в топологическом пространстве

В этом параграфе мы снова обратимся к изучению свойств топологических пространств и рассмотрим операции замыкания, выделения внутренней части и границы множества и тесно связанное с этими операциями понятие предельных и граничных точек. Все эти понятия обобщают известные понятия математического анализа.

1. Замыкание множества. Пусть (X, τ) — топологическое пространство.

Определение 1. *Замыканием* $\bar{A}$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Очевидны следующие утверждения.

1. Замыкание $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

2. Если A замкнуто, то $\bar{A} = A$. Замкнутое множество можно охарактеризовать через понятие предельных точек, определяемое ниже.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *предельной* для данного множества $A \subset X$, если в каждой окрестности $\Omega(x)$ точки x содержится хотя бы одна точка $x' \in A$, отличная от x.

Упражнение 1°. Убедитесь, что в этом определении можно ограничиться только открытыми окрестностями точки x.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1$ множества $A = \{n\}$, $B = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $C = (0, 1)$, $D = [0, 1]$.

Множество A не имеет предельных точек, множество B имеет одну предельную точку 0, предельные точки множеств C и D заполняют весь отрезок $[0, 1]$.

Понятие предельной точки в топологическом пространстве является, как легко видеть, обобщением понятия предельной точки в анализе. Докажем несколько полезных утверждений, связанных с понятием предельных точек.

Теорема 1. *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Пусть A замкнуто, x — предельная точка A и $x \notin A$. Тогда x принадлежит открытому множеству $\Omega(x) = X \setminus A$, являющемуся окрестностью точки x. Но $\Omega(x) \cap A = \varnothing$, что противоречит тому, что x — предельная точка.

Пусть A содержит все свои предельные точки. Покажем, что оно замкнуто, т. е. что его дополнение $U = X \setminus A$ открыто. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x \in U$ найдется такая окрестность $\Omega(x)$ точки x, что $\Omega(x) \subset U$. В предположении противного для некоторой точки $x_0 \in U$ и всякой ее окрестности $\Omega(x_0)$ найдется точка $x' \in \Omega(x_0)$ такая, что $x' \notin U$. Тогда $x' \in X \setminus U = A$, следовательно, x_0 — предельная точка для A, и, значит, $x_0 \in A$ в противоречие с предположением, что $x_0 \in U = X \setminus A$. ■

Множество всех предельных точек множества A называют *производным множеством* множества A и обозначают A'. Таким образом, возникает новая операция, сопоставляющая каждому множеству $A \subset X$ его производное множество A'.

Теорема 2. *Для любого множества $A \subset X$ множество $A \cup A'$ замкнуто.*

Доказательство. Покажем, что множество $X \setminus (A \cup A')$ открыто. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus (A \cup A')$. Тогда x не предельная точка для A, поэтому найдется такая ее окрестность $\Omega(x)$, что $\Omega(x) \cap A = \varnothing$. Пусть $x' \in \Omega(x)$ — произвольная точка. Тогда для любой окрестности $V(x')$ точки x' такой, что $V(x') \subset \Omega(x)$, имеем $V(x') \cap A = \varnothing$, следовательно, x' не предельная точка для A и $\Omega(x) \cap A' = \varnothing$. Таким образом, $\Omega(x) \subset X \setminus (A \cup A')$; ввиду произвольности x множество $X \setminus (A \cup A')$ открыто, следовательно, $A \cup A'$ замкнуто. ■

Упражнение 2°. 1) Проверьте, что $(A \cup B)' = A' \cup B'$; $(A \cap B)' \subset \subset A' \cap B'$; $(A \setminus B)' \supset A' \setminus B'$.

2) Пусть $X = \{a, b\}$ — пространство из двух элементов с тривиальной топологией. Приведите пример множества $A \subset X$, для которого не выполнено включение $(A')' \subset A'$.

Докажем основное утверждение о структуре замыкания множества.

Теорема 3. *$\overline{A}=A\cup A'$ для всякого множества A, $A\subset X$.*

Доказательство. По теореме 2 множество $A\cup A'$ замкнуто. Следовательно, по определению замыкания $\overline{A}\subset A\cup A'$. С другой стороны, любое замкнутое множество, содержащее A, содержит, очевидно, и все предельные точки A, а следовательно, содержит A'. Отсюда следует, что $A\cup A'\subset\overline{A}$. Таким образом, $\overline{A}=A\cup A'$. ■

Упражнение 3°. Пусть A — множество рациональных точек на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$. Покажите, что $\overline{A}=\mathbb{R}^1$.

Если топологическое пространство X имеет не более чем счетное подмножество A, замыкание которого совпадает с X, то оно называется *сепарабельным*. Легко проверить, что сепарабельность — топологическое свойство.

Упражнения. 4°. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и сфера S^{n-1} сепарабельны.

5°. Проверьте следующие свойства операций замыкания: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$; $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$; если $A\subset B$, то $\overline{A}\subset\overline{B}$.

6°. Пусть Y — подпространство топологического пространства X и A — подмножество в Y. Обозначим через $\overline{A}_Y$ замыкание множества A в подпространстве Y, через $\overline{A}$ — замыкание A в X. Покажите, что $\overline{A}_Y=\overline{A}\cap Y$.

Определение 3. Точка $x\in A$ называется *изолированной* точкой множества A, если существует окрестность $\Omega(x)$ точки x, не содержащая точек множества A, отличных от x.

Точка $x\in A$ изолирована тогда и только тогда, когда $x\in A\setminus A'$.

Определение 4. Множество A называется *дискретным*, если каждая его точка изолирована.

2. Внутренность множества. Рассмотрим еще два важных понятия, связанных с понятием окрестности.

Определение 5. Точка $x\in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если найдется такая ее окрестность $\Omega(x)$, что $\Omega(x)\subset A$.

Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* A и обозначается $\operatorname{Int}A$.

Пример. Пусть $A=[0,1]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, тогда $\operatorname{Int}[0,1]=(0,1)$.

Операция Int двойственна операции замыкания, что видно из ее свойств, формулируемых в следующей теореме.

Теорема 4. *Для любого множества $A\subset X$ имеем:* 1) $\operatorname{Int}A$ — *открытое множество*; 2) $\operatorname{Int}A$ — *наибольшее открытое множество, содержащееся в* A; 3) (A открыто) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Int}A=A$); 4) ($x\in\operatorname{Int}A$) $\Leftrightarrow$ ($x\in A$ *и x не является предельной точкой для* $X\setminus A$); 5) $\overline{X\setminus A}=X\setminus\operatorname{Int}A$.

Доказательство. Свойства 1) — 3) почти очевидны. Проверим, например, свойство 1). Пусть $x \in \operatorname{Int} A$; тогда найдется такая открытая окрестность $U(x)$ точки x, что $U(x) \subset A$. Поэтому $\operatorname{Int} A$ есть окрестность каждой своей точки и, следовательно, открытое множество.

Проверим свойство 4). Если $x \in \operatorname{Int} A$, то, очевидно, $x \in A$ и $x \notin (X\setminus A)'$. Обратно: если $x \in A$ и $x \notin (X\setminus A)'$, то найдется окрестность $\Omega(x) \subset A$, следовательно, $x \in \operatorname{Int} A$.

Проверку свойства 5) предоставим читателям. ■

Часто приходится рассматривать множество $\operatorname{Int}(X\setminus A)$, которое называется *внешней* открытой частью множества A и обозначается $\operatorname{ext} A$.

Упражнение 7°. Покажите, что $\overline{A} = X\setminus \operatorname{ext} A$.

3. Граница множества. Следующие важные понятия — понятия граничной точки и границы множества A, ассоциирующиеся с интуитивным представлением о «перегородке», отделяющей область евклидова пространства от внешней части.

Определение 6. *Границей* ∂A множества A назовем множество $X\setminus(\operatorname{Int} A \cup \operatorname{ext} A)$. Всякую точку границы назовем *граничной точкой* множества A.

Таким образом, $x \in \partial A$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность x содержит точку как из A, так и из $X\setminus A$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^1$ и $A = (0, 1]$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0, 1)$, $X\setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, $\operatorname{Int}(X\setminus A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Следовательно, $\partial A = \{0, 1\}$ — множество из двух точек: 0 и 1.

Таким образом, имеем граничную операцию ∂. Ее связь с операциями замыкания и Int выясняет следующая теорема.

Теорема 5. *Для любого* $A \subset X$ *имеем*: 1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X\setminus A)}$; 2) $\partial A = \overline{A}\setminus \operatorname{Int} A$; 3) $\overline{A} = A \cup \partial A$; 4) $\operatorname{Int} A = A\setminus \partial A$; 5) ($A$ *замкнуто*) $\Leftrightarrow$ ($\partial A \subset A$); 6) (A *открыто*) $\Leftrightarrow$ ($(\partial A) \cap A = \varnothing$).

Доказательство. Докажем некоторые из этих утверждений, оставив другие для упражнения. 1) Пусть $x \in \partial A$; тогда в любой окрестности $U(x)$ точки x найдутся точки x_1, x_2 такие, что $x_1 \in A$, $x_2 \in X\setminus A$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{X\setminus A}$, т. е. $x \in \overline{A} \cap \overline{(X\setminus A)}$. Обратно: если $x \in \overline{A} \cap \overline{(X\setminus A)}$, то $x \in \overline{A}$, $x \in \overline{(X\setminus A)}$. Так как $\overline{(X\setminus A)} = X\setminus \operatorname{Int} A$, $A = X\setminus \operatorname{ext} A$ (см. п. 5 теоремы 4 и упр. 7°), то $x \notin \operatorname{Int} A$, $x \notin \operatorname{ext} A$, откуда следует $x \in \partial A$.

2) Согласно определению

$$\partial A = X\setminus(\operatorname{Int} A \cup \operatorname{ext} A) = (X\setminus \operatorname{ext} A)\setminus \operatorname{Int} A = \overline{A}\setminus \operatorname{Int} A.$$

3) Так как $\operatorname{Int} A \subset \overline{A}$, то из 2) следует $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A \subset$ $\subset A \cup \partial A$; так как $\partial A \subset \overline{A}$, то $A \cup \partial A \subset A \cup \overline{A} = \overline{A}$.

5) Если A замкнуто, то $\partial A \subset \bar{A} = A$. Обратно: если $\partial A \subset A$, то в силу 3) $\bar{A} = A \cup \partial A$ (см. п. 3), откуда $A = \bar{A}$, т. е. A замкнуто. ∎

Упражнения. 8°. Пусть U открыто в X, $A = \partial U$. Покажите, что $\partial A = A$. Докажите обратное утверждение.

9°. Пусть Y — подпространство топологического пространства X и A — подмножество в Y. Обозначим через $\partial_Y A$ границу множества A в Y, а через ∂A — границу A в X. Убедитесь, что не всегда $\partial_Y A = (\partial A) \cap Y$. Приведите примеры.

§ 7. Операции над множествами в метрическом пространстве. Шар и сфера. Полнота

1. Операции над множествами в метрическом пространстве. Здесь мы специализируем для метрических пространств понятия, изученные в предыдущем параграфе. Напомним, что база топологии в метрическом пространстве (X, ρ) состоит из всевозможных шаров $D_r(x_0)$, где $r > 0$ — радиус, а x_0 — центр шара. Метрика ρ позволяет говорить о сходящихся последовательностях в X (см. § 2 гл. I). Выразим $\bar{A}$, A', $\operatorname{Int} A$, ∂A в этих терминах:

а) условие $x \in \operatorname{Int} A$ эквивалентно тому, что для некоторого $\varepsilon > 0$ шар $D_\varepsilon(x)$ целиком содержится в A; это следует из определения метрической топологии τ_ρ;

б) условие $x \in A'$ эквивалентно тому, что существует последовательность $\{a_n\}$, сходящаяся к x, где $a_n \in A$, $a_n \neq x$.

Действительно, если $x \in A'$, то для всякого $r_1 > 0$ найдется элемент a_1 в A такой, что $a_1 \in D_{r_1}(x)$, $a_1 \neq x$. Пусть $0 < r_2 < \rho(x, a_1)$; тогда снова найдется элемент $a_2 \in D_{r_2}(x)$, $a_2 \neq x$, и т. д. Таким образом строятся последовательности $\{r_n\}$ и $\{a_n\} \subset A$ такие, что $a_n \neq x$, $\rho(a_n, x) < r_n$, $r_n \to 0$, т. е. $a_n \to x$.

Обратно, пусть существует последовательность $a_n \to x$, где $a_n \neq x$, $a_n \in A$. Тогда для всякой окрестности $\Omega(x)$ точки x существуют шар $D_\varepsilon(x) \subset \Omega(x)$ и такое $N(\varepsilon)$, что $\rho(a_n, x) < \varepsilon$ для $n \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда $a_n \in \Omega(x)$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $a_n \neq x$, что завершает доказательство.

Приведенное определение предельной точки в терминах сходящихся к ней последовательностей постоянно используется в анализе как определение предельной точки множества;

в) условие замкнутости множества A (A содержит все свои предельные точки) в метрическом пространстве эквивалентно тому, что из существования последовательности $\{a_n\} \subset A$, сходящейся к x, следует условие $x \in A$. Действительно, условие замкнутости A эквивалентно, например, условию $A' \subset A$ (см. § 6), что эквивалентно предыдущему утверждению;

г) условие $x \in \partial A$ эквивалентно тому, что для всякого $r > 0$ имеем $D_r(x) \cap A \neq \varnothing$ и $D_r(x) \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$, т. е. любой шар с центром в точке x «зачерпнет» точки из A и из $X \backslash A$. Это утверждение очевидно.

Дадим эквивалентное определение, часто используемое в анализе:

д) условие $x \in \partial A$ эквивалентно тому, что существует последовательность $\{a_n'\} \subset X \backslash A$, сходящаяся к x, и существует последовательность $\{a_n\} \subset A$, сходящаяся к x.

Действительно, пусть $x \in \partial A$. Тогда для всякого $r > 0$ шар $D_r(x)$ «черпает» точки как из A (точку a_r), так и из $X \backslash A$ (точку a_r'). Полагая $r = r_n$, $r_n \to 0$, получаем последовательности $a_{r_n} \in A$, $a_{r_n}' \in X \backslash A$ такие, что $a_{r_n} \to x$, $a_{r_n}' \to x$. Обратно, если $a_n \to x$, $\{a_n\} \subset A$ и $a_n' \to x$, $\{a_n'\} \subset X \backslash A$, то любой шар $D_r(x)$ содержит как точку a_n, так и точку a_n' при достаточно большом $n = n(r)$; следовательно, $x \in \partial A$.

2. Шар и сфера в $\mathbb{R}^n$. Изучим сферу S^n, открытый диск D^{n+1} и замкнутый диск $\overline{D}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Верны следующие равенства:* $\overline{D}^{n+1} = (\overline{D^{n+1}}) = (D^{n+1})'$.

Доказательство. Если рассмотреть «луч» $\{t x_0\}$, $0 \leqslant t < +\infty$, выходящий из центра диска (точки 0) и проходящий через точку $x_0 \in \overline{D}^{n+1}$, $x_0 \neq 0$, то точки $x_n = \frac{n-1}{n} x_0$ этого луча стремятся к x_0 и лежат в D^{n+1} (проверьте с помощью метрики $\mathbb{R}^{n+1}$), а точки $y_n = \frac{1}{n} x_0$ также лежат в D^{n+1} и стремятся к нулю. Следовательно, $(D^{n+1})' \supset \overline{D}^{n+1}$. С другой стороны, $(\overline{D^{n+1}}) \subset \overline{D}^{n+1}$ (здесь $(\overline{D^{n+1}})$ — топологическое замыкание диска D^{n+1}). Действительно, если $x_n \to y$, $x_n \in D^{n+1}$, т. е. если $y \in (D^{n+1})'$, то

$$\rho(y, 0) \leqslant \rho(y, x_n) + \rho(x_n, 0) < \rho(y, x_n) + 1,$$

откуда, учитывая, что $\rho(y, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, имеем $\rho(y, 0) \leqslant 1$, т. е. $y \in \overline{D}^{n+1}$.

Объединяя полученные включения с очевидным включением $(D^{n+1})' \subset (\overline{D^{n+1}})$, получаем

$$\overline{D}^{n+1} \subset (D^{n+1})' \subset (\overline{D^{n+1}}) \subset \overline{D}^{n+1},$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Теорема 2. *Сфера есть граница диска:* $S^n = \partial(D^{n+1})$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in S^n$ ($S^n \neq \varnothing$!); тогда $x_n = \frac{n-1}{n} x_0 \in D^{n+1}$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$. Следовательно, $S^n \subset \partial(D^{n+1})$. Обратно: пусть $x_0 \in \partial(D^{n+1})$. Тогда $x_0 \notin D^{n+1}$, так как D^{n+1} состоит из внутренних точек, и существует последовательность $\{x_n\} \in D^{n+1}$, сходящаяся к x_0 (см. п. 1, д). Следовательно, $x_0 \in (D^{n+1})' = \overline{D}^{n+1}$, $x_0 \in S^n$. ■

Упражнения. 1°. Докажите, что $S^n = \partial(\overline{D}^{n+1})$.

2°. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Докажите, что множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(x) < \alpha\}$ открыто, а множества $B = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(x) \leqslant \alpha\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(x) = \alpha\}$,замкнуты для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^1$ (эти множества называются *лебеговыми множествами* функции φ).

3°. В условиях упражнения 2° покажите, что $\overline{A} \subset B$. Приведите пример, когда $\overline{A} = B$, $\partial A = C$, а также пример, когда $\overline{A} \neq B$ и $\partial A \neq C$.

3. Шар и сфера в произвольном метрическом пространстве. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ). Определим *замкнутый шар* $\overline{D}_r(x_0)$ *и сферу* $S_r(x_0)$ (радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0) равенствами

$$\overline{D}_r(x_0) = \{x \in X\colon \rho(x, x_0) \leqslant r\},$$
$$S_r(x_0) = \{x \in X\colon \rho(x, x_0) = r\}.$$

Заметим, что $\overline{D}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ — замкнутые множества в X. Действительно, если $\{x_n\} \in \overline{D}_r(x_0)$ и $x_n \to y$, то

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y) \leqslant r + \rho(x_n, y),$$

откуда следует, что $\rho(x_0, y) \leqslant r$, т. е. $y \in \overline{D}_r(x_0)$; $S_r(x_0)$ замкнуто как дополнение в замкнутом множестве $\overline{D}_r(x_0)$ до открытого множества $D_r(x_0)$.

Верны ли в метрическом пространстве теоремы п. 2? Следующий пример опровергает эту гипотезу.

Пример 1 (контрпример). Пусть X — конечное множество. Зададим метрику $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Тогда при $r < 1$

$$D_r(x_0) = \{x_0\}, \quad \overline{D}_r(x_0) = \{x_0\}, \quad S_r(x_0) = \varnothing$$

и

$$(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0) \neq (D_r(x_0))' = \varnothing,$$

но $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0) = \varnothing$. При $r = 1$ $D_1(x_0) = \{x_0\}$, $\overline{D}_1(x_0) = X$, $S_1(x_0) = X \setminus \{x_0\}$ и $(\overline{D_1(x_0)}) \subset \overline{D}_1(x_0)$, причем $(\overline{D_1(x_0)}) \neq \overline{D}_1(x_0)$, $S_1(x_0) \neq \partial D_1(x_0) = \varnothing$. Наконец, при $r > 1$

$$D_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0) = X, \qquad S_r(x_0) = \varnothing,$$

причем $(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0) \neq (D_r(x_0))' = \varnothing$, $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0) = \varnothing$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, чтобы сфера в метрическом пространстве была границей шара.

Теорема 3. *В метрическом пространстве равенство* $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\overline{D}_r(x_0) = \overline{D_r(x_0)}$.

Доказательство. Из равенства $(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0)$ следует, что

$$S_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0) \backslash D_r(x_0) = (\overline{D_r(x_0)}) \backslash D_r(x_0) = \partial D_r(x_0).$$

Обратно: если $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$, то

$$(\overline{D_r(x_0)}) = D_r(x_0) \cup \partial D_r(x_0) = D_r(x_0) \cup S_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0). \blacksquare$$

Упражнение 4°. Пусть $X = C_{[0,1]}$ — пространство непрерывных функций со стандартной метрикой (см. § 2 гл. I). Дайте интерпретацию $D_r(x_0)$, $\overline{D}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ и покажите, что $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$.

4. Полнота метрических пространств. В анализе устанавливается критерий Коши сходимости числовой последовательности (в пространстве $\mathbb{R}^1$): последовательность $\{x_0\}$ сходится к некоторой точке x_0 $(x_n \to x_0)$ тогда и только тогда, когда она *фундаментальна*, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется целое число $N(\varepsilon)$ такое, что $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$, как только $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \geqslant 1$.

Если $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ в (X, ρ), то, как и в случае $\mathbb{R}^1$, легко показать, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon, \qquad n \geqslant N(\varepsilon), \qquad m \geqslant 1. \tag{1}$$

Однако обратное не всегда справедливо.

Определение 1. Метрическое пространство (X, ρ), в котором любая фундаментальная последовательность имеет предел, называется *полным* пространством.

Примеры. 2. Пусть $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1$ — множество рациональных чисел в $\mathbb{R}^1$. Это метрическое пространство не полно, так как существуют последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональному числу (т. е. фундаментальные, но не имеющие предела в $\mathbb{Q}$).

3. Пространство $X = \mathbb{R}^1$ полно.

4. Пространство $X = \mathbb{R}^n$ полно. Это следует из того, что фундаментальность или сходимость для последовательности упорядоченных наборов $\{(\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)\}$ чисел эквивалентны фундаментальности или сходимости n числовых последовательностей $\{\xi_1^k\}, \ldots, \{\xi_n^k\}$.

Упражнение 5°. Докажите, что пространство $X = \mathbb{C}^n$ полно.

Пример 5. Пространство $X = \mathbb{C}_{[0,1]}$ полно в метрике

$$\rho_1(x(t), y(t)) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$$

и не полно в метрике

$$\rho_2(x(t), y(t)) = \left\{ \int_0^1 (x(t) - y(t))^2 \, dt \right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Сформулированное утверждение доказывается в курсах анализа.

Примеры показывают, что свойство полноты не является топологическим, т. е., вообще говоря, не сохраняется при гомеоморфизмах метрических пространств. Так, интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1$ гомеоморфны, но пространство (a, b) не полно, в отличие от $\mathbb{R}^1$.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Теорема 4. *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство и* $X_1 \subset X$ *— подпространство. Тогда, если* X_1 *полно, то оно замкнуто в* X; *если* X *полно, а* X_1 *замкнуто в* X, *то* X_1 *полно.*

§ 8. Свойства непрерывных отображений

1. Эквивалентные определения непрерывного отображения. Выразим свойство непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств X и Y через другие топологические понятия — окрестности, замыкания множеств.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны:* 1) f *непрерывно*; 2) *для каждого* $A \subset X$ *имеем* $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; 3) *для каждого* $B \subset Y$ *имеем* $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Доказательство. Докажем ряд импликаций. 1) $\Rightarrow$ 2): из определения непрерывности в терминах замкнутых множеств (упр. 6° § 1) заключаем, что множество $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто в X, причем оно содержит A, следовательно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, откуда $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

2) $\Rightarrow$ 1): из 2), очевидно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ для всякого A. Выбирая $A = f^{-1}(F)$, где F — произвольное замкнутое множество в Y, получаем $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) = f^{-1}(F)$, следовательно, $f^{-1}(F)$ замкнуто для всякого замкнутого $F \subset Y$, т. е. f непрерывно;

1) $\Rightarrow$ 3): непрерывность f влечет замкнутость $f^{-1}(\overline{B})$. Из включения $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ немедленно следует $\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{(f^{-1}(\overline{B}))} = f^{-1}(\overline{B})$, откуда получаем 3);

3) $\Rightarrow$ 1): для замкнутого B из 3) вытекает цепочка включений $f^{-1}(B) \supset \overline{f^{-1}(B)} \supset f^{-1}(B)$, откуда следует, что $f^{-1}(B)$ замкнуто, следовательно, отображение f непрерывно. ■

По аналогии с определением непрерывности отображения в метрическом пространстве можно, введя понятие непрерывности отображения в точке топологического пространства, определить непрерывное отображение топологических пространств как непрерывное в каждой точке.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ топологических пространств *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Omega(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $\Omega(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(\Omega(x_0)) \subset \Omega(f(x_0))$.

Упражнение 1°. Следующее свойство отображения $f: X \to Y$ эквивалентно непрерывности в точке: полный прообраз $f^{-1}(\Omega(f(x_0)))$ любой окрестности точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0.

Теорема 2. *Отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ непрерывно, $x_0 \subset X$ — произвольная точка и $\Omega(f(x_0))$ — произвольная окрестность точки $f(x_0)$. Тогда найдется открытое множество $V \subset Y$ такое, что $V \subset \subset \Omega(f(x_0))$ и $f(x_0) \in V$. Положим $U = f^{-1}(V)$, U — открытое множество, $x_0 \in U$. Тогда $f(U) \subset \Omega(f(x_0))$, что и доказывает непрерывность f в точке x_0.

Обратно: пусть f непрерывно в каждой точке $x \in X$. Пусть $V \in Y$ — произвольное открытое множество и пусть $A = f^{-1}(V)$. Так как V — окрестность любой своей точки и f непрерывно в каждой точке, то для всякого $x \in A$ есть окрестность $\Omega(x)$ точки x такая, что $f(\Omega(x)) \subset V$. Следовательно, $\Omega(x) \subset A$, что и доказывает открытость A. Непрерывность f доказана. ■

Упражнение 2°. Пусть $X = A \cup B$ — объединение двух замкнутых множеств. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображения $f\big|_A$ и $f\big|_B$ непрерывны. Приведите контрпримеры к этому утверждению при невыполнении условия замкнутости множеств A, B.

2. Три задачи о непрерывных отображениях. В топологии и ее приложениях часто приходится решать задачи следующих типов.

1. Даны топологические пространства X, Y и отображение $f: X \to Y$. Проверить, непрерывно ли f.

2. Даны топологическое пространство X, некоторое множество Y и отображение $f: X \to Y$. Ввести топологию на Y так, чтобы f стало непрерывным отображением.

3. Даны топологическое пространство Y, множество X и отображение $f: X \to Y$. Ввести на X топологию так, чтобы f стало непрерывным отображением.

Задачу 1 мы уже рассматривали ранее для некоторых пространств и отображений. Для решения ее всегда требуется дополнительная информация о X, Y и f.

Задачу 2 можно решить без дополнительных предположений. Пусть $\{U\} = \tau$ — топология на X. Введем на Y топологию следующим образом: назовем открытыми в Y те и только те множества $V \subset Y$, прообразы $f^{-1}(V) = U$ которых открыты в X (включая и случай пустого прообраза). Нетрудно проверить, что совокупность таких множеств $\{V\}$ образует топологию. В самом деле, пусть V_α — некоторые множества из $\{V\}$; тогда имеем

1) $\varnothing \in \{V\}$, так как $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$, и $Y \in \{V\}$, так как $f^{-1}(Y) = X \in \tau$;

2) $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \in \{V\}$, так как $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \in \tau$,

где $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha) \in \tau$;

3) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} \in \{V\}$, так как $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(V_{\alpha_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \in \tau$.

Построенную топологию на Y будем называть *топологией, индуцированной отображением* f; это сильнейшая топология на Y, в которой f непрерывно*.

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности отображения $g\colon X/R \to Y$, где R — некоторая эквивалентность, X/R — факторпространство.

Теорема 3. *Пусть* X, Y — *топологические пространства,* $f\colon X \to Y$, $g\colon X/R \to Y$ — *некоторые отображения,* $\pi\colon X \to X/R$ — *проекция. Пусть диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & X/R \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f(x) = (g\pi)(x)$, $x \in X$. *Тогда* g *непрерывно в том и только том случае, когда непрерывно* f.

Доказательство. Пусть f непрерывно. Тогда, если $V \subset Y$ открыто, то $f^{-1}(V)$ открыто в X. Множество $\pi(f^{-1}(V)) = U$ открыто в X/R, так как множество $\pi^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ открыто в X (в X/R открыты множества W, прообраз которых $\pi^{-1}(W)$ открыт в X). Поскольку $f = g\pi$, то

$$\pi(f^{-1}(V)) = \pi(\pi^{-1}g^{-1})(V) = g^{-1}(V).$$

---

* Описанный способ введения топологии встречался ранее при введении фактортопологии (см. § 3).

Поэтому $g^{-1}(V)$ открыто и, следовательно, g непрерывно.

Пусть g непрерывно, т. е. $g^{-1}(V)$ открыто в X/R для открытого в Y множества V. Тогда $\pi^{-1}(g^{-1}(V))$ открыто в X в силу непрерывности π. Но $\pi^{-1}(g^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$, поэтому $f^{-1}(V)$ открыто и, следовательно, f непрерывно. ■

Выясним, когда пространство Y с описанной выше топологией гомеоморфно факторпространству пространства X по следующему отношению эквивалентности (индуцированному отображением f: $X \twoheadrightarrow Y$):

$$R_f\colon x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

Класс эквивалентных точек в X — это полный прообраз $f^{-1}(y)$ какого-нибудь значения $y \in Y$. Пусть $\pi\colon X \twoheadrightarrow X/R_f$ — проекция, а $f\colon X/R_f \twoheadrightarrow Y$ — факторотображение, переводящее класс эквивалентных точек $[x]$ в $f(x)$. Имеем равенство $\hat{f}(\pi(x)) = f(x)$, $x \in X$, что означает коммутативность диаграммы;

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & X/R_f \arrow[dl, "\hat{f}"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Теорема 4. *Если топология на Y индуцирована отображением $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ и f сюръективно, то $\hat{f}$ — гомеоморфизм пространств X/R_f и Y.*

Доказательство. Очевидно, $\hat{f}$ биективно. Так как топология на Y индуцирована отображением f, то f непрерывно, поэтому согласно теореме 3 $\hat{f}$ непрерывно. Остается доказать непрерывность $\hat{f}^{-1}$, что равносильно открытости $\hat{f}$. Покажем, что $\hat{f}$ открыто. Пусть U — открытое множество в X/R_f и $V = \hat{f}(U)$ — его образ в Y. Множество $\pi^{-1}(U)$ открыто в X, так как π непрерывно. Поскольку

$$f^{-1}(V) = (\hat{f}\pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(V)) = \pi^{-1}(U),$$

то $f^{-1}(V)$ открыто. Так как в Y открыты множества W, прообраз которых $f^{-1}(W)$ открыт в X, то V — открытое множество. ■

Упражнение 3°. Покажите, что если отображение f не сюръективно, то факторпространство X/R_f гомеоморфно подпространству $f(X) \subset Y$, где топология на Y индуцирована отображением f.

Рассматривая непрерывное отображение $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ двух топологических пространств, можно поставить вопрос о том, при каких условиях топология на Y индуцирована отображением f.

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръективное отображение топологических пространств и пусть f непрерывно и открыто (или замкнуто). Тогда топология на Y является фактортопологией, индуцированной f.*

Доказательство. Рассмотрим случай открытого f. Пусть $\{V\} = \sigma$ — топология на Y, индуцированная отображением f, а $\tau = \{U\}$ — первоначальная топология на Y. Покажем, что они совпадают. В самом деле, пусть $V \in \sigma$, $V \neq \varnothing$. Тогда в силу сюръективности $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ и $f^{-1}(V)$ открыто в X (по построению σ). В силу открытости f множество $f(f^{-1}(V)) = V$ открыто в Y, т. е. $V \in \tau$. Обратно: пусть $U \in \tau$; тогда из непрерывности f следует, что $f^{-1}(U)$ открыто в X, поэтому $U \in \sigma$ по определению топологии σ.

Случай замкнутого f аналогичен. ■

Остается рассмотреть задачу 3. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества X в топологическое пространство Y. Пусть $\tau = \{V\}$ — топология на Y. Положим $\sigma = \{f^{-1}(V)\}_{V \in \tau}$. Система σ удовлетворяет аксиомам топологии (проверьте!). Очевидно, что f непрерывно как отображение топологических пространств (X, σ), (Y, τ). Ясно, что σ — самая слабая из топологий, обладающих этим свойством.

Полезно обратить внимание на то, что если $X = A$ — подмножество топологического пространства Y, то для инъективного отображения вложения $i\colon X \to Y$ топология σ, определенная выше, совпадает с топологией подпространства $A \subset Y$ (наследуемой из пространства Y).

§ 9. Произведение топологических пространств

1. Топология в прямом произведении пространств. Операция прямого произведения топологических пространств позволяет конструировать новые топологические пространства.

Напомним, что *прямым произведением* $X \times Y$ множеств X, Y называется совокупность упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Можно рассматривать прямые произведения любого числа сомножителей. Элементом такого произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in X_\alpha$, или, другими словами, элементы $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ — это такие функции $x\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ — конечное множество, то произведение $X_1, X_2, \ldots, X_n$ часто обозначают $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, а его элементы суть упорядоченные наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть X, Y — топологические пространства. Введем топологию на прямом произведении $X \times Y$. Зададим базу топологии системой

$\{U_\alpha \times V_\beta\}$, где $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ — базы топологий соответственно на X и на Y.

Упражнение 1°. Убедитесь, что покрытие $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ множества $X \times Y$ удовлетворяет критерию базы (см. § 1).

Топология на $X \times Y$, определяемая базой $\{U_\alpha \times V_\beta\}$, называется *топологией произведения.*

Пример. Плоскость $\mathbb{R}^2$ есть прямое произведение прямых: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Базой топологии $\mathbb{R}^2$ является система открытых прямоугольников вида $U_\alpha \times V_\beta$ — двумерных параллелепипедов (рис. 61), где U_α, V_β — интервалы.

Упражнения. 2°. Докажите, что двумерный тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1 \times S^1$.

3°. Докажите, что пространство $S^1 \times \mathbb{R}^1$ гомеоморфно круговому цилиндру.

Рассмотрим проекции

$$p_1\colon X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x;$$
$$p_2\colon X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y.$$

Теорема 1. *Если X, Y — топологические пространства и $X \times Y$ наделено топологией произведения, то отображения p_1, p_2 непрерывны. Топология произведения — слабейшая из всех топологий на $X \times Y$, в которых p_1, p_2 непрерывны.*

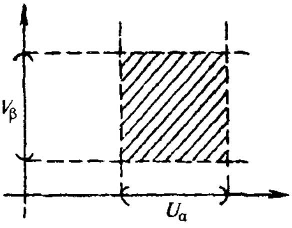


Рис. 61

Доказательство. Покажем непрерывность p_1. Пусть U_α — множество из базы топологии на X. Достаточно показать, что $p_1^{-1}(U_\alpha)$ открыто. Так как пространство Y представимо в виде объединения $\bigcup_\beta V_\beta$ всех множеств базы, то

$$p_1^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times Y = U_\alpha \times \bigcup_\beta V_\beta = \bigcup_\beta (U_\alpha \times V_\beta),$$

и, следовательно, $p_1^{-1}(U_\alpha)$ открыто в $X \times Y$. Аналогично проверяется непрерывность p_2.

Проверим второе утверждение теоремы. Для непрерывности p_1 необходимо, чтобы множества $p_1^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times Y$ были открыты. Для непрерывности p_2 необходима открытость множеств $X \times V_\beta = p_2^{-1}(V_\beta)$. Тогда для непрерывности p_1 и p_2 одновременно необходимо, чтобы множества $U_\alpha \times Y$, $X \times V_\beta$, а следовательно, и множества $(U_\alpha \times Y) \cap (X \times V_\beta) = U_\alpha \times V_\beta$ были открыты.

Таким образом, любая топология на $X \times Y$, в которой p_1 и p_2 непрерывны, должна содержать множества $U_\alpha \times V_\beta$ (и порождаемую ими топологию), следовательно, она сильнее топологии произведения на $X \times Y$. ■

Рассмотрим прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ с произвольным (возможно, бесконечным) числом сомножителей. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства. Введем слабейшую из всех топологий на $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых все проекции $p_{\alpha'}$: $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_{\alpha'}$, сопоставляющие функции x значение $x(\alpha')$, непрерывны. Эта топология на $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ называется *топологией произведения* или *тихоновской топологией* (предложена А. Н. Тихоновым).

Опишем эту топологию. Проще всего охарактеризовать предбазу тихоновской топологии так: это всевозможные множества в произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ вида $B_{\alpha_0} = \{x\colon x(\alpha_0) \subset U_{\alpha_0}\}$, где α_0 — произвольный элемент из A, U_{α_0} — произвольный элемент базы топологии пространства X_{α_0}. Легко видеть, что $B_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$. Таким образом, при фиксированном α_0 множества $\{B_{\alpha_0}\}$ образуют слабейшую из всех топологий на $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых проекция p_{α_0} непрерывна. Следовательно, объявив систему $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ предбазой, мы получим слабейшую из всех топологий на $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых все проекции $p_{\alpha'}$ непрерывны.

Отсюда следует, что базу тихоновской топологии на $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ образуют множества вида

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольный конечный набор элементов из A, а U_{α_i} — произвольный элемент базы топологии на X_{α_i}.

Упражнение 4°. Покажите, что

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

где $U_\alpha = X_\alpha$, если $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Другими словами, открытое множество базы — это набор функций

$$\{x\colon x(\alpha_i) \in U_{\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\} =$$
$$= \{x\colon x(\alpha_1) \in U_{\alpha_1}\} \cap \ldots \cap \{x\colon x(\alpha_n) \in U_{\alpha_n}\}.$$

Отметим, что произведения рассматривают, как правило, с топологией произведения.

Теорема 2. *Для любого* $\alpha_0 \in A$ *проекция* $p_{\alpha_0}\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$ *есть непрерывное и открытое отображение.*

Доказательство. Утверждение о непрерывности p_{α_0} не требует доказательства. Открытость образа произвольного открытого множества из $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ при отображении p_α следует из открытости образа любого множества из базы топологии на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ при отображении p_{α_0}. ■

Упражнения. 5°. Убедитесь, что $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1}_{n}$. Опишите базу и предбазу тихоновской топологии в $\mathbb{R}^n$.

6°. Убедитесь, что n-мерный куб I^n в $\mathbb{R}^n$ представим в виде $I^n = \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n}$, где $I = [0, 1]$.

7°. Рассмотрите n-мерный тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ и опишите предбазу и базу его топологии.

2. Непрерывные отображения в произведение пространств. Займемся изучением отображений $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ из некоторого топологического пространства X в произведение. Можно рассмотреть компоненты $f\colon X \to X_\alpha$, $f_\alpha = p_\alpha f$, отображения f. Каждому отображению f соответствует набор $\{f_\alpha = p_\alpha f\}_{\alpha\in A}$ отображений — его компонент. Обратно: всякий набор отображений $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha,\ \alpha \in A\}$ единственным образом задает отображение $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Таким образом, существует биекция между множеством отображений $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и множеством наборов отображений $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Теорема 3. *Отображение* f *непрерывно тогда и только тогда, когда отображение* f_α *непрерывно для каждого* $\alpha \in A$.

Доказательство. Пусть все f_α непрерывны. Покажем, что f непрерывно. Достаточно показать, что $f^{-1}(U)$ открыто в X для всякого U из базы топологии произведения на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Пусть

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n});$$

тогда

$$f^{-1}(U)=\{x\in X\colon\ f_\alpha(x)\in X_\alpha,\quad \alpha\neq\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n,$$
$$f_{\alpha_i}(x)\in U_{\alpha_i},\quad i=1,\,2,\,\dots,\,n\}=$$
$$=\left[\bigcap_{\substack{\alpha\\ \alpha\neq\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_n}} f_\alpha^{-1}(X_\alpha)\right]\cap f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\dots\cap f_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})=$$
$$=X\cap V_1\cap\dots\cap V_n,$$

где $V_i=f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ — открытое множество в X вследствие непрерывности f_{α_i}. Следовательно, $f^{-1}(U)$ открыто в X. Доказательство обратного утверждения предоставляем читателям. ■

Рассмотрим теперь отображение $f\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\to X$, сопоставляющее каждому набору $\{x(\alpha)\}_{\alpha\in A}$ соответствующий элемент из X.

Упражнение 8°. Убедитесь, что если $A=\{1,\,2,\,\dots,\,n\}$ и $X_\alpha=$ $=X=\mathbb{R}^1$ для всякого $\alpha\in A$, то отображение f — числовая функция от n аргументов.

В общем случае отображение f можно рассматривать как обобщение числовой функции от n аргументов, считая, что оно зависит от переменных $x(\alpha)\in X_\alpha$. Если зафиксировать все значения $x(\alpha)$, кроме $x(\alpha_0)$, то получим функцию от одного аргумента, меняющегося в X_{α_0}. Уточним эти представления.

Рассмотрим подпространство X'_{α_0} произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, состоящее из всех функций x, принимающих значение $x(\alpha)=y_\alpha$, $\alpha\neq\alpha_0$, где $y_n\in X_\alpha$ — фиксированный элемент.

Упражнение 9°. Проверьте, что X'_{α_0} гомеоморфно X_{α_0}.

Пусть $\pi_{\alpha_0}\colon X_{\alpha_0}\to X'_{\alpha_0}$ — естественный гомеоморфизм (зависящий от фиксированных y_α, $\alpha\neq\alpha_0$), а $f\big|_{X'_{\alpha_0}}$ — сужение f на X'_{α_0}. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X'_{\alpha_0} \arrow[r, "f|_{X'_{\alpha_0}}"] & X \\
X_{\alpha_0} \arrow[u, "\pi_{\alpha_0}"] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

естественно замыкается до коммутативной произведением двух отображений (штриховая стрелка), которое мы обозначим через

$f_{\alpha_0}^{\{y_\alpha\}}$. Оно и характеризует зависимость f от аргумента $x(\alpha_0) \in X_{\alpha_0}$ при заданных значениях y_α остальных аргументов $x(\alpha)$.

Упражнение 10°. Убедитесь, что если f непрерывно, то отображение $f_{\alpha_0}^{\{y_\alpha\}}\colon X_{\alpha_0} \to X$ непрерывно для всех $\alpha_0 \in A$, $y_\alpha \in X_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Обратное утверждение неверно; приведите пример.

Рассмотрим еще один случай отображения произведений топологических пространств. Пусть $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — некоторая совокупность отображений топологических пространств. Естественно определяется отображение $\prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha\colon \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, если каждой функции $x \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ сопоставим функцию $y \in \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ по правилу $y(\alpha) = f_\alpha(x(\alpha))$. Это отображение называется *произведением отображений* f_α. В случае $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ произведение отображений $f_1, f_2, \ldots, f_n$ часто обозначается так:

$$f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n\colon X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n.$$

Упражнения. 11°. Докажите, что $\prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда f_α непрерывно для каждого $x \in A$.

12°. *Графиком отображения* $f\colon X \to Y$ называется подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$ вида $\Gamma_f = \{(x, y)\colon x \in X,\ y = f(x)\}$. Убедитесь, что:

1) Γ_f — образ отображения $\tilde{f}\colon X \to X \times Y$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$;

2) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{f}$ непрерывно);

3) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ (Γ_f замкнуто).

13°. Пусть R — некоторое отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Рассмотрим подмножество R произведения $X \times X$, состоящее из всех пар (x, y) эквивалентных точек $x, y \in X$. Покажите, что: 1) если X/R хаусдорфово, то множество R замкнуто; 2) если проектирование $\pi\colon X \to X/R$ открыто и множество R замкнуто, то X/R — хаусдорфово пространство.

14°. Покажите, что произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством.

15°. Покажите, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x)\}$ замкнута в $X \times X$.

§ 10. Связность топологических пространств

1. Понятие связности топологического пространства. Понятие связности обобщает интуитивное представление о целостности, неразделенности геометрической фигуры, а понятие несвязного пространства — отрицание целостности, разделенность. Эти понятия допускают строгое определение в рамках теории топологических пространств и подробно изучаются в настоящем параграфе.

Рассмотрим топологическое пространство X и его подмножества A, B.

Определение 1. Множества A и B называются *отделенными* друг от друга, если $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Например, если $X = \mathbb{R}^1$, $A = (a, b)$, $B = (b, c)$ — интервалы, $a < b < c$, то A и B отделены, а если $A = (a, b]$, $B = (b, c)$, то A и B не отделены ($A \cap \overline{B} = \{b\}$).

Определение 2. Пространство X называется *несвязным*, если его можно представить как объединение двух непустых отделенных друг от друга множеств.

Пространство, не удовлетворяющее условию определения 2, называется *связным*. Таким образом, связное пространство невозможно представить как объединение двух непустых отделенных друг от друга множеств.

Можно говорить о связности (несвязности) подмножества A топологического пространства X, рассматривая A как топологическое пространство с топологией, индуцированной из X.

Простейшими примерами связных пространств служат: 1) одноточечное пространство $X = \{*\}$; 2) произвольное множество X с тривиальной топологией τ_0. Простейшим примером несвязного пространства служит двухточечное пространство X с дискретной топологией τ_1 (проверьте!).

Дадим еще одно часто употребляемое определение несвязного пространства.

Определение 3. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Заметим, что два взаимно дополнительных открытых (замкнутых) множества одновременно замкнуты (соответственно открыты).

Докажем эквивалентность определений 2 и 3.

1) Пусть X несвязно в смысле определения 2. Тогда имеем разложение $X = A \cup B$, где $\overline{A} \cap B = \varnothing$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$, A, B непусты. Следовательно, $\overline{A} \subset X \backslash B$, $\overline{B} \subset X \backslash A$, т. е. $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, что означает замкнутость A и B. Но $A = X \backslash B$, $B = X \backslash A$, поэтому A, B открыты и X несвязно в смысле определения 3.

2) Обратно: пусть X несвязно в смысле определения 3. Тогда $X = A \cup B$; A, B непусты, открыты, $A \cap B = \varnothing$. Очевидно, что A и B замкнуты. Отсюда $\overline{A} \cap B = \varnothing$, так как $A = \overline{A}$; $\overline{B} \cap A = \varnothing$, так как $\overline{B} = B$. ■

Следующая теорема дает важный пример связного пространства.

Теорема 1. *Отрезок* $[a, b]$ *числовой оси* $\mathbb{R}^1$ *связен.*

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $X = [a, b]$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Предположим, что X несвязно: $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$, где U, V непусты и открыты.

Пусть для определенности $a \in U$. Будем рассматривать полуинтервалы $[a, x)$, где $x \in (a, b]$.

Когда x близко к a, то $[a, x) \subset U$, так как U открыто. Supremum таких x, что $[a, x) \subset U$, обозначим через a_* $(a_* \in X)$; ясно, что $a_* \neq b$.

Если $a_* \in U$, то в силу открытости U близкие к a_* точки (слева и справа) тоже лежат в U, что противоречит определению a_*. Следовательно, $a_* \notin U$. Если $a_* \in V$, то в силу открытости V близкие к a_* точки тоже лежат в V. Поэтому $[a, a_* - \varepsilon) \bigcap V \neq \varnothing$ для малых $\varepsilon > 0$, что противоречит определению a_*. Следовательно, $a_* \notin V$. Таким образом, $a_* \notin U \bigcup V$, получаем противоречие с предположением $X = U \bigcup V$. ■

Теперь можно установить связность более общих пространств.

Теорема 2. *Всякое выпуклое множество* $T \subset \mathbb{R}^n$ *связно.*

Доказательство. Пусть $T = U \bigcup V$, U, V — непустые непересекающиеся открытые множества. Пусть $[a, b] = X$ — отрезок, соединяющий некоторые точки $a \in U$ и $b \in V$. Тогда $U_X = X \bigcap U$, $V_X = X \bigcap V$ — непустые непересекающиеся открытые множества в X и $X = U_X \bigcup V_X$, что противоречит связности отрезка X. ■

Следствие. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ *и диски* $D_r^n(x_0)$, $\overline{D}_r^n(x_0)$ *связны.*

В качестве примера несвязного пространства рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{p/q\}$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — произвольное иррациональное число. Тогда множества

$$U_\alpha = \{x\colon x \in \mathbb{Q},\ x < \alpha\}, \quad V_\alpha = \{x\colon x \in \mathbb{Q},\ x > \alpha\}$$

непусты, открыты, не пересекаются и $\mathbb{Q} = U_\alpha \bigcup V_\alpha$, что означает несвязность $\mathbb{Q}$. ■

Упражнения. 1°. Докажите, что множество всех иррациональных чисел несвязно.

2°. а) Покажите, что множество $\overline{A}$ топологического пространства связно, если A связно; б) покажите, что в пространстве с дискретной топологией всякое множество, за исключением одноточечных множеств, несвязно.

2. Свойства связных пространств. Заметим сначала, что связность (несвязность) — топологическое свойство пространства, т. е. она сохраняется при гомеоморфизме. Действительно, это следует из сохранения при гомеоморфизме свойства отделенности множеств.

Более общим образом связность сохраняется при непрерывных отображениях.

Теорема 3. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непрерывное отображение топологических пространств. Если* X *связно, то* $f(X)$ *связно в* Y.

Доказательство. Допустим противное: $f(X) = U_1 \bigcup V_1$, где $U_1 \bigcap V_1 = \varnothing$; U_1, V_1 открыты в $f(X)$, $U_1 \neq \varnothing$, $V_1 \neq \varnothing$. Открытость

U_1, V_1 в $f(X)$ означает, что существуют множества U, V, открытые в Y и такие, что $U \cap f(X) = U_1$, $V \cap f(X) = V_1$. Очевидно, что $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1)$, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(V_1) = \varnothing$ и $f^{-1}(U_1) \neq \varnothing$, $f^{-1}(V_1) \neq \varnothing$. Кроме того, множества $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(V_1)$ открыты, так как $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V_1) = f^{-1}(V)$ и f непрерывно. Таким образом, X несвязно, что противоречит предположению. ■

Упражнение 3°. а) Покажите, что график Γ_f непрерывного отображения f связного пространства связен.

б) Выведите из а) теорему о том, что числовая непрерывная функция f: $[a, b] \to \mathbb{R}^1$, принимающая на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, имеет в интервале (a, b) нуль ξ: $f(\xi) = 0$.

Утверждение б) упражнения 3 представляет собой классическую теорему Больцано—Коши, доказываемую в курсах анализа. С этой теоремой тесно связана более общая классическая теорема о промежуточном значении: если числовая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ и число C заключено между числами $f(a)$ и $f(b)$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Эта теорема также вытекает из теоремы 3. Действительно, утверждение теоремы о промежуточном значении эквивалентно утверждению о непустом пересечении графика Γ_f числовой функции $f(x)$ с прямой $y = C$ в плоскости $\mathbb{R}^2$, что следует из связности графика Γ_f и выбора числа C.

Можно было бы доказать теорему о промежуточном значении и не обращаясь к графику отображения f, а опираясь на связность (в пространстве $\mathbb{R}^1$) образа $f([a, b])$ и свойство связных множеств в $\mathbb{R}^1$ содержать вместе с любыми двумя точками все промежуточные точки (докажите!).

Упражнение 4°. Докажите, что окружность S^1 связна.

Указание. Рассмотрите отображение $[0, 1] \to S^1$, задаваемое формулами $x = \cos 2\pi t$, $y = \sin 2\pi t$.

Следующая теорема интуитивно очевидна.

Теорема 4. *Пространство X связно, если любые две его точки «соединяются» некоторым связным подмножеством (лежат в некотором связном подмножестве).*

Доказательство. Предположим противное. Представим X в виде объединения $X = U \cup V$ непустых непересекающихся открытых множеств U, V. Пусть $u_0 \in U$, $v_0 \in V$ — некоторые точки, а $L \subset X$ — связное множество, содержащее u_0 и v_0. Положим $U_1 = U \cap L$, $V_1 = V \cap L$. Множества U_1, V_1 непусты и открыты в L, причем $L = U_1 \cup V_1$, $U_1 \cap V_1 = \varnothing$, что противоречит связности L. ■

Упражнение 5°. Убедитесь, что: а) $A \cup B$ связно, если $A, B \subset X$ — связные множества в X, и $A \cap B \neq \varnothing$; б) $A \cup B \cup C$ связно, если $A, B, C \subset X$ связны и $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$.

Из упражнения 5° следует, например, связность сферы S^n, $n \geqslant 1$. Действительно, S^n состоит из двух замкнутых полусфер, $\overline{S}^n_+$, $\overline{S}^n_-$, пересекающихся по экваториальной сфере S^{n-1}, а каждая полусфера связна как непрерывный образ диска (см. § 2).

Установим следующий более общий критерий связности.

Теорема 5. *Пусть дано семейство связных в X множеств $\{A_\alpha\}$, любые два множества которого не отделены друг от друга. Тогда множество $C = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ связно в X.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $C = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, D_1, D_2 непусты и замкнуты в C. В силу связности множеств A_α каждое A_α содержится в D_1 или D_2, и так как D_1, D_2 непусты, то существуют множества A_{α_1}, $A_{\alpha_2} \in \{A_\alpha\}$ такие, что $A_{\alpha_1} \subset D_1$, $A_{\alpha_2} \subset D_2$. В силу замкнутости в C множеств D_1, D_2 замыкания в C множеств A_{α_1}, A_{α_2} содержатся в D_1, D_2 соответственно, что эквивалентно включениям $\overline{A}_{\alpha_1} \cap C \subset D_1$, $\overline{A}_{\alpha_2} \cap C \subset D_2$ (здесь $\overline{A}_{\alpha_1}$, $\overline{A}_{\alpha_2}$ — замыкания множеств A_{α_1}, A_{α_2} в X). Поэтому $(\overline{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$, $A_{\alpha_1} \cap (\overline{A}_{\alpha_2} \cap C) = \varnothing$. Но $(\overline{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_2} = \overline{A}_{\alpha_1} \cap (C \cap A_{\alpha_2}) = \overline{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$, $A_{\alpha_1} \cap (\overline{A}_{\alpha_2} \cap C) = (A_{\alpha_1} \cap C) \cap \overline{A}_{\alpha_2} = A_{\alpha_1} \cap \overline{A}_{\alpha_2}$. Следовательно, $\overline{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$, $A_{\alpha_1} \cap \overline{A}_{\alpha_2} = \varnothing$, что противоречит неотделенности множеств A_{α_1}, A_{α_2}. ■

Условию теоремы 4 удовлетворяет, в частности, специальный класс пространств, называемых линейно связными. Чтобы описать их, введем понятие пути в X.

Определение 4. *Путем*, соединяющим две точки, a, b, топологического пространства X, называется непрерывное отображение

$$S\colon [0, 1] \to X, \quad S(0) = a, \quad S(1) = b.$$

Упражнение 6°. Убедитесь, что образ $S(I)$ отрезка $I = [0, 1]$ является связным множеством, соединяющим точки a и b.

Определение 5. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две точки в нем можно соединить путем.

Примером линейно связного пространства может служить замкнутая поверхность (см. § 4).

Из теоремы 4 следует, что линейно связное пространство обязательно связно. Обратное неверно, как показывает следующий пример. Рассмотрим подмножество в $\mathbb{R}^2$

$$X = [(0, 0), (1, 0)] \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right] \cup (0, 1),$$

где $[P, Q]$ означает отрезок, соединяющий в $\mathbb{R}^2$ точки P и Q; X связно, но не линейно связно (точку $(0, 1)$ нельзя соединить путем ни с какой другой точкой из X).

Упражнения. 7°. Проверьте, что выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и сфера S^n, $n \geqslant 1$, линейно связны.

8°. Докажите, что если множество $A \subset X$ связно, то всякое множество B такое, что $A \subset B \subset \overline{A}$, также связно. Приведите примеры.

Наконец рассмотрим произведение связных пространств.

Теорема 6. *Произведение $X \times Y$ связных пространств связно.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $X \times Y = U \cup V$, где U, V — непустые непересекающиеся открытые множества. Пусть $(x_0, y_0) \in U$. Множество $x_0 \times Y$ гомеоморфно Y и, следовательно, связно, поэтому, пересекаясь с U в точке (x_0, y_0), оно целиком лежит в U. Множества $X \times y$, $y \in Y$, связны, пересекаются с множеством $x_0 \times Y$, а следовательно, с U, поэтому целиком лежат в U. Таким образом, $\bigcup\limits_{y \in Y} (X \times y) = X \times Y \subset U$, следовательно, $V = \varnothing$. Противоречие доказывает теорему. ■

Упражнения. 9°. Докажите теорему 6 для произведения n связных пространств ($n > 2$).

10°. Докажите связность тихоновского произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = Y$ связных пространств X_α.

Указание. Рассмотрите множество R точек произведения, соединимых с фиксированной точкой связными множествами, и убедитесь, что $\overline{R} = Y$.

3. Связные компоненты. Если пространство несвязно, то естественно попытаться разложить его на связные куски. Опишем это разложение. Пусть $x \in X$ — точка топологического пространства X. Рассмотрим наибольшее связное множество, содержащее точку x: $L_x = \bigcup A_x$, где все A_x являются связными множествами, содержащими точку x. Множество L_x замкнуто, так как замыкание $\overline{L}_x$ связного множества L_x связно (упражнение 2), и поэтому $\overline{L}_x \subset L_x$, т. е. $\overline{L}_x = L_x$.

Определение 6. Множество L_x называется *связной компонентой* точки x в топологическом пространстве X.

Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Рассмотрим множества L_x, L_y. В силу их связности и максимальности имеем две возможности: 1) либо $L_x = L_y$; 2) либо $L_x \cap L_y = \varnothing$. Во втором случае L_x отделено от L_x, так как $L_x \cap \overline{L}_y = \varnothing$, $L_y \cap \overline{L}_x = \varnothing$. В очевидном равенстве $X = \bigcup L_x$, где объединение берется по всем $x \in X$, выбросим повторяющиеся компоненты.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения своих связных компонент, замкнутых и не пересекающихся.*

Замечание. Вообще говоря, нельзя утверждать, что связные компоненты в то же время и открыты (приведите примеры!).

Упражнения. 11°. Проверьте, что если пространство имеет конечное число связных компонент, то они открыты.

12°. Проверьте, что число связных компонент пространства X (понимаемое в общем случае как мощность множества) является топологической характеристикой пространства.

§ 11. Аксиомы счетности и отделимости

Встречающиеся в различных математических проблемах топологические пространства обладают дополнительными свойствами. Ряд свойств выражается системой так называемых аксиом счетности и отделимости.

1. Аксиомы счетности. В § 1 вводилось понятие базы топологии. При изучении топологических пространств выясняется, что пространства, обладающие счетной базой топологии, т. е. базой, состоящей не более чем из счетного числа множеств, имеют ряд полезных свойств. В связи с этим вводится следующее определение.

Определение 1. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если его топология τ обладает счетной базой.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. ◆

Интересно сопоставить пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, и сепарабельные пространства.

Теорема 1. *Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть X — топологическое пространство и $B = \{V_n\}$ — счетная база его топологии. Выберем в каждом из множеств $V_n \in B$ по элементу $a_n \in V_n$ и рассмотрим множество $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Покажем, что $X = \overline{A}$. Так как $\overline{A} = A \cup A'$, то достаточно показать, что любая точка множества $X \setminus A$ является предельной точкой множества A. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus A$ и $U(x)$ — некоторая ее окрестность. Тогда существует множество $V_k \in B$ такое, что $x \in V_k$ и $V_k \subset U(x)$, поэтому $a_k \in U(x)$, при этом $a_k \neq x$. Следовательно, $x \in A'$. ■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно — сепарабельное пространство не обязательно удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пример 2. Рассмотрим несчетное множество X, топология которого состоит из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X, всего X и пустого множества. (Проверьте, что такая система подмножеств действительно образует топологию!) В этом пространстве всякое бесконечное подмножество плотно, так как оно пересекается с каждым открытым множеством. Это означает сепарабельность X. С другой стороны, предположим, что X имеет счетную базу.

Тогда, если $x \in X$ — фиксированная точка, то пересечение всех открытых множеств, содержащих x, равно $\{x\}$. Следовательно, и счетное пересечение элементов базы, содержащих x, равно $\{x\}$. Но тогда дополнение $X \setminus \{x\}$ есть объединение не более чем счетного множества конечных множеств, а значит, не более чем счетно. Это противоречит несчетности X. ◆

Важно отметить, что для метрических пространств, утверждение, обратное утверждению теоремы 1, оказывается верным, а именно верна следующая теорема.

Теорема 2. *Всякое сепарабельное метрическое пространство* (X, ρ) *удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — не более чем счетное всюду плотное множество в X. Возьмем в качестве базы топологии пространства X совокупность открытых множеств

$$B = \{V_{n,k} = D_{1/k}(a_n); \quad n, k = 1, 2, \ldots\}.$$

Легко убедиться, что это база.

В самом деле, в силу сепарабельности X для любого $x \in X$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a_n \in A$ такой, что $a_n \in D_{\varepsilon/3}(x)$; кроме того, найдется такой номер k, что $x \in V_{n,k} \subset D_\varepsilon(x)$ (достаточно взять k так, чтобы $\varepsilon/3 \leqslant 1/k \leqslant 2\varepsilon/3$). Так как любое открытое множество в X представимо в виде объединения шаров, то оно представимо и как объединение множеств $V_{n,k}$ из B. ■

Для формулировки следующего утверждения нам потребуется понятие покрытия, упоминавшееся в § 1, и понятие подпокрытия — подсемейства покрытия, которое само является покрытием.

Теорема 3 (Линделёф). *Если топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то в произвольном его открытом покрытии $\{U_\alpha\}$ содержится не более чем счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть B — счетная база топологии на X. Так как всякий элемент покрытия $\{U_\alpha\}$ есть объединение множеств из B, то в B можно выделить подсемейство C, тоже покрывающее X и такое, что каждый элемент из C содержится в некотором элементе семейства $\{U_\alpha\}$. Тогда, выбрав для каждого элемента из покрытия C какое-нибудь одно содержащее его множество из $\{U_\alpha\}$, получим не более чем счетное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$. ■

Кроме базы топологии, введенной в § 1, существует важное понятие базы системы окрестностей точки x топологического пространства X.

Определение 2. Семейство $B(x) = \{V(x)\}$ окрестностей точки x называется *базой системы окрестностей* точки x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность их этого семейства.

Семейство всех открытых окрестностей точки, очевидно, является базой системы окрестностей этой точки.

Пример 3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда

$$B(x) = \{V_k(x) = D_{1/k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

— база системы окрестностей точки x. Действительно, в любую окрестность точки x можно вписать некоторую шаровую окрестность. Для любой шаровой окрестности $D_\varepsilon(x)$ можно подобрать число k так, чтобы $1/k < \varepsilon$; тогда $V_k(x) \subset D_\varepsilon(x)$.

Определение 3. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если система окрестностей всякой его точки обладает счетной базой, т. е. базой, состоящей не более чем из счетного числа окрестностей.

Пример 4. Метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Пример 5. Пространство непрерывных функций $C_{[0,1]}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. ◆

Удовлетворяет ли пространство $C_{[0,1]}$ второй аксиоме счетности? Положительный ответ на этот вопрос следует из того, что $C_{[0,1]}$ сепарабельно, и из теоремы 2 настоящего параграфа.

Сепарабельность пространства $C_{[0,1]}$ следует из теоремы Вейерштрасса о том, что всякую непрерывную функцию на отрезке $[0, 1]$ можно равномерно сколь угодно точно приблизить полиномом. Таким образом, счетное всюду плотное множество A в $C_{[0,1]}$ состоит из множества всех полиномов $\{P_n(t)\}$ с рациональными коэффициентами.

Упражнение 1°. Убедитесь, что топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 6. Всякое несчетное пространство X с дискретной топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности. В самом деле, у всякой точки $x \in X$ есть база системы окрестностей, состоящая из одной окрестности $V = \{x\}$. Но такое пространство не удовлетворяет второй аксиоме счетности, иначе покрытие пространства одноточечными множествами $\{x\}$, согласно теореме 3, содержало бы не более чем счетное покрытие, что невозможно.

Таким образом, выполнение второй аксиомы счетности является более сильным условием на топологическое пространство, чем выполнение первой аксиомы счетности.

2. Свойства отделимости пространства. Важные топологические свойства пространств характеризуются аксиомами отделимости. Эти аксиомы позволяют сужать класс изучаемых пространств для рассмотрения их более глубоких свойств.

Для формулировки аксиом нам потребуется понятие открытой окрестности множества.

Определение 4. *Открытой окрестностью* множества A в топологическом пространстве X называется всякое открытое множество U, содержащее A.

Приведем основные *аксиомы отделимости* $T_0 - T_4$.

Аксиома T_0 (аксиома Колмогорова). Из каждых двух различных точек топологического пространства по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Аксиома T_1. Каждая точка всякой пары различных точек топологического пространства имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). Любые две различные точки x, y топологического пространства имеют окрестности $U(x)$, $U(y)$ такие, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Аксиома T_3. Для всякой точки x топологического пространства и всякого замкнутого множества F, не содержащего x, существует окрестность $U(x)$ точки x и открытая окрестность $U(F)$ множества F такие, что $U(x) \cap U(F) = \varnothing$.

Аксиома T_4. Любые два замкнутых непересекающихся множества F_1, F_2 топологического пространства имеют открытые окрестности $U(F_1)$, $U(F_2)$ такие, что $U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing$.

Подчеркнем, что среди аксиом $T_0 - T_2$ каждая следующая является более сильным условием на пространство, чем предыдущая. Для аксиом $T_2 - T_4$ то же верно лишь при условии, что выполнена аксиома T_1, поскольку T_1 не следует из T_3 или T_4.

Топологическое пространство X называют *T_i-пространством* ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), если оно удовлетворяет аксиоме T_i.

При одновременном выполнении аксиом T_1 и T_3 топологическое пространство X называют *регулярным пространством.*

Если выполнены одновременно аксиомы T_1 и T_4, то топологическое пространство X называют *нормальным пространством.*

T_0-пространства называют также *колмогоровскими*, а T_2-пространства — *хаусдорфовыми* (см. также § 1).

Примером топологического пространства, не являющегося T_0-пространством, может служить пространство с тривиальной топологией. Все другие рассмотренные нами топологические пространства являются T_0-пространствами. Отметим, что топологические пространства, не являющиеся T_0-пространствами, не представляют интереса для исследования. Приведем несколько примеров.

Пример 7. Пусть $\mathbb{R}^1$ — вещественная прямая с топологией, базу которой образуют лучи вида $a < x < +\infty$. Несложно показать, что пространство $\mathbb{R}^1$ с такой топологией удовлетворяет аксиоме T_0, но не удовлетворяет аксиоме T_1.

Пример 8. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ с топологией, в которой открытыми считаются пустое множество и все множества, получающиеся из $[0, 1]$ выбрасыванием не более чем счетного числа точек. Полученное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1, но не удовлетворяет аксиоме T_2.

Пример 9. На отрезке $[0, 1]$ окрестностями произвольной точки, кроме нуля, назовем обычные окрестности, а окрестностями нуля назовем всевозможные полуинтервалы $[0, \alpha)$ с выброшенными точками $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что полученное топологическое пространство хаусдорфово, но не регулярно, так как не пересекающиеся между собой замкнутое множество $F = \{1/n: n = 1, 2, \ldots\}$ и точка нуль неотделимы в смысле аксиомы T_3.

Примеры регулярных, но не нормальных пространств мы не приводим — они нетривиальны; это связано с тем, что различие между регулярными и нормальными пространствами достаточно тонко, как показывает следующая теорема.

Теорема 4 (Тихонов). *Всякое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является нормальным.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Топологические пространства, не удовлетворяющие аксиоме T_1, плохо устроены с точки зрения классического анализа. Одноточечное множество в них может быть не замкнуто, а конечное множество может иметь предельные точки (приведите примеры!). В T_1-пространствах такие ситуации уже не имеют места.

Упражнение 2°. Покажите, что топологическое пространство тогда и только тогда является T_1-пространством, когда любое его одноточечное множество замкнуто.

Теорема 5. *В каждой окрестности любой предельной точки множества A в T_1-пространстве X содержится бесконечно много точек из A.*

Доказательство. Пусть x — предельная точка множества A и $U(x)$ — некоторая ее окрестность. Предположим, что множество $U(x) \cap A$ конечно. Тогда множество $B = (U(x) \cap A) \setminus \{x\}$ замкнуто как объединение конечного числа замкнутых одноточечных множеств, и, следовательно, множество $U_1 = U(x) \setminus B$ открыто. Таким образом, U_1 — окрестность точки x и $U_1 \cap A = \{x\}$, что противоречит тому, что x — предельная точка A. ■

Следствие. *Всякое конечное подмножество T_1-пространства не имеет предельных точек.*

Отметим, что класс нормальных пространств достаточно широк, он включает, например, все метрические пространства.

Теорема 6. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Каждое метрическое пространство (X, ρ), очевидно, удовлетворяет аксиоме T_2, а следовательно, и T_1 (в качестве непересекающихся окрестностей различных точек $x, y \in X$ можно взять шары $D_{r/2}(x)$, $D_{r/2}(y)$, где $r = \rho(x, y)$). Покажем, что в метрическом пространстве выполнена аксиома T_4. Пусть A, B — произвольные замкнутые подмножества X. Для всякого подмножества $C \subset X$ обозначим $\rho(x, C) = \inf\limits_{y \in C} \{\rho(x, y)\}$ ($\rho(x, C)$ называют расстоянием от точки x до множества C). Положим $U_1 = \{x \in X\colon \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$, $U_2 = \{x \in X\colon \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$. Множества U_1, U_2, очевидно, содержат A, B соответственно и не пересекаются. Отображения $f(x) = \rho(x, A)\colon X \to \mathbb{R}^1$, $g(x) = \rho(x, B)\colon X \to \mathbb{R}^1$ непрерывны (покажите!), и, следовательно, непрерывно отображение $f - g\colon X \to \mathbb{R}^1$. Поэтому множества U_1, U_2 открыты (как прообразы открытых множеств $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $f - g$). Таким образом, U_1, U_2 — непересекающиеся открытые окрестности множеств A, B. ∎

Упражнения. 3°. Покажите, что подпространство T_i-пространства ($i = 0, 1, 2, 3$) также является T_i-пространством.

4°. Покажите, что в T_1-пространстве для всякого подмножества A выполнено включение $(A')' \subset A'$.

5°. Проверьте, что замкнутая поверхность (см. § 4 гл. II) — хаусдорфово пространство.

3. Хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности. В таких пространствах естественно определяется понятие сходящейся последовательности и ее предела, после чего определение операций над множествами и понятия непрерывного отображения копируют определения для метрических пространств.

Для всякой точки x хаусдорфова топологического пространства (X, τ) со счетной базой обозначим $\{W_n(x)\}$ счетную базу ее открытых окрестностей.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся к точке* $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $W_p(x_0)$ существует натуральное $N = N(x_0, p)$ такое, что при всех $n > N$ имеем $x_n \in W_p(x_0)$.

Полезно заметить, что выбор N зависит и от p и от x_0.

Упражнение 6°. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве последовательность может сходиться к единственной точке.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, то x_0 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ и пишут $\lim x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$.

Упражнение 7°. Пусть $f\colon X \to y$ — отображение хаусдорфовых пространств с первой аксиомой счетности. Докажите, что условие

$\lim f(x_n) = f(x_0)$ для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, эквивалентно непрерывности отображения f в точке x_0.

Используя понятие сходящейся последовательности, можно дать определение предельной точки множества $A \subset X$, производного множества A', границы множества ∂A, замыкания $\overline{A}$ аналогично тому, как это делается в метрическом пространстве (см. п. 1 § 7).

Упражнения. 8°. Убедитесь, что указанные выше определения множеств A', ∂A, $\overline{A}$ в хаусдорфовом пространстве с первой аксиомой счетности эквивалентны общим определениям § 6.

9°. Отображение $f: X \to Y$ называется собственным, если прообраз любого компактного множества из Y компактен в X. Покажите, что если f непрерывно, а X, Y хаусдорфовы с первой аксиомой счетности, то из собственности отображения f следует его замкнутость.

§ 12. Нормальные пространства и функциональная отделимость

1. Эквивалентное определение нормального пространства. Часто бывает полезно формулируемое в следующей лемме свойство нормальных пространств, которое можно принять за эквивалентное определение нормального пространства.

Малая лемма Урысона. *T_1-пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой его открытой окрестности U существует открытая окрестность V множества F такая, что $\overline{V} \subset U$.*

Доказательство. Пусть X нормально. Рассмотрим два замкнутых множества: F и $F_1 = X \setminus U$. Так как пространство нормально, существуют непересекающиеся открытые окрестности V и V_1 множеств F и F_1. Тогда $V \subset X \setminus V_1$ и, следовательно, $\overline{V} \subset \overline{X \setminus V_1}$. Но $X \setminus V_1$ замкнуто, поэтому $\overline{X \setminus V_1} = X \setminus V_1$. Таким образом, $\overline{V} \subset X \setminus V_1 \subset U$. Обратно: пусть выполнено условие леммы и F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. Рассмотрим множество $U_1 = X \setminus F_2$. Тогда $F_1 \subset U_1$ и условию существует открытая окрестность V_1 множества F_1 такая, что $\overline{V}_1 \subset U_1$. Положив $U_2 = X \setminus \overline{V}_1$, получим открытое множество U_2, $F_2 \subset U_2$, причем $V_1 \cap U_2 = \varnothing$. ■

Следствие. *В нормальном пространстве X два непересекающихся замкнутых множества, F_1, F_2, имеют такие открытые окрестности U_1, U_2, что $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \varnothing$.*

Из нормального пространства, вообще говоря, не следует нормальность его подпространств. Если же в нормальном пространстве X всякое подпространство нормально, то X называют *наследственно нормальным пространством.*

Упражнение 1°. Покажите, что метрическое пространство наследственно нормально.

Условие наследственной нормальности дает следующая теорема.

Теорема 1 (Урысон). *Пространство наследственно нормально тогда и только тогда, когда два любых его отдельных множества имеют непересекающиеся открытые окрестности.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Образ нормального пространства при непрерывном отображении не обязательно нормален. Простейшим примером может служить тождественное отображение прямой $\mathbb{R}^1$ с обычной топологией в ту же прямую, снабженную какой-либо нехаусдорфовой, например тривиальной, топологией. Однако существуют достаточные признаки того, чтобы образ нормального пространства был нормальным. Например, верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — нормальное пространство, $f\colon X \to Y$ — непрерывное замкнутое сюръективное отображение. Тогда пространство Y также нормально.*

Доказательство. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество. Положим $A_1 = f^{-1}(A)$. Тогда множество A_1 замкнуто в силу непрерывности f. Пусть U — открытая окрестность множества A в Y. Тогда множество $U_1 = f^{-1}(U)$ открыто (в силу непрерывности f) и содержит A_1. Следовательно, U_1 — открытая окрестность A_1, и согласно малой лемме Урысона существует открытая окрестность V множества A_1 такая, что $\overline{V} \subset U_1$.

Имеем включения $A_1 \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$. Замкнутое сюръективное отображение открыто, следовательно, $f(V)$ открыто, а $f(\overline{V})$ замкнуто, причем имеем включения

$$A = f(A_1) \subset f(V) \subset f(\overline{V}) \subset f(U_1) = U,$$

из которых легко усматривается нормальность Y. ■

2. Функциональная отделимость. Теорема Урысона о продолжении числовых функций. Выше отделимость множества определялась на языке «окрестностей». Урысон ввел еще и другое понятие отделимости — так называемую функциональную отделимость, которая весьма удобна при изучении нормальных пространств.

Определение. Два множества, A, B, в топологическом пространстве X называются *функционально отделимыми*, если существует непрерывная числовая функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^1$ такая, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A, \\ 1, & \text{если } x \in B, \end{cases}$$

и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ во всех точках X (рис. 62).

Родственная связь двух понятий отделимости хорошо проявляется в следующем простом факте.

Лемма. *Если множества A и B в топологическом пространстве функционально отделимы, то они имеют непересекающиеся открытые окрестности.*

Доказательство предоставляем провести читателям.

Таким образом, из функциональной отделимости любой пары замкнутых непересекающихся множеств T_1-пространства следует его нормальность. Интересно, что верно и обратное утверждение.

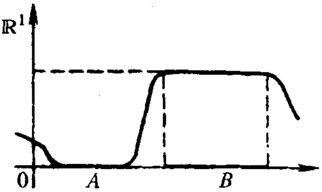


Рис. 62

Большая лемма Урысона. *Для любых двух замкнутых непересекающихся множеств, A, B, нормального пространства X существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^1$ такая, что $\varphi\big|_A \equiv 0$, $\varphi\big|_B \equiv 1$ и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всякого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть A, B — произвольные замкнутые множества в X, $A \cap B = \varnothing$. Каждому рациональному числу вида $r = k/2^n$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, поставим в соответствие такое открытое множество $G(r)$, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $A \subset G(0)$, $X \backslash B = G(1)$;

2) $\overline{G(r)} \subset G(r')$, если $r < r'$.

Доказательство существования такой системы открытых множеств проведем индукцией по показателю n. Пусть $n = 0$. В силу нормальности X существуют непересекающиеся открытые окрестности $U(A), U(B)$ множества A и B. Положим $G(0) = U(A)$, $G(1) = X \backslash B$. Предположим теперь, что такая система множеств $G(r)$ построена для показателя $n - 1$. Построим ее для показателя n. Так как $2m/2^n = m/2^{n-1}$, то достаточно построить $G(r)$ для $r = k/2^n$ при k нечетном.

Пусть $k = 2m + 1$, тогда имеем $(k + 1)/2^n = (m + 1)/2^{n-1}$, $(k - 1)/2^n = m/2^{n-1}$, и, следовательно, по предположению индукции уже имеем включение $\overline{G((k - 1)/2^n)} \subset G((k + 1)/2^n)$. Очевидно, что множества $\overline{G((k - 1)/2^n)}$, $X \backslash G((k + 1)/2^n)$ замкнуты и не пересекаются. В силу нормальности X существует открытая окрестность V множества $\overline{G((k - 1)/2^n)}$, не пересекающаяся с некоторой открытой окрестностью множества $X \backslash G((k + 1)/2^n)$. Положим $V = G(k/2^n)$; ясно, что

$$\overline{G((k - 1)/2^n)} \subset G(k/2^n),$$

$$\overline{G(k/2^n)} \subset \Gamma((\varkappa + 1)/2^n).$$

Индукция закончена.

Расширим область определения множеств $G(r)$, положив

$$G(r)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } r<0,\\ X, & \text{если } r>1.\end{cases}$$

Зададим теперь функцию φ следующим образом: $\varphi(x)=0$, $x\in G(0)$ и $\varphi(x)=\sup\{r\colon x\in X\backslash G(r)\}$. Покажем непрерывность φ. С этой целью для каждого $x_0\in X$ и каждого $N>0$ построим такую окрестность $U_N(x_0)$ точки x_0, что $|\varphi(x_0)-\varphi(x)|<1/2^N$, $x\in$ $\in U_N(x_0)$. Пусть r_0 (вида $k/2^n$) таково, что

$$\varphi(x_0)<r_0<\varphi(x_0)+1/2^{N+1}. \tag{1}$$

Положим $U_N(x_0)=G(r_0)\backslash\overline{G(r_0-1/2^N)}$. Тогда $x_0\in U_N(x_0)$, так как $r_0>\varphi(x_0)$ и $r_0-1/2^{N+1}<\varphi(x_0)$. Если $x\in U_N(x_0)$, то $x\in G(r_0)$, поэтому $\varphi(x)\leqslant r_0$. Кроме того,

$$x\in X\backslash\overline{G(r_0-1/2^N)}\subset X\backslash G(r_0-1/2^N),$$

поэтому $r_0-1/2^N\leqslant\varphi(x)$. Таким образом,

$$r_0-1/2^N\leqslant\varphi(x)\leqslant r_0. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x)|<1/2^N,\quad x\in U_N(x_0).$$

Последнее и означает непрерывность φ.

По построению ясно, что $\varphi\big|_A\equiv 0$, $\varphi\big|_B\equiv 1$ и $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. Построенную функцию называют также *функцией Урысона.* ■

В качестве приложения рассмотрим задачу о продолжении ограниченной функции с замкнутого подмножества нормального пространства на все пространство. Заметим вначале, что большая лемма Урысона эквивалентна утверждению о существовании непрерывной функции $\varphi_{a,b}(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi_{a,b}\big|_A\equiv a,\quad \varphi_{a,b}\big|_B\equiv b,\quad a\leqslant\varphi_{a,b}(x)\leqslant b,\quad x\in X,$$

где a, b $(a<b)$ — произвольные вещественные числа. Действительно, если $\varphi(x)$ — функция Урысона, то функция $\varphi_{a,b}(x)=$ $=(b-a)\varphi(x)+a$ будет искомой.

Теорема 3 (Титце—Урысон). *Для всякой ограниченной непрерывной функции* $\varphi\colon A\to\mathbb{R}^1$, *заданной на замкнутом подмножестве* A *нормального пространства* X, *существует непрерывная функция* $\Phi\colon X\to\mathbb{R}^1$ *такая, что* $\Phi\big|_A\equiv\varphi$ *и* $\sup\limits_{(X)}|\Phi(x)|=\sup\limits_{(A)}|\varphi(x)|$.

Доказательство. Будем строить функцию Ф как предел некоторой последовательности функций. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и

$$a_0 = \sup |\varphi(x)|, \quad A_0 = \{x\colon \varphi_0(x) \leqslant -a_0/3\},$$

$$B_0 = \{x\colon \varphi_0(x) \geqslant a_0/3\}.$$

Ясно, что множества A_0, B_0 замкнуты и не пересекаются. Согласно большой лемме Урысона существует непрерывная функция $g_0\colon X \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|g_0(x)| \leqslant a_0/3$ и

$$g_0(x) = \begin{cases} -a_0/3, & \text{если } x \in A_0, \\ a_0/3, & \text{если } x \in B_0. \end{cases}$$

Зададим теперь на A функцию φ_1 равенством $\varphi_1 = \varphi_0 - g_0$. Тогда функция φ_1 непрерывна и $a_1 = \sup\limits_{(A)} |\varphi_1| \leqslant \frac{2}{3} a_0$. Аналогично, вводя обозначения

$$A_1 = \{x\colon \varphi_1(x) \leqslant -a_1/3\}, \qquad B_1 = \{x\colon \varphi_1(x) \geqslant a_1/3\}$$

и взяв функцию Урысона g_1 такую, что $|g_1(x)| \leqslant a_1/3$ и

$$g_1(x) = \begin{cases} -a_1/3, & \text{если } x \in A_1, \\ a_1/3, & \text{если } x \in B_1, \end{cases}$$

на множестве A положим $\varphi_2 = \varphi_1 - g_1$ и $a_2 = \sup\limits_{(A)} |\varphi_2| \leqslant \frac{2}{3} a_1$.

Таким образом, строим последовательность функций $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, непрерывных на A, и функций $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$, непрерывных на X, таких, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - g_n, \qquad |g_n(x)| \leqslant \frac{a_n}{3}, \qquad a_{n+1} \leqslant \frac{2}{3} a_n,$$

где $a_n = \sup\limits_{(A)} |\varphi_n(x)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда получаем, что

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0, \qquad |g_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3}.$$

В силу последнего неравенства ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X к непрерывной функции. Обозначив его сумму через $\Phi(x)$, получим оценку

$$|\Phi(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0.$$

Пусть $x \in A$, тогда частичная сумма $S_n(x) = g_0(x) + \ldots + g_n(x)$ по построению функций $\varphi_{n+1}(x)$ равна $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$, а $\varphi_n(x) \to 0$. Следовательно, $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in A$. ■

Теорема Титце—Урысона обобщается на случай отображения пространства X в n-мерный куб, а именно:

Следствие. *Всякое непрерывное отображение* φ: $A \to I^n$ *замкнутого подмножества* A *нормального пространства* X *в* n*-мерный куб* I^n *можно продолжить до непрерывного отображения* Φ: $X \to I^n$.

Упражнение. Докажите следствие.

Указание. Воспользуйтесь координатной системой в $\mathbb{R}^n$ и примените теорему Титце—Урысона к компонентам отображения φ.

§ 13. Компактные, локально компактные и паракомпактные пространства и их отображения

1. Понятие компактного пространства. Перейдем к изучению весьма важных классов топологических пространств, характеризующихся свойствами их открытых покрытий. Эти свойства являются абстрактным (и удобным) аналогом известного из анализа свойства компактности числового отрезка или n-мерного куба (шара). Компактные пространства и их отображения возникают во многих разделах математики.

Вначале обсудим некоторые понятия, связанные с покрытиями топологических пространств. Пусть $\sigma = \{A\}$ — некоторая система подмножеств A множества X. Объединение всех A из σ обозначим $\overline{\sigma}$ и назовем *телом системы* σ.

Расширим понятие покрытия, упоминавшееся в § 1 после определения базы топологии.

Определение 1. Система σ называется *покрытием подпространства* Y топологического пространства X, если $\overline{\sigma} \supset Y$.

В частности, σ — накрытие пространства X, если $\tilde{\sigma} = X$, что согласуется с ранее использовавшимся понятием покрытия § 1.

Определение 2. Говорят, что покрытие σ *вписано в покрытие* σ' ($\sigma \succ \sigma'$), если каждый элемент σ содержится в некотором элементе системы σ'.

Отношение вписанности вводит частичную упорядоченность в множестве всех покрытий пространства.

Покрытия, состоящие из конечного или счетного числа элементов, называются соответственно *конечными* или *счетными*.

Определение 3. Покрытие σ топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом элементов σ.

Особое значение имеют покрытия, состоящие из открытых множеств. Такие покрытия называются *открытыми*.

Со свойствами открытых покрытий связаны многие важные свойства пространства. В связи с этим выделяют следующие классы пространства.

Определение 4. Топологическое пространство X называется: A_1) *компактным*, A_2) *паракомпактным*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие, являющсеся соответственно: a_1) конечным, a_2) локально конечным.

Упражнение 1°. Убедитесь, что получим эквивалентное определение A_1), если потребуем, чтобы из любого открытого покрытия пространства можно было выделить покрытие типа a_1), и получим неэквивалентное определение A_2), если потребуем, чтобы из любого открытого покрытия пространства можно было выделить покрытие типа a_2).

Пример 1. Пусть $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Пространство X компактно, так как по теореме Гейне—Бореля из любого покрытия X интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^1$; это пример некомпактного пространства. Так, из покрытия $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя выделить конечное.

Аналогичные рассуждения показывают, что некомпактным является пространство $\mathbb{R}^n$, а также всякое его неограниченное подмножество. Отсюда, в частности, следует необходимость условия ограниченности для компактного подмножества в $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. Пространство $X = \mathbb{R}^1$ паракомпактно. Действительно, пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие $\mathbb{R}^1$. Имеем $\mathbb{R}^1 = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [n, n+1]$. Каждый отрезок $[n, n+1]$ «немного» расширим в интервал $(n-\varepsilon, n+1+\varepsilon)$ и рассмотрим покрытие $\{U_\alpha \cap \cap (n-\varepsilon, n+1+\varepsilon)\}$ отрезка $[n, n+1]$. Из него можно выбрать конечное покрытие $V_1^n, \ldots, V_{k_n}^n$. Объединение таких покрытий (по всем n) дает локально конечное покрытие $\mathbb{R}^1$, вписанное в $\{U_\alpha\}$. ◆

Если $Y \subset X$ — подпространство топологического пространства X, то, рассматривая покрытия пространства Y, открытые в наследственной топологии из X, получаем из определения 4 понятия компактного и паракомпактного подпространства (часто говорят также о компактном и паракомпактном множестве Y в пространстве X). Равносильным образом можно было бы рассматривать покрытия пространства Y, открытые в X. При этом полезно заметить, что замкнутое множество $Y \subset X$ наследует свойство A_i, $i = 1, 2$, пространства X. В самом деле, всякому открытому покрытию $\sigma = \{V_\alpha\}$ пространства Y, где $V_\alpha = Y \cap U_\alpha$ и U_α открыто в X, соответствует открытое покрытие $\sigma_* = \{U_\alpha, U_* = X \setminus Y\}$ пространства X. Выберем теперь вписанное покрытие $\overline{\sigma} \succ \sigma_*$ (типа a_i) пространства X. От полученного покрытия $\tilde{\sigma}$ легко перейти к покрытию $\overline{\sigma}_Y$ подпространства Y путем пересечения элементов $\tilde{\sigma}$ с Y и отбрасывания содержащихся в U_*. Очевидно, что $\overline{\sigma}_Y \succ \sigma$.

Следующая теорема часто применяется в анализе.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество $Z \subset X$ компактного пространства X имеет в X предельную точку.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $Z' = \varnothing$. Тогда $\overline{Z} = Z$, значит, Z замкнуто, а следовательно, и компактно. С другой стороны, каждая точка $z \in Z$ изолирована в X. Это означает, что существует открытая окрестность $\Omega(z)$ в X с условием $\Omega(z) \cap Z = z$. Открытые в Z окрестности $U(z) = \Omega(z) \cap Z$ образуют бесконечное покрытие пространства Z, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие в противоречии с компактностью Z. ■

Понятие компактности тесно связано с понятием замкнутости, как показывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — компактное подпространство хаусдорфова пространства Y. Тогда X замкнуто.*

Доказательство. Пусть $y \in Y \setminus X$. Для любой точки $x \in X$ в силу хаусдорфовости Y найдутся такие открытые окрестности $U_x(y)$, $U_y(x)$ точек y, x, что $U_x(y) \cap U_y(x) = \varnothing$.

Система $\{U_y(x)\}_{x \in X}$ образует покрытие X. В силу компактности X имеется конечное подпокрытие $\{U_y(x_i)\}_{i=1}^{k}$. Легко видеть, что множества $U(X) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_y(x_i)$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_{x_i}(y) = U(y)$ открыты и не пересекаются. Таким образом, показано, что в хаусдорфовом пространстве компактное множество X и точку, не лежащую в нем, можно разделить непересекающимися окрестностями $U(X)$ и $U(y)$. Отсюда следует, что дополнение $Y \setminus X$ открыто, поэтому X замкнуто. ■

Исследуем теперь связь понятий компактности и нормальности.

Теорема 3. *Компактное хаусдорфово пространство X нормально.*

Доказательство. Установим сначала аксиому T_3 для X. Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество, $x \in X \setminus A$. В силу хаусдорфовости X для всякого $y \in A$ существуют такие окрестности $U_x(y)$, $U_y(x)$ точек x, y, что $U_x(y) \cap U_y(x) = \varnothing$. Система $\{U_x(y)\}_{y \in A}$ образует покрытие A; поскольку A компактно, то можно выделить конечное покрытие $\sigma = \{U_x(y_i)\}_{i=1}^{m}$. Так как $U_x(y_i)$ включено в замкнутое множество $X \backslash U_{y_i}(x)$, то $\overline{U}_x(y_i) \subset X \backslash U_{y_i}(x) \subset X \backslash \{x\}$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i) \subset X \backslash \{x\}$. Но $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i)$ замкнуто, поэтому $X \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i) = U_A(x)$ — открытая окрестность точки x. Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_x(y_i) = V_x(A)$ — открытая окрестность множества A в X. Очевидно, $V_x(A) \cap U_A(x) = \varnothing$, что означает справедливость аксиомы T_3 для X. Так как аксиома T_1 следует из аксиомы T_2, то X регулярно.

Докажем теперь нормальность X. Пусть множества A, B замкнуты в X и $A \cap B = \varnothing$. Тогда для всякой точки $x \in X$ в силу регулярности X существует открытая окрестность $U(x)$, для которой выполнено по крайней мере одно из условий $\overline{U}(x) \cap A = \varnothing$, $\overline{U}(x) \cap B = \varnothing$. Рассмотрим покрытие $\{U(x)\}_{x \in X}$ пространства X такими окрестностями. Выберем из него конечное покрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{m}$. Для каждого U_{α_i} выполнено по крайней мере одно из условий $\overline{U}_{\alpha_i} \cap A = \varnothing$, $\overline{U}_{\alpha_i} \cap B = \varnothing$. Пусть $P = \bigcup \overline{U}_{\alpha_i}$ — объединение тех множеств, для которых $\overline{U}_{\alpha_i} \cap A = \varnothing$ и, аналогично, $Q = \bigcup \overline{U}_{\alpha_i}$, $\overline{U}_{\alpha_i} \cap B = \varnothing$. Легко видеть, что открытые множества $X \backslash P$, $X \backslash Q$ содержат A, B соответственно и не пересекаются. Нормальность пространства X доказана. ∎

Часто бывает полезно другое определение компактного пространства, использующее только язык замкнутых множеств. Сначала дадим определение.

Определение 5. Система $\{M_\alpha\}$ подмножеств пространства X называется *центрированной*, если всякая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Теорема 4. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{M\}$ — произвольная центрированная система замкнутых подмножеств пространства и пусть X компактно. Покажем, что $\bigcap\limits_{M \in \sigma} M \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\bigcap\limits_{M \in \sigma} M = \varnothing$. Тогда $\bigcup\limits_{M \in \sigma} (X \backslash M) = X$, т. е. система $\{X \backslash M\}_{M \in \sigma}$ — открытое покрытие X. В силу компактности X существует конечное подпокрытие $\{X\backslash M_k\}_{k=1}^n$, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^n (X\backslash M_k) = X$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^n M_k = \varnothing$, что противоречит центрированности системы σ.

Пусть для всякой центрированной системы $\sigma = \{M\}$ замкнутых подмножеств пересечение $\bigcap\limits_{M\in\sigma} M$ непусто. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие X. Тогда система $\{X\backslash U_\alpha\}$ имеет пустое пересечение и в силу предположения не является центрированной.

Таким образом, для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ подсистема $\{X\backslash U_{\alpha_i}\}_{i=1}^s$ имеет пустое пересечение, откуда следует, что $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^s$ — конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$. Следовательно, пространство X компактно. ■

Рассмотрим теперь свойство паракомпактности. Интересен вопрос о том, как связано свойство паракомпактности с другими свойствами топологических пространств. Рассмотрим так называемые локально компактные множества.

Определение 6. Пространство X называется *локально компактным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, замыкание которой компактно.

Примером локально компактного пространства может служить пространство $\mathbb{R}^n$; другой пример — двумерное многообразие (см. § 4 гл. II).

Теорема 5. *Если топологическое пространство X хаусдорфово и локально компактно, то оно регулярно.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ — произвольная точка и $F \subset X$ — замкнутое множество, не содержащее точку A. Тогда $X\backslash F$ открыто и $a \in X\backslash F$. В силу локальной компактности пространства X найдется такая открытая окрестность $V(a)$, что $\overline{V}(a)$ компактно. Пусть $F_1 = \overline{V}(a) \cap F$; F_1 — замкнутое множество хаусдорфова пространства X, лежащее в компактном множестве $\overline{V}(a)$, следовательно, оно компактно в X. Точку a и компактное множество F_1 можно разделить непересекающимися окрестностями $W(a)$, $U(F_1)$ (см. доказательство теоремы 2); пусть $W_1(a) = W(a) \cap V(a)$ — новая окрестность, для которой имеем $W_1(a) \cap U(F_1) = \varnothing$, $\overline{W}_1(a) \cap (F_1) = \varnothing$. В частности, из очевидного включения $\overline{W}_1(a) \subset \overline{V}$ получаем $\overline{W}_1(a) \cap (F\backslash F_1) = \varnothing$, что вместе с предыдущим означает $\overline{W}_1(a) \cap F = \varnothing$. Замкнутая окрестность $\overline{W}_1(a)$ компактна, так как $\overline{V}(a)$ — компактное пространство и $\overline{W}_1(a) \subset \overline{V}(a)$. Следовательно, для каждой точки $x \in F$ найдется открытая окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с $\overline{W}_1(a)$ (см. доказательство теоремы 2, замечание о «разделении» компактного множества и точки в хаусдорфовом пространстве). Положив $U(F) = \bigcup\limits_{x \in F} (U(x))$, будем иметь $W_1(a) \cap U(F) = \varnothing$. ■

Паракомпактное пространство примера 3 является частным случаем пространств, описываемых следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть X — локально компактное пространство и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n — компактное множество. Тогда X паракомпактно.*

Доказательство. Представим сначала X в виде счетного объединения открытых, вложенных друг в друга множеств, замыкания которых компактны. Будем строить эти множества по индукции. Положим прежде всего $U_0 = \varnothing$. В качестве U_1 возьмем окрестность множества C_1, замыкание которой компактно. Затем, если построено множество U_n, в качестве U_{n+1} выберем окрестность множества $\overline{U}_n \cup C_{n+1}$, замыкание которой компактно. Существование таких окрестностей обеспечивается локальной компактностью пространства X.

Пусть теперь $\{V_\alpha\}_{\alpha \in M}$ — произвольное открытое покрытие X. Обозначим через D_n компактное множество $\overline{U}_n \backslash U_{n-1}$. Открытое множество $U_{n+1} \backslash \overline{U}_{n-1}$ есть окрестность множества D_n. Тогда система множеств

$$\{V_\alpha \cap (U_{n+1} \backslash \overline{U}_{n-2})\}_{\alpha \in M} = \{W_\alpha^n\}_{\alpha \in M}$$

образует открытое покрытие множества D_n. Выберем из него конечное подпокрытие $\{W_\alpha^n\}_{m=1}^{p_n}$. Проделав описанную процедуру для всех n, получим счетное покрытие $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{W_m^n\}_{m=1}^{p_n}$ всего пространства X, вписанное в покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha \in M}$.

Покажем, что это покрытие локально конечно. Пусть x — произвольная точка из X и $n_0 = \min \{n : x \in U_n\}$. Так как $x \notin U_{n_0-1}$, то существует ее окрестность $O(x)$, лежащая в U_{n_0}, такая, что $O(x) \cap \overline{U}_{n_0-2} = \varnothing$. Значит, $O(x)$ может пересекаться только с множествами W_m^k, где $1 \leqslant m \leqslant p_k$, $n_0 - 2 \leqslant k \leqslant n_0 + 1$. Таких множеств по построению конечное число. ■

Следствие. *Если локально компактное пространство X имеет счетную базу, то оно паракомпактно.*

Действительно, если пространство локально компактно, то оно имеет базу $\{U^C\}$ открытых множеств такую, что $\overline{U}^C$ компактно. Выбирая из счетной базы те множества, из которых состоят множества U^C, мы получим счетную базу $\{V_i^C\}_{i=1}^{\infty}$ с тем свойством, что $\overline{V_i^C}$ компактно для каждого i. Тогда $X = \bigcup \overline{V_i^C}$ и его паракомпактность следует из теоремы 6. ■

Замечание. В некоторых разделах математики (например, функциональном анализе) систематически используется язык сходящихся последовательностей при исследовании свойств компактных множеств. Этот язык вводится (см. п. 3 § 11) в случае хаусдорфовых пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Полезно сформулировать общее понятие компактности на языке сходящихся последовательностей.

Упражнение 2°. Докажите, что если хаусдорфово пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то условие компактности X эквивалентно условию: из каждой бесконечной последовательности $\{x_n\}$ элементов X можно выбрать сходящуюся последовательность.

2. Отображения компактных пространств. Изучим некоторые важные свойства непрерывных отображений компактных пространств.

Теорема 7. *Пусть X, Y — топологические пространства, X компактно, а $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда образ $f(X)$ — компактное пространство в Y.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства $Z = f(X)$. Очевидно, что $f\colon X \to Z$ также непрерывно, поэтому $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ — открытое покрытие X. Выделим из него конечное покрытие $\{f^{-1}(V_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m}$, существующее в силу компактности X. Тогда $\{(V_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m}$ — конечное открытое покрытие Z. ■

Упражнение 3°. Покажите, что замкнутая поверхность (см. § 4 гл. II) есть компактное топологическое пространство.

Теорема 8. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, X компактно, Y хаусдорфово. Тогда f — замкнутое отображение.*

Доказательство. Напомним, что всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Пусть $M \subset X$ — произвольное замкнутое (и, значит, компактное) подмножество в X. В силу теоремы 7 множество $f(M)$ компактно в Y и, следовательно, замкнуто согласно теореме 2.

Выведем отсюда важный признак гомеоморфизма.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и отображение f биективно; тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим обратное отображение f^{-1}: $Y \to X$. Покажем его непрерывность. Пусть $A \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Так как f — замкнутое отображение, то

$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ замкнуто в Y, что и означает непрерывность отображения f^{-1}. ■

Многие примеры компактных пространств возникают при построении факторпространств.

Пример 4. Пусть X — факторпространство некоторого компактного пространства Y. Тогда X компактно. В самом деле: X есть непрерывный образ (относительно проекции) компактного пространства.

Рассмотрим числовые непрерывные функции $f: X \to \mathbb{R}^1$ на компактном пространстве X. Для них верна следующая теорема Вейерштрасса, играющая важную роль в анализе.

Теорема 10. *Всякая непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}^1$ на компактном пространстве X ограничена и достигает на X своей верхней (нижней) грани.*

Доказательство. В силу теоремы 7 множество $f(X)$ компактно. По теореме 2 всякое компактное подпространство в $\mathbb{R}^1$ замкнуто. Как уже отмечалось, всякое компактное подпространство в $\mathbb{R}^n$ ограничено. Следовательно, $f(X)$ ограничено и замкнуто. Ограниченность $f(X)$ и означает ограниченность функции f. Поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки, то $\sup\limits_{x \in X} f(x) \in f(X)$ и $\inf\limits_{x \in X} f(x) \in f(X)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

3. Произведение компактных пространств. Здесь будет доказана следующая фундаментальная теорема.

Теорема 11 (А. Н. Тихонов). *Топологическое произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in M} X_\alpha$ любой системы $\{X_\alpha\}_{\alpha \in M}$ компактных пространств компактно.*

Доказательство. Используем критерий компактности, состоящий в том, что всякая центрированная система замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{N^\lambda\} = \sigma_0$ — произвольная центрированная система замкнутых подмножеств в X. Во множестве всех таких систем рассмотрим отношение частичной упорядоченности, заданное включением $\sigma'' \succ \sigma'$, если всякое множество из σ' входит в σ''. Пусть G — множество всех систем σ таких, что $\sigma \succ \sigma_0$. Ясно, что всякое вполне упорядоченное подмножество из G имеет максимальный элемент (объединение). Тогда по лемме Цорна в G имеется максимальная центрированная система $\bar{\sigma}$, т. е. такая система, что для всякой системы $\sigma \in G$ либо $\bar{\sigma} \succ \sigma$, либо $\bar{\sigma}$ и σ несравнимы.

Пусть $\bar{\sigma} = \{N^\gamma\}$. Легко показать, что всякое конечное пересечение элементов $\bar{\sigma}$ принадлежит $\bar{\sigma}$, а также, что всякое замкнутое множество M, пересекающееся с любым N^γ, принадлежит $\bar{\sigma}$. (Проверьте это свойство.) Ясно, что если будет показано, что $\bar{\sigma}$ имеет непустое пересечение, т. е. $\bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma \neq \varnothing$, то доказательство будет закончено. Обозначим через $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ проекцию на сомножитель X_α. Для каждого фиксированного α система $\{\pi_\alpha(N^\gamma)\}_{\bar{\sigma}} = \{N_\alpha^\gamma\} = \bar{\sigma}_\alpha$ есть центрированная система (не обязательно замкнутых множеств) в X_α, следовательно, система $\{\overline{N_\alpha^\gamma}\}$ также центрирована, и в силу компактности X_α существует элемент $x_\alpha \in X_\alpha$ такой, что для любой его окрестности $U_\alpha = U(x_\alpha)$ пересечение $U_\alpha \cap N_\alpha^\gamma \neq \varnothing$ для каждого $N_\alpha^\gamma \in \bar{\sigma}_\alpha$.

Рассмотрим теперь элемент $x = \{x_\alpha\} \in X$. Каждая окрестность его $U = U(x)$ содержит замыкание некоторой элементарной окрестности вида

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_s}^{-1}(U_{\alpha_s}) = U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s},$$

которая, в свою очередь, есть пересечение конечного числа окрестностей вида $p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = V_{\alpha_i} \subset X$. Ясно, что V_{α_i} пересекается со всеми множествами $N^\gamma \in \bar{\sigma}$, так как $U_{\alpha_i} \cap N_{\alpha_i}^\gamma \neq \varnothing$ при всех γ. Значит, $\bar{V}_{\alpha_i} \in \bar{\sigma}$ и, следовательно,

$$\bar{U}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} \bar{V}_{\alpha_i} \in \bar{\sigma}.$$

Отсюда получаем, что окрестность $U = U(x)$ пересекается со всеми $N^\gamma \in \bar{\sigma}$. Из произвольности U заключаем, что $x \in \bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma$ (и, следовательно, $x \in \bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma$). ■

Приведем примеры, в которых использование теоремы Тихонова позволяет быстро установить компактность пространства.

Пример 5. Куб $I^n = \underbrace{[0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]}_{n}$ — компактное пространство, так как является произведением отрезков.

Пример 6. Ограниченность и замкнутость множества в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна компактности. В самом деле, такое множество в $\mathbb{R}^n$ можно заключить в замкнутый параллелепипед $[a_1, b_1] \times \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, компактность которого устанавливается так же, как в примере 5.

Этим доказана достаточность. Необходимость условия замкнутости была доказана в одной из теорем этого параграфа, а необходимость условия ограниченности отмечена в примере 2.

Упражнения. 4°. Докажите, что сфера S^n компактна.

5°. Убедитесь в компактности n-мерного тора $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$.

Пример 7. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно как факторпространство сферы S^n.

Пример 8. Линзовое пространство S^n/Z_p компактно по той же причине. ◆

4. Компактность в метрическом пространстве. Компактные метрические пространства часто называют *компактами*, а компактные подпространства — *компактными множествами* метрического пространства.

Свойство компактности в метрическом пространстве можно выразить на языке сходящихся последовательностей.

Определение 7. Множество Y метрического пространства (X, ρ) называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его элементов содержит сходящуюся в X подпоследовательность.

Теорема 12. *Множество Y метрического пространства X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть Y секвенциально компактно и замкнуто. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество точек $A_\varepsilon = \{x_k\}$, что шары $D_\varepsilon(x_k)$ с центрами в x_k радиуса ε покызывают Y *. В самом деле, если это не так, то для некоторого ε_0 найдутся точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в Y такие, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \geqslant \varepsilon_0$ для всех n, p. Наличие такой последовательности противоречит секвенциальной компактности Y. Таким образом, конечные ε-сети существуют для каждого $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $\{U\}$ — произвольное покрытие Y. Предположим, что из него нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда в любой конечной ε_1-сети A_{ε_1} найдется элемент x_k такой, что замкнутое множество $Y \cap \overline{D}_{\varepsilon_1}(x_k) = Y_1$ не покрывается никакой конечной подсистемой из $\{U\}$. Легко видеть, что множество Y_1 замкнуто и секвенциально компактно и его диаметр не больше $2\varepsilon_1$. Применив аналогичное рассуждение к Y_1, построим множество $Y_2 \subset X_1$ с теми же свойствами, диаметром не больше $2\varepsilon_2 < 2\varepsilon_1$.

---

* Множество A_ε называют конечной ε-сетью X.

Таким образом, взяв последовательность $\varepsilon_n \to 0$, построим систему $\{Y_n\}$ замкнутых секвенциально компактных множеств $Y_{n+1} \subset \subset Y_n$, диаметры которых стремятся к нулю.

Упражнение 6°. Покажите, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k \neq \varnothing$.

Из последнего факта вытекает, что существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$. Так как $\{U\}$ — покрытие, то $x_0 \in U_\alpha$ для некоторого его элемента U_α. В силу открытости U_α существует $\varepsilon > 0$ такое, что $D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$. Взяв n настолько большим, чтобы диаметр Y_n был меньше ε, получим включения $Y_n \subset D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$ — противоречие с тем, что Y_n не покрывается конечным числом элементов $\{U\}$.

Замкнутость и секвенциальная компактность следуют из замкнутости компактного множества (см. теорему 2) и существования предельной точки у каждой бесконечной последовательности (см. теорему 1). ■

Предлагаем самостоятельно доказать еще следующее полезное утверждение.

Теорема 13 (о лебеговом числе). *Пусть X компактно, $\{U\}$ — произвольное открытое покрытие X. Тогда существует вещественное число $\delta > 0$ такое, что любое множество в X с диаметром, меньшим δ, лежит целиком в некотором элементе покрытия $\{U\}$.*

Упражнение 7°. Пусть метрическое пространство X компактно, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение в метрическое пространство Y. Докажите, что для всякого покрытия $U = \{U_\alpha\}$ пространства Y существует лебегово число $\delta = \delta(U)$ такое, что для всякого подмножества A в X с диаметром, меньшим δ, образ $f(A)$ целиком содержится в некотором элементе покрытия U.

В анализе одним из важных является вопрос о компактности множеств в функциональных пространствах. Существует целый ряд специальных критериев компактности в конкретных пространствах. В частности, для широко используемого в анализе пространства $C_{[0,1]}$ такой критерий дает теорема Арцела [33].

§ 14. Компактные расширения топологических пространств. Метризация

1. Компактные расширения. Свойство компактности оказывается весьма полезным и удобным во многих вопросах. В связи с этим естественно поставить вопрос о конструкции, которая позволяла бы по данному некомпактному пространству построить компактное пространство, содержащее данное, и исследовать взаимосвязи топологий, свойства функций на этих пространствах и др.

Определение 1. *Компактным расширением* топологического пространства X называется такое компактное пространство CX, что $X \subset CX$ и топология пространства X индуцирована топологией пространства CX.

Классическим примером компактного расширения служит расширенная плоскость комплексного переменного $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, гомеоморфная S^2 (см. п. 2 § 3 гл. I); аналогичным образом (с помощью стереографической проекции) получаем компактные расширения $C\mathbb{R}^1$, $C\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, гомеоморфные соответственно S^1 и S^n.

На весьма широкое понятие компактного расширения топологического пространства X часто накладывают дополнительные требования типа хаусдорфовости CX, всюду плотности X в CX, «максимальности» или «минимальности» CX и другие. Ниже мы рассмотрим наиболее простой способ «одноточечной компактификации», впервые исследованный П. С. Александровым. Компактное расширение строится присоединением к пространству X дополнительного элемента ξ (обозначаемого часто ∞) так, что $CX = X \cup \xi$.

Определение 2. Пространство $CX = X \cup \xi$ с топологией $\sigma = \{U\}$, состоящей из всех открытых множеств $U = W$ пространства X и всех множеств вида $U = V \cup \xi$, где V — открытое множество в X, дополнительное к замкнутому компактному подмножеству пространства X, называется *одноточечным компактным расширением* пространства X.

Упражнение 1°. Проверьте, что система множеств $\sigma = \{U\}$ удовлетворяет аксиомам топологии.

Следующее предложение оправдывает название компактного расширения $CX = X \cup \xi$.

Теорема 1. *Одноточечное компактное расширение* $CX = X \cup \xi$ *является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства CX, где $U_\alpha = W_\alpha$ или $U_\alpha = V_\alpha \cup \xi$; W_α, V_α — открытые множества в X, $V_\alpha = X \backslash K_\alpha$, K_α — компактное и замкнутое множество в X. Пусть $U_{\alpha_0} = V_{\alpha_0} \cup \xi$ — некоторое множество покрытия, тогда $V_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_0} = \varnothing$ и, следовательно, $\{U_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ — открытое в CX покрытие K_{α_0} и $\{V_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ — открытое в X покрытие K_{α_0}. В силу компактности K_{α_0} из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ можно выделить конечное покрытие $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_s}\}$, $\alpha_i \neq \alpha_0$, $i = 1, \ldots, s$, множества K_{α_0}. Тогда система множеств $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}, U_{\alpha_0}\}$, очевидно, образует открытое покрытие пространства CX, что и доказывает компактность пространства CX. ■

Замечание. Если X компактно, то одноточечное компактное расширение $CX = X \cup \xi$ имеет изолированную точку ξ. Действительно, полагая $K = X$, $V = X \backslash K = \varnothing$, получаем открытую окрестность точки ξ: $U(\xi) = \xi$, состоящую из одной точки. Верно и обратное утверждение: если точка ξ в CX изолированная, то X компактно (докажите!).

Приведенные в начале пункта примеры компактных расширений $\tilde{\mathbb{C}}$, $C\mathbb{R}^1$, $C\mathbb{R}^n$ являются примерами одноточечных компактных расширений.

Теорема 2. *Одноточечное компактное расширение CX является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда X хаусдорфово и локально компактно.*

Доказательство. Пусть X хаусдорфово и локально компактно. Если $x, y \in CX$ — различные точки из подпространства X, то они отделимы друг от друга открытыми множествами $W_1(x)$, $W_2(y)$ в X, а следовательно, и в CX. Если же $x = \xi$, а $y \in X$, то, выбрав окрестность $W(y)$ с компактным замыканием $\overline{W}$ в X, построим множество $U(\xi) = (CX)\backslash\overline{W}(y)$, которое является открытой окрестностью в CX точки ξ, так как $U(\xi) = (X\backslash\overline{W}(y)) \cup \xi$. Очевидно, имеем $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$, что завершает доказательство хаусдорфовости CX.

Обратно: пусть CX — хаусдорфово пространство; тогда для точек $x = \xi$, $y \in X$ существуют в CX открытые окрестности $U(\xi)$, $W(y)$ такие, что $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$. При этом $U(\xi) = V \cup \xi$, где $V = X\backslash K$, K — компактное и замкнутое множество в X, $W(y)$ — открытое множество в X. Из условия $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$ следует $W(y) \subset K$, откуда имеем $\overline{W}(y) \subset K$, где $\overline{W}(y)$ — замыкание $W(y)$ в X. Так как замкнутое подмножество компактного пространства компактно, то $\overline{W}(y)$ компактно в X, что завершает доказательство локальной компактности X. Так как свойство хаусдорфовости пространства наследуется подпространством, то подпространство X хаусдорфова пространства CX хаусдорфово. ■

Нетрудно убедиться, что для некомпактного пространства X и его хаусдорфова одноточечного компактного расширения CX подпространство X всюду плотно в CX (т. е. $\overline{X} = CX$, где $\overline{X}$ — замыкание множества X в пространстве CX).

Заметим в заключение, что для некомпактного X хаусдорфово одноточечное компактное расширение $CX = X \cup \xi$ является наименьшим по упорядоченности $\geqslant$ в классе хаусдорфовых компактных расширений, и в то же время для X существует максимальное хаусдорфово компактное расширение (расширение Стоуна—Чеха).

2. Метризуемость топологических пространств. Обсудим вопрос о введении метрики в топологическом пространстве, которая бы индуцировала ту же самую топологию. Топологические пространства, в которых возможно ввести такую метрику, называются *метризуемыми*. В частности, для метрического пространства может идти речь о введении другой метрики, порождающей первоначальную топологию, но более удобной, например, такой, в которой пространство будет полным. Такие метрические пространства называют *топологически полными.*

Примером топологически полного метрического пространства является интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, в частности, $X = (-1, 1)$. Кроме стандартной метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, в которой (X, ρ) не полно, введем топологически полную эквивалентную метрику

$$\rho_*(x, y) = \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right|,$$

индуцированную гомеоморфизмом интервала и прямой (расстояние между точками интервала в метрике ρ_* вычисляется как расстояние в обычной метрике между их образами на прямой). Легко проверить, что ρ_* — метрика, что (X, ρ) и (X, ρ_*) гомеоморфны и что (X, ρ_*) — полное метрическое пространство. Примером топологически неполного метрического пространства может служить множество рациональных чисел с метрикой из $\mathbb{R}^1$.

Тихоновское произведение счетного числа метрических пространств (X_n, ρ_n) метризуемо. Действительно, если $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — элементы из $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, то метрику можно задать формулой

$$\bar{\rho}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}.$$

Упражнение 2°. Убедитесь, что $\bar{\rho}$ — метрика и что индуцируемая ею топология эквивалентна тихоновской топологии. В частности, тихоновский куб I^∞ (счетное произведение отрезков I) — метризуемое топологическое пространство.

Приведем без доказательства следующие важные теоремы.

Теорема 3 (Урысон). *Регулярное пространство со счетной базой метризуемо.*

Теорема 4 (Стоун). *Метризуемое топологическое пространство паракомпактно.*

3. Топология пространств подмножеств и многозначные отображения. В современном анализе, теории оптимального управления, теории игр и математической экономике интенсивно изучаются и находят приложения многозначные отображения (кратко: м-отображения) топологических пространств $f\colon X \to Y$, отображения, значения $f(x)$ которых — непустые подмножества в Y.

Если введем совокупность $P(Y)$ всех непустых подмножеств из Y, то естественно возникает однозначное отображение $\tilde{f}\colon X \to P(Y)$, действующее по правилу $\tilde{f}(x) = f(x) \in P(Y)$; верно и обратное. При этом удобно рассматривать совокупность всех замкнутых подмножеств $C(Y)$ или компактных $K(Y)$ в качестве областей значений отображений $\tilde{f}\colon X \to C(Y)$ или $\tilde{f}\colon X \to K(Y)$. Чтобы применить методы топологии для изучения отображений $\tilde{f}$ (а следовательно, и f), необходимо в $C(Y)$, $K(Y)$ ввести топологию.

Это достигается различными способами.

1) Пространство $\varkappa(Y)$ — это $C(Y)$ с топологией, определяемой базой $\{C(U)\}$, где U — любое открытое множество в Y $(U \in \tau_Y)$.

2) Пространство $\lambda(Y)$ — это $C(Y)$ с топологией, определяемой предбазой $\{C(Y) \backslash C(Y \backslash U)\}$, где $U \in \tau_Y$.

3) Пространство $\operatorname{Exp}(Y)$ — это $C(Y)$, предбаза топологии которого состоит из объединения базы $\{C(U)\}$ и предбазы $\{C(Y) \backslash C(Y \backslash U)\}$.

Отметим, что топологии $\varkappa$, λ, Exp называются соответственно *полуконечной сверху*, *полуконечной снизу*, *экспоненциальной* топологией.

4) Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $C_0(Y)$ — совокупность всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств в Y.

Так как $C_0(Y) \subset C(Y)$, то в $C_0(Y)$ индуцируется каждая из топологий $\varkappa$, λ, Exp. Однако важным фактом является возможность ввести метрику в $C_0(Y)$. Именно, определяется так называемая метрика Хаусдорфа $h(A, B)$, задающая в $C(Y)$ метрическую топологию: $h(A, B) = \max\{\rho_*(A, B), \rho_*(B, A)\}$, где $\rho_*(A, B) = \sup \rho(a, B)$, $a \in A$, — отклонение множества A от B (здесь $A, B \in C_0(Y)$).

Заметим, что если Y — компактное метрическое пространство, то топология, индуцированная в $C_0(Y) = C(Y)$ метрикой Хаусдорфа, эквивалентна экспоненциальной топологии на $C(Y)$, что в терминах п. 2 означает метризуемость пространства $\operatorname{Exp}(Y)$.

Таким образом, можно рассматривать м-отображения как отображения $f\colon X \to C(Y)$, $f\colon X \to C_0(Y)$ (мы далее не различаем f и $\tilde{f}$) в топологические пространства $C(Y)$, $C_0(Y)$ с той или иной топологией.

Определение 3. м-отображение $f\colon X \to Y$ называется: 1) *полунепрерывным сверху*, 2) *полунепрерывным снизу*, 3) *непрерывным*, если отображение $f\colon X \to C(Y)$ непрерывно соответственно в топологии: 1) $\varkappa(Y)$; 2) $\lambda(Y)$; 3) $\operatorname{Exp}(Y)$.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическими курсами по общей топологии являются [2, 5, 15, 31, 39, 64, 85].

Популярное изложение основных топологических понятий имеется в [14, 26, 69].

Очерк основных понятий и конструкций общей топологии дан в [13].

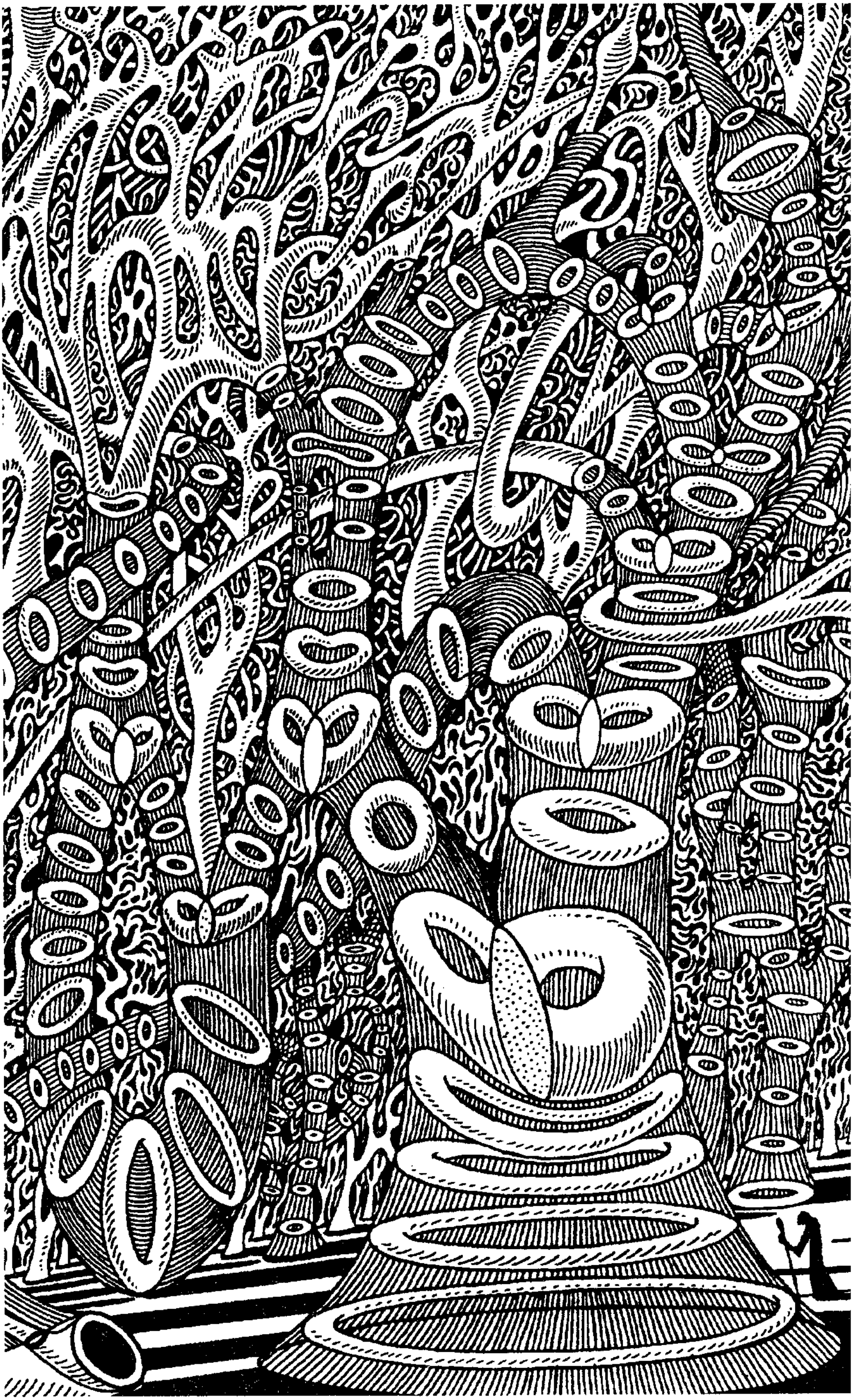
Задачники по материалу гл. II — [12, 48, 52].

Начальные сведения по метрическим пространствам — [33, 40].

Классификация замкнутых двумерных поверхностей — [27, 43].

Для изучения компактных пространств рекомендуем первоисточник [4].

Дальнейшие сведения о топологии м-отображений и некоторых приложениях можно найти, например, в учебном пособии [87].



Глава III

Теория гомотопий

Один из основных методов топологии состоит в изучении геометрических свойств топологических пространств алгебраическими средствами. Для этой цели в топологии разработан ряд приемов, позволяющих поставить в соответствие топологическому пространству алгебраические объекты, например, группы, кольца и др. В основе алгебраической топологии лежит как раз идея такого соответствия (или функтора), сопоставляющего совокупности топологических пространств совокупность некоторых алгебраических объектов, а непрерывным отображением пространств — соответствующие гомоморфизмы. Такой функториальный подход позволяет превратить топологическую задачу в соответствующую ей алгебраическую. Разрешимость этой «производной» алгебраической задачи во многих случаях позволяет судить о разрешимости исходной топологической задачи.

Одно из первых понятий, возникших на этом пути, — понятие фундаментальной группы топологического пространства; позднее возникло более общее понятие гомотопических групп. Их изучению и посвящена настоящая глава.

§ 1. Пространство отображений.
Гомотопия, ретракция, деформация

В этом параграфе изучается множество всех непрерывных отображений одного топологического пространства в другое. В этом множестве можно ввести различные топологии и превратить его тем самым в различные топологические пространства. Особенно важен вопрос о связности этого пространства, что естественно приводит к понятию гомотопных отображений. Рассмотрение специальных классов отображений и их гомотопий приводит к понятиям деформации одного пространства в другое, ретракции и др. Все эти понятия играют важную роль в гомотопической топологии.

1. Пространство непрерывных отображений. Рассмотрим множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Свойства этого множества и многие свойства пространств X, Y взаимосвязаны. Простой пример: если X одноточечно, то $C(X, Y) \simeq Y$, где знак $\simeq$ означает биекцию.

В множестве $C(X, Y)$, как и во всяком множестве, можно вводить топологию различными способами. Возникает вопрос: как ввести топологию в $C(X, Y)$ наиболее естественным образом? В этом вопросе помогает интуитивное представление о близости отображений; отображения f_1, f_2 близки, если близки в Y образы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для всякой точки $x \in X$. Если Y — метрическое пространство, то эти понятия реализуются в терминах метрики Y. На этой основе в множестве $C(X, Y)$ вводятся различные топологии: топология поточечной сходимости, топология равномерной сходимости и др.

Если (Y, ρ) — метрическое пространство, а X компактно, то множество $C(X, Y)$ снабжается метрикой μ следующим образом:

$$\mu(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_2(x)), \qquad f_1, f_2 \in C(X, Y).$$

Определение 1. Топология τ_μ в $C(X, Y)$, определяемая метрикой μ, называется *топологией равномерной сходимости.*

Упражнения. 1°. Проверьте аксиомы метрики для μ.

2°. Рассмотрите сходящуюся последовательность $f_n^\mu \to f$ в $C(X, Y)$ и дайте эквивалентное определение сходимости в терминах топологии в Y. В случае $X = [0, 1]$ сравните эту сходимость с равномерной сходимостью в $C_{[0,1]}$.

Определение 2. Рассмотрим в $C(X, Y)$ множества

$$\{x_i, U_i\}_{i=1}^k = \{f \in C(X, Y)\colon f(x_i) \in U_i, \quad i = 1, \ldots, k\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, $U_1, \ldots, U_k$ — открытые множества в Y. Топология τ_ρ, порожденная такими множествами как предбазой, называется *топологией поточечной сходимости в* $C(X, Y)$.

Упражнения. 3°. Проверьте, что множества вида $\{x_i, U_i\}_{i=1}^k$ и их конечные пересечения удовлетворяют критерию базы.

4°. Рассмотрите сходящуюся последовательность $\{f_n\}$ к f в данной топологии и докажите, что ее сходимость эквивалентна сходимости последовательностей $f_n(x) \to f(x)$ для каждой точки $x \in X$.

5°. Даны множество $\{Y_x\}_{x \in X}$ экземпляров пространства Y, занумерованных элементами $x \in X$, и тихоновское произведение $\prod\limits_{x \in X} Y_x$. Покажите, что множество $C(X, Y)$ можно отождествить с подмножеством из этого произведения и что топология произведения индуцирует на $C(X, Y)$ топологию τ_2 поточечной сходимости.

Следующее определение дает другой вариант топологии в множестве $C(X, Y)$.

Определение 3. Рассмотрим всевозможные множества отображений вида

$$[K, U] = \{f \in C(X, Y): f(K) \subset U\},$$

где K — компактное множество в X, а U — открытое множество в Y. Топология τ_c, порожденная такими множествами $[K, U]$ как предбазой, называется *компактно открытой* топологией в $C(X, Y)$.

Упражнения. 6°. Проверьте, что система множеств $[K, U]$ и их конечных пересечений удовлетворяет критерию базы.

7° Покажите, что $\tau_\rho \prec \tau_c$, а в случае метрического пространства $\tau_c \prec \tau_\mu$.

8°. Докажите, что если Y — метрическое пространство, а X компактно, то компактно открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости.

9°. Если X — некомпактное пространство, а Y — метрическое пространство, то часто рассматривают последовательности отображений, сходящиеся равномерно на каждом компактном подмножестве X. Покажите, что эта сходимость эквивалентна сходимости в компактно открытой топологии.

10°. Докажите, что если (Y, ρ) — полное метрическое пространство, то пространство $C(X, Y)$ есть полное метрическое пространство в метрике μ.

11°. Покажите, что если X локально компактно, а Z — хаусдорфово, то пространства $C(X \times Z, Y)$ и $C(Z, C(X, Y))$ гомеоморфны в компактно открытой топологии.

Пространство $C(X, Y)$ обозначают часто Y^X. Тогда утверждение упражнения 11° можно записать в виде $Y^{X \times Z} \simeq (Y^X)^Z$ (*экспоненциальный закон*).

В качестве примера рассмотрим пространство ω-периодических непрерывных функций, заданных на числовой оси $\mathbb{R}^1$. В силу периодичности каждая такая функция f полностью определяется своими значениями на отрезке $[0, \omega]$, причем $f(0) = f(\omega)$. Поэтому фактически мы рассматриваем множество функций на отрезке $[0, \omega]$ со «склеенными» концами, или, что то же, на окружности S^1. Это множество $C(S^1, \mathbb{R}^1)$, в котором можно ввести каждую из топологий τ_μ, τ_ρ, τ_c.

Аналогично можно рассмотреть пространство функций на торе

$$T^n\colon C(T^n, \mathbb{R}^1) = C(\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}, \mathbb{R}^1),$$

которое можно использовать как пространство периодических функций n переменных.

В теории гомотопий, как правило, рассматривают $C(X, Y)$ с компактно открытой топологией.

2. Гомотопия. Во многих задачах оказывается возможным не различать отображения, одно из которых можно «плавно» изменить, продеформировать в другое. Непрерывную деформацию одного отображения в другое естественно мыслить как путь в пространстве $C(X, Y)$, начинающийся и кончающийся в заданных точках f_1 и f_2. Брауэр уточнил понятие непрерывной деформации с помощью следующего понятия гомотопии.

Определение 4. Два непрерывных отображения, f_0, $f_1 \in C(X, Y)$, называтюся *гомотопными* ($f_0 \sim f_1$), если существует такое непрерывное отображение $f\colon X \times [0, 1] \to Y$, что $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$.

Отображение f часто называют *гомотопией*, соединяющей отображения f_0 и f_1.

Таким образом, если $f_0 \sim f_1$, то найдется такое семейство отображений $f_t\colon X \to Y$, зависящее от числового параметра $t \in [0, 1]$ и соединяющее отображения f_0 и f_1, что индуцированное этим семейством по правилу $(x, t) \to f_t(x)$ отображение $X \times [0, 1] \to Y$ непрерывно. Очевидно и обратное.

Упражнение 12°. Покажите, что задание гомотопии f: $X \times [0, 1] \to Y$ эквивалентно заданию пути s в $C(X, Y)$ (топология τ_c, X локально компактно).

Пример 1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Определим $F\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ по формуле $F(x, t) = (1 - t)x$, $t \in I$. Легко видеть, что F — гомотопия между f_0 и f_1.

Пример 2. Пусть X — произвольное пространство, Y — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ — произвольные непрерывные отображения. Тогда отображение $F\colon X \times I \to Y$, заданное по формуле $F(x, t) = tf_1(x) + (1 - t)f_0(x)$, является гомотопией между f_0 и f_1. ◆

Заметим, что понятие гомотопии связано с задачей о продолжении отображений. В самом деле, пусть $f, g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения. Зададим отображение $\varphi\colon X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to Y$ формулами $\varphi(x, 0) = f(x)$; $\varphi(x, 1) = g(x)$. Легко видеть, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда существует продолжение φ на $X \times [0, 1]$.

Теорема 1. *Гомотопия является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$.*

Доказательство. Рефлексивность ($f \sim f$) устанавливается при помощь гомотопии: $F(x, t) \equiv f(x)$.

Симметричность: пусть $f_0 \sim f_1$ с гомотопией $F(x, t)$. Тогда $\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$ определяет гомотопию от f_1 до f_0, т. е. $f_1 \sim f_0$.

Транзитивность: пусть $f_0 \sim f_1$, $f_1 \sim f_2$ с гомотопиями $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ соответственно. Тогда отображение

$$H(x, t) = \begin{cases} F_1(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ F_2(x, 2t - 1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

непрерывно, так как его ограничение на каждое из замкнутых множеств $X \times [0, 1/2]$, $X \times [1/2, 1]$ непрерывно. Легко видеть, что $H(x, t)$ — гомотопия между f_0 и f_1. ■

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами*. Фактормножество $C(X, Y)/R$ обозначается через $\pi(X, Y)$. Легко видеть, что $\pi(X, Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства $C(X, Y)$. Гомотопический класс отображения $f \in C(X, Y)$ обозначается через $[f]$.

Определение 5. Отображение $f \in C(X, Y)$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует отображение $g \in C(X, Y)$ такое, что $gf \sim 1_X$, $fg \sim 1_Y$.

Определение 6. Говорят, что пространство X *гомотопически эквивалентно* пространству Y или что X и Y имеют *одинаковый гомотопический тип*, если в $C(X, Y)$ существует гомотопическая эквивалентность.

Понятие гомотопической эквивалентности является полезным «огрублением» понятия гомеоморфизма двух пространств. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то, положив $g = f^{-1}\colon y \to X$, будем иметь $gf = 1_X$, $fg = 1_Y$ — получаем гомотопическую эквивалентность X и Y. В связи с этим отображение g в определении гомотопической эквивалентности называют *гомотопически обратным к* f.

Пример самого простого (не пустого) топологического пространства — одна точка. Возникает вопрос: какие пространства имеют гомотопический тип точки?

Определение 7. Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $1_X\colon X \to X$ гомотопно постоянному отображению (отображению X в точку $x_0 \in X$). Гомотопия между ними называется *стягиванием* пространства X (в точку x_0).

Упражнение 13°. Докажите, что любые два отображения пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопны между собой.

Теорема 2. *Пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет тип одноточечного пространства.*

Доказательство. Пусть X стягиваемо и $\Phi\colon X \times I \to X$ — стягивание X к точке $x_0 \in X$. Обозначим через Q одноточечное пространство, состоящее из точки x_0. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — отображение в точку x_0, $j\colon Q \to X$ — вложение. Тогда $\varphi j = 1_Q$, а Φ — гомотопия, связывающая 1_X и $j\varphi$. Таким образом, φ — гомотопическая эквивалентность между X и Q. Обратное утверждение предоставляем доказать читателю. ■

Упражнения. 14°. Докажите, что всякое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (в частности, само $\mathbb{R}^n$) стягиваемо.

15°. Докажите, что пространство $X \times Y$ стягиваемо, если X и Y — стягиваемые пространства.

3. Продолжение отображений. Рассмотрим теперь задачу распространения (продолжения) отображений. Ее можно сформулировать так: можно ли данное отображение $f\colon A \to Y$, определенное на подпространстве A пространства X, распространить на все пространство X, т. е. существует ли такое отображение $\Phi\colon X \to Y$, что его сужение $\varphi\big|_A\colon A \to Y$ совпадает с отображением f? Такое отображение φ называют *продолжением отображения* f.

Решение этой задачи получено лишь в некоторых частных случаях. Полной теории продолжения до сих пор не существует. Одним из примеров частного решения этой задачи является теорема Титце—Урысона для нормальных пространств, приведенная в § 12 гл. II.

Следующая теорема устанавливает связь между задачей продолжения и понятием гомотопии.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon S^n \to Y$ *— некоторое непрерывное отображение единичной сферы. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) *отображение* φ *гомотопно постоянному отображению;*

(ii) *отображение* φ *можно продолжить на весь шар* $\overline{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $f \sim c$, где c — постоянное отображение S^n в точку $p \in Y$. Пусть $F\colon S^n \times I \to Y$ — гомотопия между f и c. Зададим продолжение f' отображения f на шар $\overline{D}^{n+1}$ следующим образом:

$$f'(x) = \begin{cases} p, & 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2; \\ F\left(x/\|x\|, 2 - 2\|x\|\right), & 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f'\big|_{S^n} = f$; f' непрерывно, так как непрерывны его сужения на каждое из замкнутых множеств

$$\{x \in \overline{D}^{n+1}\colon 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2\}, \quad \{x \in \overline{D}^{n+1}\colon 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть задано f' — продолжение f на весь шар $\overline{D}^{n+1}$. Пусть $y_0 \in S^n$. Зададим отображение $\Phi\colon S^n \times I \to Y$ следующим образом:

$$\Phi(x, t) = f'[(1 - t)x + ty_0].$$

Ясно, что $\Phi(x, 0) = f'(x) = f(x)$, $\Phi(x, 1) = f'(y_0) = p \in Y$, поэтому $\Phi(x, t)$ — нужная гомотопия. ■

Упражнения. 16°. Покажите, что всякое отображение f пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопно постоянному отображению (ср. с упр. 13°).

17°. Воспользовавшись результатом предыдущего упражнения, выясните из теоремы 3, что всякое отображение сферы S^n в стягиваемое пространство продолжается на весь шар $\overline{D}^{n+1}$.

4. Ретракция. Частным случаем задачи о продолжении является задача о ретракции, формулируемая следующим образом.

Определение 8. Пусть A — подпространство X, $1_A\colon A \to A$ — тождественное отображение. Если существует отображение $r\colon X \to A$ такое, что $r\big|_A = 1_A$, то его называют *ретракцией* X на A, а пространство A — *ретрактом* X.

Упражнения. 18°. Убедитесь, что всякая точка топологического пространства X является ретрактом X.

19°. Убедитесь, что всякое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является ретрактом $\mathbb{R}^n$.

20°. Если $Z = X \times Y$ — тихоновское произведение пространств и $p \in X$, $q \in Y$ — фиксированные точки, то $A = X \times q$, $B = p \times Y$ — ретракты пространства $X \times Y$, а отображения r_X: $(x, y) \to (x, q)$; r_X: $(x, y) \to (p, y)$ — соответствующие ретракции.

21°. Покажите, что нульмерная сфера $S^0 = \{-1, 1\}$ не является ретрактом одномерного диска $\overline{D}^1 = [-1, 1]$.

Указание. Воспользуйтесь свойствами связных пространств.

Определение 9. Если существует отображение $r: X \to A$ такое, что $r\big|_A \sim 1_A$, то A называется *слабым ретрактом* X, а r — *слабой ретракцией* X на A.

Легко видеть, что ретракт всегда является слабым ретрактом. Обратное же, вообще говоря, неверно, как показывает следующее упражнение.

Упражнение 22°. Дан квадрат $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ и его подмножество A — «гребенка», состоящая из вертикальных отрезков с основаниями в точках $(1/n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$; $(0, 0)$ и основания квадрата (рис. 63). Покажите, что: 1) множество A не является ретрактом квадрата I^2; 2) A — слабый ретракт I^2; 3) если в «гребенке» A оставить конечное число зубьев, то полученное множество A' — ретракт I^2.

Определение 10. *Деформацией* пространства X в подпространство A, $A \subset X$, называется гомотопия $D: X \times I \to X$ такая, что $D(x, 0) = x$, $D(x, 1) \in A$ для всех $x \in X$.

Определение 11. Если существует такая деформация X в A $D: X \times I \to X$, что $D(x, t) = x$ для $x \in A$, $t \in I$, то A называется *сильным деформационным ретрактом* X, а D — *сильной деформационной ретракцией*.

Пример 3. Точка является сильным деформационным ретрактом всякого содержащего ее выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$.

Другие примеры сильных деформационных ретрактов приведены в следующих упражнениях.

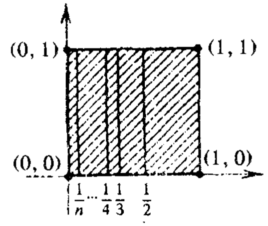


Рис. 63

Упражнения. 23°. Пусть пространство X стягиваемо в точку $x_0 \in X$. Покажите, что $x_0 \times Y$ — сильный деформационный ретракт произведения $X \times Y$. В частности, рассмотрите двумерный цилиндр и покажите, что его основание есть сильный деформационный ретракт.

24°. Убедитесь, что вершина конуса в трехмерном пространстве — сильный деформационный ретракт конуса.

25°. Покажите, что сильный деформационный ретракт A пространства X гомотопически эквивалентен X.

Указание. Вложение $i: A \to X$ и ретракция $D(x, 1)$ пространства X на A гомотопически обратны.

5. Цилиндр отображения. Рассмотрим сначала некоторые операции над топологическими пространствами.

Топологическая (*несвязная,* или *дизъюнктивная*) *сумма* $X \sqcup Y$ *пространств* X, Y определяется как объединение непересекающихся экземпляров в X и Y.

Топология в $X \sqcup Y$ определяется так: V открыто в $X \sqcup Y$ тогда и только тогда, когда $V \cap X$ и $V \cap Y$ открыты в X и Y соответственно.

Если $f: A \to Y$ — непрерывное отображение, где $A \subset X$, то можно склеить X и Y по отображению f. С этой целью в $X \sqcup Y$ введем отношение эквивалентности R: $x \sim y$, если $x \in A$, $y \in Y$ и $f(x) = y$; $x_1 \sim x_2$, если $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2)$.

Факторпространство пространства $X \sqcup Y$ по эквивалентности R обозначается $X \underset{f}{\cup} Y$ и называется *склейкой пространств* X *и* Y *по отображению* f. Если, в частности, A есть точка $x_0 \in X$, а отображение $f: X \to Y$ переводит x_0 в $y_0 = f(x_0)$, то склейка $X \underset{f}{\cup} Y$ называется *букетом пространств* X, Y и обозначается $X_{x_0} \vee_{y_0} Y$. Легко видеть, что это факторпространство несвязной суммы $X \sqcup Y$ по отношению эквивалентности, склеивающему точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

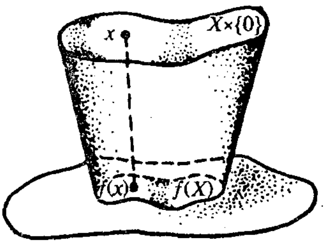


Рис. 64

Упражнения. 26°. Покажите, что гомотопический тип букета $X_{x_0} \vee_{y_0} Y$ совпадает с гомотопическим типом пространства Y, если X стягиваемо к точке $x_0 \in X$.

27°. Докажите, что отрезок $I = [0, 1]$ и букет $I_0 \vee_{p_0} S^1$, где $p_0 \in S^1$, $0 \in I$, имеют разный гомотопический тип.

Определение 12. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда можно считать, что задано отображение φ: $X \times \{1\} \to Y$, $\varphi(x, 1) = f(x)$, где $X \times \{1\}$ — подпространство $X \times I$. *Цилиндром* Z_f *отображения* f: $X \to Y$ называется склейка $(X \times I) \underset{\varphi}{\cup} Y$ пространств $X \times I$ и Y по отображению φ.

Цилиндр отображения можно представить в виде, изображенном на рис. 64.

Понятие цилиндра отображения важно ввиду того, что X, Y можно считать подпространством Z_f. Таким образом, отображение f как бы заменяется вложением X в Z_f. Отметим также, что Y — сильный деформационный ретракт Z_f, а вложение Y в Z_f является гомотопической эквивалентностью (проверьте!).

Определение 13. Цилиндр постоянного отображения $c\colon X\to p$ называется *конусом над пространством* X и обозначается CX.

Теорема 4. *Отображение* $f\colon X\to Y$ *тогда и только тогда гомотопно постоянному, когда существует продолжение* $\tilde{f}\colon CX\to Y$ *отображения* f.

Доказательство. Если f гомотопно постоянному отображению $c_0\colon X\to(*)$, то

$$F\colon X\times I\to Y,\quad F(x,0)=x,\quad F(x,1)=(*).$$

Таким образом, на верхнем основании цилиндра $X\times I$ F постоянно, следовательно, оно индуцирует отображение F факторпространства $(X\times I)/R$, где R означает склейку верхнего основания в точку. Но пространство $(X\times I)/R$ гомеоморфно CX (проверьте!).

Обратное утверждение предоставим доказать читателю. ∎

Упражнения. 28°. Пусть отображение $f\colon A\to Y$ непрерывно, $A\subset X$ замкнуто в X; X, Y — нормальные пространства. Докажите, что $X\underset{f}{\cup}Y$ нормально.

29°. Докажите, что $f\colon A\to Y$ тогда и только тогда можно продолжить на все $X(A\subset X)$, когда Y — ретракт $X\underset{f}{\cup}Y$.

§ 2. Категория, функтор и алгебраизация топологических задач

Категорное описание воплощает такой подход к математическому объекту, при котором этот объект, например, группа или пространство, рассматривается не изолированно, а как член совокупности подобных себе объектов. Интуитивно категорию можно представить себе как совокупность множеств (возможно, с дополнительной структурой) и отображений, согласованных с этой структурой. Соответствия между элементами разных категорий, подчиненные специальным правилам, называют *функторами*.

1. Категория.

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathcal{A}$, если заданы: 1) некоторая совокупность объектов; 2) для каждой упорядоченной пары объектов X, Y — множество $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ морфизмов[*] из X в Y; 3) отображение, ставящее в соответствие всякой упорядоченной тройке X, Y, Z объектов и всякой паре морфизмов

---

[*] При этом подразумевают, что $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X,Y)\cap\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X',Y')=\varnothing$, когда $X\neq X'$ или $Y\neq Y'$.

$f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, Z)$ их композицию $gf \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Z)$, так что возникает коммутативная диаграмма морфизмов данной категории (если морфизмы обозначить стрелками)

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

При этом выполнены следующие две аксиомы.

А. Ассоциативность. *Если*

$$f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y), \quad g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, Z), \quad h \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Z, W),$$

то $h(gf) = (hg)f$ *в* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, W)$.

Б. Существование единицы. *Для всякого объекта* Y *в* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, Y)$ *существует такой морфизм* 1_Y, *что для любых* $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, Z)$

$$1_Y f = f \quad \textit{и} \quad g 1_Y = g.$$

Отметим, что из приведенных аксиом следует единственность элемента 1_Y; этот элемент называется *тождественным морфизмом* объекта Y. Если для двух морфизмов, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$, $g \in \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, X)$, верно равенство $gf = 1_X$, то морфизм g называется *левым обратным к* f, а f — *правым обратным к* g. Морфизм, являющийся одновременно и правым, и левым обратным к f, называется *двусторонне обратным к* f.

Определение 2. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ называется *эквивалентностью* ($f\colon X \approx Y$), если существует двусторонне обратный к f морфизм $f^{-1} \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(Y, X)$.

Упражнение 1°. Докажите, что если морфизм $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ имеет левый обратный и правый обратный, то они совпадают.

Из упражнения вытекает, что если $f\colon X \approx Y$, то $f^{-1}\colon Y \approx X$.

Приведем несколько важных примеров категорий.

1. Совокупность множеств и их отображений.
2. Совокупность метрических пространств и их непрерывных отображений.
3. Совокупность топологических пространств и их непрерывных отображений.
4. Совокупность линейных пространств и их линейных отображений.
5. Совокупность групп и их гомоморфизмов.
6. Совокупность пар топологических пространств и их непрерывных отображений.

Поясним, что *пара топологических пространств* (X, A) — это пространство X и его подпространство A. Отображение пар

$f\colon (X, A) \to (Y, B)$ — это такое отображение $f\colon X \to Y$, что $f(A) \subset B$. ◆

Упражнения. 2°. Покажите, что в категориях примеров 2, 3 и 6 гомеоморфизмы и только они являются эквивалентностями.

3°. Убедитесь, что в категории примера 1 эквивалентности — биективные отображения множеств.

4°. Покажите, что в примерах 4, 5 эквивалентности — изоморфизмы линейных пространств и групп соответственно.

2. Функторы. Нас будут интересовать естественные отображения одной категории в другую, т. е. отображения, сохраняющие единицы и композиции морфизмов. Сформулируем это понятие более точно.

Определение 3. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — категории. *Ковариантным функтором T* из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ называется отображение, которое каждому объекту X из $\mathscr{A}$ сопоставляет объект $T(X)$ из $\mathscr{B}$ и каждому морфизму $f\colon X_1 \to X_2$ в $\mathscr{A}$ сопоставляет морфизм $T(f)\colon T(X_1) \to T(X_2)$ в $\mathscr{B}$, причем выполняются следующие соотношения:

1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

2) $T(gf) = T(g)T(f)$.

Свойства 1) и 2) функтора можно наглядно изобразить так: всякая коммутативная диаграмма категории $\mathscr{A}$ отображается функтором в соответствующую коммутативную диаграмму категории $\mathscr{B}$:

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[dr, "g"] & & & & T(X_2) \arrow[dr, "T(g)"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & X_3 \arrow[rr, dashed, "T"] & & T(X_1) \arrow[ur, "T(f)"] \arrow[rr, "T(gf)"'] & & T(X_3)
\end{tikzcd}$$

Пример 7. Ковариантным функтором является соответствие, сопоставляющее топологическому пространству множество составляющих его точек, а непрерывному отображению пространств — отображение множеств. Это функтор из категории примера 3 в категорию примера 1, который называется *пренебрегающим*, так как он «пренебрегает» структурой топологического пространства.

Аналогично, ковариантный функтор из категории метрических пространств в категорию топологических пространств, относящий метрическому пространству это же пространство, рассматриваемое как топологическое пространство, с топологией, индуцированной метрикой, «пренебрегает» метрикой.

Определение 4. *Контрвариантным функтором T* из категории $\mathscr{A}$ в категорию $\mathscr{B}$ называется отображение, сопоставляющее каждому объекту X из $\mathscr{A}$ объект $T(X)$ из $\mathscr{B}$ и каждому морфизму $f\colon X_1 \to X_2$ — морфизм $T(f)\colon T(X_2) \to T(X_1)$ из $\operatorname{Mor}_{\mathscr{B}}(T(X_2), T(X_1))$; при этом выполнены следующие соотношения:

1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

2) $T(gf) = T(f)T(g)$.

Определение 1. Пара (X, x_0) называется *пространством с отмеченной точкой* $x_0 \in X$.

Зафиксируем теперь пару $(I^n, \partial I^n)$, где I^n — n-мерный куб, $n \geqslant 1$, а ∂I^n — его граница, и поставим в соответствие паре (X, x_0) множество $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Напомним, что элементы $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ — это классы гомотопных между собой отображений пар φ: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, часто называемых *сфероидами*; каждое из этих отображений переводит I^n в X, а ∂I^n — в точку x_0, причем это свойство должно сохраняться при изменении отображения φ в процессе гомотопии. Множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ и $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ совпадают (находятся в биективном соответствии). Здесь p_0 — отмеченная точка сферы S^n. В самом деле, ранее мы отмечали, что факторпространство $I^n/\partial I^n$ гомеоморфно сфере S^n, причем при этом гомеоморфизме θ внутренность $\operatorname{Int} I^n$ куба I^n находится в биективном соответствии с множеством $S^n \backslash p_0$, а граница ∂I^n переходит в точку p_0 сферы S^n. В таких случаях говорят, что задан *относительный гомеоморфизм*

$$\theta\colon (I^n, \partial I^n) \to (S^n, p_0).$$

Тогда всякому отображению f: $(S^n, p_0) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $f\theta$: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, и обратно: отображению g: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $\bar{g}$: $(S^n, p_0) \to (X, x_0)$, которое на $S^n \backslash p_0$ совпадает с $g\theta^{-1}$, а точку p_0 переводит в x_0.

Упражнение 4°. Покажите, что описанное соответствие отображений обеспечивает биекцию между $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ и $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Таким образом, дана другая интерпретация множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, которая позволяет рассматривать случай $n = 0$.

Упражнение 5°. Покажите, что множество $\pi(S^0, p_0; X, x_0)$ есть множество компонент линейной связности пространства X.

Итак, мы определили ковариантный функтор $(X, x_0) \to \to \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ из категории пространств с отмеченной точкой в категорию множеств.

Структура множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ представляет большой интерес для гомотопической топологии. Вначале рассмотрим случай $n > 1$.

Теорема 1. *Множество* $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, $n > 1$, *является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$. Определим сумму $[\varphi] + [\psi]$ следующим образом: $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$, где отображение $\varphi + \psi$ определим так: пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \in I^n$, $t_i \in I = [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$; тогда

$$(\varphi + \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Наглядно это определение можно пояснить следующей схемой, где квадрат изображает грань (t_1, t_2) куба I^n (рис. 65).

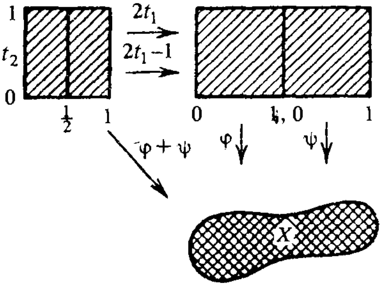


Рис. 65

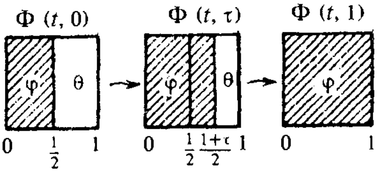


Рис. 66

Нулевой элемент определим как класс постоянного отображения $\theta\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, для которого $\theta(I^n) = x_0$. Покажем, что $[\varphi] + [\theta] = [\varphi]$ для всякого $[\varphi]$, т. е. $\varphi + \theta$ гомотопно φ. В самом деле, нужную гомотопию определяет отображение

$$\Phi\colon (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0),$$

где

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{2t_1}{\tau + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{\tau + 1}{2}, \\ x_0, \quad \text{если } \dfrac{\tau + 1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, & \tau \in I. \end{cases}$$

Гомотопия $\Phi(t, \tau)$ схематически представлена на рис. 66.

Упражнения. 6°. Убедитесь, что и $[\theta] + [\varphi] = [\varphi]$.

Определение 1. Пара (X, x_0) называется *пространством с отмеченной точкой* $x_0 \in X$.

Зафиксируем теперь пару $(I^n, \partial I^n)$, где I^n — n-мерный куб, $n \geqslant 1$, а ∂I^n — его граница, и поставим в соответствие паре (X, x_0) множество $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Напомним, что элементы $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ — это классы гомотопных между собой отображений пар $\varphi\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, часто называемых *сфероидами*; каждое из этих отображений переводит I^n в X, а ∂I^n — в точку x_0, причем это свойство должно сохраняться при изменении отображения φ в процессе гомотопии. Множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ и $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ совпадают (находятся в биективном соответствии). Здесь p_0 — отмеченная точка сферы S^n. В самом деле, ранее мы отмечали, что факторпространство $I^n/\partial I^n$ гомеоморфно сфере S^n, причем при этом гомеоморфизме θ внутренность $\operatorname{Int} I^n$ куба I^n находится в биективном соответствии с множеством $S^n \backslash p_0$, а граница ∂I^n переходит в точку p_0 сферы S^n. В таких случаях говорят, что задан *относительный гомеоморфизм*

$$\theta\colon (I^n, \partial I^n) \to (S^n, p_0).$$

Тогда всякому отображению $f\colon (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $f\theta\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, и обратно: отображению $g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $\bar{g}\colon (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, которое на $S^n \backslash p_0$ совпадает с $g\theta^{-1}$, а точку p_0 переводит в x_0.

Упражнение 4°. Покажите, что описанное соответствие отображений обеспечивает биекцию между $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ и $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Таким образом, дана другая интерпретация множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, которая позволяет рассматривать случай $n = 0$.

Упражнение 5°. Покажите, что множество $\pi(S^0, p_0; X, x_0)$ есть множество компонент линейной связности пространства X.

Итак, мы определили ковариантный функтор $(X, x_0) \to \to \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ из категории пространств с отмеченной точкой в категорию множеств.

Структура множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ представляет большой интерес для гомотопической топологии. Вначале рассмотрим случай $n > 1$.

Теорема 1. *Множество* $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, $n > 1$, *является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$. Определим сумму $[\varphi] + [\psi]$ следующим образом: $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$, где отображение $\varphi + \psi$ определим так: пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \in I^n$, $t_i \in I = [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$; тогда

$$(\varphi + \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Наглядно это определение можно пояснить следующей схемой, где квадрат изображает грань (t_1, t_2) куба I^n (рис. 65).

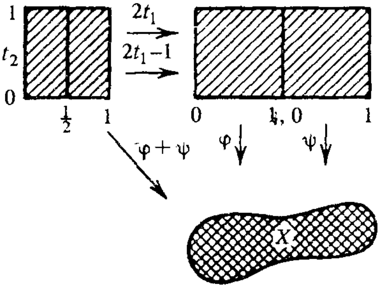


Рис. 65

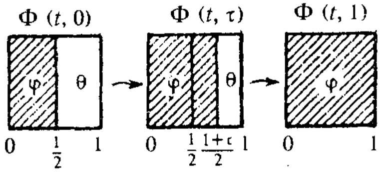


Рис. 66

Нулевой элемент определим как класс постоянного отображения θ: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, для которого $\theta(I^n) = x_0$. Покажем, что $[\varphi] + [\theta] = [\varphi]$ для всякого $[\varphi]$, т. е. $\varphi + \theta$ гомотопно φ. В самом деле, нужную гомотопию определяет отображение

$$\Phi\colon (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0),$$

где

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{2t_1}{\tau + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{\tau + 1}{2}, \\ x_0, \quad \text{если } \frac{\tau + 1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, & \tau \in I. \end{cases}$$

Гомотопия $\Phi(t, \tau)$ схематически представлена на рис. 66.

Упражнения. 6°. Убедитесь, что и $[\theta] + [\varphi] = [\varphi]$.

7°. Поясните, почему конструкция доказательства равенства $[\varphi] + [\theta] = [\varphi]$ не позволяет установить равенство $[\varphi] + [\psi] = [\varphi]$, когда $[\psi] \neq [\theta]$.

Для всякого $[\varphi]$ противоположным элементом $(-[\varphi])$ в $\pi_n(X, x_0)$ служит класс $[\varphi\eta]$, где $\eta\colon I^n \to I^n$ определяется по формуле $\eta(t) = (1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$; таким образом, $(\varphi\eta)(t) = \varphi(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Проверим, что $[\varphi] + [\varphi\eta] = [\theta]$. В самом деле, гомотопия между отображениями $\varphi + \varphi\eta$ и θ задается отображением

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau/2, \\ \varphi(2t_1 - \tau, t_2, \ldots, t_n), & \tau/2 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \varphi(-2t_1 + 2 - \tau, t_2, \ldots, t_n), & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1 - \tau/2, \\ x_0, & 1 - \tau/2 \geqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

На рис. 67 эта гомотопия представлена в виде диаграммы.

Упражнение 8°. Убедитесь, что указанное отображение $\Phi(t, \tau)$ является гомотопией отображений пар пространства $(I^n, \partial I^n)$, (X, x_0).

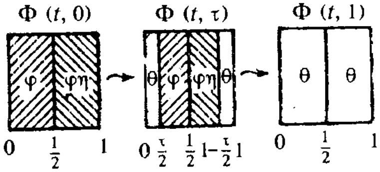


Рис. 67

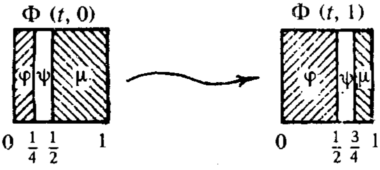


Рис. 68

Осталось проверить ассоциативность и коммутативность сложения в $\pi_n(X, x_0)$, $n > 1$. Докажем ассоциативность. Пусть $[\varphi], [\psi], [\mu] \in \pi_n(X, x_0)$. Покажем, что $([\varphi] + [\psi]) + [\mu] = [\varphi] + ([\psi] + [\mu])$. Легко проверить, что нужную гомотопию задает отображение

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{4t_1}{\tau + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{\tau + 1}{4}, \\ \psi(4t_1 - \tau - 1, t_2, \ldots, t_n), & \dfrac{\tau + 1}{4} \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{\tau + 2}{4}, \\ \mu\left(\dfrac{4t_1 - 2 - \tau}{2 - \tau}, t_2, \ldots, t_n\right), & \dfrac{\tau + 2}{4} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

С точки зрения диаграмм эта гомотопия объясняется совсем просто (рис. 68).

Покажем теперь, что $[\varphi\} + [\psi] = [\psi] + [\varphi]$. Напомним, что

$$(\varphi + \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$(\psi + \varphi)(t) = \begin{cases} \psi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \varphi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Убедимся теперь, что отображения $\varphi + \psi$ и $\psi + \varphi$ гомотопны одному и тому же отображению. (Отсюда будет следовать, что они гомотопны между собой.) Рассмотрим гомотопию $\Phi_1(t, \tau)$:

$$\Phi_1(t, \tau) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi\left(2t_1, \frac{2t_2 - \tau}{2 - \tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} \psi\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2 - \tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1 - \tau/2 \\ x_0, & 1 - \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\Phi_1(t, 0) = \varphi + \psi$, а

$$\Phi_1(t, 1) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ \varphi(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n), & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} \psi(2t_1 - 1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ x_0, & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим еще одну гомотопию, $\Phi_2(t, s)$:

$$\Phi_2(t, s) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \varphi\left(\frac{2t_1}{1+s}, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1+s}{2} \\ x_0, & \frac{1+s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1-s}{2} \\ \psi\left(\frac{2t_1 - 1 + s}{1+s}, 2t_2, t_3, \ldots, t_n\right), & \frac{1-s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_2(t, 0) = \Phi_1(t, 1)$, а

$$\Phi_2(t, 1) = \begin{cases} \varphi(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \psi(t_1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Гомотопии Φ_1, Φ_2 изображены на рис. 69 в виде диаграмм.

Таким образом, имеем

$$\varphi + \psi \sim \Phi_1(t, 1) = \Phi_2(t, 0) \sim \Phi_2(t, 1). \qquad (1)$$

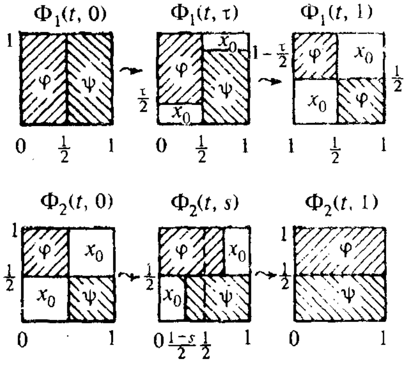


Рис. 69

Проведем аналогичную конструкцию для суммы $\psi + \varphi$. С этой целью запишем гомотопии:

$$\Psi_1(t, \tau) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \psi\left(2t_1, \dfrac{2t_2}{2-t}, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1 - \tau/2 \\ x_0, & 1 - \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} \ 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi\left(2t_1 - 1, \dfrac{2t_2 - \tau}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} \ 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Легко видеть, что $\Psi_1(t, 0) = \psi + \varphi$, а

$$\Psi_1(t, 1) = \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \psi(2t_1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ x_0, & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} \ 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi(2t_1 - 1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n), & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} \ 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Строим еще одну гомотопию:

$$\Psi_2(t, s) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{ll} \varphi\left(\dfrac{2t_1 - 1 + s}{1+s}, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n\right), & \dfrac{1-s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \\ x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1-s}{2} \end{array}\right\} \ 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & \dfrac{1+s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \\ \psi\left(\dfrac{2t_1}{1+s}, 2t_2, t_3, \ldots, t_n\right) & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1+s}{2} \end{array}\right\} \ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \end{array}\right.$$

Таким образом, $\Psi_2(t, 0) = \Psi_1(t, 1)$, а $\Psi_2(t, 1) = \Phi_2(t, 1)$

На рис. 70 в виде диаграмм изображены гомотопии $\Psi_1(T, \tau)$, $\Psi_2(t, \tau)$. Получаем, что

$$\psi + \varphi \sim \Psi_1(t, 1) = \Psi_2(t, 0) \sim \Psi_2(t, 1) = \Phi_2(t, 1).$$

Из последней цепочки гомотопий и цепочки (1) получаем, что $\varphi + \psi \sim \Phi_2(t, 1)$, $\psi + \varphi \sim \Phi_2(t, 1)$, поэтому $\varphi + \psi \sim \psi + \varphi$. ■

Замечание. Внимательный читатель заметил, что именно при доказательстве коммутативности алгебраической операции в $\pi_n(X, x_0)$ существенно использовалось условие $n > 1$.

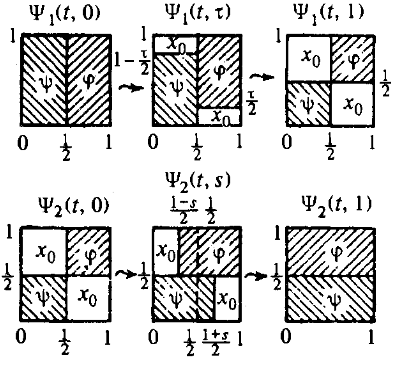


Рис. 70

Группа $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, $n > 1$, называется *n-мерной гомотопической группой* пространства X с отмеченной точкой x_0 и обозначается $\pi_n(X, x_0)$.

Теорема 2. *Всякое непрерывное отображение* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *индуцирует гомоморфизм групп* $\pi_{(I^n, \partial I^n)}(f)\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$.

Доказательство предоставляем провести читателю.

Указание. Покажите, что отображение гомотопических классов, указанное в упражнении 3°, является гомоморфизмом. Используйте определение суммы $(\varphi + \psi)(t)$ (см. рис. 65).

Гомоморфизм $\pi_{(I^n, \partial I^n)}(f)$ обозначается f_n и называется *гомоморфизмом n-мерных гомотопических групп, индуцированным непрерывным отображением f*.

Таким образом, функтор π_n, $n > 1$, действует из категории пространств с отмеченной точкой и их непрерывных отображений в категорию абелевых групп и их гомоморфизмов. Следовательно, если

$$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0), \quad g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$$

— непрерывные отображения, то $(gf)_n = g_n f_n$, где f_n, g_n, $(gf)_n$ — соответствующие гомоморфизмы n-мерных гомотопических групп.

2. Фундаментальная группа. Самостоятельный интерес в решении многих задач имеет множество $\pi_1(X, x_0)$, определяемое равенством

$$\pi_1(X, x_0) = \pi(I, \partial I; X, x_0) = \pi(S^1, p_0; X, x_0),$$

которое снабжается групповой структурой тем же способом, что и π_n, $n > 1$. По общему определению каждый элемент $\pi_1(X, x_0)$ есть гомотопический класс $[\varphi]$ некоторого отображения $\varphi\colon (I, \partial I) \to (X, x_0)$, где образ $\varphi(I)$ — это петля в пространстве X, начинающаяся и кончающаяся в точке x_0 (рис. 71).

Рис. 71

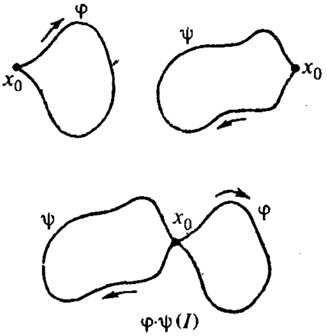


Рис. 72

Направление обхода петли задает параметр $t \in I$. Произведение $\varphi\cdot\psi$ двух петель, φ и ψ, определяется как петля в X такая, что когда t изменяется от 0 до 1/2, образ $(\varphi\cdot\psi)(t)$ пробегает петлю φ, а когда t меняется от 1/2 до 1, образ $(\varphi\cdot\psi)(t)$ пробегает петлю ψ (рис. 72); точнее,

$$(\varphi\cdot\psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \psi(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Как видно, произведение петель определяется совершенно аналогично сумме сфероидов. В множестве $\pi_1(X, x_0)$ определяется произведение $[\varphi]\cdot[\psi] = [\varphi\cdot\psi]$, которое, вообще говоря, не коммутативно (но ассоциативно).

Предложение. *Множество* $\pi_1(X, x_0)$ *является группой относительно описанной операции произведения.*

Доказательство. Заметим, что в доказательстве теоремы 1 условие $n > 1$ было использовано только при доказательстве коммутативности группы π_n, где в необходимых гомотопиях участвует вторая координата сфероида. Поэтому все предыдущие пункты доказательства теоремы 1 переносятся на случай $\pi_1(X, x_0)$ (и значительно упрощаются). Единичный и обратный элементы в $\pi_1(X, x_0)$ определяются аналогично θ и $(-[\varphi])$ в $\pi_n(X, x_0)$ при $n > 1$: $e = [\varphi_0]$, где

$\varphi_0(I) = x_0$ — постоянная петля; для каждого $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$, где $\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t)$ — петля, проходимая в обратном направлении. Таким образом, требуемое утверждение прямо следует из доказательства теоремы 1. ■

Определение 2. Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0.

Упражнение 9°. Докажите, что фундаментальная группа диска $D^n_r(x_0)$ с отмеченной точкой x_0 тривиальна.

Выясним, как различаются группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ одного и того же пространства с различными отмеченными точками $x_0 \in X$, $x_1 \in X$. Для этого нам понадобится несколько понятий.

Произведение $\omega_1 \cdot \omega_2$ путей * ω_1 и ω_2 таких, что $\omega_2(0) = \omega_1(1)$, определим аналогично произведению петель:

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega_2(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\omega_1 \cdot \omega_2$ — путь в пространстве X. Постоянным путем в X называется путь C_x: $I \to X$ такой, что $C_{x_0}(t) \equiv x_0$ для $t \in [0, 1]$. Обратным путем к пути ω называется такой путь ω^{-1}: $I \to X$, что $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$. Так как $(\omega \cdot \omega^{-1}) \cdot (0) = (\omega \cdot \omega^{-1})(1)$, то путь $(\omega \cdot \omega^{-1})(t)$ представляет собой петлю в точке $\omega(0)$.

Упражнение 10°. Начертите путь $(\omega \cdot \omega^{-1})(t)$. Покажите, что $[\omega \cdot \omega^{-1}] = e$ в $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 = \omega(0)$.

Отметим, что произведение путей так же, как и произведение петель, ассоциативно: $(\omega \cdot \omega^{-1}) \cdot \omega_3 = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$.

Теорема 3. *Всякий путь* ω: $I \to X$, *соединяющий точки* x_0 *и* x_1, *т. е.* $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$, *индуцирует изоморфизм групп*

$$S_1^\omega\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),$$

зависящий лишь от гомотопического класса пути ω.

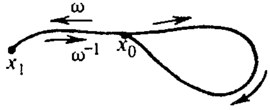


Рис. 73

Доказательство. Пусть $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Рассмотрим отображение ψ: $(I, \partial I) \to (X, x_1)$, заданное формулой $\psi = \omega^{-1} \cdot \varphi \cdot \omega$. Наглядно путь $\psi(t)$ представляется как петля на рис. 73. Рассмотрим класс $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$.

Сопоставив таким образом каждому элементу $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ элемент $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$, получим некоторое отображение S_1^ω:

---

* Напомним, что путь в пространстве X — это непрерывное отображение отрезка ω: $I \to X$.

$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$. Действительно, если φ_τ — гомотопия петли φ в классе $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, то $\psi_\tau = \omega^{-1}\cdot\varphi_\tau\cdot\omega$ — гомотопия петли ψ в классе $[\psi] \in \pi_1(X, x_0)$, что и означает корректность определения. Оказывается, что S_1^ω — гомоморфизм групп. Докажем это. Пусть $[\varphi]$, $[\varphi_2] \in \pi_1(X, x_0)$ и пусть $S_1^\omega[\varphi_i] = [\psi_i] \in \pi_1(X, x_1)$, $i = 1, 2$. Произведение петель $\varphi_1\cdot\varphi_2$ определяет класс $[\varphi_1]\cdot[\varphi_2]$ — произведение (по определению). Используя ассоциативность произведения путей, а также результат упражнения 10°, получим $S_1^\omega([\varphi_1]\cdot[\varphi_2]) = S_1^\omega[\varphi_1\cdot\varphi_2] = [\omega^{-1}\cdot\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\omega] = [\omega^{-1}\cdot\varphi_1\cdot\omega\cdot\omega^{-1}\cdot\varphi_2\cdot\omega] = [\omega^{-1}\cdot\varphi_1\cdot\omega][\omega^{-1}\cdot\varphi_2\cdot\omega] = (S_1^\omega[\varphi_1])\cdot(S_1^\omega[\varphi_2])$; для единичного класса $e_{x_0} = [\varphi_0]$, φ_0 — постоянная петля, имеем $S_1^\omega e_{x_0} = [\omega^{-1}\cdot\varphi_0\cdot\omega] = [\omega^{-1}\cdot\omega] = e_{x_0}$ — единичный класс в $\pi_1(X, x_1)$. Итак, S_1^ω — гомоморфизм.

Аналогично, всякого элементу $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$ сопоставим элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, где $\varphi = \omega\cdot\psi\cdot\omega^{-1}$. Получим некоторое отображение

$$S_1^{\omega^{-1}}\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0).$$

Упражнение 11°. Покажите, что $S_1^{\omega^{-1}}$ — гомоморфизм групп и что гомоморфизмы $S_1^{\omega^{-1}}$ и S_1^ω взаимно обратны, т. е.

$$(S_1^\omega)^{-1} = (S_1^{\omega^{-1}}).$$

Таким образом, S_1^ω — изоморфизм. Из определения ясно, что он не меняется при гомотопии пути ω (при постоянных концах). ■

Упражнение 12°. Докажите, что если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то для всякого пути ω, соединяющего точки x_0 и x_1, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "S_1^\omega"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "S_1^{\bar\omega}"] \\
\pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_1"'] & \pi_1(Y, f(x_1))
\end{tikzcd}$$

где $\bar\omega = f\omega$ — путь, соединяющий точки $f(x_0)$ и $f(x_1)$.

Из теоремы 3 сразу следует, что если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in X$ изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна абстрактная группа $\pi_1(X)$. Эта группа $\pi_1(X)$ называется фундаментальной группой линейно связного пространства X.

Приведем еще один факт, вытекающий из теоремы 3.

Следствие. *Всякий элемент* $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ *определяет автоморфизм* $S_1^{[\alpha]}$ *группы* $\pi_1(X, x_0)$, *при котором* $[\beta] \mapsto [\alpha]^{-1}[\beta][\alpha]$.

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем изоморфизм $S_1^{[\alpha]}: \pi_1(X, x_0) \to (X, x_0)$, так как α — петля в точке x_0. Кроме того, изоморфизм S_1^{α} зависит только от гомотопического класса пути α. ■

Важный класс пространств выделяет следующее определение.

Определение 3. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если любые два пути, $\omega_1: I \to X$ и $\omega_2: I \to X$, такие, что $\omega_1(0) = \omega_2(0) = x_0$, $\omega_1(1) = \omega_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу в $\pi(I, \partial I; X, x_0 \cup x_1)$, т. е. гомотопны в классе путей с началом в x_0 и концом в x_1.

Следующая теорема характеризует односвязные пространства через их фундаментальную группу.

Теорема 4. *Линейно связное пространство X тогда и только тогда односвязно, когда* $\pi_1(X) = 0$.

Доказательство. Пусть линейно связное пространство X односвязно. Рассмотрим произвольный класс $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ и единичный класс $e = [\varphi_0]$. Рассмотрим два пути, $\omega_1 = \varphi: (I, \partial I) \to (X, x_0)$, $\omega_2 = \varphi_0: (I, \partial I) \to (X, x_0)$, $\varphi_0(I) = x_0$, с совпадающими началом и концом: $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = x_0$. Условие односвязности предполагает гомотопность и таких путей-петель ω_1, ω_2; следовательно, петля φ гомотопна петле φ_0, откуда следует $[\varphi] = e$. Ввиду произвольности $[\varphi]$ заключаем, что $\pi_1(X, x_0) = 0$, а следовательно, и $\pi_1(X) = 0$.

Обратно: пусть $\pi_1(X, x_*) = 0$ в точке $x_* \in X$, которую можно считать произвольной в силу линейной связности X. Рассмотрим два пути, ω_1, ω_2, в X с общими началом x_0 и концом x_1: $\omega_1(0) = \omega_2(0) = x_0$, $\omega_1(1) = \omega_2(1) = x_1$. Покажем, что как отображения $\omega_1: (I, \partial I) \to (X, x_0 \cup x_1)$, $\omega_2: (I, \partial I) \to (X, x_0 \cup x_1)$ они гомотопны. Образуем петлю $\varphi = \omega_1 \cdot \omega_2^{-1}$ в точке x_0. Так как путь ω_2^{-1} задается равенством $\omega_2^{-1}(s) = \omega_2(1 - s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, то по определению произведения двух путей получим

$$\varphi(t) = (\omega_1 \cdot \omega_2)^{-1}(t) = \begin{cases} \omega_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega_2(2 - 2t), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Полагая $x_* = x_0$, имеем по условию $\pi_1(X, x_0) = 0$. Следовательно, петля φ гомотопна постоянной петле φ_0 в точке x_0: гомотопию полезно представлять в виде

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_1(2t, \tau), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \Omega_2(2 - 2t, \tau), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\Omega_1(2t, \tau)$, $\Omega_2(2-2t, \tau)$ — гомотопии путей ω_1, ω_2 в постоянный путь в точке x_0, а τ — параметр гомотопии, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, и $\Phi(t, 1) = \varphi(t)$, $\Phi(t, 0) = \varphi_0$. Фиксируем точки $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$. Этим точкам на петле φ отвечают значения параметра $t = s/2 \leqslant 1/2$ и $t = 1 - s/2 \geqslant 1/2$. Зададим путь $\psi(t)$ движения точки $\omega_1(s)$ в точку $\omega_2(s)$ следующим образом:

$$\psi_s(\tau) = \begin{cases} \Phi(s/2, 1-2\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ \Phi(1-s/2, 2\tau-1), & 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Геометрически это означает, что точка $\omega_1(s)$ движется по траектории, задаваемой гомотопией $\Phi(t, \tau)$, в точку x_0 и далее таким же образом — в точку $\omega_2(s)$. Так как выбор s произволен (из интервала $0 \leqslant s \leqslant 1$), то предыдущая формула фактически задает гомотопию пути ω_1 в ω_2 (функция $\psi_s(\tau)$ зависит и от s: $\psi_s(\tau) = \psi(s, \tau)$). Очевидно, эта зависимость $\psi(s, \tau)$ непрерывна по совокупности (s, τ), следовательно, ω_1, ω_2 принадлежат одному гомотопическому классу в

$$\pi_1(I, \partial I; X, x_0 \cup x_1). \ \blacksquare$$

Упражнения. 13°. Убедитесь, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ односвязно, а S^1 и тор $S^1 \times S^1$ не являются односвязными.

14°. Постройте пример связного пространства с неизоморфными группами $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках x_0.

Указание. Используйте пример связного, но не линейно связного пространства из § 10 гл. II.

Исследуем теперь зависимость высших гомотопических групп от изменения базисной точки. Оказывается, что гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ меняется аналогично фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$ при изменении отмеченной точки.

Теорема 5. *Всякий путь $\omega\colon I \to X$, соединяющий точки x_0 и x_1, определяет изоморфизм*

$$S_n^\omega\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0),$$

зависящий от гомотопического класса $[\omega] \in \pi(I, \partial I; X, x_0 \bigcup x_1)$. Кроме того, для всякого отображения $f\colon X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_1) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "S_n^\omega"'] & \pi_n(Y, y_1) \arrow[d, "S_n^{\bar\omega}"] \\
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_n"'] & \pi_n(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

в которой $S_n^{\bar\omega}$ — изоморфизм, определяемый путем $\bar\omega = f\omega$ между точками $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Наметим лишь идею доказательства этой теоремы. Пусть $[\varphi] \in \pi_n(X, x_1)$. Аналогично тому, как это делалось в случае фундаментальной группы, элементу $[\varphi]$ ставится в соответствие элемент $[\psi] \in \pi_n(X, x_0)$. Наглядно эту процедуру можно изобразить как вытягивание из сфероида φ в точке x_1 «уса» в точку $\omega(t)$ и его растяжение вдоль пути ω до точки x_0 (рис. 74).

Таким образом получаем отображение $S^{\omega}_{n}\colon \pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$, являющееся изоморфизмом с требуемыми свойствами. Подробности опускаем. ■

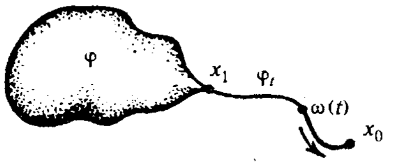


Рис. 74

В качестве следствия из теоремы 5 получаем, что всякий элемент $[\alpha]\in\pi_1(X, x_1)$ определяет автоморфизм группы $\pi_n(X, x_0)$.

Таким образом, группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на группе $\pi_n(X, x_0)$ как группа автоморфизмов (точнее, как подгруппа группы всех автоморфизмов).

Естественно теперь следующее обобщение односвязных пространств.

Определение 4. Если для пространства X и *любых точек* x_0, $x_1\in X$, *лежащих в одной компоненте линейной связности, изоморфизм* $S^{\omega}_{n}\colon \pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$ *не зависит от выбора пути* ω, *соединяющего* x_0 *с* x_1, *то пространство* X *называется* *n-простым* (*или* *гомотопически простым в размерности* n).

Предлагаем доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Пространство* X *тогда и только тогда* *n-просто, когда для любой точки* $x_0\in X$ *группа* $\pi_1(X, x_0)$ *тривиально действует на* $\pi_n(X, x_0)$, *т. е. не меняет элементов* $\pi_n(X, x_0)$.

Из теоремы 4 сразу следует, что односвязное пространство n-просто для всех $n\geqslant 1$.

§ 4. Вычисление фундаментальных и гомотопических групп некоторых пространств

В этом параграфе будет вычислена фундаментальная группа окружности, а также произвольной замкнутой поверхности типа M_p или N_q. Необходимая для этого комбинаторная техника основана на результатах § 4 гл. II и изложена в начале параграфа (см. п. 1, 2). Попутно устанавливается топологическая инвариантность эйлеровой характеристики замкнутой поверхности (см. п. 5). Далее обсуждается задача вычисления высших гомотопических групп и дается приложение к задаче о неподвижных точках непрерывного отображения (теорема Брауэра, основная теорема алгебры).

1. Линейчатые пути на поверхности и их комбинаторные гомотопии. Рассмотрим замкнутую поверхность X, как и в § 4 гл. II заданную своим разбиением. Это означает, что задана некоторая развертка П и поверхность X гомеоморфна факторпространству Π/R, где R — эквивалентность, определяемая склеивающими гомеоморфизмами развертки.

Обозначим произведение факторотображения $\alpha\colon \Pi\to\Pi/R$ и гомеоморфизма $\beta\colon \Pi/R\to X$ через $\varkappa$. Тогда отображение $\varkappa\colon \Pi\to X$ и задает разбиение X на образы многоугольников, ребер и вершин развертки ($\varkappa$-образы ребер называем *ребрами*, а $\varkappa$-образы вершин — *вершинами разбиения*). Ребро разбиения является $\varkappa$-образом двух ребер: a и a^{-1} или a и a, условимся обозначать его буквой a; $\varkappa$-образ вершины A обозначаем той же буквой A; точки ребра, отличные от вершин, будем называть *внутренними точками ребра*.

Нам потребуются следующие две элементарные операции над разбиениями:

а) добавление новой вершины — внутренняя точка ребра объявляется новой вершиной разбиения;

б) добавление нового ребра — один из многоугольников развертки разбивается на два своей диагональю, $\varkappa$-образ этой диагонали в X объявляется новым ребром разбиения.

Рассмотрим ребро a в развертке П, и пусть $\gamma\colon I \to a$ — афинное отображение (линейный путь), при котором точки 0 и 1 отображаются в вершины ребра. Тогда отображение $\tilde{\gamma} = \varkappa\gamma\colon I \to X$ определяет путь на поверхности X, который назовем *элементарным путем*. Очевидно, что образ элементарного пути либо совпадает с одной из вершин ребра a разбиения поверхности, либо полностью покрывает это ребро.

В первом случае элементарный путь постоянен и считается равным нулю ($\tilde{\gamma} = 0$). Во втором случае начало линейного пути γ либо совпадает с началом ориентированного ребра a, либо совпадает с его концом. В соответствии с этим будем обозначать элементарный путь через a или через a^{-1} ($\tilde{\gamma} = a$ или $\tilde{\gamma} = a^{-1}$ соответственно). По такому же правилу будем обозначать $\tilde{\gamma}$, если $\gamma\colon I \to a^{-1}$, считая $(a^{-1})^{-1} = a$.

Таким образом, каждому ориентированному ребру $a(a^{-1})$ развертки отвечает элементарный путь $a(a^{-1})$ в разбиении.

Определение 1. *Линейчатым путем* в разбиении П поверхности X называется конечное произведение элементарных путей. Замкнутый линейчатый путь называется *линейчатой петлей.*

Согласно определению 1 линейчатый путь λ можно записать в виде произведения элементарных путей $\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s$, где $\lambda_i = a_i^{\pm 1}$ либо $\lambda_i = 0$. Опуская нули, сопоставим пути λ слово $\omega(\lambda) = a_{i_1}^{\pm 1}\ldots a_{i_s}^{\pm 1}$, указывающее порядок и направление обхода путем λ ребер разбиения поверхности X.

Рассмотрим границу Γ_i какого-нибудь многоугольника Q_i развертки П. Сопоставив каждому ребру границы элементарный путь как описано выше, мы поставим в соответствие всей границе линейчатый путь λ_i в X, определяемый словом $\omega(\lambda_i) = \omega(Q_i)$. Слово $\omega(Q_i)$ описывает в свою очередь схему приклеивания многоугольника Q_i (см. п. 2 § 4 гл. II).

Например, линейчатый путь λ, соответствующий ориентированной границе прямоугольника Q, представляющего развертку тора (см. рис. 50), определяется словом $\omega(\lambda) = aba^{-1}b^{-1}$.

Определение 2. *Комбинаторной деформацией* I (или II) тора линейчатой петли λ называется вычеркивание или добавление в слово $\omega(\lambda)$ сочетания вида aa^{-1} (или слова $\omega(Q_i)$), определяющего линейчатую петлю в X, соответствующую ориентированной границе многоугольника Q_i развертки П.

Определение 3. Линейчатые петли γ и γ' в П называются *комбинаторно гомотопными* в П, если одна получается из другой с помощью конечного числа комбинаторных деформаций I или II типа.

Заметим, что всякий линейчатый путь в разбиении П поверхности X можно рассматривать как линейчатый путь в некотором разбиении $П_1$, полученном из П применением конечного числа операций типа а) или б).

Лемма 1. *Пусть разбиение* $П_1$ *получено из разбиения* П *применением конечного числа операций вида а), б). Тогда для всякой линейчатой петли* λ *в* $П_1$ *существует линейчатая петля* λ' *в* П, *комбинаторно гомотопная в* $П_1$ *петле* λ.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $П_1$ получено из П применением одной из операций а), б). Пусть $П_1$ получено из П подразделением ребра a на два новых ребра, b и c (применена операция добавления новой вершины). Если петля λ содержит одно из сочетаний bb^{-1}, cc^{-1}, $b^{-1}b$, $c^{-1}c$, то его можно опустить, получив при этом петлю, гомотопную λ. Опустив все такие сочетания, мы получим петлю, либо вовсе не содержащую $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$, либо содержащую их в виде bc $(=a)$ или $c^{-1}b^{-1}$ $(=a^{-1})$; в любом случае это будет искомый линейчатый путь λ' из П.

Пусть теперь $П_1$ получено из П добавлением нового ребра d, которое разбивает некоторый многоугольник из $П_1$ на части E и F. Пусть граничные пути E и F есть ud^{-1} и dv соответственно (рис. 75). Если в линейчатую петлю λ входит ребро $d^{\pm 1}$, то заменим его путем $v^{\pm 1}$ (или $u^{\pm 1}$). Полученная петля λ' комбинаторно гомотопна λ и является линейчатой петлей П. ■

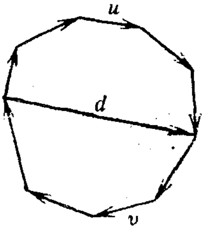


Рис. 75

Лемма 2. *Пусть* $П_1$ *получено из* П *одной из операций типа а), б). Тогда всякая линейчатая петля* λ *в* П, *комбинаторно гомотопная нулю в* $П_1$, *комбинаторно гомотопна нулю и в* П.

Доказательство. Согласно условию леммы в $П_1$ существует последовательность линейчатых петель $\lambda = v_0, v_1, \ldots, v_r = 0$, где v_{i+1} получена из v_i посредством одной комбинаторной деформации. При этом $v_1, \ldots, v_r$ не являются, вообще говоря, петлями в П. Для каждой петли v_i, $i = 1, \ldots, r$, будем строить гомотопную ей линейчатую петлю ω_i в П так, что в последовательности петель $\lambda, \omega_1, \ldots, \omega_r = 0$ каждая петля ω_{i+1} получается из ω_i одной или несколькими комбинаторными деформациями.

Предположим, что $П_1$ получено из П подразделением ребра a на ребра b и c (операция типа а)). Поставим тогда в соответствие каждой петле v_i петлю ω_i, сопоставив ребру, отличному от $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$, то же самое ребро, ребру $b^{\pm 1}$ — ребро $a^{\pm 1}$, а ребру $c^{\pm 1}$ ничего не сопоставим. Легко проверить, что тогда переход от ω_i к ω_{i+1}, $i = 1, \ldots, r$, осуществляется комбинаторной деформацией I или II типа.

Если же Π_1 получено из Π операцией типа б), то ребру, отличному от разбивающего ребра d, соотнесем то же самое ребро, а $d(d^{-1})$ заменяем путем $u(u^{-1})$. Если теперь в v_i вставляем или вычеркиваем сочетание dd^{-1}, чтобы получить v_{i+1}, то в ω_i следует соответственно добавить или вычеркнуть сочетание uu^{-1}. Деформациям же II типа в Π_1 будут соответствовать деформации I или II типа в Π. ∎

2. Комбинаторные аппроксимации путей и гомотопий. Здесь мы покажем, что любой непрерывный путь в триангуляции K гомотопен линейчатому, а также изучим взаимосвязь между комбинаторными и непрерывными гомотопиями.

Везде ниже имеются в виду гомотопии путей и петель с неподвижными концами.

Лемма 3. *Пусть задана некоторая триангуляция K поверхности X. Пусть $\lambda: I \to K$ — непрерывный путь в K, причем $\lambda(0)$, $\lambda(1)$ — вершины триангуляции. Тогда существует гомотопный ему линейчатый путь в K.*

Доказательство. Разобьем отрезок $I = [0, 1]$ конечным числом точек $\{t_k\}_{k=1}^{n}$ ($t_0 = 0$, $t_n = 1$) на достаточно мелкие отрезки так, чтобы для каждого интервала (t_{k-1}, t_{k+1}), $k = 1, \ldots, n-1$, нашлась такая вершина $A_k \in K$, чтобы образ $\lambda(t_{k-1}, t_{k+1})$ этого интервала лежал целиком в звезде $S(A_k)$ — объединении открытых треугольников и ребер триангуляции K, примыкающих к некоторой вершине A_k, и самой вершины A_k. Так как $S(A_k)$ — открытое множество в X, а λ — непрерывное отображение, то этого всегда можно добиться (см. упр. 7° § 13 гл. II).

Поставим теперь в соответствие каждой точке $t_k \in I$ вершину $A_k \in K$. Заметим при этом, что для всякого $k = 1, \ldots, n-1$

$$\lambda((t_k, t_{k+1})) \subset S(A_k) \cap S(A_{k+1}),$$

где $S(A_k) \cap S(A_{k+1})$, очевидно, содержит треугольник, примыкающий одновременно к вершинам A_k и A_{k+1}. Следовательно, если $A_k \neq A_{k+1}$, то они соединены в K ребром, которое обозначим через l_k. Пусть λ_k': $[t_k, t_{k+1}] \to l_k$ — элементарный путь, являющийся продолжением указанного соответствия вершин и точек t_k, t_{k+1}. В случае $A_k = A_{k+1}$ считаем λ_k' нулевым. Произведение элементарных путей λ_k' определяет линейчатый путь λ': $I \to K$, который называется *линейчатой аппроксимацией пути* λ.

Пути λ и λ' гомотопны друг другу. В самом деле, в силу конструкции пути λ' для всякой точки $t \in I$ образы $\lambda(t)$ и $\lambda'(t)$ лежат в одном и том же замкнутом топологическом треугольнике из K, поэтому их можно соединить «отрезком» — гомеоморфным образом отрезка в треугольнике развертки. Следовательно, естественно задать линейную деформацию точки $\lambda(t)$ в точку $\lambda'(t)$, которая определяет требуемую гомотопию. Заметим при этом, что всякая точка $\lambda(t)$ в процессе этой гомотопии не выходит из того замкнутого треугольника ребра или вершины, в которых она находится в начальный момент гомотопии. ■

Необходимо различать, гомотопна ли линейчатая петля постоянной в топологическом смысле или комбинаторно. Петлю, гомотопную или комбинаторно гомотопную постоянной, будем называть соответственно *стягиваемой* или *комбинаторно стягиваемой.*

Лемма 4. *Стягиваемая линейчатая петля λ в триангуляции K комбинаторно стягиваема в K.*

Доказательство. Пусть линейчатая петля λ задана отображением отрезка ψ: $I_1 \to K$. Пусть F: $I_1 \times I_2 \to K$ — стягивание петли в вершину $x_0 \in K$, т. е.

$$F\Big|_{I_1\times\{0\}} = \psi, \qquad F\Big|_{I_1\times\{1\}} = c_0\colon I_1 \to x_0 \in K.$$

Ясно, что $F\Big|_{\{0\}\times I_2}\colon I_2 \to x_0$ и $F\Big|_{\{1\}\times I_2}\colon I_2 \to x_0$.

Так как F — стягивание с сохранением концов петли, то ребра AC, CD и BD (рис. 76) отображаются в одну точку x_0. Отметим на AB точки, образами которых являются вершины K, и проведем через них вертикальные прямые. Затем, проводя дополнительные вертикальные и горизонтальные прямые и диагонали (рис. 76), получим настолько мелкую триангуляцию Σ квадрата $ABCD$, что образ звезды $S(V)$ триангуляции Σ при отображении F лежит в звезде $S(W)$ некоторой вершины триангуляции K (это вытекает из упр. 7° § 13 гл. II).

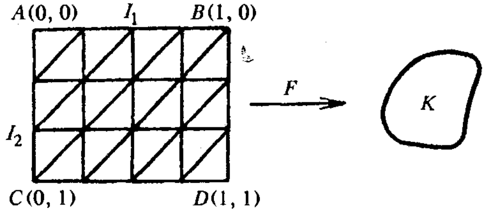


Рис. 76

Поставим в соответствие вершине V вершину W, аналогично поступим со всеми вершинами триангуляции Σ. Затем продолжим это отображение на ребра триангуляции Σ точно так, как это делалось в доказательстве леммы о линейчатой аппроксимации пути. Полученное отображение F: $\Sigma_1 \to K$, где Σ_1 — объединение ребер триангуляции Σ, переводит подразделенную сторону AB в некоторую линейчатую петлю λ в K.

Покажем, что $\bar{\lambda}$ комбинаторно деформируется в λ. В самом деле, при линейчатой аппроксимации пути никакая точка пути не покидает треугольника, ребра или вершины, в которых она находилась. Поэтому петля λ состоит из тех же элементарных путей, что и λ (если не обращать внимания на нулевые пути, которые могут быть опущены). Однако, вообще говоря, некоторые ребра могут пробегаться несколько раз в разных направлениях. Таким образом, от $\bar{\lambda}$ можно перейти к λ комбинаторными деформациями I типа.

Заметим теперь, что в триангуляции Σ подразделенную сторону AB можно перевести в подразделенную ломаную $ACDB$ комбинаторными деформациями I или II типов, «выдавливая» последовательно по одному треугольнику (рис. 77). Однако каждая такая комбинаторная деформация, примененная к AB, определяет в силу конструкции отображения F_1 некоторую комбинаторную деформацию I или II типов петли $\bar{\lambda}$ в K (проверьте это!).

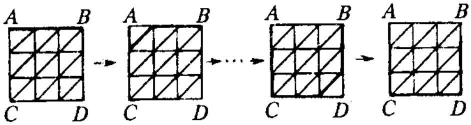


Рис. 77

Таким образом, мы показали, что с помощью комбинаторных деформаций I или II типов линейчатую петлю λ можно перевести в петлю $\bar{\lambda}$, а затем — в F_1-образ пути $ACDB$. Но этот образ есть точка x_0. Поэтому λ комбинаторно гомотопна постоянной. ■

Предлагаем читателям доказать еще два несложных утверждения, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Упражнения. 1°. Докажите, что линейчатый путь λ разбиения П, определяемый словом $\omega(\lambda) = aa^{-1}$, гомотопен постоянному пути.

2°. Докажите, что линейчатый путь разбиения П, равный образу границы какого-нибудь многоугольника развертки П, гомотопен в X постоянному пути.

Из упражнений 1°, 2° следует, что всякая комбинаторная гомотопия определяет обычную непрерывную гомотопию между линейчатыми путями.

Замечание. В следующем пункте нам понадобится весьма частный случай развитой выше комбинаторной техники, а именно разбиения окружности S^1.

Зафиксируем на S^1 конечное число точек A', B', C', ... и зададим гомеоморфизм φ границы выпуклого многоугольника ABC... в S^1 так, что $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, ... Будем говорить, что гомеоморфизм φ определяет разбиение S^1 с ребрами $\overline{A'B'} = \varphi(\overline{AB})$, $\overline{B'C'} = \varphi(\overline{BC})$, $\overline{C'A'} = \varphi(\overline{CA})$, ... и вершинами A', B',

C', ... Естественно определяются линейчатые пути и комбинаторные деформации I типа. Легко видеть, что леммы 1—4 остаются в силе для таких разбиений с тем изменением, что исчезают операции над разбиениями типа б) и комбинаторные деформации II типа.

3. Фундаментальная группа окружности. Теперь мы можем вычислить группу $\pi_1(S^1)$.

Теорема 1. *Группа* $\pi_1(S^1)$ *абелева и изоморфна группе* $\mathbb{Z}$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, которое будет в дальнейшем усилено (см. теорему 4 § 4 этой главы).

Лемма 5. *Фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.*

Доказательство. Пусть X, Y — топологические пространства с отмеченными точками x_0 и y_0 соответственно и $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — гомеоморфизм. Тогда определены гомеоморфизмы фундаментальных групп

$$\pi(\varphi)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

$$\pi(\varphi^{-1})\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

причем в силу функториальности имеем

$$\pi(\varphi^{-1})\pi(\varphi) = \pi(\varphi^{-1}\varphi) = 1_{\pi_1(X,x_0)},$$
$$\pi(\varphi)\pi(\varphi^{-1}) = \pi(\varphi\varphi^{-1}) = 1_{\pi_1(Y,y_0)};$$

следовательно, $\pi(\varphi) = [\pi(\varphi^{-1})]^{-1}$. ■

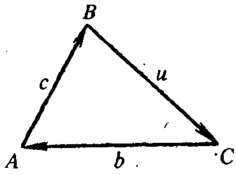


Рис. 78

Доказательство теоремы 1. На основании последней леммы достаточно вычислить фундаментальную группу плоского треугольника. Пусть Δ — треугольник с вершинами A, B, C, ориентированными ребрами a, b, c и отмеченной вершиной A (рис. 78).

Вычислим группу $\pi_1(\Delta, A)$. Пусть λ — произвольная петля в Δ с началом в точке A. Тогда в силу леммы 3 в гомотопическом классе петли λ существует линейчатая петля λ'. (Ясно, что треугольник Δ есть разбиение.) Поставим в соответствие каждому из ребер a, b, c петли $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ по следующему правилу: $\tilde{a} = cab$, $\tilde{b} = b^{-1}b$, $\tilde{c} = cc^{-1}$. Покажем, что классы петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, не обязательно различные, являются образующими в группе $\pi_1(\Delta, A)$. В самом деле, всякая линейчатая петля λ' состоит из элементарных путей, соответствующих ребрам, т. е. $\lambda' = \varphi(a, b, c)$. Заменив в этом выражении каждое ребро на соответствующую ему петлю, получим новую петлю $\lambda'' = \varphi(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$. Легко видеть, что петли λ' и λ'' комбинаторно гомотопны. Действительно, указанная замена ребра петлей заставляет нас сначала «дойти» до начала этого ребра от фиксированной вершины A и, «пройдя» затем это ребро, «вернуться» в A кратчайшим путем (см. рис. 78). Поэтому при последовательной замене ребер петлями мы, вернувшись в A из конца P предыдущего ребра, должны тотчас «отправиться» в начало следующего ребра, т. е. в ту же точку P. Тем самым при этой замене между каждыми двумя соседними ребрами петли вставляется путь вида $\Delta\Delta^{-1}$, т. е. путь, комбинаторно гомотопный нулю. Итак, в гомотопическом классе петли λ' всегда можно найти линейчатую петлю λ, представляющую собой конечное произведение, составленное из петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и обратных им петель.

Заметим теперь, что петли $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ гомотопны постоянным. Поэтому петля $\tilde{a}$ (точнее, определяемый ею гомотопический класс в $\pi_1(\Delta, A)$) является единственной образующей в группе $\pi_1(\Delta, A)$. Элемент $\tilde{a}$ нетривиален. В самом деле, если бы петля $\tilde{a}$ была стягиваема, то по лемме 4 она была бы и комбинаторно стягиваема, т. е. сводилась бы к нулю конечным числом комбинаторных деформаций I типа, что, очевидно, невозможно. Следовательно, петля $\tilde{a}$ не является комбинаторно стягиваемой, а значит, определяет нетривиальный элемент $[\tilde{a}] \in \pi_1(\Delta, A)$. Аналогично, нетривиален любой элемент $[\tilde{a}^l] \in \pi_1(\Delta, A)$, где $l > 1$.

Таким образом, $\pi_1(\Delta, A)$ есть свободная циклическая группа, порожденная элементом $[\tilde{a}]$, т. е. абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}$. ■

Упражнение 3°. Обобщая конструкцию доказательства теоремы 1, докажите, что фундаментальная группа букета m окружностей — свободная группа с m образующими.

Полезным орудием для вычисления фундаментальных групп более сложных пространств является следующая теорема.

Теорема 2 (Зейферт–ван Кампен). *Пусть X — топологическое пространство, являющееся объединением $X=X_1 \bigcup X_2$ открытых подмножеств X_1 и X_2 таких, что пространства X_1, X_2 и $X_0=X_1 \bigcap X_2$ линейно связны и непусты, и пусть $p\in X_0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную отображениями вложения:*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X_0, p) \arrow[dl, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\theta_2"] \arrow[dd, "\omega_0"] & \\
\pi_1(X_1, p) \arrow[dr, "\omega_1"'] & & \pi_1(X_2, p) \arrow[dl, "\omega_2"] \\
& \pi_1(X, p) &
\end{tikzcd}$$

Тогда группа $\pi_1(X, p)$ является факторгруппой свободного произведения $\pi_1(X_1, p)*\pi_1(X_2, p)$ по нормальному делителю, порожденному множеством $\{\Theta_1 a*\Theta_2 a^{-1}\colon a\in\pi_1(X_0, p)\}$. Другими словами, группа $\pi_1(X, p)$ — группа, образующими которой являются образы элементов $\pi_1(X_i, p)$, $i=1, 2$, а все соотношения между образующими являются следствиями соотношений, полученных как ω_i-образы соотношений в каждой из групп $\pi_1(X_i, p)$, $i=1, 2$, и соотношений $\omega_1\Theta_1\alpha=\omega_2\Theta a$, где $a\in\pi_1(X_0, p)$.

Упражнения. 4°. Пользуясь теоремой Зейферта–ван Кампена, получите утверждение упражнения 3°.

5°. Вычислите фундаментальную группу пространства, состоящего из двух окружностей, соединенных отрезками (рис. 79).

4. Фундаментальная группа поверхности. Перейдем к вычислению фундаментальной группы поверхности. На основании леммы 5 можно считать, что замкнутая поверхность дана в разбиении, определяемом канонической разверткой.

Теорема 3. *Пусть* X *— замкнутая поверхность* I *или* II *типа, определяемая словом* ω *вида* $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ *или* $a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_q a_q$ *соответственно, пусть* $x_0 \in X$ *— фиксированная точка поверхности (вершина триангуляции). Тогда* $\pi_1(X, x_0)$ *есть группа с образующими* $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ *или* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *соответственно и одним соотношением* $\omega = e$, *где* e *— единичный элемент.*

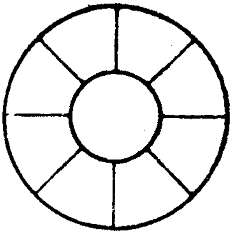


Рис. 79

Доказательство. Пусть X_1 — замкнутая поверхность, $\mathscr{P}$ — ее каноническая развертка, определяемая многоугольником Q и словом $\omega(Q)$. Пусть $X_1 = \varkappa(Q_1)$, где Q_1 — объединение всех ребер многоугольника Q. В силу эквивалентности всех вершин Q в развертке $\mathscr{P}$ их образы при отображении $\varkappa$ совпадают в X. Поэтому образ каждого ребра гомеоморфен окружности, и X_1 есть букет окружностей, склеенных в точке x_0, равный образу вершин многоугольника Q. При этом число окружностей в букете равно $2p$, если поверхность X имеет тип M_p, и ровно q, если X — типа N_q. Из результата о фундаментальной группе букета окружностей (см. упражнение 3°) получаем, что $\pi_1(X_1, x_0)$ — свободная группа, порожденная образующими $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$, если X — типа M_p, или образующими $a_1, a_2, \ldots, a_q$, если X — типа N_q. Обозначим эту группу через G.

Рассмотрим теперь отображение вложения $i\colon X_1 \to X$ и индуцированный им гомоморфизм фундаментальных групп

$$i_*\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Будем вычислять группу $\pi_1(X, x_0)$ следующим образом. Вначале докажем, что i_* — эпиморфизм. Тогда по теореме об эпиморфизме получим

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X_1, x_0)/\operatorname{Ker} i_* = G/\operatorname{Ker} i_*.$$

Вычисление ядра $\operatorname{Ker} i_*$ завершит доказательство теоремы.

Докажем, что i_* — эпиморфизм. Пусть $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ и K — какая-нибудь триангуляция поверхности X. Тогда по лемме 3 о линейчатой аппроксимации в гомотопическом классе α найдется линейчатая петля λ (в разбиении K). Можно считать, что K получено из канонического разбиения $\mathcal{P}$ поверхности X с помощью конечного числа операций вида а) или б).

Следовательно, в силу лемм 1, 2 и упражнений 1°, 2° в том же классе $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ существует линейчатая (т. е. составленная из ребер X_1) петля λ' в разбиении $\mathcal{P}$. Тем самым определен некоторый класс $\beta_\alpha \in \pi_1(X_1, x_0)$, для которого, очевидно, $i_*(\beta_\alpha) = \alpha$. Эпиморфность i_* доказана.

Перейдем к вычислению ядра $\operatorname{Ker} i_*$ эпиморфизма i_*. Пусть $\gamma \in \operatorname{Ker} i_*$ и λ — линейчатая петля разбиения $\mathcal{P}$ из класса γ. Тогда λ, очевидно, стягиваема в точку в X. В силу леммы 4 в $\mathcal{P}$ существует комбинаторное стягивание λ в вершину x_0. Иначе говоря, слово $\omega(\lambda)$, определяющее петлю λ, сводится к нулевому слову с помощью конечного числа комбинаторных деформаций I или II типа. Тогда ясно, что слово $\omega(\lambda)$ может состоять только из сочетаний вида:

1) aa^{-1};

2) (более сложный вид) $\omega_4h_2\omega_1h\omega^lh^{-1}\omega_2h_1\omega^mh_1^{-1}\omega_3h_2^{-1}\omega_5$, где $\omega_4\cdot\omega_5 = \omega$, $\omega_1\cdot\omega_2\cdot\omega_3 = \omega$; h_1, h_2, h — слова данного разбиения; l, m — целые показатели (положительные или отрицательные);

3) сочетаний, аналогичных 2), но с другими разбиениями слова ω на составные части. Это следует из того, что кроме ω, в данной развертке нет других ограничивающих слов.

Легко видеть, что комбинаторные деформации I типа (добавление или вычеркивание сочетания вида aa^{-1}) не выводят петлю λ из ее гомотопического класса, так как петля aa^{-1} гомотопна нулю в X_1. Вследствие этого можно считать, что сочетаний вида 1) в $\omega(\lambda)$ нет. Сочетания вида 2) упрощаются комбинаторными деформациями I типа следующим образом:

$$\omega_4h_2\omega_1h\omega^lh^{-1}\omega_2h_1\omega^mh_1^{-1}\omega_3h_2^{-1}\omega_5 \rightarrow$$

Вставив сочетания $\omega_1^{-1}\omega_1$, $\omega_3\omega_3^{-1}$, получаем

$$\rightarrow \omega_4h_2\omega_1h\omega^lh^{-1}\omega_1^{-1}\omega_1\omega_2\omega_3\omega_3^{-1}h_1\omega^mh_1^{-1}\omega_3h_2^{-1}\omega_5 \rightarrow$$

Так как по условию $\omega_1\omega_2\omega_3 = \omega$, то, обозначив $\omega_1h = g$, $\omega_3^{-1}h = a$, получаем

$$\rightarrow \omega_4h_2g\omega^lg^{-1}\omega a\omega^ma^{-1}h_2^{-1}\omega_5 \rightarrow$$

Вставим теперь сочетания $h_2^{-1}\omega_4^{-1}\omega_4h_2$, $h_2^{-1}\omega_5\omega_5^{-1}h_2$, тогда имеем

$$\rightarrow \omega_4h_2g\omega^lg^{-1}h_2^{-1}\omega_4^{-1}\omega_4h_2\omega h_2^{-1}\omega_5\omega_5^{-1}h_2a\omega^ma^{-1}h_2^{-1}\omega_5 \rightarrow$$

Обозначив $\omega_4h_2g = f$, $\omega_5^{-1}h_2a = \beta$, получаем

$$\rightarrow f\omega^lf^{-1}\omega_4h_2\omega h_2^{-1}\omega_5\beta\omega^m\beta^{-1} \rightarrow$$

И, наконец, вставив сочетание $\omega_5\omega_5^{-1}$ и обозначив $\omega_5 h_2 = \gamma$, окончательно получим

$$\rightarrow \quad f\omega^l f^{-1}\omega\gamma\omega\gamma^{-1}\beta\omega^m\beta^{-1}.$$

Таким образом, мы показали, что всякая линейчатая петля, представляющая элемент ядра Ker i_*, приводится с помощью комбинаторных деформаций I типа к петле, слово которой состоит только из комбинаций вида $\alpha\omega^m\alpha^{-1}$, где m — любой целый показатель, а α — произвольное слово, составленное из символов ребер развертки или пустое.

Обратно, очевидно, что если линейчатая петля λ имеет слово $\omega(\lambda)$, состоящее только из сочетаний вида $\alpha\omega^m\alpha^{-1}$, то она определяет элемент из Ker i_*.

Упражнение 6°. Докажите, что множество слов описанного вида есть нормальный делитель N группы G, порожденный элементом $\omega = \omega(Q)$.

Таким образом, $\operatorname{Ker} i_* = N$ и, следовательно, $\pi_1(X, x_0) = G/N$. Последнее равенство эквивалентно тому, что на образующие группы G накладывается единственное соотношение $\omega = e$. ∎

Укажем несколько следствий из теоремы 3.

Следствие 1. *Фундаментальная группа* $\pi_1(\mathbb{R}P^2, p)$ *проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$ *есть циклическая группа второго порядка.*

Доказательство. Поверхность $X = \mathbb{R}P^2$ имеет каноническую развертку со словом a_1a_1, поэтому $\pi_1(X, x_0)$ — циклическая группа с одной образующей a_1 и соотношением $a_1^2 = e$. ∎

Используя более сильные средства, в § 9 гл. IV покажем, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq Z_2$, $n \geqslant 2$, в частности $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq Z_2$.

Следствие 2. *Фундаментальная группа тора* $\pi_1(T^2, x_0)$ *есть свободная абелева группа с двумя образующими.*

Доказательство. Тор T^2 имеет каноническую развертку со словом $aba^{-1}b^{-1}$, поэтому получаем, что группа $\pi_1(T^2, x_0)$ порождена образующими a, b. Соотношение $aba^{-1}b^{-1} = e$ дает условие ее коммутативности $ab = ba$. ∎

Геометрически образующей a_1 фундаментальной группы проективной плоскости соответствует ее абсолют (см. модели $\mathbb{R}P^2$ в § 4 гл. II). Образующим a_1, b_1 фундаментальной группы тора T^2 соответствуют его параллель и меридиан — две основные нестягиваемые петли на торе.

Упражнение 7°. Выясните геометрический смысл образующих фундаментальной группы поверхностей M_p, N_q.

Фундаментальная группа дополнения узла играет важную роль в задаче классификации узлов.

Упражнение 8°. Докажите, что тривиальный узел не эквивалентен «трилистнику» и «восьмерке».

Указание. Покажите, что фундаментальные группы дополнений в $\mathbb{R}^3$ к этим узлам не изоморфны.

5. Топологическая инвариантность эйлеровой характеристики поверхности. Пусть X, X' — две гомеоморфные замкнутые поверхности с какими-то разбиениями Π, Π'; пусть $\chi(\Pi)$, $\chi(\Pi')$ — их эйлеровы характеристики, вычисленные по разбиениям Π, Π' соответственно. Докажем, что $\chi(\Pi) = \chi(\Pi')$.

Развертка Π (Π') эквивалентными преобразованиями приводится к канонической одного из типов I или II (определяемого числом ручек p (p') или листов Мёбиуса q (q'), приклеенных к сфере). Числа $2p$ ($2p'$), q (q') суть числа образующих фундаментальной группы поверхности (связанных определяющим соотношением $\omega = e$). В силу гомеоморфизма X и X' группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$ изоморфны. Следовательно, если канонический тип разверток Π, Π' соответствует I типу, то $2p = 2p'$, откуда $\chi(\Pi) = \chi(\Pi')$ ввиду равенств $\chi(\Pi) = 2 - 2p$, $\chi(\Pi') = 2 - 2p'$. Аналогично рассматривается случай канонических разверток II типа. Таким образом, две различных поверхности типа M_p разного рода (равно как и типа N_q) не гомеоморфны.

Две поверхности типов M_p и N_q, $q \geqslant 1$, также не гомеоморфны. Это следует из неизоморфности фундаментальных групп ориентируемой поверхности M_p рода p и неориентируемой поверхности N_q, $q \geqslant 1$, рода q. Действительно, $\pi_1(M_p)$ — группа с образующими $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ и соотношением $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1} = e$, в то время как группа $\pi_1(N_q)$ — группа с образующими $a_1, \dots, a_q$ и соотношением $a_1a_1a_2a_2\dots a_qa_q = e$. Ясно, что эти группы не изоморфны, если $2p \neq q$. Если же предположить, что $2p = q$, то $\pi_1(M_p)$ не изоморфна $\pi_1(N_q)$ по следующей причине. В факторгруппе $\pi_1(N_q)/[\pi_1(N_q), \pi_1(N_q)]$ группы $\pi_1(N_q)$ по ее коммутанту $[\pi_1(N_q), \pi_1(N_q)]$ имеется класс смежности второго порядка, содержащий элемент $a_1a_2\dots a_q$. В факторгруппе $\pi_1(M_p)/[\pi_1(M_p), \pi_1(M_p)]$ элементов второго порядка нет, поскольку элемент $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ свободной группы с образующими $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ содержится в коммутанте этой группы.

Заметим, что классификационная теорема 2 § 4 гл. II теперь полностью доказана. Род поверхности и свойство ориентируемости полностью определяют ее топологический тип.

6. О вычислении высших гомотопических групп. Вычисление гомотопических групп пространств является важной, но трудной задачей. Разработаны методы таких вычислений, однако даже применение этих методов в конкретных случаях сопряжено со значительными трудностями. Тем не менее для достаточно «хороших» пространств некоторые гомотопические группы вычислены и играют важную роль во многих задачах.

Следующая теорема позволяет сводить вычисление гомотопических групп пространства X к вычислению соответствующих групп пространства Y, гомотопически эквивалентного X.

Теорема 4. *Если* $f\colon X \to Y$ *— гомотопическая эквивалентность, то для всякой точки* $x \in X$ *гомоморфизм*

$$f_n\colon \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x)),$$

индуцированный f, *являющийся изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть отображение g гомотопически обратно f и φ — представитель некоторого класса $[\varphi] \in \pi_n(X, x_0)$. Тогда $(gf)\varphi$ — представитель его образа $(gf)_n[\varphi]$. Сфероид φ «прикреплен» к точке x_0, а сфероид $(gf)\varphi$ — к точке $(gf)(x_0) = z_0$, причем первый сфероид гомотопен второму в силу $gf \sim 1_X$. Пусть при этой гомотопии точка x_0 перемещается в точку z_0, описывая путь $\omega(t)$ (рис. 80).

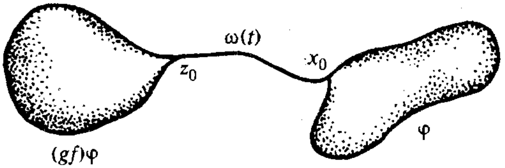


Рис. 80

Пусть $\omega(t)$ индуцирует изоморфное отображение $\pi_n(X, z_0) \xrightarrow{S_n^\omega} \pi_n(X, x_0)$ (см. теорему 5 § 3). Гомотопия сфероидов φ и $(gf)\varphi$ порождает гомотопию сфероидов $gf\varphi$ и α из $S_n^{\omega^{-1}}[\varphi]$. Следовательно, $g_n f_n[\varphi] = [gf\varphi] = [\alpha] = S_n^{\omega^{-1}}[\varphi]$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "S^{\omega^{-1}}"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "g_n"] \\
\pi_n(X, gf(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Аналогично можно показать (проделайте это самостоятельно), что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "g_n"'] \arrow[dr, "S_n^{(\omega')^{-1}}"] & \\
\pi_n(X, gf(x_0)) \arrow[rr, "f_n"] & & \pi_n(Y, (fgf)(x_0))
\end{tikzcd}$$

где $\omega' \colon I \to Y$ — путь от точки $f(x_0)$ до точки $(fgf)(x_0)$, равный $f\omega$. Из коммутативности этих диаграмм и того факта, что $S_n^{\omega^{-1}}$, $S_n^{(\omega')^{-1}}$ — изоморфизмы, следует, что f_n, g_n — изоморфизмы. ■

Упражнения. 9°. Докажите, что одноточечное пространство и окружность S' имеют разные гомотопические типы.

10°. Докажите, что двумерный диск и двумерный цилиндр над окружностью имеют разные гомотопические типы.

Задача вычисления групп $\pi_k(S^n)$ стимулировала развитие многих разделов современной топологии, хотя полностью не решена и в настоящее время. Здесь резко разделяются два случая: $k \leqslant n$ и $k > n$. Первый случай достаточно элементарен, хотя и требует развития специальной методики. Приведем без доказательства[*] следующие результаты:

$$\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0 \qquad (n > 1),$$

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \qquad (n \geqslant 1).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что сфера S^n не стягиваема ни к одной из своих точек.

Второй случай до конца не исследован, и трудности растут с ростом n и $k - n$. Приведен некоторые простейшие результаты:

$$\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}, \;\; \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2, \ldots, \;\; \pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2 \;\; (n \geqslant 3).$$

Это опровергает кажущееся естественным предположение о том, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k > n$.

Таким образом, группы $\pi_n(S^n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ — это свободные абелевы группы с одной образующей γ_n, причем γ_n — гомотопический класс тождественного отображения $1_{S^n} \colon S^n \to S^n$. Можно представить себе кратные классы $l \cdot \gamma_n$ как гомотопические классы таких отображений $\varphi \colon S^n \to S^n$, которые l раз «наворачивают» сферу S^n на себя. При этом если $l > 0$, то говорят о сохранении ориентации сферы при отображении φ, а если $l < 0$, то говорят об изменении ориентации (сравните с гомотопическими классами из $\pi_1(S^1)$).

Упражнение 11°. Пусть S^n — сфера с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, что отображение S^n в себя, заданное соответствием

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

определяет гомотопический класс, равный $(-\gamma_n)$.

---

[*] Группа π_1 (S^1) вычислена в теореме 1.

Совсем просто доказать, что $\pi_n(X, x_0) = 0$, $n \geqslant 1$, если пространство X стягиваемо в точку (следует воспользоваться теоремой 4). В частности, получаем для диска D^n и пространства $\mathbb{R}^n$

$$\pi_k(\overline{D}^n) = 0, \quad \pi_k(D^n) = 0, \quad \pi_k(\mathbb{R}^n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В § 9 гл. IV будет показано, что при $k \geqslant 2$

$$\pi_k(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_k(S^n) \simeq \begin{cases} 0, & k < n, \\ \mathbb{Z}, & k = n. \end{cases}$$

Для некоторых приложений (см. § 6 гл. I) необходимо знать группы π_1 и π_2 для группы ортогональных матриц с определителем 1 (обозначается $SO(3)$), рассматриваемой как подпространство в топологическом пространстве $\mathbb{R}^9$ всех матриц 3×3. Ответ получается сразу, если заметить, что $SO(3)$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$. Действительно, каждая ортогональная матрица из $SO(3)$ представляет вращение стандартного базисного репера в $\mathbb{R}^3$. Из канонического вида такой матрицы заключаем, что вращение характеризуется заданием некоторой оси l, проходящей через 0, и поворотом всего пространства на угол α, $|\alpha| \leqslant \pi$, причем повороты на π и $(-\pi)$ эквивалентны. Если взять сферу S^2 единичного радиуса, то ось l задается парой диаметрально противоположных точек $(x, -x)$ на S^2 — точек пересечения l с S^2, и угол α — точкой на диаметре $[-x, +x]$ с координатой $x(\alpha) = \alpha/\pi$. Таким образом, множество всех матриц из $SO(3)$ биективно соответствует точкам единичного диска $\overline{D}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками на границе, т. е. точкам $\mathbb{R}P^3$. Нетрудно проверить, что указанное соответствие — гомеоморфизм.

Таким образом, $\pi_1(SO(3)) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(SO(3)) \simeq$ $\simeq \pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$, а также $\pi_3(SO(3)) \simeq \pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$.

7. Некоторые применения. Докажем вначале важное свойство сферы S^n.

Теорема 5. *Сфера* S^n *(граница диска* $\overline{D}^{n+1}$*) не является ретрактом* $\overline{D}^{n+1}$.

Доказательство. В § 2 было указано в терминах функтора в категорию групп необходимое условие существования продолжения отображения. Применим это замечание, взяв в качестве функтора функтор π_n. Мы уже знаем, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_n(\overline{D}^{n+1}) = 0$. Далее, если бы сфера S^n была ретрактом $\overline{D}^{n+1}$, то имела бы место коммутативная диаграмма (1), где i — вложение сферы в шар, а r — искомая ретракция. Поскольку π_n — ковариантный функтор, то диаграмму (1) он переводил бы в коммутативную диаграмму (2), которая имеет вид (3). Последнее противоречит ее коммутативности. Следовательно, предположение о существовании ретракции r неверно. ■

$$\begin{tikzcd}
\overline{D}^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "1_{S^n}"] \\
& S^n &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\overline{D}^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "1_{\pi_n(S^n)}"] \\
& \pi_n(S^n) &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "r_*"'] & & \mathbb{Z} \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "1_{\mathbb{Z}}"] \\
& \mathbb{Z} &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

С помощью теоремы 5 доказывается следующая теорема, интересная и важная в приложениях.

Теорема о неподвижной точке (Брауэр). *Всякое непрерывное отображение* $g\colon \overline{D}^{n+1} \to \overline{D}^{n+1}$ $(n+1)$*-мерного замкнутого шара (диска) в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, т. е. существует точка* $x_* \in \overline{D}^{n+1}$ *такая, что* $g(x_*) = x_*$.

Доказательство. В самом деле, если такой точки нет, т. е. для всякой точки $x \in \overline{D}^{n+1}$, $g(x) \neq x$, то отрезок, соединяющий точку $g(x)$ с точкой x, можно продолжить за точку x до пересечения со сферой S^n в некоторой точке $r(x)$. Тогда отображение $r\colon \overline{D}^{n+1} \to S^n$, $x \mapsto r(x)$, является распространением на $\overline{D}^{n+1}$ тождественного отображения сферы S^n. Но мы только что доказали, что такого распространения не существует. Противоречие доказывает теорему. ■

8. Степень отображения. Группа $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ тесно связана с часто используемым в анализе понятием степени непрерывного отображения $f\colon S^n \to S^n$. Пусть γ_n — образующая группы $\pi_n(S^n)$. Тогда $f_*(\gamma_n) = \alpha\gamma_n$, где α целое, а f_* — гомоморфизм группы $\pi_n(S^n)$, индуцируемый отображением f. Число α называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$ (знак числа $\deg f$ не зависит от выбора образующей).

Упражнения. 12°. Отображение единичной окружности $S^1 = \{z\colon |z| = 1\}$ комплексной плоскости задано формулой $f(z) = z^n$. Покажите, что $\deg f = n$.

13°. Покажите, что если $f\colon S^1 \to S^1$ — локальный гомеоморфизм, то число точек в полном прообразе $f^{-1}(x)$ любой точки $x \in S^1$ постоянно и равно $|\deg f|$.

Естественно вводится понятие степени и для отображений $f\colon S_1^n \to S_2^n$ из одного экземпляра сферы в другой. (Для этого нужно зафиксировать базисные классы γ_n^1 в $\pi_n(S_1^n)$ и γ_n^2 в $\pi_n(S_2^n)$, тогда $f_*(\gamma_n^1) = \deg f \cdot \gamma_n^2$.) Так как γ_n — гомотопический класс $[1_{S^n}]$ тождественного отображения, то для отображения $f\colon S^n \to S^n$ имеем

$$f_*(\gamma_n) = f_*[1_{S^n}] = [f 1_{S^n}] = [f],$$

следовательно, $\deg f \cdot \gamma_n$ — гомотопический класс отображения f, таким образом, степень $\deg f$ есть «номер» гомотопического класса $[f]$.

Если $f = 1$ — тождественное отображение, то $\deg f = 1$, если $f \sim 0$ (гомотопно постоянному отображению), то $\deg f = 0$, если $f\colon S^n \to S^n$, $g\colon S^n \to S^n$ — два отображения, то они гомотопны тогда и только тогда, когда имеют равные степени: $\deg f = \deg g$. Приведем также полезную формулу $\deg(fg) = (\deg f)\cdot(\deg g)$, вытекающую из соотношения $[fg] = f_*[g]$.

Понятие степени применяется при исследовании вопроса о продолжении непрерывных отображений $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ на шар $\overline{D}^{n+1}$, ограниченный сферой S^n. Так как пространство $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ гомотопически эквивалентно S^n, то их гомотопические группы изоморфны и, следовательно, можно говорить о степени данного отображения, называемой обычно характеристикой (или вращением) векторного поля f; обозначим ее $\chi_{S^n}(f)$.

Лемма 6. *Условие* $\chi_{S^n}(f) = 0$ *необходимо и достаточно для существования продолжения* $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ *отображения* f.

Доказательство очевидно следует из замечания о том, что продолжение $\tilde{f}$ определяет гомотопию $f \sim 0$ по формуле

$$f(x, t) = \tilde{f}(tx), \quad x \in S^n, \quad t \in [0, 1]$$

(если S^n — сфера радиуса 1 с центром в 0), и обратно.

Упражнение 14°. Постройте продолжение $\tilde{f}$, когда $f \sim 0$. Из леммы 6 вытекает очевидное следствие.

Следствие. *Если* $\chi_{S^n}(f) \neq 0$, *то любое продолжение* $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *имеет нуль, т. е. существует точка* $x_0 \in D^{n+1}$, $\tilde{f}(x_0) = 0$.

Это следствие часто используют для доказательства существования решения уравнения $\tilde{f}(x) = 0$, где $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — заданное отображение.

Пример 1. Легко убедиться, что в условиях теоремы Брауэра о неподвижной точке отображение $\tilde{f}(x) = -g(x) + x$ либо имеет нуль на S^n, либо $\chi_{S^n}(\tilde{f}) = 1$ ($\tilde{f}\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ гомотопируется к тождественному отображению $\tilde{f}(x, t) = -tg(x) + x$, $x \in S^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$). Следовательно, $\tilde{f}$ имеет нуль в $\overline{D}^{n+1}$.

Пример 2. Основная теорема алгебры: у комплексного полинома $\tilde{f}(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$ существует корень в комплексной плоскости.

Обозначим S^1_ρ окружность на z-плоскости: $\{z: |z| = \rho\}$.

Лемма 7. *При достаточно большом* ρ *имеем*

$$\tilde{f}: S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

причем $\chi_{S^1_\rho}(\tilde{f}) = m$.

Доказательство. Рассмотрим гомотопию

$$\tilde{f}(z, t) = z^m + t(a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m), \quad t \in [0, 1].$$

Имеем оценку

$$|\tilde{f}(z, t)| \geqslant |z|^m \left[1 - t\left(a_1 \frac{1}{|z|} + \ldots + a_{m-1} \frac{1}{|z|^{m-1}} + a_m \frac{1}{|z|^m}\right)\right],$$

$$|z| \neq 0.$$

Очевидно, что найдется столь большое $\rho > 0$, что $|\tilde{f}(z, t)| > 0$ при $|z| = \rho$, $t \in [0, 1]$. Следовательно, $\tilde{f}: S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопно отображению $g: S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $g(z) = z^m$. Согласно упражнению 12° $\chi_{S^1_\rho}(g) = m$, следовательно, и $\chi_{S^1_\rho}(f) = m$. Для завершения доказательства теоремы теперь нужно воспользоваться следствием из леммы 6. ■

9. Некоторые результаты о гомотопических группах конкретных пространств. Вначале дополним сведения о гомотопических группах сфер (п. 6). Соотношения $\pi_{n+2}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 3$, $\pi_{n+3}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_{24}$ при $n \geqslant 5$, $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ при $n \geqslant 6$, $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ при $n \geqslant 7$ вместе с теоремой Фрейденталя об изоморфизме всех групп $\pi_{n+k}(S^n)$ при $n \geqslant k + 2$ и с соотношениями п. 6 позволяют вычислить большой массив групп $\pi_k(S^n)$, и в том числе изоморфных групп $\pi_{n+k}(S^n)$, $n \geqslant k + 2$, называемых *стабильными гомотопическими группами сфер.*

Для приложений представляют интерес гомотопические группы ряда классических матричных групп: группы вещественных $n \times n$-матриц $\mathrm{SO}(n)$ — специальная ортогональная (с детерминантом 1), $\mathrm{Sp}(n)$ — симплектическая, и их комплексные аналоги $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ — унитарная и специальная унитарная. Все указанные группы вложены в линейное пространство $n \times n$-матриц (вещественное или комплексное соответственно) и наследуют евклидову топологию из этого пространства.

Приведем следующие данные:

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2, \ n \geqslant 3; \quad \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \simeq \pi_1(\mathrm{Sp}(n)) = 0, \ n \geqslant 1;$$

$\pi_1(\mathrm{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$; $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2 = 0$ для всех рассматриваемых групп;

$$\begin{cases} \pi_3(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n = 3, \quad n \geqslant 5, \\ \pi_3(\mathrm{SO}(4)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \pi_3(\mathrm{SU}(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 2, \\ \pi_3(\mathrm{Sp}(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_4(\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_4(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \pi_4(\mathrm{SO}(4)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \pi_4(\mathrm{SO}(5)) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad \pi_4(\mathrm{SO}(n)) = 0, \quad n \geqslant 6, \\ \pi_4(\mathrm{SU}(n)) = 0, \quad n \geqslant 3; \quad \pi_4(\mathrm{Sp}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad n \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_k(\mathrm{SO}(3)) \simeq \pi_k(\mathrm{SU}(2)) \simeq \pi_k(\mathrm{Sp}(1)) \simeq \pi_k(S^3), \quad k > 1, \\ \pi_k(\mathrm{SO}(4)) \simeq \pi_k(S^3) \oplus \pi_k(S^3), \quad k > 1; \end{cases}$$

$$\pi_1(\mathrm{U}(1)) \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi_k(\mathrm{U}(1)) = 0, \quad k > 1;$$

$$\pi_1(\mathrm{U}(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi_k(\mathrm{U}(n)) \simeq \pi_k(\mathrm{SU}\,(n)), \quad k > 1.$$

Группы $\pi_k(\mathrm{SO}(n))$, $\pi_k(\mathrm{U}(n))$ не зависят от n при $1 \leqslant k \leqslant n-2$ и $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$ соответственно и называются *стабильными* гомотопическими группами и обозначаются $\pi_k(\mathrm{SO})$, $\pi_k(\mathrm{U})$; для них справедлива периодичность Ботта $\pi_{k+8}(\mathrm{SO}) \simeq \pi_k(\mathrm{SO})$, $\pi_{k+2}(\mathrm{U}) \simeq \pi_k(\mathrm{U})$ позволяющая с помощью соотношений $\pi_1(\mathrm{SO}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(\mathrm{SO}) = 0$, $\pi_3(\mathrm{SO}) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_4(\mathrm{SO}) = 0$, $\pi_5(\mathrm{SO}) = 0$, $\pi_6(\mathrm{SO}) = 0$, $\pi_7(\mathrm{SO}) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_8(\mathrm{SO}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(\mathrm{U}) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_2(\mathrm{U}) = 0$ вычислить любую стабильную гомотопическую группу для групп $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическое изложение теории гомотопий дано в книгах [58, 62, 63, 65, 78, 81].

Неформальное введение в теорию гомотопий и ее приложения имеется в [24].

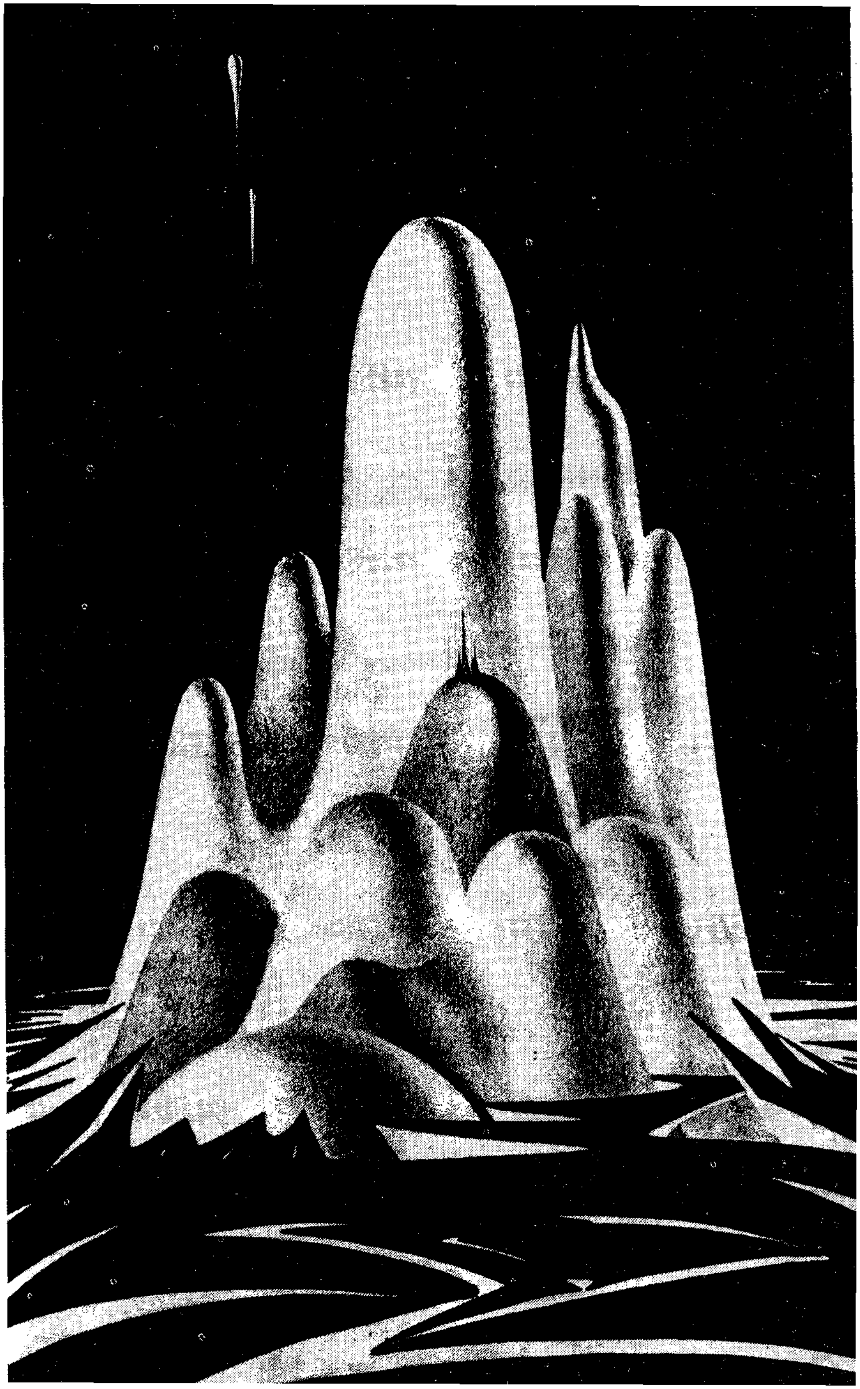
Для начального изучения понятия фундаментальной группы можно рекомендовать книги [34, 43].

При изучении понятий категории и функтора полезно обратиться к монографии [41].

Теория степени отображения и характеристики векторного поля — см. обзор литературы к гл. IV, V.

С приложениями теории степени можно познакомиться по книге [35].

Задачники по теории гомотопий: [48, 52].



Глава IV

Многообразия и расслоения

В предыдущих главах рассматривались общие свойства топологических пространств и их отображений. В топологии и ее приложениях появляются, однако, пространства с дополнительными структурами, например, гладкие многообразия и расслоенные пространства, играющие важную роль во многих разделах современной математики.

В настоящей главе систематически изучаются гладкие многообразия и естественно связанные с ними касательные расслоения, излагаются элементы теории критических точек гладких функций на многообразиях и элементы теории расслоенных пространств.

§ 1. Основные понятия дифференциального исчисления в n-мерном пространстве

1. Гладкие отображения. Напомним, что $\mathbb{R}^n$ — это пространство упорядоченных наборов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ из действительных чисел (см. § 2 гл. II), называемых *точками* или *векторами*. Будем считать, что $\mathbb{R}^n$ *стандартно вложено в* $\mathbb{R}^{n+k}$, т. е. точку $(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с точкой $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ из $\mathbb{R}^{n+k}$. Числа $x_1, \ldots, x_n$ из набора $(x_1, \ldots, x_n)$ называются *стандартными координатами* точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Всякое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ можно представить (см. § 2 гл. II) как упорядоченный набор из m функций:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Определение 1. Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ называется *гладким* (или *дифференцируемым*) *класса* C^r, $r \geqslant 1$, на U, если каждая функция f_k, $k=1, \ldots, m$, имеет все непрерывные частные производные $\frac{\partial^s f_k}{\partial^{s_1} x_1 \dots \partial^{s_n} x_n}$, $s_1 + \dots + s_n = s$, на U до порядка $s = r$ включительно.

Гладкие отображения f класса C^r называют также *C^r-отображениями* и пишут $f \in C^r$.

Если все функции f_k имеют непрерывные частные производные любого порядка, то отображение f называется *бесконечно гладким* ($f \in C^\infty$). Непрерывные отображения называют *C^0-отображениями*. Очевидно, что справедливы следующие включения:

$$C^0 \supset C^1 \supset \dots \supset C^r \supset \dots \supset C^\infty.$$

В том случае, когда все функции f_k аналитические (функция называется *аналитической*, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки), отображение f называется *аналитическим* ($f \in C^\omega$). Справедливо включение $C^\infty \supset C^\omega$.

Определение 2. Матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

первых производных отображения f, вычисленных в точке x_0, называется *матрицей Якоби отображения f в x_0* и обозначается $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$.

Матрица Якоби определяет линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_0} x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x_0} x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0} x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\Big|_{x_0} x_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_{x_0} x_n, \end{aligned}$$

которое называется *производной отображения f в точке x_0* и обозначается $D_{x_0} f$. Производная является *«линеаризацией»* отображения f: аффинное отображение $f(x_0) + (D_{x_0} f)(x - x_0)$ совпадает с $f(x)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\|x - x_0\|$. Точнее, $D_{x_0} f$ — единственное линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, для которого

$$\frac{f(x) - f(x_0) - (D_{x_0} f)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Следствием теоремы о производной сложной функции является следующее утверждение («цепное правило»): *при суперпозиции отображений f и g матрицы Якоби перемножаются, т. е.*

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x}\right)\bigg|_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{g(x_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\bigg|_{x_0}.$$

Доказательство этого факта предоставляется в качестве упражнения.

2. Ранг отображения. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^r, $r \geqslant 1$. *Рангом отображения f в точке x_0* называется ранг его матрицы Якоби, вычисленной в точке x_0, и обозначается $\operatorname{rank}_{x_0} f$. Он равен размерности подпространства в $\mathbb{R}^m$ — образа $\mathbb{R}^n$ при линейном отображении $D_{x_0} f$. Так как ранг матрицы не может превысить число строк или столбцов, то $\operatorname{rank}_{x_0} f \leqslant \min(n, m)$. Точки, в которых $\operatorname{rank}_{x_0} f = \min(n, m)$, называются *регулярными* (иногда также *некритическими, неособыми*). Точки, в которых $\operatorname{rank}_{x_0} f < \min(n, m)$, называются нерегулярными (также критическими, особыми).

Множество регулярных точек отображения f открыто в $\mathbb{R}^n$ (в силу непрерывности частных производных определитель, на котором реализуется ранг матрицы Якоби, отличен от нуля в некоторой окрестности регулярной точки). Множество регулярных точек может быть и пустым. (Приведите примеры.)

3. Теорема о неявной функции. Приведем *теорему о неявной функции*, доказываемую в курсе анализа. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ представим в виде (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества и $(x_0, y_0) \in U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Теорема 1. *Если $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ есть C^1-отображение, $f(x_0, y_0) = 0$ и $\det \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, то существуют такая открытая окрестность $W(x_0) \subset U$ точки x_0 и такое отображение $g\colon W(x_0) \to V$, что $g(x_0) = y_0$ и $f(x, g(x)) = 0$ для любого $x \in W(x_0)$, причем такое отображение g единственно. Кроме того, $g \in C^1$ и*

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = -B^{-1}A, \tag{1}$$

где матрицы B и A получаются из матриц $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$ соответственно при замене аргумента y на $g(x)$.

Замечание. Если $f \in C^r$, $r \geqslant 1$, то $g \in C^r$. Это утверждение вытекает из равенства (1).

Следствием теоремы о неявной функции является *теорема об обратном отображении.*

Теорема 2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, f: $U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса C^r, $r \geqslant 1$; $x_0 \in U$ — регулярная точка отображения f. Тогда существуют открытые окрестности $V(x_0)$, $W(f(x_0))$ точек x_0 и $f(x_0)$ такие, что f является гомеоморфизмом $v(x_0) \xrightarrow{f} W(f(x_0))$ и $f^{-1} \in C^r$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение F: $\mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, задаваемое по правилу $F(y, x) = y - f(x)$ $(y \in \mathbb{R}^n,\ x \in U)$. Обозначим $y_0 = f(x_0)$. Очевидно, $F \in C^r$ и $F(y_0, x_0) = 0$. Так как $\operatorname{rank}_{x_0} f = n$, то $\det \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{(y_0,x_0)} \neq 0$. По теореме о неявной функции существуют открытая окрестность $W(y_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки y_0 и единственное отображение g: $W(y_0) \to U$ такие, что $g(y_0) = x_0$ и для любого $y \in W(y_0)$

$$F(y, g(y)) = y - f(g(y)) = 0. \tag{2}$$

Положим $V(x_0) = g(W(y_0))$. Так как $V(x_0) = f^{-1}(W(y_0))$, то $V(x_0)$ открыто в силу непрерывности f. Таким образом, g: $W(y_0) \to V(x_0)$ — отображение открытых множеств, и в силу (2) получаем $g = f^{-1}$. Кроме того, в силу замечания к теореме 1 имеем $f^{-1} \in C^r$. ■

Определение 3. Отображение f: $U \to V$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ называется *C^r-диффеоморфизмом*, $r \geqslant 1$, если: 1) f — гомеоморфизм U на V; 2) $f \in C^r$; 3) $f^{-1} \in C^r$.

Упражнение 1°. Постройте C^∞-диффеоморфизм f: $D^n_\rho(x) \to \mathbb{R}^n$.

Теперь теорему об обратном отображении можно сформулировать в следующем виде. *Если f: $U \to \mathbb{R}^n$ есть C^r-отображение, $r \geqslant 1$, открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и x_0 — регулярная точка $\widehat{f}$, то существуют открытые окрестности $V(x_0)$, $W(f(x_0))$ точек x_0, $f(x_0)$ такие, что отображение f: $V(x_0) \to W(f(x_0))$ является C^r-диффеоморфизмом.*

Упражнения. 2°. Докажите, что диффеоморфизм не имеет нерегулярных точек.

Указание. Воспользуйтесь замечанием о матрице Якоби для суперпозиции отображений f, f^{-1}.

3°. Пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — отображение класса C^r, $r \geqslant 1$. Покажите, что нерегулярные точки f характеризуются тем, что первые частные производные f по всем переменным в этих точках равны нулю.

4. «Криволинейные» системы координат. Пусть U, $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества и $f\colon U \to V$ — гомеоморфизм. Положение каждой точки $y \in V$ можно задать с помощью стандартных координат $y_1, \ldots, y_n$ точки y, но это можно сделать и с помощью стандартных координат точки $x = f^{-1}(y) \in U$.

Определение 4. Стандартные координаты точки $f^{-1}(y) \in U$ называют *«криволинейными» координатами точки* $y \in V$.

Иными словами, вместо координатных плоскостей $y_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, в V рассматриваются образы координатных плоскостей $x_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, в U при гомеоморфизме f, пересечение которых определяет положение точки y. Термин «криволинейные» координаты просто отражает тот факт, что новые координатные «плоскости» в V, вообще говоря, «искривлены» (рис. 81).

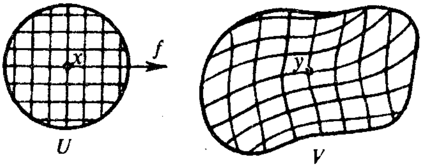


Рис. 81

Отметим, что в анализе криволинейные координаты вводятся обычно не с помощью гомеоморфизма, а с помощью C^r-диффеоморфизма, где порядок гладкости r зависит от рассматриваемой задачи.

Если на V задана функция g как функция стандартных координат точки y, то ее можно рассматривать как функцию стандартных координат точки x, т. е. как функцию криволинейных координат точки y. В анализе такая операция называется *заменой переменных*. Иначе говоря, мы совершаем замену координат в пространстве прообразов функции g. Это равносильно тому, что вместо функции g рассматривается функция gf. Разумеется, можно рассматривать и отображения и совершать аналогичные замены переменных. Замены делают также и в пространстве образов отображений: если $g\colon W \to V$ — отображение множества $W \subset \mathbb{R}^m$, то вместо стандартных координат точки $g(z)$, $z \in W$, рассматриваются криволинейные координаты точки $g(z)$, определяемые гомеоморфизмом f. Такая замена равносильна тому, что вместо отображения g рассматривается отображение $f^{-1}g$.

Заметим, что ранг гладкого отображения не меняется при гладкой замене переменных.

5. Теорема о выпрямлении. *Стандартным вложением* $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+k}$ называют отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, задаваемое соответствием $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

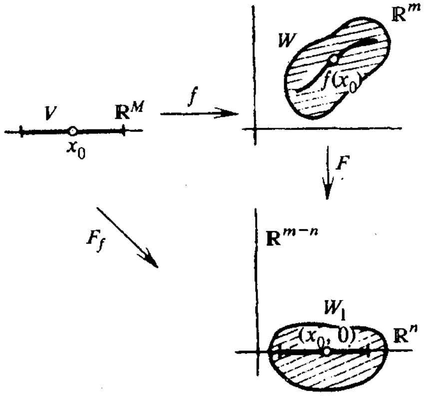
Стандартной проекцией $\mathbb{R}^{n+k}$ на $\mathbb{R}^n$ называют отображение $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, задаваемое соответствием $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 3 (о выпрямлении отображения в окрестности регулярной точки). *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *— открытое множество,* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *—* C^r*-отображение,* $r \geqslant 1$, x_0 *— регулярная точка* f. *Тогда*

А) *Если* $n \leqslant m$, *то существуют открытая окрестность* $W(f(x_0))$ *точки* $f(x_0)$, *открытое множество* $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ *и* C^r*-диффеоморфизм* $F\colon W(f(x_0)) \to W_1$ *такие, что* Ff *на некоторой открытой окрестности* $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ *является стандартным вложением* $\mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^m$ (рис. 82).

Б) *Если* $n \geqslant m$, *то существуют открытая окрестность* $V(x_0)$ *точки* x_0, *открытое множество* $W \subset \mathbb{R}^n$ *и* C^r*-диффеоморфизм* $F\colon V(x_0) \to W$ *такие, что* fF^{-1} *на множестве* W *является стандартной проекцией* $\mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{R}^m$ (рис. 83).

Поясним смысл этой теоремы с точки зрения замены координат. В случае А) диффеоморфизм F^{-1} определяет криволинейные коор-



82

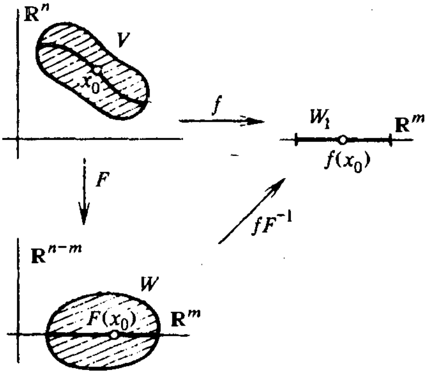


Рис. 83

динаты $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, в которых отображение f имеет вид

$$\xi_1 = x_1, \ \ldots, \ \xi_n = x_n, \ \xi_{n+1} = 0, \ \ldots, \ \xi_m = 0.$$

В случае Б) диффеоморфизм F^{-1} определяет криволинейные координаты $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, в которых отображение f имеет вид $y_1 = \xi_1, \ldots, y_m = \xi_m$.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что заданные отображения мы будем достраивать до отображений пространств одинаковой размерности и, применяя теорему об обратном отображении, получать необходимые замены координат.

Доказательство. А) Точки пространства $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ представим в виде (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots$ $\ldots y_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. По условию $\operatorname{rank}_{x_0} f = n$, т. е. $\operatorname{rank} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0} = n$. Предположим сначала, что в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ отличен от нуля определитель, составленный из первых n строк. Рассмотрим отображение $F_1 \colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, задаваемое по правилу $F_1(x, y) = f(x) + (0, y)$. Матрица Якоби отображения F_1 в точке $(x_0, 0)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & & & \\
\hline
\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & 1 & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & 0 & & 1
\end{array}\right)$$

По предположению определитель, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поэтому $\operatorname{rank}_{(x_0, 0)} F_1 = m$. По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $W(x_0, 0)$ и $W_1(f(x_0))$ точек $(x_0, 0)$ и $f(x_0)$ соответственно, что отображение $F_1\Big|_{W(x_0, 0)} \colon W(x_0, 0) \to W_1(f(x_0))$ является C^r-диффеоморфизмом. Значит, и отображение $F_1^{-1} \colon W_1(f(x_0)) \to W(x_0, 0)$ является C^r-диффеоморфизмом. Положим $F = F_1^{-1}$. В силу непрерывности отображения f существует открытая окрестность $V(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $f(V(x_0)) \subset W_1(f(x_0))$. Тогда корректно определено отображение $Ff\colon V(x_0) \to W(x_0, 0)$. Отображение Ff является стандартным вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ на окрестности $V(x_0)$. Действительно, так как отображение F_1^{-1} биективно и $F_1(x, 0) = f(x)$, то $(Ff)(x) = F(f(x)) = F_1^{-1}(f(x)) = (x, 0)$.

В том случае, когда в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ определитель, составленный из первых n строк, равен нулю, необходимо предварительно перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^m$ (иначе говоря, произвести специальную замену координат в $\mathbb{R}^m$ с помощью C^∞-диффеоморфизма $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ так, чтобы определитель, составленный из первых n строк матрицы Якоби $\left(\frac{\partial(g^{-1}f)}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$, был отличен от нуля). Для отображения $g^{-1}f$ описанным выше способом построим C^∞-диффеоморфизм F, тогда Fg^{-1} будет искомым C^r-диффеоморфизмом для отображения f.

Б) Элементы пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ представим в виде (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть $x_0 = (x^0, y^0)$. По условию $\operatorname{rank}_{(x^0, y^0)} f = m$, т. е. $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}\right)\Big|_{(x^0, y^0)} = m$. Предположим сначала, что в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial(x; y)}\right)\Big|_{(x^0, y^0)}$ отличен от нуля определитель, составленный из первых m столбцов. Рассмотрим отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, задаваемое по правилу $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Матрица Якоби отображения F в точке (x^0, y^0) имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{(x^0, y^0)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\Big|_{(x^0, y^0)}
\end{matrix} &
\begin{matrix}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial y_{n-m}}\Big|_{(x^0, y^0)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial y_{n-m}}\Big|_{(x^0, y^0)}
\end{matrix} \\
\hline
0 &
\begin{matrix}
1 & & 0 \\
& \ddots & \\
0 & & 1
\end{matrix}
\end{array}\right).$$

По предположению определитель, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поэтому $\operatorname{rank}_{(x^0, y^0)} F = n$. По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $V(x^0, y^0)$ и $W(F(x^0, y^0))$ точек $(x^0, y^0) F(x^0, y^0)$ соответственно, что отображение

$$F\Big|_{V(x^0,\, y^0)} : V(x^0, y^0) \to W(f(x^0, y^0), y^0)$$

является C^r-диффеоморфизмом. Отображение fF^{-1} на окрестности $W(f(x^0, y^0), y^0)$ является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Действительно, пусть $z \in W(f(x^0, y^0), y^0)$. Так как F^{-1} биективно, то в окрестности $V(x^0, y^0)$ найдется единственная точка (ξ, η), для которой $z = (f(\xi, \eta), \eta)$; тогда

$$[fF^{-1}](f(\xi, \eta), \eta) = f[F^{-1}(f(\xi, \eta), \eta)] = f(\xi, \eta).$$

В том случае, когда в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}\right)\Big|_{(x^0,\, y^0)}$ определитель, составленный из первых m столбцов, равен нулю, предварительно необходимо перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^n$ (произвести замену координат с помощью C^∞-диффеоморфизма g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) так, чтобы определитель, составленный из первых m столбцов матрицы Якоби $\left(\frac{\partial(fg)}{\partial(x, y)}\right)\Big|_{(x^0,\, y^0)}$, был отличен от нуля. Для отображения fg описанным выше способом построим C^r-диффеоморфизм F, тогда Fg^{-1} будет искомым C^r-диффеоморфизмом для отображения f. ■

6. Лемма о представлении гладких функций. Приведем еще один результат, необходимый нам для дальнейшего.

Лемма 1. *Пусть* f *есть* C^{r+1}*-функция* $(r \geqslant 0)$, *заданная на выпуклой окрестности* $V(x^0)$ *точки* x^0 *в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда существуют* C^r*-функции* g_i: $V(x^0) \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, n$, *такие, что* $f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - x_i^0)$, *причем* $g_i(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$.

Доказательство. Положим

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0))\, dt.$$

Применяя элементарные преобразования анализа, получаем

$$f(x) - f(x^0) = \int_0^1 \frac{df(x^0 + t(x - x^0))}{dt}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0))\right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x_0))\, dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\, g_i(x). \quad ■$$

Упражнение 4°. Пусть f — функция класса C^{r+2}, $r \geqslant 0$, заданная на выпуклой окрестности $V(x^0)$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) A_{ij}(x),$$

где $A_{ij}(x)$ — функции класса C^r на $V(x^0)$, причем $A_{ij}(x^0) = = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$.

§ 2. Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве

1. Понятие гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^N$. В курсах анализа и аналитической геометрии рассматриваются гладкие поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемые уравнением $z = f(x, y)$, где f — гладкая функция двух переменных, определенная в некоторой области D плоскости (x, y). Рассматриваются и более сложные поверхности (например замкнутые), которые задаются на отдельных своих частях (локально) одним из следующих уравнений: $z = \rho(x, y)$, $y = (x, z)$, $x = r(y, z)$. Простейшим примером такой поверхности является сфера S^2. Другими объектами, изучаемыми в анализе и аналитической геометрии, являются гладкие кривые, задаваемые локально одной из систем уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = \psi(z); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varphi(y), \\ z = \psi(y); \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

Все эти объекты охватываются единым понятием гладкого подмногообразия в евклидовом пространстве.

Рассмотрим некоторое подмножество M в $\mathbb{R}^N$ как топологическое пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^N$. Пусть x — точка M и $U(x)$ — ее открытая окрестность (в M).

Определение 1. Если задан гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U(x)$, $n \leqslant N$, удовлетворяющий условиям:

1) $\varphi \in C^r$, $r \geqslant 1$, как отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$,

2) $\operatorname{rank}_y \varphi = n$ для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$,

то пара $(U(x), \varphi)$ называется *картой точки x в M класса C^r* или *C^r-картой в M*.

Замечание. Из определения следует, что C^r-карта $(U(x), \varphi)$ точки x является C^r-картой любой точки $y \in U(x)$. Это служит объяснением тому, что пару $(U(x), \varphi)$ называют также C^r-картой в M.

Таким образом, задание карты означает локальное задание множества M (задание окрестности $U(x)$) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N &= \varphi_N(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \qquad (1)$$

где φ_i, $i = 1, \ldots, N$, — функции класса C^r, определяющие гомеоморфизм φ.

Окрестность $U(x)$ часто называют *координатной окрестностью* ввиду того, что гомеоморфизм (1) определяет на множестве $U(x)$ криволинейные координаты $y_1, \ldots, y_n$, не связанные, вообще говоря, со стандартными координатами объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$.

Отметим, что в литературе также рассматривают карты, гомеоморфизмы φ которых действуют не из всего пространства $\mathbb{R}^n$, а из его некоторого открытого связного множества U; в этом случае пару (U, φ) по-прежнему называют C^r-картой в M (подробнее о таких картах см. § 3).

Определение 2. Отображение $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ некоторого подмножества $A \subset \mathbb{R}^N$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называется *C^r-отображением*, $r \geqslant 1$, *на A* ($f \in C^r(A)$), если для каждой точки $x \in A$ существуют открытая окрестность $\tilde{U}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ и C^r-отображение $\tilde{f}\colon \tilde{U}(x) \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\tilde{f}\big|_{A \cap \tilde{U}(x)} = f$.

Лемма 1. *Гомеоморфизм φ^{-1} из определения 1 принадлежит классу C^r.*

Доказательство. Пусть $x \in U(x_0) \subset \mathbb{R}^N$, тогда $\varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Так как $\operatorname{rank}_{\varphi^{-1}(x)} \varphi = n$, то по теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $W(x) \subset \mathbb{R}^N$ точки x, открытое множество $W_1 \subset \mathbb{R}^N$ и C^r-диффеоморфизм $F\colon W(x) \to W_1$ такие, что $F\varphi$ на некоторой окрестности $V(\varphi^{-1}(x)) \subset \mathbb{R}^n$ точки $\varphi^{-1}(x)$ является стандартным вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ — стандартная проекция, очевидно, $g \in C^r$. Рассмотрим отображение $gF\colon W(x) \to \mathbb{R}^n$, тогда $gF \in C^r$ и $gF\big|_{W(x) \cap U(x_0)} = \varphi^{-1}$. ■

Определение 2 позволяет обобщить понятие диффеоморфизма открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ (см. п. 3 § 1) следующим образом: гомеоморфизм $f\colon A \to B$ подмножеств $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ называется *C^r-диффеоморфизмом*, если $f \in C^r(A)$, $f^{-1} \in C^r(B)$.

Из леммы 1 следует, что условия 1), 2) определения 1 C^r-карты $(U(x), \varphi)$ эквивалентны тому, что φ — C^r-диффеоморфизм.

Теперь дадим основное определение.

Определение 3. Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется *n-мерным подмногообразием в* $\mathbb{R}^n$ *класса* C^r или *C^r-подмногообразием*, если каждая его точка имеет некоторую C^r-карту.

Будем обозначать это подмногообразие через M^n и писать $M^n \in C^r$, указывая его принадлежность классу C^r. Другими словами, множество M в $\mathbb{R}^N$ есть n-мерное подмногообразие, если для каждой его точки можно построить координатную систему; каждая координатная система определена локально (и называется *локальной системой координат*), но все множество координатных систем «охватывает» все подмногообразие.

Определение карты можно расширить на случай $r = 0$, убирая условие 2) в определении 1. Естественно, что в этом случае о дифференцируемости гомеоморфизма (1) ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что M^n — *топологическое многообразие*, и пишут $M^n \in C^0$.

Отметим, что для каждой точки x подмногообразия M^n класса C^r определено, вообще говоря, бесконечное число карт. *Атласом подмногообразия* M^n называют такое множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ класса C^r, открытые множества $\{U_\alpha\}$ которых образуют покрытие M^n. Атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия M^n задает множество координатных систем, «обслуживающих» все подмногообразие. Чтобы задать подмногообразие, достаточно задать какой-нибудь атлас.

Упражнения. 1°. Покажите, что если заданы две карты, (U, φ), (V, ψ), и C^r-подмногообразия M^n такие, что $U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ является C^r-диффеоморфизмом.

2°. Покажите, что если достаточное число экземпляров пространства $\mathbb{R}^n$ «склеить» с помощью гомеоморфизмов $\psi^{-1}\varphi$, определяемых картами некоторого атласа, то получится топологическое пространство, гомеоморфное M^n. (Сравните с разверткой двумерной поверхности, см. § 4 гл. II.)

Таким образом, выбор атласа определяет «*склейку*» подмногообразия M^n из n-мерных пространств с помощью системы карт.

2. Примеры подмногообразий. 1. Пара $(\mathbb{R}^1, 1_{\mathbb{R}^1})$, где $1_{\mathbb{R}^1}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — тождественное отображение, определяет одну C^∞-карту для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и составляет атлас одномерного подмногообразия в $\mathbb{R}^1$ класса C^∞.

Упражнение 3°. Покажите, что пара $(\mathbb{R}^1, \varphi)$, где $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, определяется формулой $\varphi(x) = x^3$, не является C^r-картой $(r \geqslant 1)$ точки $x = 0$, но составляет атлас одномерного многообразия в $\mathbb{R}^1$ класса C^0.

2. По аналогии с примером 1 пара $(\mathbb{R}^1, 1_{\mathbb{R}^n})$, где $1_{\mathbb{R}^n}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — тождественное отображение, определяет одну C^∞-карту для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и составляет атлас n-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞.

3. Зададим на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ атлас, состоящий из двух карт. Воспользуемся стереографической проекцией (рис. 84). Тогда множества $U_1 = S^2 \backslash \{N\}$, $U_2 = S^2 \backslash \{S\}$ образуют открытое покрытие сферы. Стереографические проекции из северного и южного полюсов имеют соответственно вид

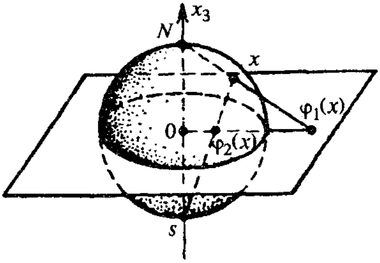


Рис. 84

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right),$$
$$\varphi_2(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

и являются гомеоморфизмами из U_1, U_2 на $\mathbb{R}^2$.

Упражнение 4°. Проверьте, что отображения φ_1^{-1}, φ_2^{-1} принадлежат классу C^∞ и в каждой точке $y \in \mathbb{R}^2$ $\operatorname{rank}_y \varphi_1^{-1} = \operatorname{rank}_y \varphi_2^{-1} = 2$.

Таким образом, сфера S^2 с атласом, состоящим из двух карт, (U_1, φ_1^{-1}), (U_2, φ_2^{-1}), является двумерным подмногообразием в $\mathbb{R}^3$ класса C^∞.

4. С помощью стереографической проекции (см. пример 3) на сфере S^n можно задать атлас, состоящий из двух карт, (U_1, φ_1^{-1}), (U_2, φ_2^{-1}), где

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right),$$
$$\varphi_2(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right).$$

Сфера S^n с таким атласом является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$ класса C^∞.

5. График отображения. Пусть задано отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^r$. Рассмотрим график отображения $\Gamma(f) = \{x, f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (см. упр. 12° § 9 гл. II). Атлас на $\Gamma(f)$ зададим из одной карты $(\mathbb{R}^n, \varphi)$, где $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ определяется формулой $\varphi(x) = (x, f(x))$. Таким образом, $\Gamma(f)$ является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+m}$ класса C^r.

Упражнения. 5°. Покажите, что множество точек $\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^1$, $x \neq 0$, является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ класса C^∞.

6°. Покажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из изолированных точек, является нульмерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

6. Множество решений системы уравнений. Пусть имеется система уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $f_1, \ldots, f_m$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — функции класса C^r, $r \geqslant 1$. Пусть $n \geqslant m$. Система функций $f_1, \ldots, f_m$ задает C^r-отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Множество решений системы обозначим через M. Ясно, что $M = f^{-1}(0)$.

Теорема 1. *Пусть множество M непусто. Если для всякой точки $x \in M$ ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_x$ равен m, то M является $(n - m)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ класса C^r.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка M. По условию теоремы x_0 — регулярная точка отображения f. Согласно теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^m$ и C^r-диффеоморфизм F: $V(x_0) \to W$ такие, что fF^{-1} на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Без ограничения общности можно считать, что W есть некоторый открытый диск $D^n_\rho(y_0)$, $y_0 = F(x_0)$; тогда

$$(fF^{-1})^{-1}(0) \cap D^n_\rho(y_0) = \mathbb{R}^{n-m} \cap D^n_\rho(y_0) = D^{n-m}_\rho(y_0).$$

(Здесь $\mathbb{R}^{n-m} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_1 = \ldots = x_m = 0\}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$.) Ясно, что открытый в $\mathbb{R}^{n-m}$ диск $D^{n-m}_\rho(y_0)$ — образ множества $M \cap V(x_0)$ при диффеоморфизме F. Таким образом, открытая окрестность $V(x_0) \cap M$ точки x_0 в M C^r-диффеоморфна открытому диску $D^{n-m}_\rho(y_0)$, а следовательно, и пространству $\mathbb{R}^{n-m}$. ■

В качестве примера снова рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задав ее уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$. Здесь $\operatorname{rank} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ в любой точке сферы равен единице, следовательно, выполнены условия теоремы 1 (для любого $r \geqslant 1$). Таким образом, мы еще раз доказали, что сфера S^n является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$ класса C^∞.

Рассмотрим случай, когда условия теоремы 1 не выполнены.

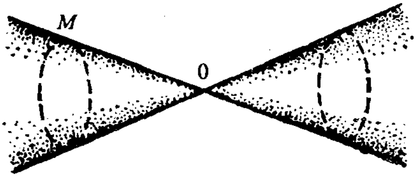


Рис. 85

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^3$ задается уравнением $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ (рис. 85). На множестве $M \backslash 0$ можно задать структуру двумерного C^∞-подмногообразия (как и ранее). В точке же 0 все миноры матрицы Якоби нулевые и ее ранг не максимальный. Множество M представляет простой пример алгебраического многообразия, а точка 0 — особая точка этого многообразия.

§ 3. Гладкие многообразия

1. Понятие гладкого многообразия. Это понятие является одним из центральных понятий гладкой топологии и современного анализа. Способ введения координат на множестве можно обобщить, не предполагая, что оно лежит в пространстве $\mathbb{R}^N$. Развитие этой идеи приводит к понятию гладкого многообразия.

Пусть M — топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi: \mathbb{R}^n \to U$ — гомеоморфизм. Тогда координатами точки $x \in U$ естественно считать стандартные координаты $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ точки $\varphi^{-1}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, гомеоморфизм φ задает координаты на части U пространства M; пару (U, φ) называют *картой* в M. Для всякой точки $x \in U$ карту (U, φ) будем называть также *картой точки* x.

Пусть $(U, \varphi)(\varphi: \mathbb{R}^n \to U)$, $(V, \psi)(\psi: \mathbb{R}^n \to V)$ — две карты в M и $U \cap V \neq \varnothing$. Тогда каждой точке $x \in U \cap V$ отвечают две системы координат: $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ и $\{\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)\}$ — координаты точек $\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(U \cap V)$ и $\psi^{-1} \in \psi^{-1}(U \cap V)$, которые, вообще говоря, различны. Обе системы координат равноправны в том смысле, что существует гомеоморфизм перехода

$$\psi^{-1}\varphi: \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V),$$

связывающий обе системы координат и позволяющий первые координаты непрерывно выразить через вторые:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \chi_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \chi_n(\eta_1, \ldots, \eta_n) \end{aligned} \tag{1}$$

и наоборот, вторые непрерывно выразить через первые:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varkappa_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= \varkappa_n(\xi_1, \ldots, \xi_n). \end{aligned} \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) через $\chi_1, \ldots, \chi_n$; $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ обозначены координатные функции отображений $\varphi^{-1}\psi$, $\psi^{-1}\varphi$.

Для задач анализа бывает необходимо, чтобы зависимости (1) и (2) были r раз, $r = 0, 1, \ldots, \infty$, дифференцируемы. Это эквивалентно тому, что гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi$ является C^r-диффеоморфизмом. (Для удобства мы называем гомеоморфизм C^0-диффеоморфизмом.)

Определение 1. Карты (U, φ), (V, ψ) в M называются *C^r-согласованными*, если выполнено одно из следующих условий: 1) $U \cap V = \varnothing$, 2) $U \cap V \neq \varnothing$, и гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi$: $\varphi^{-1}(U \cap \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ является C^r-диффеоморфизмом.

Определение 2. Множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ в M называется *C^r-атласом* или *атласом класса C^r*, если любые две его карты C^r-согласованы и $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$.

Замечание. Все гомеоморфизмы φ_α в определении C^r-атласа действуют из одного и того же пространства $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, задавая некоторый атлас на M, мы тем самым вводим координаты в окрестности каждой точки $x \in M$, называемые локальными координатами.

Пусть на M задан некоторый C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и, следовательно, в окрестности каждой точки введены локальные координаты. Во многих задачах анализа из разных соображений бывает удобно вводить новые локальные координаты (при помощи некоторой карты (V, ψ)), которые должны быть «равноправны» старым координатам, задаваемым картами C^r-атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Таким образом, карта (V, φ) должна быть C^r-согласована с каждой картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ заданного C^r-атласа. Если это условие выполнено, то множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cap (V, \psi)$ является C^r-атласом. Так как C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cup (V, \psi)$ получен из C^r-атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ присоединением «равноправной» карты, то естественно эти атласы считать эквивалентными.

Определение 3. Два C^r-атласа, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, называются эквивалентными, если C^r-согласованы любые две карты, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (V_β, ψ_β). Другими словами, два C^r-атласа эквивалентны, если их объединение является C^r-атласом.

Упражнение 1°. Покажите, что введенное отношение во множестве C^r-атласов является отношением эквивалентности.

Из упражнения 1° следует, что множество C^r-атласов на M распадается на непересекающиеся классы эквивалентных атласов.

Определение 4. Класс эквивалентности C^r-атласов на M называется *C^r-структурой* на M.

Каждый класс эквивалентности C^r-атласов на M определяется любым из своих представителей, т. е. заданную C^r-структуру можно восстановить по любому ее C^r-атласу. Это замечание лежит в основе того, что C^r-структуру на M задают указанием на нем одного C^r-атласа из данной C^r-структуры.

Объединение всех C^r-атласов из данной C^r-структуры также является C^r-атласом, который называется *максимальным*. Задание C^r-структуры равносильно заданию максимального атласа. Иногда C^r-структурой называют максимальный атлас.

Топологическими структурами называют C^0-структуры; *гладкими* (или *дифференциальными*) структурами называют C^r-структуры $(r = 1, \ldots, \infty)$.

Определение 5. Топологическое пространство M с заданной на нем C^r-структурой называется *C^r-многообразием* (или *многообразием класса C^r*), а размерность пространства $\mathbb{R}^n$, из которого действуют гомеоморфизмы карт, называется *размерностью* C^r-многообразия.

По аналогии с C^r-структурами C^0-многообразия называются *топологическими*, C^r-многообразия $(r = 1, \ldots, \infty)$ — *гладкими*. Иногда (для краткости) C^r-многообразия мы будем называть просто многообразиями, C^r-атласы — атласами.

Если в условии 2 определения 1 гомеоморфизмы $\psi^{-1}\varphi$, $\varphi^{-1}\psi$ являются аналитическими отображениями $(\psi^{-1}\varphi, \varphi^{-1}\psi \in C^\omega)$, то карты (U, φ), (V, ψ) в M называются *C^ω-согласованными*. Естественным образом определяются *C^ω-атласы*, *C^ω-структуры* и *C^ω-многообразия*. *Аналитическими структурами и аналитическими многообразиями* называются C^ω-структуры и C^ω-многообразия соответственно. Для того чтобы указать размерность многообразия, мы будем писать M^n, а также $\dim M = n$.

Замечание. Размерность C^0-многообразия является его инвариантом, т. е. не зависит от выбора атласа. Действительно, если бы M допускало атласы

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}(\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha), \quad \{(V_\beta, \psi_\beta)\}(\psi_\beta\colon \mathbb{R}^m \to V_\beta)$$

и $n \neq m$, то нашлись бы множества U_α, V_β такие, что $U_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ и отображение

$$\psi_\beta^{-1}\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

было бы гомеоморфизмом. Это противоречит теореме Брауэра о том, что непустые открытые множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ могут быть гомеоморфными лишь в случае $n = m$. (Эта теорема будет доказана независимо от материала этой главы в § 6 гл. V.) Для C^r-многообразий, $r \geqslant 1$, корректность определения размерности очевидна.

Отметим, что C^0-структура на любом пространстве M единственна (это следует из определения); но если $r \neq 0$, то M может допускать несколько различных C^r-структур. Действительно, атлас, состоящий из одной карты $(U, \varphi))$, где $U = \mathbb{R}^1$, а $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — тождественное отображение, задает на $\mathbb{R}^1$ структуру C^∞-многообразия. Атлас, состоящий из одной карты $(\mathbb{R}^1, \varphi)$, где $\varphi(x) = x^3$, также задает на $\mathbb{R}^1$ структуру C^∞-многообразия. Легко проверить, что рассмотренные атласы не эквивалентны и, следовательно, определяемые ими C^∞-структуры различны.

Более того, доказано, что если на M существует хотя бы одна C^r-структура $(r \geqslant 1)$, то на M существует бесконечно много C^r-структур.

Упражнения. 2°. Покажите, что атласы

$$\{(\mathbb{R}^1, \varphi_0)\}, \ldots, \{(\mathbb{R}^1, \varphi_k)\}, \ldots, \quad \text{где } \varphi_k(x) = x^{2k+1},\ k = 0, 1, \ldots,$$

задают на $\mathbb{R}^1$ различные C^∞-структуры.

3°. Покажите, что любое C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ является C^r-многообразием (см. упр. 1° § 2).

Укажем на одно формальное обобщение понятия карты (U, φ), когда гомеоморфизм φ действует из некоторого открытого связного множества пространства $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, не совпадающего со всем пространством. В этом случае можно определить все понятия, введенные выше, повторяя дословно их определения. Однако это не приводит к обобщению понятия C^r-многообразия. Действительно, в такой C^r-структуре можно выделить C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, в котором все гомеоморфизмы φ_α действуют из открытых дисков D_α пространства $\mathbb{R}^n$. Так как существует C^r-диффеоморфизм $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to D_\alpha$, то C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha f_\alpha)\}$ содержится в нашей C^r-структуре и состоит из обычных карт.

В некоторых случаях более просто задать атлас, состоящий из обобщенных карт. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в случае необходимости, не делая оговорок.

Пример 1. Всякое открытое множество V многообразия M^n класса C^r само является многообразием класса C^r со структурой, задаваемой атласом $\left\{\left(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha\Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap V)}\right)\right\}$, где $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — некоторый атлас из C^r-структуры, заданной на M^n.

Пример 2. Зададим C^∞-атлас на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, состоящий из шести карт. Положим

$$U_k^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \colon x_k > 0\},$$

$$U_k^- = \{x \in S^2 \colon x_k < 0\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Определим гомеоморфизмы $\varphi_k^+ \colon D^2 \to U_k^+$, $\varphi_k^- \colon D^2 \to U_k^-$:

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \colon (x_2, x_3) \mapsto \left(\pm\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3\right),$$

$$\varphi_2^+, \varphi_2^- \colon (x_1, x_3) \mapsto \left(x_1, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3\right),$$

$$\varphi_3^+, \varphi_3^- \colon (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right),$$

где знак в правой части выбирается в соответствии со значком + или — слева.

Аналогичным образом на сфере S^n можно задать C^∞-атлас, состоящий из $2(n+1)$ карт. ◆

Для возможности целого ряда построений при изучении топологических пространств необходимы свойства хаусдорфовости и счетности базы топологии. Из определения многообразия эти свойства, вообще говоря, не вытекают. Это иллюстрируется нижеследующими примерами.

Пример 3. Нехаусдорфово многообразие M^1 класса C^∞. Рассмотрим интервал $(0, 3)$ и разобьем его на три множества: $(0, 1]$, $(2, 3)$, $(1, 2]$. В их формальном (несвязном) объединении (рис. 86) введем топологию следующим образом: окрестности точек на множестве $(0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ такие же, как в топологии, индуцированной вещественной прямой. Окрестностями же точек $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ служат соответственно множества $(1 - \varepsilon, 1] \cup (2, 2 + \varepsilon)$, $(2 - \varepsilon, 2] \cup (2, 2 + \varepsilon)$. Тогда точки x_1, x_2 неотделимы.

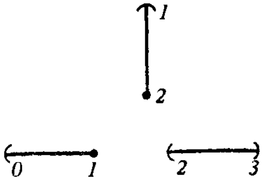


Рис. 86

Предоставляем в качестве задачи показать, что на полученном пространстве можно естественным образом задать структуру одномерного C^∞-многообразия и что это многообразие со счетной базой.

Пример 4. Многообразие M^1 класса C^∞, не имеющее счетной базы. Рассмотрим множество $M = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Топологию в M определим как топологию декартова произведения, где первый сомножитель $\mathbb{R}^1$ с обычной топологией, а второй сомножитель $\mathbb{R}^1$ — с дискретной. Нетрудно показать, что это хаусдорфово одномерное многообразие класса C^∞, топология которого не обладает счетной базой.

Соединяя два последних примера, легко построить нехаусдорфово многообразие без счетной базы (взяв их декартово произведение).

Отметим, что отсутствие счетности базы топологии многообразия в примере 4 привело к «патологии»: плоскость является многообразием размерности 1, а не 2.

Обычно многообразие M^n предполагают хаусдорфовым и удовлетворяющим второй аксиоме счетности. Мы также будем это делать без дополнительных оговорок. Тогда легко доказать, что многообразие M^n является локально компактным и даже паракомпактным пространством.

Действительно, локальная компактность вытекает из следующего простого упражнения.

Упражнение 4°. Покажите, что если (U, φ) — карта в M^n, $x \in U$ и $D^n(\varphi^{-1}(x)), \overline{D}^n(\varphi^{-1}(x))$ — открытый и замкнутый диски в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\varphi^{-1}(x)$ радиуса 1, то $\varphi(D^n(\varphi^{-1}(x)))$ — открытая в M^n окрестность точки x, замыкание которой (в M^n) компактно и равно $\varphi(\overline{D}^n(\varphi^{-1}(x)))$.

Паракомпактность многообразия M^n следует из его локальной компактности и счетности базы (согласно следствию теоремы 6 § 13 гл. II).

Отметим, что из условия счетности базы для многообразия немедленно следует, что всякое C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 0$, имеет счетный атлас $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$, т. е. атлас, состоящий не более чем из счетного множества карт.

2. Проективные пространства. Определение и различные топологически эквивалентные интерпретации проективных пространств $\mathbb{R}P^{n-1}$, $\mathbb{C}P^{n-1}$, $n \geqslant 2$, даны в п. 2 § *5* гл. II (см. также п. 1 § 3 гл. I). На пространствах $\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{C}P^{n-1}$ можно ввести структуры C^∞-многообразий. Проиллюстрируем идею введения локальных координат в $\mathbb{R}P^{n-1}$. Рассмотрим $\mathbb{R}P^{n-1}$ как множество $L = \{l\}$ всех прямых пространства $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат. Каждая прямая пересекает одну или несколько гиперплоскостей вида $x_j = 1$. Зафиксируем одну из таких гиперплоскостей $x_i = 1$ и выделим из L совокупность U_i всех прямых, пересекающихся с гиперплоскостью $x_i = 1$. Тогда положение прямой $l \in U_i$ определяется декартовыми координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})$ ее точки пересечения p с гиперплоскостью $x_i = 1$. Координаты $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})$ естественно принять за локальные координаты прямой l (см. рис. 87). Таким образом, имеем гомеоморфизмы

$$\psi_i(l) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})\colon U_i \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Локальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ называют также проективными координатами прямой l. Нетрудно выразить локальные координаты прямой l через координаты произвольной точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ прямой l:

$$\xi_1 = x_1/x_i, \ \ldots, \ \xi_{i-1} = x_{i-1}/x_i, \ \xi_i = x_{i+1}/x_i, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = x_n/x_i.$$

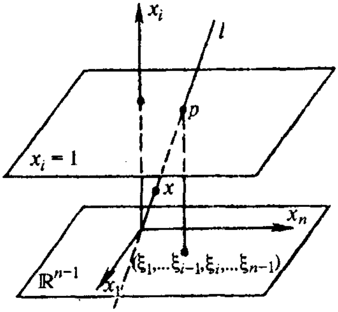


Рис. 87

Атлас из n карт (U_i, φ_i), $i = 1, \ldots, n$, где $\varphi_i = \psi_i^{-1}$, задает структуру C^∞-многообразия размерности $n - 1$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Покажем C^∞-согласованность карт построенного атласа. Действительно, пусть $l \in U_i \cap U_j$ и $\eta_1 = x_1/x_j, \ldots, \eta_{j-1} = x_{j-1}/x_j, \eta_j = x_{j+1}/x_j, \ldots, \eta_{n-1} = x_n/x_j$ — локальные координаты прямой l в карте (U_j, φ_j). Пусть для определенности $i < j$. Тогда очевидны следующие соотношения:

$$\eta_1/\eta_i = \xi_1, \ \ldots, \ \eta_{i-1}/\eta_i = \xi_{i-1},$$
$$\eta_{i+1}/\eta_i = \xi_i, \ \ldots, \ \eta_{j-1}/\eta_i = \xi_{j-2},$$
$$1/\eta_i = \xi_{j-1}, \ \eta_j/\eta_i = \xi_j, \ \ldots, \ \eta_{n-1}/\eta_i = \xi_{n-1},$$

из которых видно, что локальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ бесконечно гладко зависят от координат $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$.

Упражнения. 5°. Убедитесь, что для проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, рассматриваемого как совокупность пар диаметрально противоположных точек сферы S^{n-1}, локальные координаты можно также задать описанным выше способом.

6°. Покажите, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ имеет C^∞-атлас, превращающий его в C^∞-многообразие вещественной размерности $2n - 2$.

Указание. Рассматривая $\mathbb{C}P^{n-1}$ как множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^n$, задайте атлас формулами, аналогичными случаю $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Более общо, можно рассмотреть некоторое многообразие M^n класса C^r, на котором действует группа $\mathbb{Z}_k$ (см. § 5 гл. II). Будем предполагать, что орбита каждой точки при этом действии состоит из k различных элементов.

Упражнение 7°. Пусть $h\colon \mathbb{Z}_k \to H(M^n)$ — гомоморфизм группы $\mathbb{Z}_k$ (k простое) в группу гомеоморфизмов M^n, задающий действие $\mathbb{Z}_k$ в M^n, и пусть g — образующий элемент группы $\mathbb{Z}_k$. Покажите, что условие $h_g(x) \neq x$ для любого $x \in M^n$ эквивалентно предположению о том, что орбита каждой точки при этом действии состоит из k различных элементов. В этом случае говорят, что группа $\mathbb{Z}_k$ *действует без неподвижных точек.*

Предположим далее, что карты вида $(h_g U_\alpha, h_g \varphi_\alpha)$ C^r-согласованы с картами (U_β, φ_β) C^r-атласа на M^n. Рассмотрим факторпространство $M^n/\mathbb{Z}_k$. Оно также является C^r-многообразием размерности n. Атлас задается следующим образом: пусть O_x — орбита точки x, $U(O_x)$ — окрестность орбиты в $M^n/\mathbb{Z}_k$, состоящая из всех орбит O_y, проходящих через точки y достаточно малой окрестности $V(x)$ точки x в M^n ($V(x)$ не должна содержать пар точек y, $h_g(y)$ и должна целиком лежать в какой-нибудь карте многообразия M^n). Тогда локальные координаты в $V(x)$ точки $y \in V(x)$ назовем локальными координатами орбиты $O_y \subset U(O_y)$. Можно убедиться, что это C^r-атлас. Условие согласованности карт $(h_g U_\alpha, h_g \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) не является обременительным (см. ниже теорему 2 § 5).

Упражнение 8°. Проверьте, что обобщенное линзовое пространство $L(k, k_1, \ldots, k_n)$ является C^∞-многообразием размерности $2n+1$.

3. Индуцированные структуры. Пусть M^n есть C^r-многообразие и $f\colon M^n \to N$ — гомеоморфизм топологических пространств M^n и N. На топологическом пространстве N естественным образом можно ввести структуру C^r-многообразия, называемую *структурой, индуцированной* f. Именно: если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ есть C^r-атлас многообразия M^n, то $\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ есть C^r-атлас на N.

Упражнение 9°. Убедитесь, что $\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ действительно атлас, определяющий на N структуру C^r-многообразия размерности n.

Описанный способ задания структуры оказывается весьма полезным при задании структуры C^r-многообразия на топологическом пространстве N: мы можем задать структуру C^r-многообразия на более «простом» пространстве M, гомеоморфном N, а затем индуцировать на N структуру C^r-многообразия. Таким образом C^∞-структуру получают, например, различные модели $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Пример 5. Нетрудно видеть, что всякое одномерное компактное C^0-многообразие триангулируемо. Тогда всякое связное одномерное компактное C^0-многообразие гомеоморфно окружности S^1 (см. упр. 6° § 4 гл. II), следовательно, на нем естественным образом индуцируется C^∞-структура.

Пример 6. Двумерная ориентируемая замкнутая поверхность, как показано в § 4 гл. II, гомеоморфна поверхности типа M_p (сфера с p ручками), которую можно реализовать в пространстве $\mathbb{R}^3$ как C^∞-подмногообразие (интуитивно это представляется очевидным). Таким образом, ориентируемые замкнутые поверхности получают структуру C^∞-многообразия.

Упражнения. 10°. Задайте структуру C^∞-многообразия на границе куба $I^n = \{x = (x_1, \dots, x_n): |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \dots, n\}$, индуцируя ее со сферы S^{n-1}.

11°. Покажите, что отображение

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

является гомеоморфизмом проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ на подмножество в $\mathbb{R}^6$. Индуцируя этим гомеоморфизмом структуру гладкого многообразия $\mathbb{R}P^2$, мы тем самым реализуем $\mathbb{R}P^2$ как подмножество в $\mathbb{R}^6$.

12°. Постройте реализацию $\mathbb{R}P^3$ в $\mathbb{R}^{10}$.

4. Многообразия матриц. Множество $M(m, n)$ всех $m \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{R}^1$ наделим топологией, индуцированной естественным отображением $i: \mathbb{R}^{mn} \to M(m, n)$:

$$(x_1, \dots, x_{mn}) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{(m-1)n+1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда гомеоморфизм i индуцирует на $M(m, n)$ структуру C^∞-многообразия размерности mn.

Обозначим через $M(m, n; k)$ подпространство в $M(m, n)$ матриц фиксированного ранга k. Зададим на $M(m, n; k)$ структуру C^∞-многообразия размерности $k(m + n - k)$. Заметим предварительно, что если $Y \in M(m, n)$ и rank $Y \geqslant k$, то перестановкой строк и столбцов матрицу Y можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right),$$

где A_Y — невырожденная квадратная матрица порядка k. Иными словами, существуют квадратные невырожденные матрицы $P_Y \in M(m, m)$, $Q_Y \in M(n, n)$ такие, что

$$P_Y Y Q_Y = \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right).$$

Покажем, что $\operatorname{rank} Y = k$ тогда и только тогда, когда $D_Y = C_Y A_Y^{-1} B_Y$. Действительно, из равенства

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline -C_Y A_Y^{-1} & I_{m-k} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline 0 & -C_Y A_Y^{-1} B_Y + D_Y \end{array}\right)$$

следует, что

$$\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank} \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline 0 & -C_Y A_Y^{-1} B_Y + D_Y \end{array}\right).$$

Из последнего равенства видно, что $\operatorname{rank} Y = k$ тогда и только тогда, когда $D_Y \in C_Y A_Y^{-1} B_Y$.

Пусть теперь $X_0 \in M(m, n;\ k)$. Пусть X — произвольная матрица из $M(m, n;\ k)$. Обозначим

$$P_{X_0} X Q_{X_0} = \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{B_{X, X_0}} \\ \hline C_{X, X_0} & D_{X, X_0} \end{array}\right),$$

где A_{X, X_0} — квадратная матрица порядка k. Рассмотрим открытую окрестность

$$V(X_0) = \{X \in M(m, n) \colon \det A_{X,X_0} \neq 0\}$$

матрицы X_0 в $M(m, n)$. Тогда $U(X_0) = V(X_0) \cap M(m, n;\ k)$ — открытая окрестность X_0 в $M(m, n;\ k)$ и отображение

$$\varphi_{X_0} \colon U(X_0) \to \mathbb{R}^{mn-(m-k)(n-k)},$$

задаваемое следующим образом:

$$X \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{X, X_0} \\ \hline C_{X, X_0} & D_{X, X_0} \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{X, X_0} \\ \hline C_{X, X_0} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{mn-(m-k)(n-k)},$$

— гомеоморфизм (i — естественное отображение). Следовательно, $(U(X_0), \varphi_{X_0}^{-1})$ — карта. Задавая таким образом карту для каждой матрицы $X_0 \in M(m, n;\ k)$, мы получаем C^∞-атлас на $M(m, n;\ k)$.

Упражнение 13°. Покажите C^∞-согласованность карт построенного атласа.

Отметим, что $M(k, n)$ можно интерпретировать как множество упорядоченных наборов k векторов в $\mathbb{R}^n$, а $M(k, n;\ k)$ — как множество упорядоченных наборов k линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$; $M(n, n)$ обозначается $L(n, \mathbb{R})$, а $M(n, n; n)$ обозначается $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (группа обратимых матриц, называемая общей линейной группой).

5. Многообразия Грассмана. Естественным обобщением проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ является многообразие Грассмана $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех k-мерных подпространств, $k \geqslant 1$, пространства $\mathbb{R}^n$ (при $k = 1$ это проективное пространство). Множество $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ наделим топологией, индуцированной естественным отображением $M(k, n;\ k) \to \mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющим каждой матрице

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

подпространство в $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}), \qquad i = 1, \dots, k.$$

Заметим, что $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно пространству орбит пространства $M(k, n;\ k)$ по действию (слева) группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$; элемент $C \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ действует на элемент $Y \in M(k, n;\ k)$ по правилу $Y \mapsto CY$ (произведение матриц). Другими словами, пространство $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно факторпространству $M(k, n;\ k)/R$ со следующим отношением эквивалентности: $X \overset{R}{\sim} Y$, если существует квадратная невырожденная матрица C порядка k такая, что $X = CY$. Чтобы задать на $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ структуру C^∞-многообразия, будем задавать C^∞-структуру на $M(k, n;\ k)/R$ и индуцировать C^∞-структуру на $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфизмом $f\colon M(k, n;\ k)/R \to \mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$. Получаемое многообразие называется *многообразием Грассмана.*

Локальные координаты на $M(k, n;\ k)/R$ можно задать по аналогии с проективным пространством $\mathbb{R}\mathrm{P}^{m-1}$, если вместо $\mathbb{R}^m \setminus 0$ рассмотреть $M(k, n;\ k)$, вместо прямых $l = \{tx\}$, $t \in \mathbb{R}^1 \setminus 0$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus 0$ — подпространство $L = \{TX\}$, $T \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, $X \in M(k, n;\ k)$, а вместо гиперплоскости $x_i = 1$ — множество $H_{i_1, \dots, i_k}$ матриц из $M(k, n;\ k)$, для которых подматрица, составленная из $i_1, \dots, i_k$ столбцов, является единичной. Подпространство $\{TX\}$ пересекается с множеством $H_{i_1, \dots, i_k}$, если и только если подматрица $X_{i_1, \dots, i_k}$, составленная из

$i_1, \ldots, i_k$ столбцов матрицы X, невырожденна (т. е. $\det X_{i_1, \ldots, i_k} \neq 0$); в случае невырожденности $X_{i_1, \ldots, i_k}$ «точкой пересечения», как нетрудно видеть, будет матрица $Y = X^{-1}_{i_1, \ldots, i_k} X$. Для задания карт зафиксируем множество $H_{i_1, \ldots, i_k}$ (т. е. фиксируем номера столбцов в матрице $X \in M(k, n; k)$ и рассмотрим множество $U_{i_1, \ldots, i_k}$ всех подпространств $\{TX\}$, пересечение которых с $H_{i_1, \ldots, i_k}$ непусто. Иными словами, $U_{i_1, \ldots, i_k}$ — это множество подпространств $\{TX\}$, для которых у образующего элемента X подпространства $\{TX\}$ подматрица $X_{i_1, \ldots, i_k}$ невырожденна. Элементы матрицы $Y_{j_1, \ldots, j_{n-k}}$, образованной столбцами $j_1, \ldots, j_{n-k}$ матрицы Y, отличными от $i_1, \ldots, i_k$, естественно принять за локальные координаты. Точнее, пара $(U_{i_1, \ldots, i_k}, \varphi_{i_1, \ldots, i_k})$, где $\varphi_{i_1, \ldots, i_k}\colon M(k, n; k)/R \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ — гомеоморфизм, задаваемый соответствием

$$X \mapsto Y_{j_1, \ldots, j_{n-k}} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1(n-k)} \\ \cdot & \cdot \, \cdot \, \cdot & \cdot \\ y_{k1} & \cdots & y_{k(n-k)} \end{pmatrix} \overset{i}{\mapsto} (y_{11}, \ldots, y_{1(n-k)}, y_{21}, \ldots, y_{k(n-k)}),$$

является картой в $M(k, n; k)/R$.

Упражнение 14°. Убедитесь, что отображения $\varphi_{i_1, \ldots, i_k}$ являются гомеоморфизмами.

Атлас $\left\{\left(U_{i_1, \ldots, i_k}, \varphi^{-1}_{i_1, \ldots, i_k}\right)\right\}$ из C^k_n карт задает структуру C^∞-многообразия размерности $k(n-k)$ на $M(k, n; k)/R$.

Упражнения. 15°. Покажите C^∞-согласованность карт построенного атласа.

16°. Покажите, что многообразие $G_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно многообразию $G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

6. Многообразие Штифеля. В многообразии $M(n, k)$ рассмотрим подмножество $V_k(\mathbb{R}^n)$ матриц, элементы которых удовлетворяют системе $k(k+1)/2$ уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} x_{si} x_{sj} = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера). Наделим $V_k(\mathbb{R}^n)$ топологией, индуцированной из $M(n, k)$. Рассмотрим естественное отображение $i\colon V_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nk}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot \, \cdot \, \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, \ldots, a_{2k}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk}).$$

Наделим множество $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^{nk}$. Тогда i гомеоморфно отображает $V_k(\mathbb{R}^n)$ на свой образ $i(V_k(\mathbb{R}^n))$. Покажем, что на $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ можно задать структуру C^∞-многообразия. Ранг матрицы Якоби отображения $f\colon \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$, компонентами которого являются функции $\sum\limits_{s=1}^{n} x_{si}x_{sj} - \delta_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, очевидно, равен $k(k+1)/2$ для всякой точки $x \in i(V_k(\mathbb{R}^n))$. Поэтому согласно теореме 1 § 2 $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^{nk}$ класса C^∞ размерности $kn - k(k+1)/2$, а следовательно, и C^∞-многообразием. Гомеоморфизм i^{-1} индуцирует на $V_k(\mathbb{R}^n)$ структуру C^∞-многообразия размерности $kn - k(k+1)/2$, которое называют *многообразием Штифеля*. Многообразие Штифеля можно интерпретировать геометрически как множество ортонормированных k-реперов пространства $\mathbb{R}^n$, так как координаты векторов однозначно определяют матрицу из $V_k(\mathbb{R}^n)$.

Элементами многообразия Штифеля $V_n(\mathbb{R}^n)$ являются ортогональные матрицы, его обозначают $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Подмножество в $\mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$, состоящее из матриц с определителем $+1$, открыто в $\mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$, следовательно, является C^∞-многообразием размерности $(n^2 - 1)/2$, его обозначают $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

7. Произведение многообразий. Если M^n, N^m — два C^r-многообразия, то на топологическом произведении $M \times N$ естественным образом можно задать структуру C^r-многообразия размерности $m + n$. Предоставляем читателям сделать это в качестве упражнения.

Примерами произведения многообразий могут служить цилиндр $\mathbb{R}^1 \times S^1$ и k-мерный тор $T^k = S^1 \times \ldots \times S^1$ (k сомножителей). Согласно сказанному выше, они являются C^∞-многообразиями размерностей 2 и k соответственно.

8. Группы Ли. Рассмотрим специальный класс гладких многообразий, являющихся одновременно группами, — они называются группами Ли по имени норвежского математика Софуса Ли.

Группа G, наделенная структурой гладкого многообразия так, что отображение $G \times G \to G$, задаваемое правилом $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$, является гладким, называется *группой Ли*.

Очевидно, что для группы Ли гладкими являются и отображения $G \to G\colon g \mapsto g^{-1}$ и $G \times G\colon (f, g) \mapsto f \cdot g$; действительно, первое является суперпозицией гладких отображений $g \mapsto (e, g)$ и $(e, g) \mapsto e \cdot g^{-1} = g^{-1}$, а второе — отображений $(g, h) \mapsto (g, h)$, $(g, h^{-1}) \mapsto g(h^{-1})^{-1} = g \cdot h$. Далее, если G_e — связная компонента группы G, содержащая единицу e, то $g\cdot G_e \subset G_e$ при всяком $g \in G_e$ (в силу связности образа $g\cdot G_e$ и $(g\cdot G_e) \cap G_e \neq \varnothing$); аналогично $g^{-1}\cdot G_e \subset G_e$. Таким образом, связная компонента G, содержащая единицу, также является группой Ли.

Простейшие примеры групп Ли: пространство $\mathbb{R}^n$ относительно операции сложения векторов; $\mathbb{C}\backslash 0$ — комплексные числа, кроме 0, — относительно умножения; единичная окружность S^1, рассматриваемая как подмножество в $\mathbb{C}\backslash 0$, относительно умножения; многообразия $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ относительно умножения матриц.

Если G_1 и G_2 — две группы Ли, то $G_1 \times G_2$ есть группа Ли относительно умножения $(g_1, h_1)\cdot(g_2, h_2) = (g_1\cdot g_2, h_1\cdot h_2)$ (с гладкой структурой произведения многообразий G_1, G_2).

Отсюда сразу следует, что n-мерный тор $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — группа Ли с покомпонентной операцией умножения.

Группой Ли является и группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$: $x \mapsto Ax + v$, где $v, x \in \mathbb{R}^n$, A — невырожденная $n \times n$-матрица; ее многообразие $L^m = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, $m = n^2 + n$, состоит из пар (A, v) с гладкой структурой произведения, а групповая операция задается формулой $(A_1, v_1)\cdot(A_2, v_2) = (A_1A_2, A_2v_1 + v_2)$; единичный элемент $e = (I, 0)$, где I — единичная матрица, 0 — нулевой вектор.

Упражнение 17°. Докажите, что L^m — группа Ли.

9. Риманова поверхность. Рассмотрим пример, важный для теории функций комплексного переменного. Пусть M^2 — двумерное гладкое многообразие. Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ как комплексную z-плоскость. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас на M^2 такой, что диффеоморфизмы перехода

$$\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются комплексными аналитическими функциями z в областях $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cup U_\beta)$. Многообразие M^2 с таким атласом называется (абстрактной) *римановой поверхностью.* Комплексная аналитическая структура на ней определяется такой эквивалентностью атласов, при которой диффеоморфизмы перехода являются комплексными аналитическими функциями.

В частности, комплексная z-плоскость $\mathbb{C}$ является римановой поверхностью: ее комплексная аналитическая структура задается атласом, состоящим из одной карты $(\mathbb{C}, 1_{\mathbb{C}})$, где $1_{\mathbb{C}}$ — тождественное отображение.

Сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ также является римановой поверхностью. Зададим на S^2 аналитическую структуру $U_1 = S^1\backslash\{N\}$, $U_2 = S^2\backslash\{S\}$; локальные координаты точки $P(x_1, x_2, x_3)$ в U_1, U_2 имеют соответственно вид

$$z_1 = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \qquad z_2 = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}.$$

Координата z_1 возникает при стереографической проекции (см. рис. 84) сферы S^2 на экваториальную плоскость при проектировании из полюса N сферы, а $\bar{z}_2$ — при проектировании из полюса S. Если $P \in U_1 \cap U_2$, то $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ и, очевидно, $z_1 z_2 = 1$; отсюда диффеоморфизм перехода $z_1 = 1/z_2$ является аналитической функцией. Расширенная z-плоскость (z-сфера) $\tilde{C}$ наделяется комплексной аналитической структурой с помощью гомеоморфизма на S^2.

Двулистная риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$ (см. § 4 гл. I) является комплексным аналитическим многообразием, и аналитическая структура на ней вводится посредством гомеоморфизма с z-сферой.

Упражнение 18°. Опишите соответствующий атлас двулистной римановой поверхности функции $w = \sqrt{z}$.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что любая аналитическая функция на z-плоскости имеет абстрактную риманову поверхность и что всякую компактную абстрактную риманову поверхность можно реализовать как риманову поверхность некоторой алгебраической функции.

10. Конфигурационное пространство. Рассмотренные примеры гладких многообразий естественным образом возникают в различных задачах математики. Понятие многообразия столь же естественно используется и в прикладных науках (механика, физика) для описания множества положений (конфигурационного пространства) системы. Приведем простейший пример.

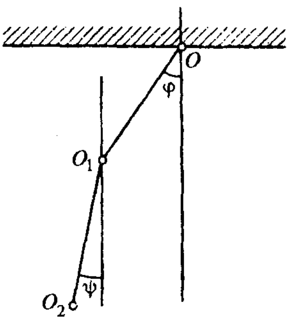


Рис. 88

Рассмотрим маятник с шарниром, качающийся в вертикальной плоскости. Точку подвеса маятника обозначим O, шарнир — через O_1, конец маятника — через O_2. Каждое положение данной системы задается направлением стержня OO_1 и направлением стержня O_1O_2 или парой углов φ, ψ (рис. 88), изменяющихся независимо в интервалах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Конфигурационное пространство данной системы, таким образом, есть декартово произведение двух окружностей $S^1 \times S^1$ — двумерный тор T^2.

Упражнение 19°. Опишите конфигурационное пространство плоского маятника, имеющего два шарнира.

Более сложные конфигурационные пространства возникают при рассмотрении более сложных механических систем, состоящих из большого числа материальных точек и при более сложных условиях их перемещения. Эти условия обычно задаются в форме уравнений, которым должны удовлетворять координаты всех материальных точек (эти уравнения называются геометрическими связями). Геометрические связи (при соответствующих условиях) и задают гладкое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$, где n — число материальных точек (см. пример 6 § 2). Упорядоченный набор координат в $\mathbb{R}^{3n}$ материальных точек определяет положение механической системы в конфигурационном пространстве.

11. Многообразия с краем. Введенное выше понятие многообразия не охватывает, однако, ряд геометрических объектов, например, n-мерный замкнутый диск, поверхности с границей и др. Действительно, для точек на границе диска $\overline{D}^n$ невозможно указать окрестность, гомеоморфную пространству $\mathbb{R}^n$ (или его открытой части). Этот пробел заполняет понятие многообразия с краем.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$. Последнее разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n \leqslant 0\},$$

границей каждого из которых служит подпространство

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n = 0\}.$$

Полупространство $\mathbb{R}^n_+$ может служить простейшим примером n-мерного многообразия с краем $\mathbb{R}^{n-1}$. Если теперь «склеить» некоторое число полупространства $\mathbb{R}^n_+$, позаботившись о том, чтобы край «склеивался» с краем, то мы получим объект, называемый *n-мерным многообразием с краем*, где край — результат «склейки» экземпляров подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$; он сам является $(n-1)$-мерным многообразием.

Дадим точное описание многообразия с краем. Пусть M — топологическое пространство. Расширим понятие карты в M, допустив возможность действия гомеоморфизмов карт не только из пространства $\mathbb{R}^n$, но и из полупространства $\mathbb{R}^n_+$, т. е. картой в M назовем всякую пару (U, φ), где U — открытое множество в M, а φ — гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U$ или $\varphi\colon \mathbb{R}^N_+ \to U$. Две такие карты, (U, φ), (V, ψ), в M называются C^r-согласованными, если либо $U \cap V = \varnothing$, либо гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ является C^r-диффеоморфизмом, понимая гладкость в смысле определения 2 § 2 в том случае, когда $\psi^{-1}\varphi$ действует между множествами, открытыми в $\mathbb{R}^n_+$, но не открытыми в $\mathbb{R}^n$. Исходя из такого обобщения понятия карты в M, можно ввести понятие C^r-атласа, эквивалентных C^r-атласов, C^r-структуры на M и максимального атласа, дословно повторяя определения аналогичных понятий п. 1. Топологическое пространство M с заданной на нем C^r-структурой называется C^r-многообразием с краем. Для многообразия с краем так же, как в п. 1, вводится понятие размерности (для указания размерности также пишут M^n).

Точка x многообразия с краем M^n называется *краевой точкой*, если в M^n существует карта (U, φ), $\varphi\colon \mathbb{R}^n_+ \to U$, $x \in U$, такая, что $\varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение краевой точки не зависит от выбора карт. Действительно, если бы для некоторой карты точка x не являлась краевой, то гомеоморфизм $\varphi^{-1}\psi$: $\psi^{-1}(U \cap V) \to \varphi^{-1}(U \cap V)$ переводил бы внутреннюю точку полупространства в граничную. Невозможность последнего для многообразий с краем класса C^r, $r \geqslant 1$, следует из теоремы об обратном отображении (покажите!), а для C^0-многообразий с краем — из трудной классической теоремы Брауэра об инвариантности области, утверждающей, что подмножество $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное открытому подмножеству этого пространства, открыто в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 20°. Покажите независимость определения краевой точки для C^0-многообразий.

Мы не приводим доказательство теоремы Брауэра, отсылая интересующегося читателя к литературе.

Множество краевых точек многообразия с краем M^n называется *краем* и обозначается ∂M^n.

Таким образом, понятие C^r-многообразия, введенное в п. 1, является частным случаем C^r-многообразия с краем, когда край — пустое множество.

Отметим, что край ∂M^n C^r-многообразия с краем M^n, если непуст, является $(n-1)$-мерным C^r-многообразием (без края), а $M^n \backslash \partial M^n$ является n-мерным C^r-многообразием (без края). Действительно, если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — C^r-атлас на M^n, то, очевидно, $\left\{\left(U_\alpha \cap (M^n \backslash \partial M^n), \varphi\Big|_{\mathbb{R}^n_+ \backslash \mathbb{R}^{n-1}}\right)\right\}$ — C^r-атлас на $M^n \backslash \partial M^n$, а множество карт $\left\{\left(U_\alpha \cap \partial M^n, \varphi_\alpha\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)\right\}$, для которых $U_\alpha \cap \partial M^n \neq \varnothing$, — C^r-атлас на ∂M^n.

Как и в случае многообразий (без края), для многообразий с краем можно рассматривать карты, действующие не из всего пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_+$, а из их открытых связных множеств, что часто облегчает задание атласа. Многообразия с краем также обычно предполагают хаусдорфовыми и удовлетворяющими второй аксиоме счетности.

Пример 7. Структуру C^∞-многообразия с краем на полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ можно задать с помощью атласа, состоящего из одной карты $\left(\mathbb{R}^n_+, 1_{\mathbb{R}^n_+}\right)$.

Упражнения. 21°. Докажите, что множества в $\mathbb{R}^n$, задаваемые неравенствами $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 1$, являются n-мерными C^∞-многообразиями с краем.

22°. Покажите, что произведение $M^n \times N^m$ C^r-многообразия M^n и C^r-многообразия с краем N^m является $(n+m)$-мерным C^r-многообразием с краем, причем $\partial(M^n \times N^m) = M^n \times \partial N^m$.

23°. Покажите, что если некоторое многообразие с краем компактно, то край этого многообразия также компактен.

24°. Покажите, что если $f: M^n \to N^n$ — гомеоморфизм многообразий с краем, то $f(\partial M^n) = \partial N^n$.

Из многообразий с краем можно конструировать многообразия без края. Приведем такую конструкцию.

Пусть M^n — некоторое C^0-многообразие с краем. Удвоением DM^n многообразия M^n называется топологическое пространство, получающееся из объединения $(M^n \times 0) \cup (M^n \times 1)$ двух экземпляров многообразия M^n отождествлением для всякого $x \in \partial M^n$ точек $(x, 0)$ и $(x, 1)$.

Упражнение 25°. Докажите, что DM^n является C^0-многообразием (без края) размерности n.

12. Существование гладких структур. Сделаем несколько замечаний о возможности введения гладких структур. Уитни доказал, что если на пространстве M существует C^r-структура ($r \geqslant 1$), то на нем существует и C^∞-структура (и даже C^ω-структура); более того, C^∞-атлас можно выбрать из максимального атласа данной C^r-структуры. Исключительным является случай $r = 0$. Известно, что на любом C^0-многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1-структуру (а следовательно, и C^∞-структуру), но для любого $n \geqslant 4$ существуют C^0-многообразия, которые не допускают введения C^1-структуры.

§ 4. Гладкие функции на многообразии и гладкое разбиение единицы

Этот и следующий параграфы посвящены построению начал анализа на гладких многообразиях.

1. Понятие гладкой функции на многообразии. Функция, определенная на многообразии M^n, может рассматриваться локально как функция от локальных координат точки $x \in M^n$, т. е. как функция стандартных координат точки $\varphi_\alpha^{-1}(x)$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемых некоторой картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $x \in U_\alpha$. Таким образом мы попадаем в круг понятий анализа, в частности, можем определить и исследовать понятие гладкой функции.

Определение 1. Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$. Отображение $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ называется *C^r-функцией* (*функцией класса C^r*) *в окрестности точки* $x \in M^n$, если найдется карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(x \in U_\alpha)$ в M^n такая, что отображение $f\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ будет C^r-отображением на $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 1°. Покажите, что определение C^r-функции в окрестности точки не зависит от выбора карты.

Определение 2. Функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ называется *C^r-функцией на некотором множестве $A \subset M^n$*, если она является C^r-функцией в окрестности каждой точки $x \in A$.

Часто приходится рассматривать функцию, заданную не на всем многообразии M^n, а только на его подмножестве. Определения 1 и 2 естественным образом распространяются на случай функций $f\colon U \to \mathbb{R}^1$, заданных на открытом подмножестве $U \subset M^n$, при выборе карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ так, что $U_\alpha \subset U$. Однако эти определения необходимо расширить, если рассматривать функции $f\colon A \to \mathbb{R}^1$, определенные на произвольном подмножестве $A \subset M^n$.

Определение 3. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}^1$ $(A \subset M^n)$ называется *C^r-функцией на A*, если для любой точки $y \in A$ существуют открытая окрестность $U(y) \subset M^n$ точки y и C^r — функция $\varphi_y\colon U(y) \to \mathbb{R}^1$ такие, что $\varphi_y \Big|_{U(y)\cap A} = f \Big|_{U(y)\cap A}$.

Легко убедиться, что каждая из локальных координат $\xi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, C^r-многообразия является C^r-функцией на своей области определения.

В специальном случае двумерных многообразий — (абстрактной) римановой поверхности — важный класс образуют комплекснозначные функции.

Пусть M^2 — (абстрактная) риманова поверхность и $f\colon M^2 \to \mathbb{C}$ — функция на ней со значениями в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Функция f называется *регулярной аналитической* или *голоморфной в точке* $P_0 \in M^2$, если, будучи выраженной через локальные координаты $z = \Phi(P)$, $0 = \Phi(P_0)$ в окрестности точки P_0, она будет регулярной аналитической функцией от z в некотором круге $|z| < r$, т. е.

$$f(\Phi^{-1}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где степенной ряд справа сходится в круге $|z| < r$.

Функция f называется *аналитической в некотором открытом множестве* $U \subset M^2$, если она является регулярной аналитической функцией в каждой точке $P_0 \in U$.

Функции на z-сфере задают обычно в локальных координатах открытого множества U_1 (см. п. 9 § 3), т. е. как функции $w = w(z)$ на z-плоскости. Чтобы исследовать функцию в окрестности точки ∞, необходимо иметь ее выражение в локальных координатах множества U_2. Последнее достигается заменой z на $1/z$; получаем функцию $w = w(1/z) = w_1(z)$, которую исследуем в окрестности нуля.

Упражнение 2°. Проверьте, что функция $w = 1/z$ определена в окрестности точки $z = \infty$ z-сферы и что она голоморфна в этой точке. То же задание для функции $w = \sum_{k=0}^{n} a_k/z^k$.

2. Разбиение единицы. Основным инструментом теории многообразий при переходе от локальных утверждений к глобальным являются разбиения единицы.

Пусть M^n есть C^r-многообразие и $\{U_\alpha\}$ — его открытое покрытие.

Определение 4. Если $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ — функция, то ее *носителем* $\operatorname{supp} \varphi$ называется замыкание множества $\{x\colon \varphi(x) \neq 0\}$.

Определение 5. Семейство C^r-функций $\{\varphi_\beta\colon M^n \to [0, 1]\}$ называется *разбиением единицы класса C^r, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$, если: 1) каждое из множеств $\operatorname{supp} \varphi_\beta$ компактно и содержится в некотором множестве U_α; 2) семейство $\{\operatorname{supp} \varphi_\beta\}$ образует локально конечное покрытие M^n; 3) $\sum\limits_\beta \varphi_\beta(x) = 1$ для всякой точки $x \in M^n$.

Суммирование в условии 3) имеет смысл, так как в каждой точке x лишь конечное число функций φ_β отлично от нуля ввиду условия 2).

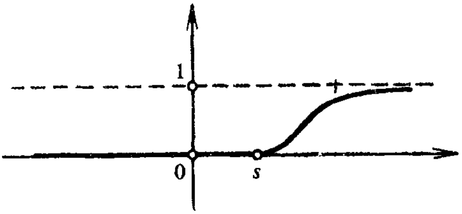


Рис. 89

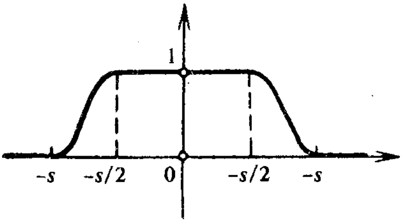


Рис. 90

Теорема 1. *Для любого открытого покрытия C^r-многообразия M^n, $r = 1, \ldots, \infty$, существует подчиненное ему C^r-разбиение единицы.*

Для доказательства этой фундаментальной теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого $s \in \mathbb{R}^1$ существует C^∞-функция h_s: $\mathbb{R}^1 \to [0, 1]$ такая, что $\operatorname{supp} h_s \subset [s, \infty)$.*

Доказательство. Легко проверить, что функция

$$h_s(x) = \begin{cases} e^{-1/x-s}, & \text{если } x > s, \\ 0, & \text{если } x \leqslant s, \end{cases}$$

является искомой (рис. 89). ■

Упражнение 3°. Постройте графики функций $h_{-s}(x)$, $h_{-s}(-x)$, $h_{s/2}(x)+h_{s/2}(-x)$.

Лемма 2. *Для любого* $s>0$ *существует* C^∞*-функция* g_s: $\mathbb{R}^n\to[0,1]$ *такая, что*

$$g_s(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ x\in\overline{D}_{s/2}(0),\\ 0, & \textit{если}\ \ x\in\mathbb{R}^n\backslash D_s(0).\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{g}_s$: $\mathbb{R}^1\to[0,1]$ (рис. 90), заданную равенством

$$\tilde{g}_s(x)=\frac{h_{-s}(x)h_{-s}(-x)}{h_{-s}(x)h_{-s}(-x)+h_{s/2}(x)+h_{s/2}(-x)}.$$

Функция $g_s(x)=\tilde{g}_s(\|x\|)$: $\mathbb{R}^n\to[0,1]$, очевидно, будет искомой.

Заметим, что если $x_0\in\mathbb{R}^n$ — произвольная точка, то

$$g_s(x-x_0)=\begin{cases}1, & \text{если}\ \ x\in\overline{D}_{s/2}(x_0),\\ 0, & \text{если}\ \ x\in\mathbb{R}^n\backslash D_s(x_0).\end{cases}\qquad\blacksquare$$

Лемма 3. *Пусть* M^n *есть* C^r*-многообразие* $(r=1,\dots,\infty)$ *и* $U\subset M^n$ *— открытое множество. Тогда для любой точки* $x_0\in U$ *существуют ее открытые окрестности* $V_1(x_0)$, $V_2(x_0)$ *и* C^r*-функция* f: $M^n\to[0,1]$ *такие, что*:

1) $\overline{V}_1(x_0)\subset V_2(x_0)\subset U$;

2) $$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ x\in\overline{V}_1(x_0),\\ 0, & \textit{если}\ \ x\in M^n\backslash V_2(x_0).\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ — некоторый C^r-атлас M^n и пусть $x_0\in U_\alpha\cap U$. Так как множество $U_\alpha\cap U$ открыто, а φ_α — гомеоморфизм, то множество $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, существует диск $D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))\subset\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U)$. Далее, так как φ_α — гомеоморфизм, то

$$\varphi_\alpha(D_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))=\varphi_\alpha(\overline{D}_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))\subset\varphi_\alpha(D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))\subset U,$$

следовательно, множества $V_1(x_0)=\varphi_\alpha(D_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))$, $V_2(x_0)=\varphi_\alpha(D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))$ удовлетворяют условию 1. По лемме 2 существует C^r-функция $g_{s,x_0}(x)=g_s(x-x_0)$ такая, что

$$g_{s,x_0}(x)=\begin{cases}1, & \text{если}\ \ x\in\overline{D}_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)),\\ 0, & \text{если}\ \ x\in\mathbb{R}^n\backslash D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)).\end{cases}$$

Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} g_{s,x_0}\varphi_\alpha^{-1}(x), & \text{если } x \in V_2(x_0), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus V_2(x_0), \end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет условию 2. ∎

Лемма 4. *Пусть* M^n *— многообразие класса* C^r, $r = 1, \dots, \infty$; $K \subset U \subset M^n$, *где множество* K *компактно, а множество* U *открыто. Тогда существует* C^r*-функция* $f\colon M^n \to [0, 1]$ *такая, что*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in K, \\ 0, & \textit{если } x \in M^n \setminus U. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 3 для каждой точки $y \in K$ существуют открытые окрестности $V_1(y)$, $V_2(y)$ такие, что $\overline{V}_1(y) \subset \subset V_2(y) \subset U$, и существует C^r-функция $f_y(x)\colon M^n \to [0, 1]$ такая, что

$$f_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V}_1(y), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus V_2(y). \end{cases}$$

В силу компактности K в открытом покрытии $\{V_1(y)\}_{y \in K}$ множества K содержится конечное подпокрытие $V_1(y_1), \dots, V_1(y_p)$. Положим $g(x) = \prod_{i=1}^{p} (1 - f_{y_i}(x))$, тогда

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in K, \\ 1, & \text{если } x \in M^n \setminus U, \end{cases}$$

$$f(x) = 1 - g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus U. \end{cases}$$

Очевидно, что $f \in C^r$. ∎

Лемма 5. *Во всякое открытое покрытие* $\{U_\alpha\}$ C^r*-многообразия* M^n, $r = 1, \dots, \infty$, *можно вписать открытое локально конечное покрытие* $\{U'_\beta\}$ *такое, что каждое множество* $\overline{U}'_\beta$ *компактно и содержится в некотором из множеств* U_α.

Доказательство. Пусть $\{(V_\gamma, \varphi_\gamma)\}$ — некоторый C^r-атлас многообразия M^n. Множества $\{V_\gamma \cap U_\alpha\}$ образуют открытое покрытие, вписанное в $\{U_\alpha\}$. Так как φ_γ — гомеоморфизм, то множество $\varphi_\gamma^{-1}(V_\gamma \cap U_\alpha)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, для любой точки $x \in V_\gamma \in U_\alpha$ точки $\varphi_\gamma^{-1}(x)$ содержится в множестве $\varphi_\gamma^{-1}(V_\gamma \cap U_\alpha)$ с некоторым диском $D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))$. Далее, так как φ_γ — гомеоморфизм, то

$$\overline{\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))} = \varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(-x))) \subset \\ \subset \varphi_\gamma(D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))) \subset V_\gamma \cap U_\alpha; \qquad (1)$$

кроме того, так как множество $\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x))$ компактно, а M^n хаусдорфово, то $\varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$ компактно (см. § 13 гл. II). В силу паракомпактности многообразия M^n (см. § 3) в его открытое покрытие $\{\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))\}$ можно вписать открытое локально конечное покрытие $\{U'_\beta\}$. Тогда каждое U'_β содержится в некотором $\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$. Поскольку

$$\overline{U}'_\beta \subset \overline{\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))},$$

то из (1) получаем $\overline{U}'_\beta \subset \varphi_\gamma(D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))) \subset V_\gamma \cap V_\alpha$, следовательно, $\overline{U}'_\beta \subset U_\alpha$. Компактность $\overline{U}'_\beta$ следует из того, что $\overline{U}'_\beta$ является замкнутым подмножеством компактного пространства $\varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$ (см. § 13 гл. II). ■

Доказательство теоремы 1. Применяя дважды лемму 5, в заданное покрытие $\{U_\alpha\}$ впишем открытое локально конечное покрытие $\{U'_\beta\}$, а в $\{U'_\beta\}$ — открытое локально конечное покрытие $\{U_\gamma''\}$ так, что каждое $\overline{U}_\gamma''$ компактно и содержится в некотором U'_β, а каждое $\overline{U}'_\beta$ компактно и содержится в некотором U_α. Для каждого U_γ'' зафиксируем одно из множеств системы $\{U'_\beta\}$, содержащее $\overline{U}_\gamma''$, и переобозначим его U'_γ. Применим теперь к множеству $K = \overline{U}_\gamma''$ лемму 4, найдем соответствующую функцию $f_\gamma\colon M^n \to [0, 1]$ такую, что

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{U}_\gamma'', \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus U'_\gamma. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\gamma(x) = \frac{f_\gamma(x)}{\sum\limits_\nu f_\nu(x)}, \qquad x \in M^n$$

(суммирование в знаменателе идет по множеству индексов покрытия $\{U_\gamma''\}$ и имеет смысл, так как покрытие $\{U_\gamma''\}$ локально конечно и, следовательно, в каждой точке $x \in M^n$ лишь конечное число функций f_ν отлично от нуля). Так как $\operatorname{supp} \varphi_\gamma = \operatorname{supp} f_\gamma$, а множество $\operatorname{supp} f_\gamma$ компактно (как замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{U}'_\gamma$), то множество $\operatorname{supp} \varphi_\gamma$ также компактно. Нетрудно видеть, что $\varphi_\gamma \in C^r$, и получаем требуемое разбиение единицы. ■

Определение 6. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}^1$ $(A \subset M^n)$ называется *C^r-функцией на множестве A*, если она является сужением на A некоторой C^r-функции, заданной на некотором открытом, содержащем A подмножестве U многообразия M^n.

Упражнение 4°. Пользуясь теоремой о разбиении единицы, покажите, что определение 3 гладкой функции, заданной на множестве $A \subset M^n$, эквивалентно определению 6.

3. Алгебра C^r-функций на многообразии. Рассмотрим теперь множество $\mathscr{C}(M^n)$ всех C^r-функций на C^r-многообразии M^n. Функции из $\mathscr{C}(M^n)$ естественным образом можно складывать и умножать на вещественные числа: $f, g \in \mathscr{C}(M^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, то в каждой точке $x \in M^n$ положим $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Таким образом, $\mathscr{C}(M^n)$ превращается в векторное пространство. Более того, обычное умножение $(f \cdot g)x = f(x) \cdot g(x)$, $x \in M^n$, превращает $\mathscr{C}(M^n)$ в алгебру над полем $\mathbb{R}$.

Пусть x — некоторая точка многообразия M^n. Рассмотрим на алгебре $\mathscr{C}(M^n)$ следующее отношение эквивалентности: $f_1 \sim f_2$, если у точки x существует такая окрестность $U(x)$, что $f_1|_{U(x)} = f_2|_{U(x)}$. Класс эквивалентности назовем C^r-ростком (функций) в точке x, а совокупность всех C^r-ростков в точке x обозначим через $\mathscr{C}(x)$. Очевидно, $\mathscr{C}(x)$ — также алгебра. Дадим другое определение $\mathscr{C}(x)$.

Если рассмотреть факторалгебру $\mathscr{C}(M^n)/\mathscr{C}_0(x)$, где $\mathscr{C}_0(x)$ — идеал всех тех функций из кольца $\mathscr{C}(M^n)$, которые обращаются в нуль в некоторой (зависящей от функции) окрестности точки x, то элементы ее естественно отождествить с ростком функций в точке x. Легко проверить, что $\mathscr{C}(M^n)/\mathscr{C}_0(x) = \mathscr{C}(x)$. Множество ростков $\mathscr{C}(x)$ можно было бы определить так же, как множество C^r-функций, определенных в окрестностях точки x, профакторизованное по тому же отношению эквивалентности, что и в определении $\mathscr{C}(x)$. На первый взгляд, получится новый объект, так как мы рассматриваем функции, заданные не на всем многообразии M^n. Из следующего упражнения вытекает, что это не так.

Упражнение 5°. Пусть f — функция класса C^r, заданная на некоторой открытой окрестности $U(x)$ точки x многообразия M^n класса C^r. Покажите, что существуют замкнутая окрестность $\overline{V}(x)$ точки x, $\overline{V}(x) \subset U(x)$, и C^r-функция $\tilde{f}$, заданная на всем многообразии M^n такие, что $\tilde{f}|_{\overline{V}(x)} = f|_{\overline{V}(x)}$.

Указание. Воспользуйтесь леммой 4.

Таким образом, на гладком многообразии построены алгебраические структуры гладких функций $\mathscr{C}(M^n)$ и ростков $\mathscr{C}(x)$. Возникает интересный вопрос: нельзя ли обратно, с помощью алгебр $\mathscr{O}(M^n)$ и $\mathscr{O}(x)$, восстановить структуру многообразия? Ниже показывается, что это возможно.

Прежде всего зафиксируем в аксиоматической форме наиболее существенные свойства алгебр функций на гладком многообразии. Рассмотрим топологическое пространство M и некоторые вещественные функции $f, f_1, \ldots, f_k$, определенные на M. Будем говорить, что f *C^r-гладко зависит от функций* $f_1, \ldots, f_k$ $(r \geqslant 1)$, если существует C^r-функция $U(t_1, \ldots, t_k)$ вещественных переменных $t_1, \ldots, t_k$, определенная на $\mathbb{R}^k$ и такая, что

$$f(x) = U(f_1(x), \ldots, f_k(x)), \qquad x \in M. \tag{2}$$

Если равенство (2) справедливо лишь для точек некоторого множества $V \subset M$, то будем говорить, что функция f *гладко зависит от функций* $f_1, \ldots, f_k$ *на множестве* V. Назовем *C^r-гладкостью на топологическом пространстве M* непустое множество $\mathscr{O}(M)$ вещественных функций на M, удовлетворяющее условиям:

1) всякая функция, C^r-гладко зависящая от функций из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$;

2) всякая функция на M, совпадающая в некоторой окрестности каждой точки $x \in M$ с некоторой функцией из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$.

Упражнение 6°. Убедитесь, что для C^r-многообразия M^n алгебра C^r-функций $\mathscr{O}(M^n)$ удовлетворяет условиям C^r-гладкости.

Из условия 1) следует, что множество $\mathscr{O}(M)$ является алгеброй с естественными операциями сложения и умножения функций и умножения их на число. Естественным образом определяется понятие C^r-ростка f_x функции $f \in \mathscr{O}(M)$ в точке x, идеал $\mathscr{O}_0(x)$ и множества C^r-ростков $\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}(M)/\mathscr{O}_0(x)$.

Перейдем к построению C^r-структуры на M. Пусть M — топологическое пространство с C^r-гладкостью $\mathscr{O}(M)$. Пусть выполнены следующие условия: 1) для всякой точки $x \in M$ найдутся ростки $\hat{f}^1_x, \ldots, \hat{f}^n_x \in \mathscr{O}(x)$, окрестность $V(x)$, представители $f^i\colon V(x) \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, n$, ростков $\hat{f}^i_x$ такие, что отображение $\psi_V\colon y \mapsto \{f^1(y), \ldots \ldots f^n(y)\}$, $y \in V(x)$, является гомеоморфизмом $V(x)$ на пространство $\mathbb{R}^n$; 2) для всякой точки $y \in V(x)$ ростки $\hat{f}^1_y, \ldots, \hat{f}^n_y$ функций $f^1, \ldots, f^n$ принадлежат $\mathscr{O}(y)$; 3) для всякого ростка $\hat{g}_y \in \mathscr{O}(y)$ его представитель g зависит C^r-гладко от $f^1, \ldots, f^n$ в окрестности точки y. Таким образом, задавая координатную систему в окрестности $V(x)$ посредством гомеоморфизма $\varphi_V = \psi_V^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to V(x)$, получаем систему карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$, которая, как легко проверить с помощью свойств 2), 3), образует C^r-атлас на M.

Упражнение 7°. Покажите, что система карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$ образует атлас.

Итак, на M определяется дифференциальная структура C^r-многообразия, индуцированная алгебрами $\mathscr{O}(M)$, $\mathscr{O}(x)$.

Упражнение 8°. Покажите, что если M^n — C^r-многообразие и $\{\mathscr{O}(x)\}_{x \in M^n}$ — соответствующие алгебры ростков C^r-функции на M^n, то определяемая ими дифференциальная структура совпадает со структурой многообразия M^n.

Замечание. Условия 1), 3) приводят к тому, что рассматриваемая гладкость на M состоит из непрерывных функций. Можно было бы рассмотреть C^r-гладкость на абстрактном множестве M и индуцировать на нем слабейшую топологию так, чтобы все функции из гладкости оказались непрерывными.

§ 5. Отображения многообразий

1. Понятие гладкого отображения. Определим и изучим гладкие отображения гладких многообразий, представляющие естественное обобщение дифференцируемых функций в анализе. Пусть M^n, N^m — два C^r-многообразия, $r \geqslant 1$. Рассматривая M^n, N^m как топологические пространства, можно говорить о непрерывных отображениях $f\colon M^n \to N^m$. Структуры класса C^r, заданные на M^n, N^m, позволяют ввести более узкий класс отображений. Отображение $f: M^n \to N^m$ естественно задать в локальных координатах. Именно: если $x \in M^n$ — произвольная точка, (U, φ), (V, ψ) — карты в многообразиях M^n, N^m соответственно такие, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и $W(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $W(x) \subset U$, $f(W(x)) \subset V$, то отображение

$$\psi^{-1} f \varphi: \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$$

назовем *координатным представлением отображения* f в окрестности точки x. Такое представление позволяет привлечь понятие гладкого отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, изучаемое в анализе (см. § 1).

Определение 1. Отображение $f: M^n \to N^m$ называется *C^r-отображением (отображением класса C^r) в окрестности точки $x \in M^n$*, если некоторое координатное представление отображения f в окрестности точки x является C^r-отображением.

Упражнение 1°. Покажите, что определение C^r-отображения в окрестности точки не зависит от выбора координатного представления.

Естественно, что, определяя гладкое в окрестности точки отображение, можно рассматривать отображения, заданные не на всем M^n, а в открытой окрестности точки.

Для случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$ определение 1 можно дать в других терминах. Пусть M^n, N^m — подмногообразия в $\mathbb{R}^{N_1}$ и $\mathbb{R}^{N_2}$ соответственно.

Определение 2. Отображение $f: M^n \to N^m$ называется *C^r-отображением (отображением класса C^r) в окрестности точки* $x \in M^n$, если существуют открытое множество $U \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $x \in U$, и C^r-отображение $\tilde{f}: U \to \mathbb{R}^{N_2}$, совпадающее с f на $U \cap M^n$.

Упражнение 2°. Покажите, что для случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$ определения 1 и 2 эквивалентны.

Указание. Воспользуйтесь свойством отображений карт быть диффеоморфизмами (см. лемму 1 § 2).

От локальных определений перейдем к глобальным.

Определение 3. Отображение $f: M^n \to N^m$ многообразий называется *C^r-отображением (отображением класса C^r)*, если оно есть C^r-отображение в окрестности каждой точки $x \in M^n$.

Очевидно, что понятие C^r-отображения является обобщением понятия C^r-функции.

Аналогично, понятие комплексной аналитической функции на римановой поверхности обобщается в понятие комплексного аналитического отображения римановых поверхностей (если потребовать аналитичность координатного представления).

Упражнения. 3°. Проверьте, что отображение $w = \sqrt{z}$ двулистной римановой поверхности на z-сферу аналитично.

4°. Проверьте, что отображения $w=1/z$ и $w=\sum_{k=0}^{n} a_k/z^k$, рассматриваемые как отображения z-сферы на себя, аналитичны.

Замечание 1. Понятие гладкого отображения можно распространить на случай отображений многообразий с краем. Если $f\colon M^n \to N^m$ — непрерывное отображение C^r-многообразий с краем, $r \geqslant 1$, то, как и в случае отображения многообразий (без края), можно говорить о координатном представлении отображения f в окрестности точки $x \in M^n$. Отображение f называется C^r-отображением в окрестности точки $x \in M^n$, если некоторое координатное представление $\psi^{-1}f\varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$ отображения f в окрестности точки x является C^r-отображением в смысле определения 2 § 2, т. е. является C^r-отображением (в обычном смысле), если $\varphi^{-1}(W(x))$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и продолжимо как C^r-отображение на некоторую открытую в $\mathbb{R}^n$ окрестность точки x, если $\varphi^{-1}(W(x))$ открыто в $\mathbb{R}^n_+$, но не открыто в $\mathbb{R}^n$. Отображение f называется C^r-отображением, если оно является C^r-отображением в окрестности каждой точки $x \in M^n$.

Определение 4. Отображение $f\colon M^n \to N^n$ многообразий класса C^r называется *C^r-диффеоморфизмом*, если: 1) f биективно; 2) f, f^{-1} являются C^r-отображениями.

Упражнение 5°. Почему нельзя определить диффеоморфизм многообразий разной размерности?

Два C^r-многообразия, M^n, N^n, называются C^r-диффеоморфными, если существует C^r-диффеоморфизм $f\colon M^n \to N^n$.

Упражнение 6°. Убедитесь, что диффеоморфность многообразий является отношением эквивалентности.

Теорема 1. *Если M^n — многообразие класса C^r и N^n — многообразие класса C^r со структурой, индуцированной гомеоморфизмом $f\colon M^n \to N^n$, то M^n и N^n C^r-диффеоморфны.*

Доказательство. Легко видеть, что нужным диффеоморфизмом является f. ■

Таким образом, индуцируя с помощью гомеоморфизма $f\colon M^n \to N$ структуру C^r-многообразия на топологическом пространстве N, мы превращаем f в C^r-диффеоморфизм.

Теорема 2. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — C^r-диффеоморфизм C^r-многообразий M^n, N^n. Тогда отображение $f\colon M^n \to N^n$ как гомеоморфизм топологических пространств индуцирует на N^n C^r-структуру, совпадающую с первоначально заданной.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — C^r-атласы на M^n и N^n соответственно. Покажем, что любая карта атласа

$\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ C^r-согласована с любой картой атласа $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, т. е. что отображение

$$\psi_\beta^{-1}(f\varphi_\alpha)\colon (f\varphi_\alpha)^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \qquad (1)$$

является C^r-диффеоморфизмом для любых α и β.

Действительно, так как f — C^r-диффеоморфизм, то его представление в локальных координатах открытых множеств

$$f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset U_\alpha, \quad f(U_\alpha) \cap V_\beta \subset V_\beta,$$

$$\psi_\beta^{-1} f\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}[f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)] \to \psi_\beta^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$$

является C^r-диффеоморфизмом. Но

$$\varphi_\alpha^{-1}[f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)] = (f\varphi_\alpha)^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta);$$

следовательно, отображение (1) является C^r-диффеоморфизмом, что и доказывает утверждение. ■

С точки зрения общей топологии мы не различаем гомеоморфные пространства. Естественно условиться не различать гомеоморфные многообразия M^n и N^n, где многообразие N^n наделено структурой гладкого многообразия, индуцированной гомеоморфизмом $f\colon M^n \to N^n$. Но тогда согласно теореме 1 M^n и N^n диффеоморфны. Обратно: если многообразия M^n, N^n диффеоморфны ($f\colon M^n \to N^n$), то они гомеоморфны, и согласно теореме 2 f как гомеоморфизм индуцирует на N^n структуру гладкого многообразия, совпадающую с первоначальной. Таким образом, принятое соглашение эквивалентно тому, чтобы не различать диффеоморфные многообразия.

Упражнения. 7°. Покажите, что совокупность C^r-многообразий всех размерностей $n \geqslant 1$ образует категорию, морфизмами которой служат C^r-отображения многообразий. Покажите, что эквивалентности в этой категории — это C^r-диффеоморфизмы многообразий.

8°. Покажите, что все C^∞-многообразия, задаваемые различными C^∞-структурами на $\mathbb{R}^1$, указанными в упражнении 2° § 3, C^∞-диффеоморфны.

Последнее упражнение отражает общую ситуацию. Как уже отмечалось в § 3, если на многообразии M^n существует хотя бы одна C^r-структура ($r \geqslant 1$), то на M^n существует бесконечно много C^∞-структур, однако определяемые ими C^∞-многообразия на M^n большей частью диффеоморфны. Например, известно, что все C^∞-структуры на $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$, задают C^∞-диффеоморфные многообразия; все C^∞-структуры на S^n, $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12$, задают C^∞-диффеоморфные многообразия. Известно также, что если размерность многообразий меньше 4, то из гомеоморфности многообразий следует их диффеоморфность, т. е. для многообразий размерности, меньшей 4, дифференцируемая и топологическая классификации совпадают.

Возникает естественный вопрос: существуют ли гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия? Этот вопрос был решен Дж. Милнором в 1956 г. Он показал, что существует ровно 28 гладких многообразий (сферы Милнора), гомеоморфных S^7, но не диффеоморфных друг другу *. Открытие Милнором существования гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий положило начало выделению дифференциальной топологии в самостоятельную область математики **.

Важные примеры диффеоморфизмов возникают при действии групп преобразований на многообразиях. Мы уже рассматривали аффинную группу преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

Группы Ли $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n\ \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ также являются группами преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ (как говорят, *действуют* на $\mathbb{R}^n$). Понятие действия абстрактной группы на топологическом пространстве обсуждалось в § 5 гл. II. Обобщим его на случай групп Ли.

Определение 5. Пусть M — гладкое многообразие и G — группа Ли. *Действием* (*правым*) *G на M* называется гладкое отображение $f\colon M\times G \to M$, сопоставляющее паре $(x, g)\in M\times G$ точку $y=f(x, g)\in M$ (обозначаемую $x\cdot g$), удовлетворяющее следующим условиям: 1) для g_1, $g_2\in G$, $x\in M$ имеем $x(g_1\cdot g_2) = (xg_1)g_2$ для любых g_1, g_2, x; 2) для единицы $e\in G$ имеем $x\cdot e = x$ для любых x.

Если при фиксированном g обозначить гладкое отображение $y=f(\cdot, g)$ через h_g, то из аксиом 1), 2) действия G на M заключаем $h_{g_1\cdot g_2} = h_{g_2}\cdot h_{g_1}$, $h_g\cdot h_{g^{-1}} = h_e = h_{g^{-1}}\cdot h_g$. Так как $h_e = 1_M$, заключаем, что h_g обратимо и $(h_g)^{-1} = h_{g^{-1}}$ — гладкое отображение; следовательно, h_g — диффеоморфизм M и действие группы G означает задание гомеоморфизма $G\to \mathrm{Diff}\,(M)$ в группу диффеоморфизмов многообразия M.

Имея правое действие, можно определить *левое действие G на M* равенством $g\cdot x = f(x, g^{-1})$; тогда $(g_1\cdot g_2)x = g_2(g_1\cdot x)$, $h_{g_1\cdot g_2} = h_{g_1}\cdot h_{g_2}$.

Упражнение 9°. Покажите, что действие групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемое формулой $y = Ax$, где A — матрица из соответствующей группы, а x, u — координатные вектор-столбцы, является левым действием; аналогично для группы аффинных преобразований $y = Ax + v$.

---

* Сферы Милнора можно задать как подмногообразия в $\mathbb{R}^{10}=\mathbb{C}^5=\{(z_1, \ldots, z_5)\}$ системами двух уравнений $z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$, $|z_1|^2 +\ldots+ |z_5|^2=1$, $k=1, 2, \ldots, 28$.

** В 1987 г. К. Таубс показал, что существует несчетное множество гладких многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^4$, но не диффеоморфных друг другу.

Рассматривая алгебраические гомоморфизмы группы G_1 в G_2, полезно учитывать и структуру гладких многообразий. Понятия, формулируемые ниже, являются развитием соответствующих понятий гладких отображений.

Если $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — алгебраический гомоморфизм групп G_1 и G_2, являющихся группами Ли, и если φ является гладким отображением многообразий G_1 и G_2, то он называется *гомоморфизмом групп Ли*. Гомоморфизм, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли*.

Изоморфизмы группы Ли на себя называют ее *автоморфизмами*. Если $G_2 = \mathrm{Aut}\,(V)$ (множество невырожденных линейных преобразований векторного пространства V — его автоморфизмов), то гомоморфизм $\varphi\colon G \to G_2$ называется *представлением группы Ли* G.

Каждый элемент g группы Ли G порождает автоморфизмы G: *левый сдвиг* $L_g\colon h \longmapsto g\cdot h$; *правый сдвиг* $R_g\colon h \longmapsto h\cdot g$; *внутренний автоморфизм* $L_g\cdot R_{g^{-1}}\colon h \longmapsto g\cdot h\cdot g^{-1}$, обозначаемый α_g.

Упражнение 10°. Проверьте соотношения: $L_{g\cdot h} = L_g\cdot L_h$, $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$, $R_{g\cdot h} = R_h\cdot R_g$, $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$, $L_g\cdot R_h = R_h\cdot L_g$, $\alpha_{gh} = \alpha_g\alpha_h$, $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.

2. Классификация одномерных многообразий. Всякое многообразие (произвольной размерности) состоит из не более чем счетного множества своих связных компонент (см. § 3). Поэтому достаточно классифицировать лишь связные многообразия.

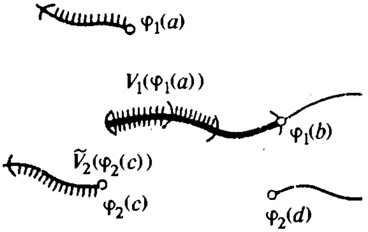


Рис. 91

Наиболее просто классифицируются нульмерные и одномерные многообразия. Связное нульмерное многообразие, очевидно, есть точка. Рассмотрим одномерные многообразия.

Лемма 1. *Если связное топологическое многообразие M^1 имеет атлас, состоящий из двух карт (U_i, φ_i), $\varphi_i\colon \mathbb{R}^1 \to U_i$, $i = 1, 2$, то M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1.*

Доказательство. Если $U_1 \subset U_2$ или $U_2 \subset U_1$, то M^1, очевидно, гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. Рассмотрим теперь случай, когда ни одно из множеств U_1, U_2 не содержится в другом. Из связности M^1 следует, что $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Так как множества $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ открыты в $\mathbb{R}^1$, то они представляют собой объединение некоторых непересекающихся конечных или бесконечных интервалов (связных компонент). Покажем сначала, что среди связных компонент этих множеств нет конечных интервалов. Предположим противное. Пусть, например, множество $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ имеет связную компоненту (a, b). Так $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ — гомеоморфизм, то интервал $(c, d) = \varphi_2^{-1}\varphi_1((a, b))$ будет связной компонентой множества $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Отметим, что при этом ни одна из точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$ не может совпадать с точками $\varphi_2(c)$, $\varphi_2(d)$ (рис. 91), так как эти пары точек принадлежат непересекающимся множествам $U_1 \backslash (U_1 \cap U_2)$, $U_2 \backslash (U_1 \cap U_2)$. Поскольку функция $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ гомеоморфно отображает (a, b) на (c, d), то она монотонно возрастает или убывает. Рассмотрим случай возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$. Пусть $V(\varphi_1(a))$, $\tilde{V}(\varphi_2(c))$ — произвольные окрестности в M^1 точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$. Тогда $V_1(\varphi_1(a)) = V(\varphi_1(a)) \cap U_1$, $V_2(\varphi_2(c)) = \tilde{V}(\varphi_2(c)) \cap U_2$ — окрестности точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$ в U_1 и U_2 соответственно, а $W_1(a) = \varphi_1^{-1}(V_1(\varphi_1(a)))$, $W_2(c) = \varphi_2^{-1}(V_2(\varphi_2(c)))$ — окрестности точек a, c в $\mathbb{R}^1$. Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $(a, a + \varepsilon) \subset W_1(a)$, $(c, c + \varepsilon) \subset W_2(c)$, откуда

$$\begin{aligned} &\varphi_1((a, a + \varepsilon)) \subset \varphi_1(W_1(a)) = V_1(\varphi_1(a)), \\ &\varphi_2((c, c + \varepsilon)) \subset \varphi_2(W_2(c)) = V_2(\varphi_2(c)). \end{aligned} \tag{2}$$

В силу возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((a, a + \varepsilon)) \cap (c, c + \varepsilon) \neq \varnothing$ (рис. 92), откуда $\varphi_1((a, a + \varepsilon)) \cap \varphi_2(c, c + \varepsilon) \neq \varnothing$. Из последнего неравенства и включений (2) получаем $V_1(\varphi_1(a)) \cap V_2(\varphi_2(c)) \neq \varnothing$. Таким образом, пересечение любых окрестностей точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$ непусто. Аналогичным образом доказывается, что непусто пересечение любых окрестностей точек $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(d)$, а в случае убывания функции $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ — точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(d)$, а также точек $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(c)$. Так как отсутствие непересекающихся окрестностей у пары различных точек противоречит хаусдорфовости многообразия M^1, то тем самым доказано, что среди связных компонент множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ нет конечных интервалов. Кроме того, множества $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ не совпадают со всей прямой $\mathbb{R}^1$, так как ни одно из множеств U_1, U_2 не содержится в другом. Поэтому логически возможны лишь следующие случаи:

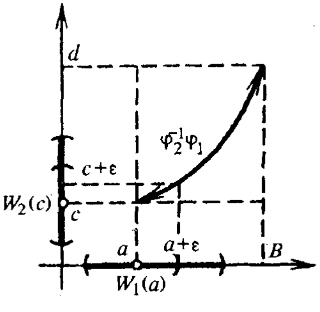


Рис. 92

1) каждое из множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ представляет собой открытую полупрямую;

2) каждое из множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ состоит из двух открытых непересекающихся полупрямых.

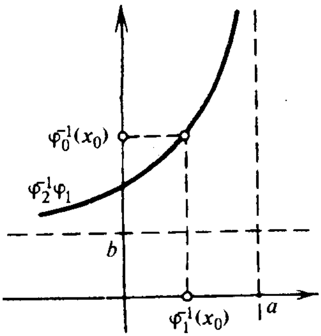


Рис. 93

Рассмотрим первый случай. Не ограничивая общности можно считать, что множество $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ имеет вид $(-\infty, a)$, а множество $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ — вид $(b, +\infty)$ (последнего можно добиться, рассматривая, в случае необходимости, вместо карты $(U_i, \varphi_i(x))$ карту $(U_i, \varphi_i(-x))$). Так как функция $\varphi_2^{-1}\varphi_i$ гомеоморфно отображает $(-\infty, a)$ на $(b, +\infty)$, то она монотонна. Заметим, что $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ возрастает, иначе из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следовало бы, что точки $\varphi_1^{-1}(a)$, $\varphi_2^{-1}(b)$ не имеют непересекающихся окрестностей, что противоречит хаусдорфовости M^1. Пусть x_0 — какая-нибудь точка из $U_1 \cap U_2$. В силу возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ (рис 93) имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_0))) = (b, \varphi_2^{-1}(x_0))$, $\varphi_2^{-1}\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), a)) = (\varphi_2^{-1}(x_0), +\infty)$ (рис. 94). Применяя гомеоморфизм φ_2 к обеим частям последних равенств, получаем $\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_0))) = \varphi_2(b, \varphi_2^{-1}))$, $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), a)) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_0), +\infty))$. Отсюда

$$M^1 = \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)) \cup \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)]),$$

причем $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)) \cap \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0))) = \varnothing$. Поэтому если ψ_1: $[0, +\infty) \to [\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)$, ψ_2: $(-\infty, 0] \to (-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)]$ — некоторые гомеоморфизмы, то гомеоморфизмы $\varphi_1\psi_1$: $[0, +\infty) \to \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty))$, $\varphi_2\psi_2$: $(-\infty, 0] \to \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)])$ задают гомеоморфизм $\mathbb{R}^1$ и M^1. Таким образом, в случае 1) многообразие M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.

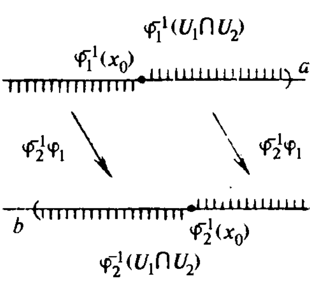


Рис. 94

Во втором случае $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = (-\infty, a_1) \cup (a_2, +\infty)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = (-\infty, b_1) \cup (b_2, +\infty)$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$\varphi_1((-\infty,\ a_1)) = \varphi_2((-\infty,\ b_1))$, $\varphi_1((a_2,\ +\infty)) = \varphi_2((b_2,\ +\infty))$ (в противном случае вместо одной из карт $(U_i,\ \varphi_i(x))$, $i = 1, 2$, следует рассмотреть карту $(U_i,\ \varphi_i(-x))$). Пусть x_1 — какая-нибудь точка из $\varphi_1((-\infty,\ a_1))$, а x_2 — какая-нибудь точка из $\varphi_1((a_2,\ +\infty))$. Покажем, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_1((-\infty,\ \varphi_1^{-1}(x_1))) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_1),\ b_1)),\\
&\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_1),\ a_1)) = \varphi_2((-\infty,\ \varphi_2^{-1}(x_1))),\\
&\varphi_1((a_2,\ \varphi_1^{-1}(x_2))) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_2),\ +\infty)),\\
&\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_2),\ +\infty)) = \varphi_2((b_2,\ \varphi_2^{-1}(x_2))).
\end{aligned} \tag{3}$$

Проверим первое из равенств (остальные проверяются аналогично). Так как функция $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ гомеоморфно отображает $(-\infty,\ a_1)$ на $(-\infty,\ b_1)$, то она монотонна, причем $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ убывает, иначе точки $\varphi_1^{-1}(a_1)$, $\varphi_2^{-1}(b_1)$ не имели бы непересекающихся окрестностей, что противоречит хаусдорфовости M^1. В силу убывания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ (рис. 95) имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((-\infty,\ \varphi_1^{-1}(x_1))) = (\varphi_2^{-1}(x_1),\ b_1)$ (рис. 96). Применяя гомеоморфизм φ_2 к обеим частям последнего равенства, получаем требуемое равенство. В силу равенства (3) имеем

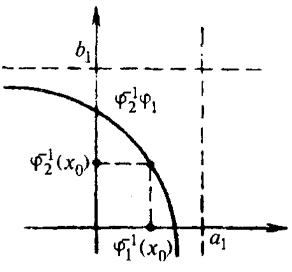


Рис. 95

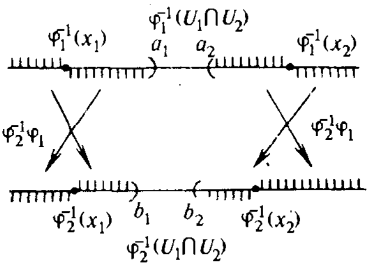


Рис. 96

$$M^1 = \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_1),\ \varphi_1^{-1}(x_2)]) \cup ([\varphi_2^{-1}(x_1),\ \varphi_2^{-1}(x_2)]),$$

причем $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_1),\ \varphi_1^{-1}(x_2))) \cap \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_1),\ \varphi_2^{-1}(x_2))) = \varnothing$. Поэтому если $\psi_1\colon \overline{S}{}^1_+ \to [\varphi_1^{-1}(x_1),\ \varphi_1^{-1}(x_2)]$, $\psi_2\colon \overline{S}{}^1_- \to [\varphi_2^{-1}(x_1),\ \varphi_2^{-1}(x_2)]$ — некоторые гомеоморфизмы, то гомеоморфизмы $\varphi_1\psi_1\colon \overline{S}{}^1_+ \to \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_1),\ \varphi_1^{-1}(x_2)])$, $\varphi_2\psi_2\colon \overline{S}{}^1_- \to \varphi_2([\varphi_2^{-1}(x_1),\ \varphi_2^{-1}(x_2)])$ задают гомеоморфизм S^1 и M^1. ■

Теорема 3. *Всякое одномерное связное топологическое многообразие M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ($\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^1 \to U_\alpha$) — какой-нибудь не более чем счетный атлас многообразия M^1. Заметим, что если объединение $V = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$ каких-нибудь множеств из $\{U_\alpha\}$ связно и система множеств $S = \{U_\alpha\} \setminus \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ непуста, то найдется множество $U_{\alpha_{k+1}} \in S$ такое, что объединение $V \cup U_{\alpha_{k+1}}$ связно (иначе пересечение множества V с каждым из множеств системы S было бы пусто в силу связности множеств U_α, а следовательно, было бы пусто и пересечение множества V с объединением всех множеств системы S, что противоречит связности M^1). Поэтому множества из карт атласа можно перенумеровать в последовательность U_1, $U_2, \dots$ так, чтобы все объединения $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k'$, $k = 1, 2, \dots$, были связны. В силу леммы 1 многообразие $V_2 = U_1 \cup U_2$ гомеоморфно S^1 или $\mathbb{R}^1$. Если V_2 гомеоморфно S^1, то $V_2 = M^1$. Действительно, поскольку V_2 гомеоморфно компактному пространству S^1, то оно компактно, и, следовательно, замкнуто в хаусдорфовом пространстве M^1. С другой стороны, V_2 открыто в M^1. Так как непустым, открытым и одновременно замкнутым множеством в связном пространстве может быть лишь само пространство, то $V_2 = M^1$, что и доказывает теорему, если V_2 гомеоморфно S^1. Если же V_2 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, то, аналогичным образом, многообразие $V_3 = V_2 \cup U_3$ гомеоморфно S^1 или $\mathbb{R}^1$. Если V_3 гомеоморфно S^1, то M^1 гомеоморфно S^1. Если же V_3 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, то рассмотрим $V_4 = V_3 \cup U_4$ и т. д. При рассмотрении многообразий V_1, $V_2, \dots$ возможны следующие случаи:

1) некоторое V_k гомеоморфно S^1;

2) все V_k, $k = 1, 2, \dots$, гомеоморфны $\mathbb{R}^1$.

В первом случае M^1 гомеоморфно S^1. Покажем, что в случае 2) M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. Если атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ конечен, то это очевидно. Пусть атлас состоит из бесконечного множества карт. Построим индуктивно последовательность конечных интервалов $(a_1, b_1) \subset \subset (a_2, b_2) \subset \dots$ и последовательность гомеоморфизмов $\psi_k\colon (a_k, b_k) \to V_k$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что $\psi_{k+1}\big|_{(a_k, b_k)} = \psi_k$. Пусть (a_1, b_1) — какой-нибудь конечный интервал и $\psi_1\colon (a_1, b_1) \to V_1$ — какой-нибудь гомеоморфизм. Пусть интервалы $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ и гомеоморфизмы $\psi_i\colon (a_i, b_i) \to V_i$, $i = 1, \dots, k$, уже построены. Построим интервал (a_{k+1}, b_{k+1}) и гомеоморфизм $\psi_{k+1}\colon (a_{k+1}, b_{k+1}) \to V_{k+1}$. Пусть $f_{k+1}\colon (a_k, b_k) \to V_{k+1}$ — какой-нибудь гомеоморфизм. Так как $V_k \subset V_{k+1}$, то $f_{k+1}^{-1}(V_k)$ — некоторый интервал

(c_k, d_k), содержащийся в (a_k, b_k). Пусть $g_{k+1}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — какой-нибудь гомеоморфизм, для которого $g_{k+1}((c_k, d_k)) = (a_k, b_k)$ (среди таких гомеоморфизмов есть как возрастающие, так и убывающие). Так как функция $\psi_k^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}\big|_{(a_k,\, b_k)}$ — гомеоморфизм, то она монотонна; не ограничивая общности, можно считать, что она возрастает (последнего можно добиться выбором возрастающего или убывающего гомеоморфизма g_{k+1}). Положим $(a_{k+1}, b_{k+1}) = g_{k+1}(a_k, b_k))$. Зададим отображение $\psi_{k+1}\colon (a_{k+1}, b_{k+1}) \to V_{k+1}$ равенством

$$\psi_{k+1}(x) = \begin{cases} \psi_k(x), & \text{если } x \in (a_k, b_k); \\ f_{k+1} g_{k+1}^{-1}(x), & \text{если } x \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus (a_k, b_k). \end{cases}$$

Покажем, что ψ_{k+1} — гомеоморфизм. Действительно, отображение $\Phi = \psi_{k+1}^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}\big|_{(a_{k+1},\, b_{k+1})}$ на множестве $(a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus (a_k, b_k)$ тождественно, а на (a_k, b_k) совпадает с гомеоморфизмом $\psi_k^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}$, который возрастает (рис. 97), поэтому Φ — гомеоморфизм, а следовательно, и $\psi_{k+1} = f_{k+1} g_{k+1}^{-1} \Phi^{-1}$ — гомеоморфизм.

Построенная последовательность гомеоморфизмов $\psi_k\colon (a_k, b_k) \to V_k$, $k = 1, 2, \ldots$, задает гомеоморфизм интервала $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ и $M^1 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, следовательно, M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. ■

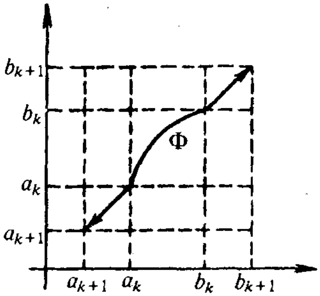


Рис. 97

Теорема 4. *Всякое одномерное связное топологическое многообразие с краем M^1 ($\partial M^1 \neq \varnothing$) гомеоморфно $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$.*

Доказательство. Удвоение DM^1 многообразия M^1 будет одномерным связным топологическим многообразием (без края) и, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1, а само M^1 гомеоморфно связному замкнутому собственному подмножеству $\mathbb{R}^1$ или S^1, не сводящемуся к точке. Так как всякое связное неодноточечное подмножество $\mathbb{R}^1$ вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок, то связные неодноточечные множества в $\mathbb{R}^1$ имеют вид (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ или $[a, b]$, где $a < b$ (возможно, $a = -\infty$, $b = +\infty$). Поэтому связные замкнутые собственные подмножества $\mathbb{R}^1$, не сводящиеся к точке, имеют вид $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ или $[a, b]$ и, следовательно, гомеоморфны $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$. Аналогичным образом, связные замкнутые собственные подмножества S^1, не сводящиеся к точке, гомеоморфны $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$. Таким образом, M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$ (компактное M^1 гомеоморфно $\overline{D}^1$, а некомпактное — $\mathbb{R}^1_+$). ■

Топологическая классификация компактных двумерных многообразий проведена нами в § 4 гл. II и § 4 гл. III. Классификация многообразий размерности, большей 2, представляет собой очень трудную задачу.

3. Регулярные и нерегулярные точки гладкого отображения. Пусть $f\colon M^n \to N^m$ есть C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant 1$.

Определение 6. Точка $x \in M^n$ называется *регулярной* (*некритической, неособой*) точкой отображения f, если для некоторого координатного представления

$$\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$$

отображения f в окрестности точки x точка $\varphi^{-1}(x)$ является регулярной.

В противном случае точка x называется *нерегулярной* (*критической, особой*).

Упражнение 11°. Покажите независимость определения от выбора координатного представления.

Определение 7. Точка $y \in N^m$ называется *регулярным* (*некритическим, неособым*) значением отображения f, если ее полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек отображения f или пуст.

В противном случае точка y называется *нерегулярным* (*критическим, особым*) *значением*.

Замечание 2. Понятие регулярной точки отображения f можно распространить на случай, когда M^n, N^m — многообразия с краем. Для точек, не принадлежащих краю ∂M^n, определение регулярности остается прежним. Точку x края ∂M^n будем называть *регулярной точкой* отображения f, если для некоторого координатного представления $\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$ отображения f в окрестности точки x выполнены условия:

1) существует открытая в $\mathbb{R}^n$ окрестность $\tilde{W}$ точки $\varphi^{-1}(x)$ и C^r-отображение $\Phi\colon \tilde{W} \to \mathbb{R}^m$, совпадающее с $\psi^{-1} f \varphi$ на множестве $\tilde{W} \cap \varphi^{-1}(W(x))$, для которого $\varphi^{-1}(x)$ — регулярная точка;

2) точка x является регулярной точкой сужения $f\big|_{\partial M^n}$ отображения f на край ∂M^n.

Определения нерегулярной точки, регулярного и нерегулярного значения прежние.

Отметим, что при $n \leqslant m$ условие 2) следует из условия 1), а при $n > m$ условие 1) следует из условия 2); при $n > m$ множество нерегулярных значений отображения f совпадает с объединением множеств нерегулярных значений отображений $f\big|_{M^n \setminus \partial M^n}$, $f\big|_{\partial M^n}$.

Упражнение 12°. Покажите, что множество регулярных точек отображения $f\colon M^n \to N^m$ многообразий открыто в M^n.

Множество регулярных значений отображения многообразий, в отличие от множества регулярных точек, может быть и не открыто (приведите примеры!).

В топологии часто используется фундаментальная теорема анализа о мере множества нерегулярных значений гладкого отображения.

Напомним вначале, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль (обозначается $\operatorname{mes} A = 0$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие A замкнутыми параллелепипедами $U_1, U_2, \ldots$ такое, что $\sum\limits_i \operatorname{Vol} U_i < \varepsilon$ (здесь $\operatorname{Vol} U_i$ — обычный объем параллелепипеда U_i в $\mathbb{R}^n$).

Ясно, что не более чем счетное объединение множеств меры нуль есть множество меры нуль и если A имеет меру нуль и $B \subset A$, то B имеет меру нуль.

Теорема 5 (Сард) *. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — C^r-отображение, $r \geqslant \max(n-m, 0)+1$. Тогда, если $n \geqslant m$, то множество нерегулярных значений отображения f имеет меру нуль; если $n < m$, то множество $f(U)$ всех значений отображения f имеет меру нуль* **.

Мы докажем теорему 5 лишь для случая $n \leqslant m$, хотя в дальнейшем будем ею пользоваться и при $n > m$. Доказательство в случае $n > m$ довольно сложно, читатель может найти его в литературе.

Докажем сначала теорему для случая $n = m$.

Пусть Q — некоторый замкнутый n-мерный куб в U со стороной l. Покажем сначала, что множество нерегулярных значений отображения $f\colon Q \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль. Согласно теореме о среднем для любых двух точек $y, z \in Q$ имеем

$$f_i(z) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{u^i} \right)(z_j - y_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где u^i — некоторая точка отрезка, соединяющего y и z. Так как $f \in C^1$, то функции $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, непрерывны на Q и, сле-

---

* Эту теорему в литературе чаще всего называют теоремой Сарда, хотя впервые такое утверждение было установлено А. Брауном в 1935 г. В 1939 г. А. П. Морс доказал теорему для случая функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, упоминая в статье более слабый результат из неопубликованной работы М. Морса и А. Сарда. Теорема 5 была опубликована А. Сардом в 1942 г. В 1953 г. результат был вновь открыт А. Я. Дубовицким и Р. Томом. Для случая отображений плоскости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ теорема была установлена К. Кноппом и Р. Шмидтом еще в 1926 г.

** Как показали Дж. Уитни и Д. Е. Меньшов, предположение гладкости ослабить нельзя.

довательно, ограничены как непрерывные функции на компактном множестве. Поэтому из равенств (4) можно получить неравенство

$$\|f(y) - f(z)\| < c\|y - z\|, \tag{5}$$

где c — некоторая константа.

Рассмотрим теперь аффинное отображение

$$\begin{gathered} T_y(z) = (T_y^{(1)}(z), \ldots, T_y^{(n)}(z))\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ T_y^{(i)}(z) = f_i(y) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_y\right)(z_j - y_j), \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6}$$

Из равенств (4), (6) получаем

$$f_i(z) - T_y^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{u^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_y\right)(z_j - y_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как функции $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, равномерно непрерывны на Q (как непрерывные функции на компактном множестве), то существует функция $\lambda(\varepsilon)\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\|f(z) - T_y(z)\| \leqslant \lambda(\|z - y\|) \cdot (\|z - y\|). \tag{7}$$

Если y — нерегулярная точка отображения f, то $\operatorname{rank}(\partial f/\partial x)|_y < n$, следовательно, образ $T_y(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении T_y содержится в некоторой гиперплоскости $P_y \subset \mathbb{R}^n$.

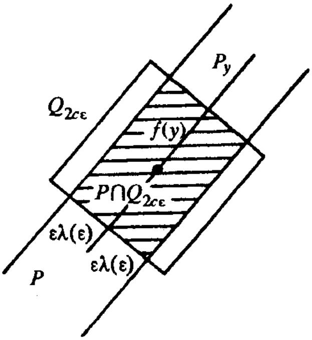


Рис. 98

Если $\|z - y\| < \varepsilon$, то в силу (7) имеем $\|f(z) - T_y(z)\| < \varepsilon\lambda(\varepsilon)$, и, следовательно, $f(z)$ лежит в слое P между гиперплоскостями, параллельными P_y и лежащими на расстоянии $\varepsilon\lambda(\varepsilon)$ от P_y (рис. 98); с другой стороны, из неравенства (5) следует, что $f(z)$ содержится в диске $D^n_{c\varepsilon}(f(y))$ радиуса $c\varepsilon$ с центром в точке $f(y)$, а следовательно, и во всяком замкнутом кубе с ребром $2c\varepsilon$ и с центром в $f(y)$, в частности, в кубе $Q_{2c\varepsilon}$, одна из граней которого параллельна P_y. Таким образом, если y — нерегулярная точка отображения f и $\|z - y\| < \varepsilon$, то $f(z)$ принадлежит замкнутому параллелепипеду $Q_{2c\varepsilon} \cap P$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\varepsilon\lambda(\varepsilon) < c\varepsilon$, и $\operatorname{Vol}(Q_{2c\varepsilon} \cap P) = (2c\varepsilon)^{n-1} 2\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$.

Разобьем теперь куб Q на p^n замкнутых кубов Q_i, $i = 1, \ldots, p^n$, с длиной ребра (l/p), выбрав $p = [l\sqrt{n}/\varepsilon + 1]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа). Так как $a < \lfloor a \rfloor + 1$ для всякого числа a, то $l\sqrt{n}/\varepsilon + 1 < p + 1$ и, следовательно, для длины ребра куба Q_i справедливо неравенство $(l/p) < \varepsilon/\sqrt{n}$. Так как расстояние между двумя точками куба в $\mathbb{R}^n$ с ребром r не превосходит $\sqrt{n}\,r$, то расстояние между любыми точками каждого куба Q_i меньше ε. Если некоторый куб Q_i содержит нерегулярную точку y, то для всякой точки $z \in Q_i$ имеем $\|z - y\| < \varepsilon$, поэтому точка $f(z)$, как показано выше, принадлежит некоторому замкнутому параллелепипеду объема $2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$. Множество нерегулярных значений отображения f содержится в объединении образов $f(Q_i)$ кубов Q_i, содержащих нерегулярные точки отображения f. Так как число кубов, содержащих нерегулярные точки отображения f, не превосходит p^n и образ каждого такого куба содержится в параллелепипеде объема $2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$, то сумма объемов параллелепипедов, содержащих нерегулярные значения, не превосходит $p^n 2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon) = (l\sqrt{n} + \varepsilon)^n 2^n c^{n-1} \lambda(\varepsilon)$. Последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, множество нерегулярных значений отображения $f\colon Q \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Покажем теперь, что множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Представим множество U в виде объединения $U = \bigcup\limits_k Q'_k$ не более чем счетного множества некоторых n-мерных замкнутых кубов Q'_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть объединение множеств нерегулярных значений отображений $f\colon Q'_k \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, каждое из которых, как показано выше, имеет меру нуль. Следовательно, множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Докажем теперь теорему для случая $n < m$.

Точки пространства $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ представим в виде (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Рассмотрим C^1-отображение $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, задаваемое по правилу $F(x, y) = f(x)$. Согласно доказанному случаю теоремы множество нерегулярных значений отображения $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ имеет меру нуль. Так как $\operatorname{rank}_{(x,y)} F = \operatorname{rank}_x f < m$, то множество нерегулярных значений отображения $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ совпадает с образом $F(U \times \mathbb{R}^{m-n})$. Для завершения доказательства остается заметить, что $F(U \times \mathbb{R}^{m-n}) = f(U)$. ■

Теорему 5 легко обобщить на случай отображений многообразий.

Определение 8. Говорят, что *подмножество A многообразия M^n имеет меру нуль* ($\operatorname{mes} A = 0$), если A можно представить в виде объединения $A = \bigcup\limits_k A_k$ не более чем счетного числа множеств $A_1, A_2, \ldots$, где каждое A_k, $k = 1, 2, \ldots$, содержится в множестве U_k некоторой карты (U_k, φ_k) из атласа многообразия M^n, и $\varphi_k^{-1}(A_k)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6. *Пусть $f\colon M^n \to N^m$ есть C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant \max(n - m, 0) + 1$. Если $n \geqslant m$, то множество нерегулярных значений отображения f имеет меру нуль; если $n < m$, то множество $f(M^n)$ всех значений отображения f имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — некоторые атласы многообразий M^n, N^m соответственно и x — некоторая точка M^n. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (V_β, ψ_β) — некоторые карты атласов такие, что $x \in U_\alpha$, $f(x) \in V_\beta$ и $W(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $W(x) \subset U_\alpha$, $f(W(x)) \subset V_\beta$. Отображение $\psi_\beta^{-1} f \varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(W(x)) \to \psi_\beta^{-1}(V_\beta)$ будет координатным представлением отображения f в окрестности точки x (и любой точки $y \in W(x)$). Рассмотрим для каждой точки $x \in M^n$ такое координатное представление отображения f в окрестности x. Система получаемых при этом множеств $\{W(x)\}_{x \in M^n}$ образует открытое покрытие M^n. Так как рассматриваемые нами многообразия имеют счетную базу, то по теореме Линделёфа (см. § 11 гл. II) покрытие $\{W(x)\}_{x \in M^n}$ содержит не более чем счетное подпокрытие $\{W(x_k)\}_{x_k \in M^n}$. Пусть

$$\psi_{\beta_k}^{-1} f \varphi_{\alpha_k}\colon \varphi_{\alpha_k}^{-1}(W(x_k)) \to \psi_{\beta_k}^{-1}(V_{\beta_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

— координатные представления отображения f в окрестностях точек x_k, $k = 1, 2, \ldots$, соответственно. Тогда множество C нерегулярных значений отображения f можно представить как объединение $C = \bigcup\limits_k C_k$ множеств C_k нерегулярных значений отображений (8), а множество $f(M^n)$ — как объединение $f(M^n) = \bigcup\limits_k B_k$ множеств $B_k = f(W(x_k))$ всех значений отображений (8). Если $n \geqslant m$, то в силу теоремы 5 имеем $\operatorname{mes} C_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\operatorname{mes} C = 0$; если $n < m$, то в силу теоремы 5 имеем $\operatorname{mes} B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\operatorname{mes} f(M^n) = 0$. ■

Следствие. *Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant \max(n - m, 0) + 1$. Тогда множество регулярных значений отображения f всюду плотно в N^m, а в случае компактности M^n и открыто в N^m.*

Доказательство. Предположим, что множество регулярных значений отображения f не всюду плотно в N^m. Тогда существует непустое открытое множество $U \subset N^m$, не содержащее регулярных значений отображения f, т. е. U содержится в множестве C нерегулярных значений отображения f. Из теоремы 6 следует $\operatorname{mes} C = 0$, поэтому и $\operatorname{mes} U = 0$ — противоречие с тем, что непустое открытое множество имеет ненулевую меру.

Пусть теперь M^n компактно. Множество регулярных точек отображения f открыто в M^n, поэтому множество A нерегулярных точек отображения f замкнуто и, следовательно, компактно в компактном пространстве M^n. Тогда множество $f(A)$ нерегулярных значений отображения f также компактно (как образ компактного пространства при непрерывном отображении) и, следовательно, замкнуто в хаусдорфовом пространстве N^m. Поэтому множество $N^m \backslash f(A)$ регулярных значений отображения f открыто. ■

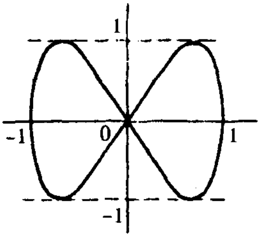


Рис. 99

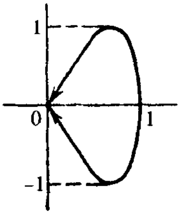


Рис. 100

4. Иммерсии, субмерсии, вложения, подмногообразия. Пусть для C^r-отображения $f: M^n \to N^m$ C^r-многообразий, $r \geqslant 1$, каждая точка $x \in M^n$ является регулярной. Такое отображение называется: 1) *C^r-иммерсией,* если $n \leqslant m$; 2) *C^r-субмерсией,* если $n \geqslant m$.

C^r-иммерсия называется *C^r-вложением,* если f является гомеоморфизмом M^n на подпространство $f(M^n)$ топологического пространства N^m.

Пример 1. Отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, задаваемое по правилу $f(x, y) = x$, является C^∞-субмерсией.

Пример 2. Отображение $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое по правилу $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$ (рис. 99), является C^∞-иммерсией, но не является вложением, так как оно не инъективно. Отображение $f\big|_{(0,\,2\pi)}$ также не будет вложением, хотя f и биективно на $(0, 2\pi)$. В данном случае отображение f^{-1} не будет непрерывным. Заметим, что отображение $f\big|_{(0,\,\pi)}$ (рис. 100) есть C^∞-вложение.

Пример 3. Отображение $f\colon S^1 \to S^2$, задаваемое по правилу $f(x, y) = (x, y, 0)$ (рис. 101), является C^∞-вложением.

Пример 4. Пусть $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — функции класса C^r.

Отображение $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ (кривая класса C^r) можно рассматривать как C^r-отображение многообразий $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ с естественной C^∞-структурой. Выясним, при каких условиях отображение f является иммерсией. Условие иммерсии означает, что любая точка $x \in \mathbb{R}^1$ является регулярной точкой отображения

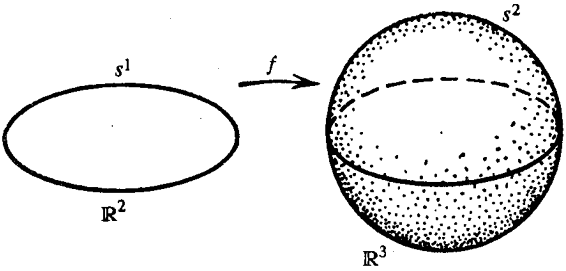


Рис. 101

$$(1_{\mathbb{R}^2})^{-1} f 1_{\mathbb{R}^1} = f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$$

(здесь $1_{\mathbb{R}^2}$, $1_{\mathbb{R}^1}$ — тождественные отображения $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$), т. е.

$$\operatorname{rank}\left(\frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx}\right) = 1. \tag{9}$$

Таким образом, f является C^r-иммерсией, если производные df_1/dx, df_2/dx в нуль нигде одновременно не обращаются.

Кривая, удовлетворяющая условию (9), называется *кривой без особых точек*. Те точки, в которых не выполнено условие (9), называются *особыми точками кривой*. Например, для кривой $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ (рис. 102) точка 0 является особой.

Пример 5. Кривая, изображенная на рис. 103 (построенная с помощью графика функции $y = \sin(1/x)$), определяет C^∞-иммерсию, но не вложение полупрямой в плоскость, хотя отображение и биективно.

Другой пример подобного рода доставляет нам иммерсия $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, задаваемая формулой $f(x) = (e^{2\pi i \alpha_1 x}, e^{2\pi i \alpha_2 x})$, где α_1/α_2 иррационально. Легко проверить, что это биективное отображение (ранга 1), причем его образ лежит на торе $S^1 \times S^1$ и представляет собой всюду плотную обмотку тора.

Заметим, что существенную роль в данных примерах играла некомпактность прямой. Действительно, верна следующая теорема.

Теорема 7. *Если многообразие M^n компактно и $f\colon M^n \to N^m$ — ниъективная иммерсия, то f является вложением.*

Доказательство следует из того, что инъективное непрерывное отображение $f\colon M \to N$ компактного пространства M в хаусдорфово пространство N является гомеоморфизмом на подпространство $f(M)$ (см. § 13 гл. II). ■

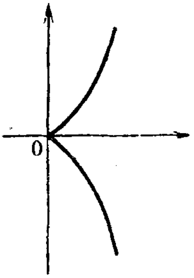


Рис. 102

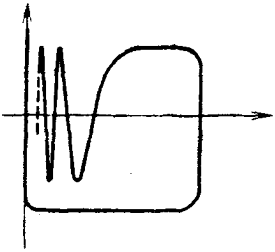


Рис. 103

Отметим, что любая C^r-иммерсия $f\colon M^n \to N^m$ является C^r-вложением на векторной окрестности каждой точки $x \in M^n$ (это следует из теоремы о выпрямлении отображения, см. § 1).

Пример 6. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N \geqslant n$, класса C^r, $r \geqslant 1$, задает иммерсию в $\mathbb{R}^N$, если

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_y = n$$

в любой точке $y \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, f не имеет нерегулярных точек и, по теореме о выпрямлении отображения, является локальным гомеоморфизмом между $\mathbb{R}^n$ и $f(\mathbb{R}^n)$. Если, кроме того, f — гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на $f(\mathbb{R}^n)$, то f есть C^r-вложение.

Упражнение 13°. Убедитесь, что понятие карты C^r-подмногообразия в $\mathbb{R}^N$ (см. § 2) эквивалентно C^r-вложению $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$.

Часто многообразия лежат в других объемлющих многообразиях. Было бы слишком общо называть всякое такое многообразие подмногообразием объемлющего многообразия подобно тому, как в топологическом пространстве не называют подпространством подмножество, наделенное произвольной топологией. Необходимо наложить разумные ограничения для существования простой связи между структурами вложенного и объемлющего многообразий. При этом полезным оказывается понятие вложения.

Определение 9. *Подмногообразием C^r-многообразия N^m* называют всякое подпространство M_1 в N^m, являющееся образом некоторого C^r-вложения $f\colon M^n \to N^m$ с C^r-структурой, индуцированной гомеоморфизмом f.

Структуры подмногообразия и многообразия оказываются связанными простым образом: для некоторого атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия N^m пересечение $U_\alpha \cap M_1^n$ является (если не пусто) образом подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ при гомеоморфизме φ_α, причем сужения $\varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha \cap M_1^n$ задают атлас подмногообразия M_1^n.

Таким образом, локально подмногообразие в N^m задается в соответствующих локальных координатах $\xi_1, \ldots, \xi_m$ многообразия N^m уравнениями $\xi_{n+1} = 0, \ldots, \xi_m = 0$.

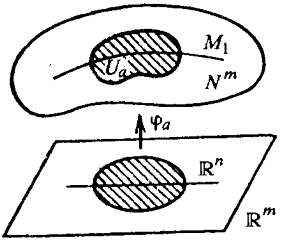


Рис. 104

Упражнение 14°. Применяя теорему о выпрямлении к координатному представлению вложения f, постройте вышеописанные атласы многообразий N^m и M_1^n.

Эту взаимосвязь структур многообразия и подмногообразия можно положить в основу понятия подмногообразия.

Определение 10. Подпространство $M_1 \subset N^m$ называется *n-мерным подмногообразием C^r-многообразия* N^m, $n \leqslant m$, если в заданной структуре многообразия N^m существует набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to U_\alpha$ такой, что $\varphi_\alpha(\mathbb{R}^n) = U_\alpha \cap M_1$, когда $U_\alpha \cap M_1 \neq \varnothing$, и $M_1 \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. При этом отображения $\varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha \cap M_1$ задают C^r-атлас, определяющий структуру n-мерного C^r-многообразия на M_1 (рис. 104). Такую структуру на многообразии $M_1 \subset N^m$ называют структурой, согласованной со структурой многообразия N^m, или просто *структурой подмногообразия*.

Эквивалентность определений 9 и 10 очевидна.

Упражнения. 15°. Убедитесь, что $\{(U_\alpha \cap M_1, \varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n})\}$, $(U_\alpha \cap \cap M_1 \neq \varnothing)$ — C^r-атлас на M_1.

16°. Пусть M^n — C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ (см. § 2) и $(U(x), \varphi)$ — карта точки $x \in M^n$. Покажите, что:

1) существует C^r-диффеоморфизм $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{R}^N \to \tilde{U}(x)$ пространства $\mathbb{R}^N$ на некоторую открытую в $\mathbb{R}^N$ окрестность $\tilde{U}(x)$ точки x такой, что

$$\tilde{\varphi}\big|_{\mathbb{R}^n} = \varphi; \tag{10}$$

2) множество карт

$$\{(\tilde{U}(x), \tilde{\varphi})\}_{x \in M^n} \cup (\mathbb{R}^N, 1_{\mathbb{R}^N}) \tag{11}$$

образует C^r-атлас на $\mathbb{R}^N$ (в смысле определения 2 § 3).

Из упражнения 16° следует, что $\mathbb{R}^N$ с атласом (11) является C^r-многообразием, а M^n в силу (10) — его подмногообразием. (Это оправдывает термин «C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$», данный в § 2. Однако, если быть точнее, вместо него следовало бы употребить термин «подмногообразие C^r-многообразия $\mathbb{R}^N$».)

Пример 7. Экватор сферы S^2 (см. пример 3) является подмногообразием.

Упражнение 17°. Покажите, что график отображения $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^1$, не является подмногообразием $\mathbb{R}^2$.

Подмногообразия, являющиеся группами Ли, возникают как образы гомоморфизмов групп Ли.

Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп Ли такой, что φ — иммерсия и инъекция. Тогда пара (G_1, φ) называется *подгруппой Ли группы Ли* G_2. Если при этом образ $\varphi(G_1)$ замкнут в G_2, то говорят о *замкнутой подгруппе* (G_1, φ) в G_2.

В том случае, когда $G_1 \subset G_2$ — абстрактная подгруппа группы Ли G_2 и является одновременно вложенным подмногообразием: $G_1 \xrightarrow{i} G_2$, то пара (G_1, i) с индуцированной гладкой структурой на G_1 является *подгруппой Ли (вложенной в* G_2*)*.

Упражнения. 18°. Покажите, что в условиях последнего предложения G_1 является группой Ли (с индуцированной гладкой структурой из G_2).

19°. Покажите, что группы Ли $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ являются вложенными в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ подгруппами Ли. Убедитесь, что всюду плотная обмотка тора дает пример подгруппы Ли, не являющейся вложенной.

Часто многообразия возникают не как образы при некоторых отображениях, а как прообразы. Следующая важная теорема бывает полезна не только для построения новых многообразий, но и часто облегчает доказательство того, что изучаемые пространства имеют структуру многообразия.

Теорема 8. *Пусть* $f\colon M^n \to N^m$ $(n \geq m)$ *есть* C^r*-отображение* C^r*-многообразий* $(r \geq 1)$, N_1^k *— подмногообразие в* N^m, *состоящее только из регулярных значений отображения* f. *Тогда* $M_1 = f^{-1}(N_1^k)$ *либо пусто, либо является подмногообразием в* M^n *размерности* $n - m + k$.

Доказательство. Предположим, что $M_1 \neq \varnothing$. Пусть x_0 — произвольная точка M_1. Так как N_1^k — подмногообразие, то существует карта $(\tilde{V}, \psi)$ $(f(x_0) \in \tilde{V})$ из максимального атласа заданной на N^m C^r-структуры такая, что пара $(\tilde{V} \cap N_1^k, \psi|_{\mathbb{R}^k})$ является картой атласа C^r-структуры на N_1^k. Пусть (U, φ) $(x_0 \in U)$ — карта атласа C^r-структуры, заданной на M^n, такая, что $f(U) \subset \tilde{V}$. Тогда по условию $\varphi^{-1}(x_0)$ — регулярная точка отображения $\Phi = \psi^{-1}f\varphi$: $\varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m$ и по теореме о выпрямлении отображения существуют открытая окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ точки $\varphi^{-1}(x_0)$, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^n$ и C^r-диффеоморфизм F: $V \to W$ такие, что отображение ΦF^{-1} на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Заметим, что $\varphi(V)$ — открытая окрестность в M^n точки x_0 и пара $(\varphi(V), \varphi F^{-1})$ является картой максимального атласа C^r-структуры, заданной на M^n. Так как ΦF^{-1} — стандартная проекция, а множество

$$\psi^{-1}f(\varphi(V) \cap M_1) \subset \mathbb{R}^m$$

состоит из точек вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, то множество

$$F\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap M_1) \subset \mathbb{R}^n$$

состоит из точек вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m+k}$. Таким образом, карта $(\varphi(V), \varphi F^{-1})$ в M^n обладает свойством

$$(\varphi F^{-1})(\mathbb{R}^{n-m+k} \cap W) = \varphi(V) \cap M_1.$$

Такую карту можно построить для любой точки $x_0 \in M_1$. Это и доказывает, что M_1 является подмногообразием в M^n размерности $n - m + k$. ∎

Пример 8. Из теоремы 8, в частности, вытекает, что прообраз регулярного значения отображения f: $M^n \to N^m$ либо пуст, либо является подмногообразием в M^n размерности $n - m$.

Следующий фундаментальный факт решает принципиальный вопрос теории многообразий.

Теорема 9 (Уитни). *Для всякого C^r-многообразия M^n, $r \geqslant 1$, существует C^r-вложение M^n в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Мы докажем теорему только в предположении, что M^n компактно и $r \geqslant 2$, общий случай требует более тонкого анализа.

Вначале установим более слабое утверждение.

Теорема 10. *Для всякого компактного C^r-многообразия M^n, $r \geqslant 1$, существует C^r-вложение M^n в пространство $\mathbb{R}^N$ некоторой размерности N.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — некоторый C^r-атлас многообразия M^n. Согласно лемме 3 § 4 для всякой точки

$y \in U_\alpha$ существуют открытые окрестности $V_{\alpha,1}(y)$, $V_{\alpha,2}(y)$ и C^r-функция $f_{\alpha,y}\colon M^n \to [0, 1]$ такие, что:

1) $\overline{V}_{\alpha,1}(y) \subset V_{\alpha,2}(y) \subset U_\alpha$,

2) $f_{\alpha,y}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V}_{\alpha,1}(y), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \backslash V_{\alpha,2}(y), \end{cases}$

причем $f_{\alpha,y}(x) < 1$, если $x \notin \overline{V}_{\alpha,1}(y)$. Рассмотрим для каждой точки $y \in U_\alpha$ каждого множества U_α, $\alpha \in I$, открытые окрестности $V_{\alpha,1}(y)$, $V_{\alpha,2}(y)$ и C^r-функцию $f_{\alpha,y}$ с указанными свойствами. Система множеств $\{V_{\alpha,1}(y)\}_{\alpha \in I,\, y \in U_\alpha}$ образует открытое покрытие M^n. В силу компактности M^n это покрытие содержит конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_1,1}(y_1), \ldots, V_{\alpha_k,1}(y_k)\}$.

Рассмотрим отображение $\psi_i\colon M^m \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} f_{\alpha_i, y_i}(x) \cdot \varphi_{\alpha_i}^{-1}(x), & \text{если } x \in U_{\alpha_i}, \\ 0, & \text{если } x \notin U_{\alpha_i}. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_i \in C^n$, $i = 1, \ldots, k$. Отображения $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $f_{\alpha_1, y_1}, \ldots$ $\ldots, f_{\alpha_k, y_k}$ задают C^r-отображение $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, f_{\alpha_1, y_1}, \ldots, f_{\alpha_k, y_k})\colon$ $M^n \to \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{k(n+1)}$. Покажем, что ψ — иммерсия. Пусть z — некоторая точка M^n, тогда z принадлежит некоторому множеству $V_{\alpha_i,1}(y_i)$ подпокрытия. Так как $f_{\alpha_i,y_i}(x) = 1$ для $x \in V_{\alpha_i,1}(y_i)$, то матрица Якоби $\left(\frac{\partial(\psi\varphi_{\alpha_i}}{\partial x}\right)\Big|_z$ отображения $\psi\varphi_{\alpha_i}$ содержит единичную матрицу

$$\left(\frac{\partial((f_{\alpha_i, y_i} \cdot \varphi_{\alpha_i}^{-1})\varphi_{\alpha_i}}{\partial x}\right)\Big|_z = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$. Следовательно, $\operatorname{rank}_z \psi\varphi_{\alpha_i} = n$ и ψ — иммерсия. Покажем теперь, что ψ инъективно. Пусть $z' \in M^n$ и $z' \neq z$. Если $z' \in V_{\alpha_i,1}(y)$, то $\varphi_{\alpha_i}(z) \neq \varphi_{\alpha_i}(z')$ (так как φ_{α_i} — гомеоморфизм) и $f_{\alpha_i, y_i}(z) = f_{\alpha_i, y_i}(z') = 1$, поэтому $\psi(z) \neq \psi(z')$. Если $z' \notin \overline{V}_{\alpha_i,1}(y_i)$, то $f_{\alpha_i, y_i}(z) \neq f_{\alpha_i, y_i}(z')$, и, следовательно, $\psi(z) \neq \psi(z')$. Таким образом, $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$ — инъективная иммерсия. Так как M^n компактно, то по теореме 7 ψ — вложение. ■

Докажем теперь теорему 9.

В силу теоремы 10 можно считать, что C^r-многообразие M^n является C^r-подмногообразием некоторого пространства $\mathbb{R}^N$. Если $N \leqslant 2n + 1$, то утверждение доказано. Пусть $N > 2n + 1$. Покажем, что в этом случае существует проекция $\mathrm{pr}_e\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ на подпространство $\mathbb{R}^{N-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}^N$ параллельно некоторому вектору $e \in \mathbb{R}^N$, которая будет вложением M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. Будем искать e среди векторов единичной сферы S^{N-1}. Докажем сначала, что существуют проекции, инъективно отображающие M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. При проектировании M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$ параллельно вектору e инъективность нарушается тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in M^n$, $x \neq y$, такие, что вектор $x - y$ параллелен e. Таким образом, инъективность проекции $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет обеспечена, если будет выполнено условие

$$e \neq \frac{x-y}{\|x-y\|}, \quad x, y \in M^n, \quad x \neq y; \qquad (12)$$

Покажем, что векторы e, удовлетворяющие условию (12), существуют. Рассмотрим подмножество $K = (M^n \times M^n) \setminus \Delta$ произведения $M^n \times M^n$ (здесь $\Delta = \{(x, x)\colon x \in M^n\}$ — диагональ). Так как M^n хаусдорфово, то K открыто в $M^n \times M^n$, и, следовательно, является C^r-многообразием размерности $2n$. Рассмотрим C^r-отображение $f\colon K^{2n} \to S^{N-1}$, $f(x, y) = (x-y)/\|x-y\|$. Вектор $e \in S^{N-1}$ в том и только том случае удовлетворяет условию (12), если он не принадлежит образу $f(K^{2n})$. Так как $2n < N - 1$, то согласно теореме 6 множество $f(K^{2n})$ имеет меру нуль в S^{N-1}, поэтому $S^{N-1} \setminus f(K^{2n}) \neq \varnothing$.

Покажем теперь, что существуют проекции, осуществляющие иммерсию M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. Так как M^n компактно, то существуют C^r-карты $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_s, \varphi_s)$ в M^n такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i = M^n$. Пусть x — некоторая точка M^n и (U_k, φ_k) — C^r-карта в M^n, $x \in U_k$. Для того чтобы проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ была иммерсией в точке x, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $(D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n)$ (образ при линейном отображении $D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$) не теряло размерности при проекции pr_e; это эквивалентно тому, что $e \notin (D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет иммерсией в каждой точке $x \in U_k$, если выполнено условие

$$e \notin \bigcup_{x \in U_k} (D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n). \qquad (13)$$

Покажем, что векторы e, удовлетворяющие условию (13), существуют. Рассмотрим подмножество $L = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ произведения

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Так как L открыто в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то является C^∞-многообразием размерности $2n$. Рассмотрим отображение $g_k(y, z)\colon L^{2n} \to \mathbb{R}^N$, $g_k(y, z) = (D_y\varphi_k)(z)$. Так как для всякой точки $y \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{rank}_y \varphi_k = n$, то $\ker D_y\varphi_k = \{0\}$ и, следовательно, $g_k(y, z) \neq 0$. Поэтому можно рассмотреть отображение

$$h_k(y, z)\colon L^{2n} \to S^{N-1}, \quad h_k(y, z) = g_k(y, z)/\|g_k(y, z)\|.$$

Очевидно, $h_k \in C^{r-1}$. Вектор $e \in S^{N-1}$ тогда и только тогда удовлетворяет условию (13), когда он не принадлежит образу $h_k(L^{2n})$. Так как $2n < N-1$, то согласно теореме 6 множество $h_k(L^{2n})$ имеет меру нуль в S^{N-1}. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i = M^n$, то $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет иммерсией в каждой точке $X \in M^n$, если $e \notin \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n})$. Поскольку объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n}) = 0$, и поэтому $S^{N-1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n}) = \varnothing$.

Далее, множество $H = (f(K^{2n})) \cup (\bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n}))$ имеет меру нуль в S^{N-1}, поэтому $S^{N-1} \setminus H \neq \varnothing$. Для всякого вектора $e \in S^{N-1} \setminus H$ проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет инъективной C^r-иммерсией. Так как M^n компактно, то по теореме 7 проекция pr_e будет C^r-вложением.

Мы показали, что если $N > 2n + 1$, то существует C^r-вложение $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$. Если, далее, $N - 1 > 2n + 1$, то существует проекция, осуществляющая C^r-вложение образа $\mathrm{pr}_e(M^n)$ в $\mathbb{R}^{N-2}$. Процесс вложения в пространство меньшей размерности можно продолжать до тех пор, пока размерность пространства не станет равной $2n + 1$. Суперпозиция проекций будет C^r-вложением M^n в $\mathbb{R}^{2n+1}$. ■

Замечание 3. При некоторых ограничениях на многообразия и их размерности теорема 9 может быть усилена. В частности, при $n \geqslant 1$ C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 1$, допускает C^r-вложение в $\mathbb{R}^{2n}$ (Уитни) и даже в $\mathbb{R}^{2n-1}$, если M^n некомпактно (Хирш) или $n \neq 2^k$.

Теорему 9 можно сформулировать иначе: *всякое C^r-многообразие M^n C^r-диффеоморфно подмногообразию пространства* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Так как мы условились не различать диффеоморфных многообразий, то из теоремы 9 видно, что абстрактное понятие многообразия не шире, чем понятие подмногообразия в евклидовых пространствах, и можно было бы ограничиться только их рассмотрением. Однако это не всегда целесообразно. Многие задачи о многообразиях проще решаются без привлечения вложения.

5. Степень отображения по модулю 2. Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — некоторое C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant 1$. Пусть, кроме того, M^n компактно. Если $y \in N^n$ — регулярное значение отображения f, то $f^{-1}(y)$ является подмногообразием в M^n нулевой размерности или пусто. Подмногообразие $f^{-1}(y)$ компактно как замкнутое подмножество компактного пространства M^n и, следовательно, состоит из конечного числа точек $n(f^{-1}(y))$ (если $f^{-1}(y) = \varnothing$, то $n(f^{-1}(y)) = 0$). Покажем, что если N^n связно и $r \geqslant 2$, то класс вычетов mod 2 числа $n(f^{-1}(y))$ не зависит от выбора регулярного значения $y \in N^n$ отображения f. Этот класс вычетов называется *степенью отображения f mod 2* и обозначается $\deg_2 f$.

Приведем вначале необходимые понятия.

Определение 11. C^r-отображения $f, g\colon M^n \to N^m$ C^r-многообразий, $r \geqslant 0$, называются *C^r-гомотопными*, если существует C^r-отображение $F(x, t)\colon M^n \times [0, 1] \to N^m$ такое, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in M^n$.

Упражнения. 20°. Убедитесь, что произведение $M^n \times [0, 1]$, где M^n — C^r-многообразие, является C^r-многообразием с краем, причем его край состоит из двух экземпляров, $M^n \times 0$ и $M^n \times 1$, многообразия M^n.

21°. Покажите, что C^r-гомотопия является отношением эквивалентности на множестве $C^r(M^n, N^m)$ всех C^r-отображений C^r-многообразий M^n, N^m.

Определение 12. C^r-диффеоморфизмы $f, g\colon M^n \to N^n$ C^r-многообразий, $r \geqslant 0$, называются *C^r-изотопными*, если существует C^r-гомотопия $F(x, t)\colon M^n \times [0, 1] \to N^n$ между f и g такая, что при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ отображение $F(x, t)$ является C^r-диффеоморфизмом.

Докажем предварительно вспомогательные утверждения (леммы 2—5).

Лемма 2. *Пусть y, z — произвольные диаметрально противоположные точки окружности $S^1_{r/2}(0) \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному отображению I, такой, что $h(y) = z$ и $h(x) = x$, если $x \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_r(0)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 § 4 существует C^∞-функция $g_r\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ такая, что

$$g_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{D}^n_{r/2}(0), \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_r(0), \end{cases}$$

причем $g_r(x)$ постоянна на сферах $S^{n-1}_\rho(0)$. Нетрудно видеть, что отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$h(x) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(\pi g_r(x)) & -\sin(\pi g_r(x)) & \\ \sin(\pi g_r(x)) & \cos(\pi g_r(x)) & \smash{\raise1.5ex{0}} \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\[-4ex] \multicolumn{2}{c|}{0} & \\[4ex] \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

будет требуемым C^∞-диффеоморфизмом, а C^∞-гомотопия $F(x, t)\colon \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x, t) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(t\pi g_r(x)) & -\sin(t\pi g_r(x)) & \\ \sin(t\pi g_r(x)) & \cos(t\pi g_r(x)) & \smash{\raise1.5ex{0}} \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\[-4ex] \multicolumn{2}{c|}{0} & \\[4ex] \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

изотопно соединяет I и h (отображение $F(x, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ осуществляет поворот диска $\overline{D}^n_{r/2}(0)$ на угол πt параллельно плоскости $\mathbb{R}^2$, а на сферах $S^{n-1}_\rho(0)$, $r/2 \leqslant \rho \leqslant r$, осуществляет поворот на угол $t\pi g_r(x)$). ■

Лемма 3. *Пусть y, z — произвольные точки $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм $\tilde{h}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $\tilde{h}(y) = z$ и $\tilde{h}(x) = x$ вне некоторого диска $D^n_\nu(0)$.*

Доказательство. Пусть $\|y - z\| = r$. Преобразование $A(x) = x - (y + z)/2$ переводит точки y, z в диаметрально противоположные точки сферы $S^{n-1}_{r/2}(0)$. Пусть $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — какое-нибудь вращение, переводящее вектор $(y - z)/2$ в подпространство $\mathbb{R}^2$. Тогда $BA(y)$, $BA(z)$ — диаметрально противоположные точки окружности $S^1_{r/2}(0)$. Согласно лемме 2 существует C^∞-диффеоморфизм h:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $h(BA(y)) = BA(z)$ и $h(x) = x$, если $x \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_r(0)$. Тогда отображение $\tilde{h} = (BA)^{-1}h(BA)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будет требуемым диффеоморфизмом, и если $H(x, t)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и h, то $\tilde{H} = (BA)^{-1}H(BA)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и $\tilde{h}$. ∎

Лемма 4. *Пусть y, z — произвольные точки связного C^r-многообразия N^n, $n > 0$, $r \geqslant 0$. Тогда существует C^r-диффеоморфизм d: $N^n \to N^n$, C^r-изотопный тождественному, такой, что $d(y) = z$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $n \geqslant 2$ и y, z принадлежат множеству U какой-нибудь карты (U, φ) атласа многообразия N^n. Согласно лемме 3 существует C^∞-диффеоморфизм $\tilde{h}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $\tilde{h}(\varphi^{-1}(y)) = \varphi^{-1}(z)$ и $\tilde{h}(x) = (x)$ вне некоторого диска $D^n_v(0)$. Тогда, как нетрудно видеть, отображение d: $N^n \to N^n$,

$$d(x) = \begin{cases} \varphi\tilde{h}\varphi^{-1}(x), & \text{если } x \in U, \\ x, & \text{если } x \in N^n \setminus U, \end{cases}$$

будет требуемым C^r-диффеоморфизмом, и если $\tilde{H}(x, t)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и $\tilde{h}$, то $F(x, t)$: $N^n \times [0, 1] \to N^n$,

$$F(x, t) = \begin{cases} \varphi\tilde{H}\varphi^{-1}, & \text{если } x \in U, \\ x, & \text{если } x \in N^n \setminus U, \end{cases}$$

есть C^r-изотопия, соединяющая I и d.

Пусть теперь y, z не принадлежат множеству одной карты. Тогда в силу связности N^n существует «цепочка» карт, соединяющих y, z, т. е. существуют карты $(U_i \varphi_i)$, $i = 1, \ldots, k$, в N^n такие, что $y \in U_1$, $z \in U_k$ и $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, k-1$. В каждом из множеств $U_i \cap U_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, выберем произвольную точку u_i. Тогда пары точек (y_1, u_1), (u_1, u_2), $\ldots$, (u_{k-2}, u_{k-1}), (u_{k-1}, z) будут принадлежать множествам $U_1, \ldots, U_k$ соответственно и, следовательно, существуют C^r-диффеоморфизмы d_i: $N^n \to N^n$, $i = 1, \ldots, k$, C^r-изотопные тождественному, такие, что $d_1(y) = u_1$, $d_2(u_1) = u_2$, $\ldots$ $\ldots$, $d_{k-1}(u_{k-2}) = u_{k-1}$, $d_k(u_{k-1}) = z$. Диффеоморфизм $d = d_k d_{k-1} \ldots d_1$: $N^n \to N^n$, очевидно, будет искомым.

Таким образом, в случае $n \geqslant 2$ лемма доказана. В справедливости утверждения леммы при $n = 1$ предлагаем читателю убедиться самостоятельно. ∎

Лемма 5. *Пусть $f\colon M^{n+1}\to N^n$ — некоторое C^r-отображение компактного C^r-многообразия с краем M^{n+1} в C^r-многообразие N^n, $r\geqslant 1$. Если y_0 — регулярное значение отображения f, то $M_1=f^{-1}(y_0)$ либо пусто, либо является одномерным компактным C^r-многообразием с краем, причем $\partial M_1=M_1\cap\partial M^{n+1}$.*

Доказательство. Утверждение леммы о компактности M_1 следует из того, что M_1 замкнуто (как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении) в компактном пространстве M^{n+1}. Докажем основное утверждение леммы. Так как $L=M^{n+1}\setminus\partial M^{n+1}$ есть $(n+1)$-мерное C^r-многообразие, то в силу теоремы 8 для отображения $f\big|_{L^{n+1}}\colon L^{n+1}\to N^n$ множество $(f\big|_{L^{n+1}})^{-1}(y_0)=M_1\cap L^{n+1}$ либо пусто, либо является одномерным подмногообразием в L^{n+1}. Поэтому если $M_1\cap\partial M^{n+1}=\varnothing$, то утверждение леммы доказано (в этом случае $\partial M_1=\varnothing$). Рассмотрим случай $M_1\cap\partial M^{n+1}\neq\varnothing$. Для точек множества $M_1\cap\partial M^{n+1}$ построим карты, C^r-согласованные друг с другом и с картами подмногообразия $M_1\cap L^{n+1}$.

По условию y_0 — регулярное значение отображения $f\big|_{\partial M^{n+1}}\colon\partial M^{n+1}\to N^n$, кроме того, ∂M^{n+1} компактно. Поэтому, как показано в начале пункта, множество $(f\big|_{\partial M^{n+1}})^{-1}(y_0)=M_1\cap\cap\,\partial M^{n+1}$ конечно. Пусть x_0 — произвольная точка $M_1\cap\partial M^{n+1}$ и (U,φ), (V,ψ) — карты в M^{n+1} и N^n такие, что $x_0\in U$, $y_0\in V$ и $f(U)\subset V$. Кроме того, выберем U так, чтобы x_0 была единственной точкой множества $M_1\cap\partial M^{n+1}$ в U (это возможно, так как множество $M_1\cap\partial M^{n+1}$ конечно). По условию $z_0=\varphi^{-1}(x)$ — регулярная точка отображения $\Phi=\psi^{-1}f\varphi\colon\mathbb{R}^{n+1}_+\to\mathbb{R}^n$, т. е. существует открытая в $\mathbb{R}^{n+1}$ окрестность W_1 точки z_0 и C^r-отображение $\tilde\Phi\colon W_1\to\mathbb{R}^n$, совпадающее на множестве $W_1\cap\mathbb{R}^{n+1}_+$ с Φ, такое, что z_0 — регулярная точка отображений $\tilde\Phi$ и $\tilde\Phi\big|_{W_1\cap\mathbb{R}^n}$. По теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $W_2\subset W_1$ точки z_0, открытое множество $W\subset\mathbb{R}^{n+1}$ и C^r-диффеоморфизм $F\colon W_2\to W$ такие, что $\tilde\Phi F^{-1}$ на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\tilde W=D^{n+1}_\varepsilon(u_0)$ — некоторый открытый диск с центром в точке $u_0=F(z_0)$, содержащийся в W. Обозначим $W_2=F^{-1}(\tilde W)$, $\tilde U=\varphi(\tilde W_2\cap\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Будем рассматривать теперь сужения отображений $F,\tilde\Phi,\varphi$ на множества

$\tilde W_2$, $\tilde W_2$, $\tilde W_2 \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$ соответственно, сохранив для них прежние обозначения F, $\tilde\Phi$, φ. Так как $\tilde\Phi F^{-1}$ на множестве $\tilde W$ является стандартной проекцией $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$, то прообраз точки $\psi^{-1}(y_0)$ при отображении $\tilde\Phi F^{-1}$ — это интервал I, получаемый при пересечении диска $\tilde W$ с прямой, проходящей через точку u_0 и параллельной вектору $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Точка u_0 разбивает интервал I на два полуинтервала, I_1, I_2, с общим концом u_0.

Множество $F\varphi^{-1}(\tilde U \cap M_1)$, очевидно, содержится в I; покажем, что оно совпадает с одним из полуинтервалов I_1, I_2. Для этого докажем эквивалентное утверждение, что множество $\varphi^{-1}(\tilde U \cap M_1)$ совпадает с одним из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$. Поскольку $\varphi^{-1}(\tilde U \cap M_1) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+ \cap F^{-1}(I)$, то достаточно показать, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. Покажем сначала, что каждое из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержится в одном из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. В силу выбора окрестности U имеем $\tilde U \cap M_1 \cap \partial M^{n+1} = \{x_0\}$, следовательно, $\tilde\Phi^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = z_0 \in \mathbb{R}^n$. Но $\tilde\Phi^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = F^{-1}(u_0)$, значит, пересечение каждого из множеств $F^{-1}(I_1 \backslash u_0)$, $F^{-1}(I_2 \backslash u_0)$ с пространством $\mathbb{R}^n$ пусто. Поэтому, если бы множества $F^{-1}(I_1 \backslash u_0)$, $F^{-1}(I_2 \backslash u_0)$ имели непустое пересечение с каждым из открытых полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+ \backslash \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}_- / \mathbb{R}^n$, то были бы несвязны, в противоречии с тем, что образы связных множеств I_1, I_2 при непрерывном отображении F^{-1} связны (см. § 10 гл. II).

Покажем теперь, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. Рассмотрим $F^{-1}(I)$ как гладкую кривую, задаваемую диффеоморфизмом $F^{-1}\colon I \to \mathbb{R}^{n+1}$; обозначим ее $z = z(t)$, $t = u_{n+1}$, $t_0 = u_0$. Так как $\tilde\Phi^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = F^{-1}(I)$, то $\tilde\Phi(z(t)) \equiv \psi^{-1}(y_0)$ при $t \in I$. Дифференцируя последее равенство, получим $(D_{z_0}\tilde\Phi)\left(\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{t_0} = 0$, т. е. вектор $a = \left(\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{t_0}$ принадлежит ядру $\ker D_{z_0}\tilde\Phi$. Поскольку

$$a = \left(\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial u_{n+1}}\Big|_{u_0}, \ldots, \frac{\partial F_{n+1}^{-1}}{\partial u_{n+1}}\Big|_{u_0}\right)$$

и диффеоморфизм F^{-1} не имеет особых точек, то $a \neq 0$. Очевидно, $a \notin \mathbb{R}^n$, так как в противном случае $a \in \ker (D_{z_0}\tilde\Phi)\Big|_{\mathbb{R}^n} =$

$= \ker D_{z_0}(\tilde{\Phi}\big|_{\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^n})$, что противоречит тому, что z_0 — регулярная точка отображения $\tilde{\Phi}\big|_{\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^n}$. Таким образом, касательный вектор a к кривой $z = z(t)$ в точке z_0 направлен в одно из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$, поэтому кривая пересекает $\mathbb{R}^n$ в точке z_0, переходя из одного полупространства в другое. Следовательно, множество $F^{-1}(I) = F^{-1}(I_1) \cup F^{-1}(I_2)$ имеет непустое пересечение с каждым из открытых полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+ \backslash \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}_- \backslash \mathbb{R}^n$. Отсюда, учитывая, что каждое из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержится в одном из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$, получаем, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$.

Итак, множество $F\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1)$ совпадает с I_1 или I_2. Пусть, например, $F\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1) = I_1$. Тогда, если $g\colon \mathbb{R}^1_+ \to I_1$ — некоторый C^r-диффеоморфизм, то $\varphi F^{-1} g\colon \mathbb{R}^1_+ \to \tilde{U} \cap M_1$ — гомеоморфизм и $\varphi F^{-1} g(0) = x_0$, следовательно, $(\tilde{U} \cap M_1, \varphi F^{-1} g)$ — карта точки x_0 в M_1. Построенные таким образом карты для разных точек множества $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ C^r-согласованы друг с другом и с картами подмногообразия $M_1 \cap L$, так как их гомеоморфизмы получены из гомеоморфизмов карт C^r-атласа на M^{n+1} суперпозицией с C^r-дифеоморфизмами. Таким образом, M_1 — одномерное C^r-многообразие с краем и $\partial M_1 = M_1 \cap \partial M^{n+1}$. ■

Докажем теперь независимость степени отображения по модулю 2 от выбора регулярного значения.

Лемма 6. *Пусть* f, g: $M^n \to N^n$ — C^2-*гомотопные* C^2-*отображения* C^2-*многообразий, причем* M^n *компактно. Если* $y \in N^n$ — *регулярное значение для* f *и* g, *то* $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$.

Доказательство. Пусть $F\colon M^n \times [0, 1] \to N^n$ — C^2-гомотопия, соединяющая f и g. Предположим сначала, что y является регулярным значением и для F. Если $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) = \varnothing$, то утверждение леммы очевидно, так как $n(f^{-1}(y)) = n(g^{-1}(y)) = 0$. Рассмотрим случай непустого множества $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$. В силу леммы 5 множество $M_1 = F^{-1}(y)$ является одномерным компактным многообразием с краем, причем $\partial M_1 = M_1 \cap ((M^n \times 0) \cup (M^n \times 1)) =$ $= (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)$. Тогда компоненты связности M_1 компактны (как замкнутые множества компактного пространства) и, следовательно, гомеоморфны S^1 или $\bar{D}^1$ (см. п. 2). Таким образом, край каждой компоненты связности M^1 состоит из четного числа точек. Так как край $\partial M_1 = (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)$ представляет собой объединение краев связных компонент и множества $f^{-1}(y)$, $g^{-1}(y)$ конечны (см. начало пункта), то число $n(f^{-1}(y)) + n(g^{-1}(y))$ точек края ∂M_1 четно, поэтому $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$.

Предположим теперь, что y не является регулярным значением отображения F. Покажем, что существует открытая окрестность точки y, для каждой точки y' которой справедливы равенства $n(f^{-1}(y')) = n(f^{-1}(y))$, $n(g^{-1}(y')) = n(g^{-1}(y))$. Пусть, например, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. По теореме об обратном отображении существуют открытые окрестности $U(x_i)$, $U_i(y)$, $i = 1, \ldots, k$, точек $x_1, \ldots, x_k$, y такие, что отображения $f\big|_{U(x_i)} : U(x_i) \to U_i(y)$, $i = 1, \ldots, k$, являются C^2-диффеоморфизмами. Не ограничивая общности, можно считать, что окрестности $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ не пересекаются. Множество $M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ замкнуто в M^n и, значит, компактно, следовательно, его образ $f\left(M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)\right)$ при непрерывном отображении f компактен в N^n и поэтому замкнут в хаусдорфовом пространстве N^n. Тогда $U(y) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i(y) \setminus f\left(M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)\right)$ — открытая окрестность точки y и $f^{-1}(y') \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ для всякой точки $y' \in U(y)$, следовательно, $n(f^{-1}(y')) = n(f^{-1}(y))$. Аналогичным образом, существует открытая окрестность $V(y)$ точки y, для каждой точки y' которой справедливо равенство $n(g^{-1}(y')) = n(g^{-1}(y))$. Окрестность $W(y) = U(y) \cap V(y)$, очевидно, будет требуемой. Отметим, что все точки окрестности $W(y)$ будут регулярными точками отображений f, g Далее, множество нерегулярных значений отображения F совпадает с объединением множеств нерегулярных значений отображений $F\big|_{(M^n \times [0,1]) \setminus \partial M^n \times [0,1]}$, $F\big|_{\partial(M^n \times [0,1])}$. Каждое из последних множеств согласно теореме 6 имеет меру нуль. Поэтому в окрестности $W(y)$ найдется регулярное значение y_0 отображения F. Таким образом, y_0 — регулярное значение отображений f, g, F и, как показано выше, $n(f^{-1}(y_0)) \equiv n(g^{-1}(y_0)) \bmod 2$. Но $n(f^{-1}(y_0)) = n(f^{-1}(y))$; $n(g^{-1}(y_0)) = n(g^{-1}(y))$, следовательно, $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$. ■

Теорема 11. *Пусть* $f\colon M^n \to N^n$ — *C^2-отображение C^2-многообразий, причем M^n копактно, а N^n связно. Если y, z — регулярные значения отображения f, то* $n(f^{-1}(y)) \equiv n(f^{-1}(z)) \bmod 2$.

Доказательство. В силу леммы 4 существует C^2-диффеоморфизм $d\colon N^n \xrightarrow{\cdot} N^n$, C^2-изотопный тождественному, такой, что $d(y) = z$. Тогда z — регулярное значение C^2-отображения df: $M^n \to N^n$ и df C^2-гомотопно f. Согласно лемме 6 $n(f^{-1}(z)) \equiv \equiv n((df)^{-1}(z)) \bmod 2$. Но $(df)^{-1}(z) = f^{-1}d^{-1}(z) = f^{-1}(y)$, поэтому $n(f^{-1}(y)) \equiv n(f^{-1}(z)) \bmod 2$. ■

Таким образом, степень отображения по модулю 2 не зависит от выбора регулярного значения.

Теорема 12. *Пусть* f, $g\colon M^n \to N^n$ — *C^2-гомотопные C^2-отображения C^2-многообразий, причем M^n компактно, а N^n связно. Тогда* $\deg_2 f = \deg_2 g$.

Доказательство. Согласно теореме 6 множества нерегулярных значений отображений f, g имеют меру нуль, поэтому можно выбрать регулярное значение y, общее для f и g. В силу леммы 6 $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$, откуда $\deg_2 f = \deg_2 g$. ■

Пример 9. Если M^n — компактное связное C^2-многообразие и $f\colon M^n \to M^n$ — постоянное отображение, т. е. $f(x) = x_0$ для всех $x \in M^n$, то при $n > 0$ $\deg_2 f = 0$, а при $n = 0$ $\deg_2 f = 1$.

Пример 10. Если M^n — компактное связное C^2-многообразие, $n \geqslant 0$ и $I\colon M^n \to M^n$ — тождественное отображение, то $\deg_2 I = 1$.

Замечание 4. Из примеров 9, 10 и теоремы 12 следует, что тождественное отображение компактного связного C^2-многообразия M^n не C^2-гомотопно постоянному отображению при $n > 0$.

Замечание 5. Предыдущие построения степени отображения по модулю 2 использовали компактность многообразия M^n, в частности, для обеспечения компактности прообразов одноточечных множеств при отображениях многообразий и при гомотопиях. В приложениях бывает удобно освободиться от требования компактности M^n. С этой целью можно рассмотреть класс отображений, априори обладающий свойством компактности прообраза.

Определение 13. Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *собственным* (сокращенно c-отображением), если прообраз $f^{-1}(A)$ компактен для всякого компактного множества $A \subset Y$.

Нетрудно видеть, что в классе c-отображений многообразий и их c-гомотопий лемма 6 и теоремы 11, 12 верны без условия компактности многообразия M^n. Таким образом, для собственных C^r-отображений C^r-многообразия M^n в связное C^r-многообразие N^n, $r \geqslant 2$, корректно определена степень по модулю 2.

В качестве приложения степени отображения по модулю 2 докажем классическую теорему Брауэра о неподвижной точке.

Лемма 7. *Не существует C^2-отображения $f\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$, оставляющего неподвижной каждую точку сферы S^{n-1} (т. е. сфера S^{n-1} не является «гладким ретрактом» шара $\overline{D}^n$).*

Доказательство. Предположим противное, пусть $f\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$ — C^2-отображение и $f(x) = x$ для всякой точки $x \in S^{n-1}$. Тогда отображение $F\colon S^{n-1}\,[0, 1] \to S^{n-1}$, задаваемое равенством $F(x, t) = f(tx)$, будет C^2-гомотопией, соединяющей тождественное отображение сферы с постоянныи отображением сферы в точку $f(0) \in S^{n-1}$, что невозможно при $n > 1$ в силу замечания 4. В случае $n = 1$ множество $f(\overline{D}^1) = S^0$ несвязно, что противоречит связности образа при непрерывном отображении топологических пространств. ■

Несуществование ретракции $\overline{D}^n \to S^{n-1}$ приводит к принципу неподвижной точки (см. § 4 гл. III).

Лемма 8. *Всякое C^2-отображение $f\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ имеет неподвижную точку $x_* \in D^n$, $f(x_*) = x_*$.*

Доказательство. Предположим, что некоторое C^2-отображение $f\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ не имеет неподвижных точек. Рассмотрим отображение $G\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$, сопоставляющее каждой точке $x \in \overline{D}^n$ точку пересечения $g(x)$ сферы S^{n-1} с полупрямой $tx + (1 - t)f(x)$, $t \geqslant 0$. Отображение g имеет следующий аналитический вид:

$$g(x) = x + u(\sqrt{1 - (x, x) + (x, u)^2} - (x, u)),$$

где $\quad u = (x - f(x))/\|x - f(x)\|, \quad (y, z) = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$

Очевидно, $g \in C^2$ и $g(x) = x$, если $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 7. ■

Лемму 8 легко распространить на непрерывные отображения, применяя стандартную процедуру аппроксимации непрерывных отображений гладкими.

Теорема 13 (Брауэр). *Всякое непрерывное отображение $f\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $f(x) \neq x$ для всех $x \in \overline{D}^n$. Тогда непрерывная функция $\|f(x) - x\|$ достигает своего минимума $\mu > 0$ на компактном множестве $\overline{D}^n$. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса для $\mu/2$ существует полиномиальное отображение $P_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Отображение P_1, однако, может переводить точки из $\overline{D}^n$ в $\mathbb{R}^n \backslash \overline{D}^n$. «Подправим немного» P_1 и рассмотрим вместо P_1 аппроксимирующее отображение $P = P_1/(1 + \mu/2)$, которое отображает $\overline{D}^n$ в $\overline{D}^n$, и $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1 + \mu/2)$, если $x \in \overline{D}^n$. Действительно, неравенство $\|P(x)\| \leqslant 1$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x)\| = \|P_1(x) - f(x) + f(x)\|/(1 + \mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant (\|P_1(x) - f(x)\| + \|f(x)\|/(1 + \mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Неравенство $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1 + \mu/2)$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x) - f(x)\| = \left\|P_1(x) - f(x) - \tfrac{\mu}{2}f(x)\right\|/(1 + \mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|P_1(x) - f(x)\| + \tfrac{\mu}{2}\|f(x)\|\right)/(1 + \mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Тогда

$$\|P(x) - x\| = \|f(x) - x - f(x) + P(x)\| \geqslant \|f(x) - x\| -$$
$$- \|P(x) - f(x)\| > \mu - \mu/(1 + \mu/2) = \mu^2/(2 + \mu) > 0$$

при $x \in \overline{D}^n$, и, значит, C^∞-отображение P на $\overline{D}^n$ не имеет неподвижных точек, что противоречит лемме 8. ∎

Укажем еще одно простое, но полезное приложение степени отображения по модулю 2.

Теорема 14. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ есть C^2-отображение C^2-многообразий, причем M^n компактно, а N^n связно. Если $\deg_2 f \neq 0$, то отображение f сюръективно, т. е. $f(M^n) = N^n$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $y \in N^n$ и $y \notin f(M^n)$, т. е. $f^{-1}(y) = \varnothing$. Тогда y—регулярное значение отображения f и $n(f^{-1}(y)) = 0$, поэтому $\deg_2 f = 0$, что противоречит условию теоремы. ∎

§ 6. Касательное расслоение и касательное отображение

1. Идея касательного пространства. Для дальнейшего развития анализа гладких отображений необходимо построение аналога дифференциала функции, широко используемого в математическом анализе. Касательное отображение, определяемое и изучаемое в этом параграфе, является таким обобщением. На этом пути прежде всего возникает необходимость обобщить и понятие касательной к кривой (касательной плоскости к поверхности). Необходимость такого обобщения вызвана приложениями понятия многообразия в механике и физике. Как отмечалось в § 3, конфигурационное пространство механической системы обычно является гладким многообразием. Каждая точка этого многообразия представляет собой некоторое положение механической системы. Под действием сил механическая система меняет свое положение. Соответствующая ей точка конфигурационного пространства перемещается, описывая некоторую траекторию — путь на гладком многообразии. Важной характеристикой этого движения является скорость, вообще говоря, меняющаяся со временем. *Состоянием механической системы* в каждый заданный момент времени называется пара (x, v), где x — точка многообразия, соответствующая положению системы в рассматриваемый момент времени, а v — скорость перемещения точки x. Совокупность всех состояний механической системы называется *фазовым пространством*.

Естественно, возникает вопрос о том, какое математическое понятие можно сопоставить физическому понятию скорости и, более того, как описать математически точно понятие фазового пространства. Решение этого вопроса подсказывается простейшими физическими примерами. Так, в случае движения материальной точки по кривой скорость интерпретируется в виде некоторого вектора, касательного к кривой и направленного в сторону движения. Если материальная точка движется по двумерной поверхности, то ее скорость интерпретируется как некоторый вектор, касательный к данной поверхности и к самой траектории. Множество всех возможных скоростей в данной точке кривой (поверхности) является, таким образом, касательной прямой (касательной плоскостью). Точно так же в случае общего конфигурационного пространства множество всевозможных скоростей, допустимых в данном положении механической системы, естественно интерпретировать как некоторое касательное векторное пространство в соответствующей точке гладкого многообразия.

2. Понятие касательного пространства к многообразию. Прежде чем переходить к точному определению этого понятия, заметим, что теперь мы будем различать, рассматриваем ли мы n-мерное евклидово пространство как метрическое пространство (с евклидовой метрикой) или наделяем его дополнительной структурой векторного пространства. В первом случае мы будем говорить об элементах $\mathbb{R}^n$ как о точках, во втором случае — как о векторах, называя $\mathbb{R}^n$ векторным пространством (ранее мы не различали эти понятия). Так, например, рассматривая производную $D_{x_0}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке x_0 (см. § 1 гл. IV), следует подчеркнуть, что она осуществляет линейное отображение векторных пространств. Пусть $\mathbb{R}^n$ — подпространство $\mathbb{R}^N$. Пару $(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$, где x — точка, а v — вектор, назовем *вектором v в точке x* (*вектором, «отложенным» от точки x, вектором с «началом» в точке x*). Пусть x — фиксированная (произвольная) точка в $\mathbb{R}^N$. *Пространством $\mathbb{R}^n$, отложенным от точки x*, будем называть совокупность всех векторов $v \in \mathbb{R}^n$, отложенных от точки x; оно обладает естественной структурой n-мерного векторного пространства, которое будем обозначать через $\mathbb{R}^n_x$.

Рассмотрим теперь гладкое подмногообразие M^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. § 2).

Определение 1. Пусть M^n есть C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ $(r \geqslant 1)$, $x \in M^n$ — произвольная точка. Пусть (U, φ) — некоторая карта M^n, $x \in U$. *Касательным пространством* T_xM^n *к многообразию* M^n *в точке* x называется отложенное от точки x подпространство — образ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

Напомним, что линейное отображение $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$ задается матрицей Якоби $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$. Так как $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{\varphi^{-1}(x)} = n$, то касательное пространство имеет размерность n. Покажем независимость определения T_xM^n от выбора карты. Пусть (V, ψ), $x \in V$, — другая карта. Коммутативная диаграмма (слева) порождает коммутативную диаграмму линейных отображений (справа):

$$\begin{tikzcd}
& U \cap V & \\
\varphi^{-1}(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\varphi"'] & & \psi^{-1}(U \cap V) \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^N & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi"] \arrow[rr, "D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "D_{\psi^{-1}(x)}\psi"']
\end{tikzcd}$$

Так как $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ — диффеоморфизм, то $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм, и, следовательно, обозначая образ через Im, имеем $\operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi) = \mathbb{R}^n$. Далее получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi = \operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}[\psi(\psi^{-1}\varphi)] &= \\ = \operatorname{Im} \{[d_{\psi^{-1}(x)}\psi][D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)]\} &= \operatorname{Im} D_{\psi^{-1}(x)}\psi,\end{aligned}$$

что доказывает корректность определения 1.

Элементы пространства T_xM^n называются *касательными векторами к* M^n *в точке* x.

Для многообразия M^2 в $\mathbb{R}^3$ касательное пространство T_xM^2 представляет двумерную плоскость, проходящую через точку x, которая совпадает с касательной плоскостью к поверхности M^2, обычно рассматриваемой в анализе.

Пример 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, рассматриваемое как подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякой точки $x \in U$ имеем $T_xU = \mathbb{R}^n_x$. ◆

Распространим понятие касательного пространства на случай произвольных многообразий. В этом случае, вообще говоря, невозможно говорить о производной $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$. Однако из определения 1 касательного пространства можно извлечь другой подход.

Пусть (U, φ) — некоторая карта подмногообразия M^n в $\mathbb{R}^N$и $x \in U$ — некоторая точка. *Координатным представлением касательного вектора* $(x, h) \in T_xM$ *в карте* (U, φ) назовем вектор $(x, D_x\varphi^{-1}(h))$ из $\mathbb{R}^n_x$. Возникает вопрос: как связаны координатные представления касательного вектора h в различных картах? Пусть (V, ψ) — другая карта, $x \in V$. Дифференцируя отображение $\varphi^{-1} = (\varphi^{-1}\psi)\psi^{-1}$, нетрудно видеть, что координатные представления вектора (x, h) в картах (U, φ), (V,ψ) связаны равенством

$$(x, D_x\varphi^{-1}(h)) = (x, D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)D_x\psi^{-1}(h)). \tag{1}$$

Естественно отождествлять касательный вектор с множеством всех его координатных представлений. Это замечание можно положить в основу нового определения касательного вектора, пригодного для произвольного многообразия.

Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$. Зафиксируем произвольную точку $x \in M^n$ и рассмотрим множество T всех троек $(x, (U, \varphi), h)$, где (U, φ) — карта в точке x, а h — вектор пространства $\mathbb{R}^n$. В множестве T определим отношение эквивалентности

$$(x, (U, \varphi)h) \sim (x, (V, \psi), g) \iff h = D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)(g).$$

Упражнение 1°. Проверьте, что это отношение является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентности $(x, (U, \varphi), h)$ называют *касательным вектором* в точке x, а тройку $(x, (U, \varphi), h)$ из класса эквивалентности — *представителем касательного вектора* в карте (U, φ). При этом вектор h будем называть *векторной компонентой представителя* $(x, (U, \varphi), h)$ и обозначать h_φ *.

Рассмотрим множество всех касательных векторов в точке x. Обозначим его через T_xM^n. Зафиксируем карту (U, φ), $x \in U$, и построим отображение

$$\tau_x \colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

сопоставляя каждому касательному вектору компоненту h его представителя в карте (U, φ). Очевидно, что τ_x — биекция, а следовательно, структура n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ естественно переносится на множество T_xM^n. Более подробно, это означает, что в T_xM^n вводятся алгебраические операции сложения и

---

* Равенство (1) показывает, как меняется векторная компонента при изменении карты.

умножения на число через соответствующие действия над векторными компонентами представителей касательных векторов в выбранной карте (U, φ). Если представители касательных векторов заданы в разных картах, то предварительно их следует заменить на эквивалентные представители в одной карте. Таким образом, алгебраические операции в T_xM^n определяются так:

$$1)\ \{(x, (U, \varphi), h)\} + \{(x, (V, \psi), g)\} = \\ = \{(x, (U, \varphi), h + D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)(g))\};$$

$$2)\ \alpha\{(x, (U, \varphi), h)\} = \{(x, (U, \varphi), \alpha h)\}.$$

Упражнение 2°. Докажите корректность определения алгебраических операций и проверьте аксиомы векторного пространства.

Итак, с каждой точкой x многообразия M^n мы связали векторное пространство, называемое *касательным пространством к* M^n *в точке* x и обозначаемое T_xM^n.

Размерность касательного пространства в каждой точке равна n, т. е. размерности многообразия M^n. Действительно, это вытекает из того, что биекция (2) (при данном определении алгебраических операций) является изоморфизмом векторных пространств.

Приведем еще одно удобное определение касательного пространства. Пусть M^n — гладкое многообразие и $x \in M^n$ — произвольная точка. *Гладкой кривой* χ *на многообразии* M^n назовем гладкое отображение

$$\chi\colon (a, b) \to M^n,$$

где (a, b) — некоторый интервал числовой оси, рассматриваемый как многообразие с естественной C^∞-структурой.

Рассмотрим множество гладких кривых

$$\chi\colon (-a, a) \to M^n,\quad \chi(0) = x.$$

Две такие кривые, χ_1 и χ_2, назовем *эквивалентными в точке* x, если для некоторой карты (U, φ), содержащей точку x, кривые $\varphi^{-1}\chi_1$, $\varphi^{-1}\chi_2$ в $\mathbb{R}^n$ обладают свойством

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_1)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_2)(t)\Big|_{t=0}.$$

Упражнения. 3°. Покажите, что определение эквивалентности кривых χ_1, χ_2 не зависит от выбора карты.

4°. Покажите, что эквивалентность кривых в точке является отношением эквивалентности во множестве кривых на многообразии.

Определение 2. *Касательным вектором к многообразию* M^n *в точке* x называется класс эквивалентности гладких кривых, проходящих через точку x.

Лемма 1. *Множество классов эквивалентности гладких кривых на многообразии M^n, проходящих через точку x, является n-мерным векторным пространством.*

Действительно, зафиксировав карту (U, φ), классу эквивалентных кривых в точке x можно сопоставить n-мерный вектор $\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$. Обратно: каждый вектор α определяет прямую в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку $\varphi^{-1}(x)$ с «угловым коэффициентом» α, а ее образ при отображении φ определит гладкую кривую χ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку x и такую, что $\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$. Таким образом, имеем объективное соответствие между классами эквивалентности кривых в тонке x и векторами пространства $\mathbb{R}^n$.

Определим алгебраические операции в множетве классов эквивалентных в точке x кривых так, чтобы эта биекция стала изоморфизмом векторных пространств:

1) *суммой* $\{\chi_1\} + \{\chi_2\}$ двух классов называется класс $\{\chi_3\}$ такой, что

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_1)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_2)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_3)\Big|_{t=0};$$

2) *произведением* $\lambda\{\chi\}$ числа λ на класс $\{\chi\}$ называется класс $\{\chi_\lambda\}$ такой, что

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_\lambda)\Big|_{t=0} = \lambda\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}.$$

Упражнение 5°. Покажите корректность введенных операций и проверьте аксиомы векторного пространства. ■

Построенное выше n-мерное векторное пространство классов эквивалентных в точке x кривых на многообразии M^n называется *касательным пространством к M^n в точке x*, а его элементы называются *касательными векторами*. Обозначается оно по-прежнему T_xM^n. Отметим, что для такого определения касательного пространства изоморфизм $\tau_x\colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n$, соответствующий карте (U, φ), $x \in U$, задается формулой $\{\chi\} \to \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$.

Тройку $\left(x, (U, \varphi), \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}\right)$ естественно назвать *представителем касательного вектора* $\{\chi\}$ *в карте* (U, φ), а вектор $\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$ *— векторной компонентой представителя.*

Пример 2. Найдем касательные пространства для групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Многообразие $M^{n^2} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — открытое множество в векторном пространстве $L(n, \mathbb{R})$ всех вещественных $n \times n$-матриц. Пространство $L(n, \mathbb{R})$ можно отождествлять с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$. Согласно примеру 1 имеем $T_xM^{n^2} = \mathbb{R}_x^{n^2}$, таким образом, касательное пространство к $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в любой точке $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ совпадает с $L(n, \mathbb{R})$.

Многообразие $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ также лежит в $L(n, \mathbb{R})$ и выделяется условием $x \cdot x^T = t$, где x^T — транспонированная, а e — единичная матрицы. Вычислим касательное пространство к $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ в точке $x = e$. Рассмотрим гладкий путь $x = x(t)$, $x(0) = e$, удовлетворяющий условию $x(t) \cdot x(t)^T = e$ тождественно по t. Дифференцируя по t, имеем $x'(t) \cdot x(t)^T + x(t) \cdot x'(t)^T = 0$; полагая $t = 0$, получим $x'(0) + x'(0)^T = 0$. Таким образом, касательный вектор $x'(0)$ — кососимметрическая $n \times n$-матрица. С другой стороны, всякая кососимметрическая матрица c является касательным вектором в точке $t = 0$ к кривой $x(t) = e^{tc}$ (экспоненте от матрицы tc), лежащей в $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ и проходящей при $t = 0$ через точку e. Следовательно, $T_e\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ совпадает с пространством всех кососимметрических $n \times n$-матриц. Далее, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ — открытое множество в $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Следовательно, $T_e\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = T_e\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

3. Касательное расслоение. Для каждой точки x гладкого многообразия M^n определено касательное пространство T_xM^n. Следующая задача состоит в том, чтобы построить из всех вектров этого семейства векторных пространств, зависящих от точки x, топологическое пространство и даже гладкое многообразие.

Рассмотрим дизъюнктное объединение $TM^n = \sqcup T_xM^n$ всех касательных пространств к многообразию M^n. Определим проекцию $\pi\colon TM^n \to M^n$, отображая каждый вектор из T_xM^n в точку x. Тогда

$$\pi^{-1}(x) = T_xM^n;$$

будем называть этот прообраз *слоем над точкой* x.

Каждая карта (U, φ) многообразия M^n определит карту $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ в TM^n,

$$\tau_\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

следующим образом: касательному вектору $a = \{(x, (U, \varphi), h\}$ в слое над точкой $x \in U$ сопоставим пару $(\varphi^{-1}(x), \tau_x a)$, где τ_x определено ранее (см. п. 2), т. е.

$$\tau_\varphi a = (\varphi^{-1}(x), h_\varphi),$$

$(x, (U, \varphi), h_\varphi)$ — представитель вектора a в карте (U, φ). Очевидно, τ_φ биективно, следовательно, в $\pi^{-1}(U)$ можно ввести слабейшую топологию так, что τ_φ станет непрерывным отображением и даже гомеоморфизмом (см. § 8 гл. II). Так как множество всех карт

$\pi^{-1}(U)$ образует покрытие TM^n, то, объявив совокупность всех открытий множеств во всех картах $\pi^{-1}(U)$ базой топологии, мы тем самым построим топологию в TM^n и превратим TM^n в топологическое пространство.

Замечание. Согласно формальному определению следовало бы назвать картами пространства TM^n пары $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi^{-1})$. Из соображений удобства мы обратили гомеоморфизмы (убедитесь, что это изменение несущественно).

Таким обрзом, карта (3) позволяет ввести локальные координаты в множестве $\pi^{-1}(U)$, задавая координаты пары $(\varphi^{-1}(x), h_\varphi)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Будем называть пару $(\varphi^{-1}(x), h_\varphi)$ координатным представлением касательного вектора a в карте (U, φ), а вектор h_φ — векторной компонентой (в карте (U, φ)) касательного вектора.

Эта терминология оправдывается следующим утверждением.

Лемма 2. *Если M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$, то совокупность $\{(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ всех карт пространства TM^n является C^{r-1}-атласом.*

Доказательство. Пусть (U, φ), (V, ψ) — две карты многообразия M^n, $U \cap V \neq \varnothing$. Пусть $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$, $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$ — соответствующие карты TM^n; тогда $(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \varnothing$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \pi^{-1}(U \cap V) \arrow[dl, "\tau_\varphi"'] \arrow[dr, "\tau_\psi"] & \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}"'] & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

где отображение

$$\tau_\psi \tau_\varphi^{-1} \colon \tau_\varphi(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \tau_\psi(\pi^{-1}(U \cap V))$$

представляет собой гомеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (гомеоморфизм перехода от одних координат к другим). Нам достаточно показать, что $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1} \in C^{r-1}$. Так как $\tau_\varphi a = (\varphi^{-1}(x), h_1)$, $\tau_\psi a = (\psi^{-1}(x), h_2)$, $h_2 = D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi) h_1$, то легко находим, что

$$\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}(y, h) = ((\psi^{-1}\varphi)(y), D_y(\psi^{-1}\varphi) h), \qquad (4)$$

откуда следует $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1} \in C^{r-1}$. ■

Отметим, что преобразование перехода (4) имеет специальный вид: координаты точки x преобразуются с помощью диффеоморфизма $\psi^{-1}\varphi$, а векторная компонента h касательного вектора a — с помощью линейного преобразования $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)$.

На топологическом пространстве TM^n построена структура гладкого многообразия размерности $2n$. Ввиду специального вида преобразований перехода (4) такое многообразие называется *касательным расслоением многообразия* M^n. Новый термин подчеркивает строение многообразия TM^n, состоящего из слоев над каждой точкой в M^n, являющихся касательными пространствами. Структура гладкого многообразия, определяемая атласом карт вида (3), называется *структурой касательного расслоения.*

Пример 3. Построим структуру касательного расслоения TS^1 для окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Рассматривая S^1 как множество точек e^{is} $(s \in \mathbb{R}^1)$, зададим на S^1 C^∞-атлас из двух карт:

$$U_1 = \left\{e^{is}\colon s \in \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right)\right\}, \qquad \varphi_1(s) = e^{is}\colon \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) \to U_1,$$
$$U_2 = \left\{e^{is}\colon s \in \left(-\pi, \tfrac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad \varphi_2(s) = e^{is}\colon \left(-\pi, \tfrac{\pi}{2}\right) \to U_2.$$

Действительно, множество $U_1 \cap U_2$ состоит из двух связанных компонент, V_1, V_2 (рис. 105), и гомеоморфизм перехода на них имеет вид

$$\varphi_2^{-1}\varphi_1(s) = s\colon \varphi_1^{-1}(V_1) \to \varphi_2^{-1}(V_1),$$
$$\varphi_2^{-1}\varphi_1(s) = (s - 2\pi)\colon \varphi_1^{-1}(V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_2),$$

а следовательно, является C^∞-диффеоморфизмом. Карты атласа касательного расслоения тогда имеют вид

$$\tilde{U}_1 = \pi^{-1}(U_1), \quad \tau_{\varphi_1}\colon \pi^{-1}(U_1) \to \left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) \times \mathbb{R}^1,$$
$$\tilde{U}_2 = \pi^{-1}(U_2), \quad \tau_{\varphi_2}\colon \pi^{-1}(U_2) \to \left(-\pi, \tfrac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^1.$$

Замечание. Так как $D(\varphi_2^{-1}\varphi_1) = 1_{\mathbb{R}^1}$, то касательный вектор, заданный представителем $(x, (U_1, \varphi_1), h)$ в карте (U_1, φ_1), имеет в карте (U_2, φ_2) вид $(x, (U_2, \varphi_2), h)$. Склеивая многообразие TS^1 из прямых произведений $\left(0, \tfrac{3}{2}\pi\right) \times \mathbb{R}^1$, $\left(-\pi, \tfrac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^1$ по диффеоморфизму $\tau_{\varphi_2}\tau_{\varphi_1}^{-1} = (\varphi_2^{-1}\varphi_1, 1_{\mathbb{R}^1})$, получаем, очевидно, прямое произведение $S^1 \times \mathbb{R}^1$. Таким образом, касательное расслоение TS^1 гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^1$.

Упражнение 6°. Пусть V — открытое множество в M^n. Покажите, что касательное расслоение к множеству V, рассматриваемому как подмногообразие в M^n, совпадает с $\pi^{-1}(V)$. Опишите TV, $V \subset \mathbb{R}^n$.

Напомним, что в п. 1 мы говорили о фазовом пространстве системы. Состояние системы можно характеризовать теперь элементом из TM^n — касательным вектором a над точкой x. При этом x характеризует положение системы в конфигурационном пространстве, а вектор a из T_xM^n характеризует скорость системы.

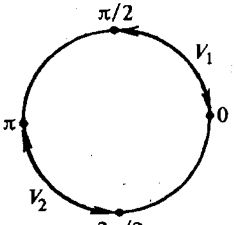


Рис. 105

4. Риманова метрика. С касательным расслоением связано понятие римановой метрики на многообразии, важное для геометрических задач. Рассмотрим C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 1$, и его касательное расслоение T_xM^n. Пусть в каждом слое T_xM^n задана симметричная положительно определенная билинейная форма $A_x(u, v)$, зависящая, вообще говоря, от x. Будем предполагать, что эта зависимость класса C^{r-1} в том смысле, что в локальных координатах карты $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ касательного расслоения TM^n билинейная форма $A_x(\tau_x^{-1}u, \tau_x^{-1}v)$ в фиксированном базисе векторного пространства $\mathbb{R}^n$ имеет матрицу $A_{ij}(x)$, элементы которой являются C^{r-1}-функциями на U.

Форма $A_x(u, v)$ называется *римановой метрикой класса* C^{-1} *на многообразии* M^n. Ее часто задают в локальных координатах касательного расслоения в виде билинейной формы

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)u_iv_j, \quad x \in U,$$

где $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ — координаты векторов u, v пространства $\mathbb{R}^n$. Риманова метрика позволяет измерять длины векторов и углы между ними в касательных пространствах, например, если $v \in T_xM^n$, то длину $\|v\|_x$ вектора v определяют равенством $\|v\|_x^2 = A_x(v, v)$. Возникает вопрос о существовании римановой метрики на гладких многообразиях.

Теорема 1. *На всяком* C^r*-многообразии* M^n, $r \geqslant 1$, *существует риманова метрика класса* C^{r-1}.

Доказательство. Рассмотрим некоторый атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия M^n. Пусть $\{V_\beta\}$ — такое локально конечное открытое покрытие M^n, что каждое V_β лежит в некотором U_α (такое покрытие найдется в силу паракомпактности M^n). Фиксируем для каждого β некоторый такой номер $\alpha = \alpha(\beta)$. Построим C^r-разбиение единицы $\{g_\beta\}$, подчиненное покрытию $\{V_\beta\}$. Идея построения римановой метрики состоит в том, чтобы построить на каждом V_β (как подмногообразии M^n с касательным расслоением $\pi^{-1}(V_\beta)$) свою риманову метрику $A_x^\beta(u, v)$, а затем «склеить» из них с помощью разбиения единицы «глобальную» риманову метрику

$$A_x(u, v) = \sum_\beta g_\beta(x) A_x^\beta(u, v). \tag{5}$$

Упражнение 7°. Убедитесь, что если $A_x^\beta(u, v)$ — риманова метрика на V_β (для каждого β), то формула (5) определяет риманову метрику на M^n.

Остается построить риманову метрику на V_β. По построению $V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$, поэтому $\pi^{-1}(V_\beta) \subset \pi^{-1}(U_{\alpha(\beta)})$, следовательно, $\pi^{-1}(V_\beta)$ принадлежит карте $(\pi^{-1}(U_{\alpha(\beta)}), \tau_{\varphi_{\alpha(\beta)}})$ касательного расслоения TM^N и имеем отображение

$$\tau^\beta = \tau_{\varphi_{\alpha(\beta)}}\colon \pi^{-1}(V_\beta) \to (\varphi_{\alpha(\beta)}^{-1}(V_\beta)) \times \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

В локальных координатах (6) рассмотрим билинейную форму $B(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$ с постоянной матрицей $(a_{ij}(x)) = (\delta_{ij})$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Зададим теперь риманову метрику на V_β равенством

$$A_x^\beta(u, v) = B(\tau_x^\beta u, \tau_x^\beta v), \quad u, v \in T_x M^n, \quad x \in V_\beta,$$

где τ_x^β — сужение τ^β на слой $T_x M^n$. ■

5. Касательное отображение. В анализе и его приложениях при изучении гладких отображений поверхностей (кривых) часто используют метод линеаризации, заключающийся в том, что в окрестностях какой-нибудь точки и ее образа заменяют поверхность (кривую) касательной плоскостью (прямой), а отображение — его дифференциалом, т. е. линейным отображением. Этот метод допускает обобщение на случай отображений гладких многообразий.

Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение класса C^r, $r \geqslant 1$, гладких многообразий того же класса. Пусть $x \in M^n$ — произвольная точка и (U, φ), (V, ψ) — карты многообразий M^n, N^m соответственно такие, что $x \in U$, $f(x) \in V$; будем считать также, что $f(U) \subset V$. Рассмотрим представление отображения f в данных картах

$$\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(U) \to \psi^{-1}(U)$$

и его производную

$$D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1} f \varphi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Определение 3. Пусть $a \in T_x M^n$ — произвольный касательный вектор в точке x и $(x, (U, \varphi), h)$ — его представитель в карте (U, φ). Линейное отображение

$$T_x(f)\colon T_x M^n \to T_{f(x)} N^m,$$

при котором касательный вектор a с представителем $(x, (U, \varphi), h)$ переходит в касательный вектор b с представителем $(f(x), (V, \psi), g)$ в карте (V, ψ), где $g = D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1} f \varphi) h$, называется *касательным к f отображением в точке $x \in M^n$.*

Таким образом, при касательном отображении точка x «переносится» отображением f, а векторная компонента h касательного вектора (соответствующая выбранной карте) преобразуется линейным отображением (7).

Упражнение 8°. Покажите, что касательное отображение $T_x(f)$ не зависи от выбора карт.

Следующие основные свойства касательного отображения мы предоставляем проверить читателям в качестве простого упражнения:

1) тождественному отображению $1_{M^n}\colon M^n \to M^n$ соответствует тождественное отображение

$$T_x(1_{M^n}) = 1_{T_x M^n}\colon T_x M^n \to T_x M^n;$$

2) коммутативность диаграммы отображений

$$\begin{tikzcd}
 & N^m \arrow[dd, "g"] \\
M^n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & \\
 & P^k
\end{tikzcd}$$

влечет коммутативность диаграммы касательных отображений

$$\begin{tikzcd}
 & T_y N^m \arrow[dd, "T_y(g)"] \\
T_x M^n \arrow[ur, "T_x(f)"] \arrow[dr, "T_x(gf)"'] & \\
 & T_z(P^k)
\end{tikzcd}$$

где $y = f(x)$, $z = g(y)$.

Совокупность всех касательных отображений $\{T_x(f)\}_{x \in M^n}$ определяет отображение касательных расслоений $T(f)\colon TM^n \to TN^m$, называемое *касательным к f отображением многообразий.*

Используя гладкие структуры на TM^n и TN^m, можно записать представление отображения $T(f)$ в соответствующих картах. Действительно, пусть (V, ψ) — карта точки $f(x)$, а (U, φ) — карта точки x, причем $f(U) \subset V$. Рассмотрим карты $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$, $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$ касательных расслоений TM^n, TN^m соответственно. Касательному вектору $a \in \pi^{-1}(U)$ в карте τ_φ соответствует пара $(\varphi^{-1}(x), h)$; аналогично, вектору $b = T(f)a$ в карте τ_ψ соответствует пара $(\psi^{-1}f(x), D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}f\varphi)h)$. Имеем следующее преобразование перехода:

$$\tau_\psi T(f)\tau_\varphi^{-1}\colon (y, h) \mapsto ((\psi^{-1}f\varphi)(y), D_y(\psi^{-1}f\varphi)h), \tag{9}$$

действующее из множества $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ во множество $\tau_\psi(\pi^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Ясно, что отображение (9) принадлежит классу гладкости C^{r-1}.

Таким образом, с каждым гладким отображением многообразий класса C^r, $r \geqslant 1$, можно связать гладкое класса C^{r-1} отображение (8) их касательных расслоений. Для касательных отображений касательных расслоений остаются справедливыми свойства 1), 2).

В терминах касательного отображения можно переформулировать определение регулярной точки гладкого отображения многообразий (см. определение 6 § 5). Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — C^r-отображение $(r \geqslant 1)$ C^r-многообразий.

Определение 4. Точка $c \in M^n$ называется *регулярной точкой отображения* f, если

$$\operatorname{rank} T_x(f) = \min(n, m).$$

Упражнение 9°. Убедитесь в эквивалентности определения 4 определению 6 § 5.

Преимущество определения 4 заключается в том, что оно дано в инвариантной форме, т. е. в форме, не зависящей от выбора координатных систем.

6. Ориентация многообразия. Понятия касательного пространства и касательного расслоения позволяют определить понятие ориентируемости гладких многообразий, обобщая определение ориентируемой поверхности весьма важное для анализа.

Напомним понятие ориентированного векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что два базиса, $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$, в $\mathbb{R}^n$ имеют одну и ту же *ориентацию*, если переход от одного базиса к другому осуществляется линейным отображением с положительным определителем *.

---

* Ориентацию в пространстве $\mathbb{R}^0$ естественно определить как выбор знака у нуля: $+\theta$ или $-\theta$.

Упражнение 10°. Покажите, что ориентация является отношением эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{R}^n$ и что число классов эквивалентности равно 2.

Пространство $\mathbb{R}^n$ называется *ориентированным*, если в нем фиксирован один из классов эквивалентности базисов.

Рассмотрим C^r-подмногообразие M^n, $r \geqslant 1$, в пространстве $\mathbb{R}^N$. Подмногообразие M^n называется *ориентируемым*, если можно выбрать такие ориентации в каждом касательном пространстве T_xM^n и такой атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M^n, что соответствующие диффеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ сохраняют ориентацию, т. е. для всякой точки $x \in U_\alpha$ касательное отображение $T_x\varphi_\alpha^{-1}\colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n$ переводит выбранную ориентацию векторного пространства T_xM^n в фиксированную ориентацию векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

В противном случае подмногообразие называется *неориентируемым*.

Атлас, удовлетворяющий этому условию, назовем *ориентирующим атласом*. Ясно, что диффеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ для ориентирующуго атласа согласованы между собой. Точный смысл этой согласованности выражен в следующем упражнении.

Упражнение 11°. Покажите, что любые две карты, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β), из ориентирующего атласа положительно согласованы, т. е. обладают тем свойством, что определитель отображения $D_x(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ положителен для любой точки $x \in \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$; обратно: если любые две карты атласа положительно согласованны, то атлас ориентирующий.

Свойство, выраженное в упражнении 11°, используется при определении ориентируемого многообразия (не обязательно вложенного в $\mathbb{R}^N$).

В множестве ориентирующих атласов многообразия введем отношение эквивалентности: два ориентирующих атласа *эквивалентны*, если их объединение — ориентирующий атлас.

Выбор одного из классов эквивалентности называется *ориентацией многообразия*.

Упражнение 12°. Убедитесь, что для любого многообразия число классов эквивалентности ориентирующих атласов четно, а в случае связного многообразия равно 0 или 2.

Простейшим примером ориентируемого многообразия может служить пространство $\mathbb{R}^n$. В данном случае атлас, состоящий из одной карты $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$, ориентирующий.

Упражнение 13°. Покажите, что всякое многообразие, имеющее атлас, состоящий из одной карты, ориентируемо.

Упражнение 13° подсказывает нам следующий пример: открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, всякий открытый диск D^n ориентируемы.

Прямое произведение ориентируемых многообразий также пример ориентируемого многообразия. Предоставляем проверить это читателям в качестве упражнения.

Упражнения. 14°. Постройте ориентирующий атлас на S^n.

15°. Покажите, что многообразие $G_k(\mathbb{R}^n)$ ориентируемо при четном n, $0 < k < n$.

Что касается неориентируемых многообразий, то таковыми являются, например, лист Мёбиуса и проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ при четном $n - 1 > 0$. Доказательство мы не приводим. Если $n - 1$ нечетно, то $\mathbb{R}P^{n-1}$ ориентируемо, как следует из упражнения 15°.

Замечание. Обратим внимание на то, что при $n = 0$, $n = 1$ всякое многообразие M^n ориентируемо.

Понятие ориентации позволяет усовершенствовать введенную в § 5 степень отображения по модулю 2. Рассматривая отображение ориентированных многообразий, число точек в прообразе регулярного значения будем подсчитывать не по mod 2, а алгебраически, считая каждую точку прообраза со знаком + или — в зависимости от того, сохраняет касательное отображение в данной точке ориентацию касательного пространства или нет. Так же, как в случае степени по модулю 2, можно доказать, что это число не зависит от выбора регулярного значения; оно называется *степенью* (*ориентированной*) *отображения* f и обозначается $\deg f$. В случае гладких отображений сфер так определенная степень отображения совпадает со степенью отображения, введенной в § 4 гл. III.

§ 7. Касательный вектор как дифференциальный оператор. Дифференциал функции и кокасательное расслоение

1. Новое определение вектора. Продолжим изучение касательного вектора и дадим его определение посредством операции дифференцирования по вектору. Это позволит дать новую интерпретацию касательного расслоения.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и C^∞-функцию f, определенную в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$ всех n-мерных векторов в точке x^0. Если (x^0, v) — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n_{x^0}$, то производной от функции f по вектору v в точке x^0 называется производная $\frac{d}{dt} f(x^0 + tv)\Big|_{t=0}$, где $t \geqslant 0$ — числовой параметр (в анализе обычно рассматривают вектор v единичной длины и говорят о производной по направлению v). В координатной системе имеем формулу

$$\frac{d}{dt}f(x^0 + tv_1)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x^0} v_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{x^0} v_n =$$
$$= (\operatorname{grad} f(x^0),\ v), \quad (1)$$

где $x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n$ — координаты точки x и вектора v. Обозначим производную (1) через $f_v(x^0)$. При фиксированных векторе v и точке x^0 получили соответствие $f \longmapsto f_v(x^0)$, определяющее некоторую функцию (функционал) $l^v_{x^0}$, определенную на гладких функциях в окрестностях точки x^0, со значениями в $\mathbb{R}^1$. Очевидно, что этот функционал определен на ростках $\widehat{f}_{x^0}$ гладких функций в точке x^0. Таким образом, имеем отображение

$$l^v_{x^0}\colon \mathcal{O}(x^0) \to \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Из определения вытекают следующие свойства функционала (2):

1) $l^v_{x^0}(\widehat{f}\widehat{g}) = f(x^0)l^v_{x^0}(\widehat{g}) + g(x^0)l^v_{x^0}(\widehat{f})$ (формула дифференцирования произведения);

2) $\mathrm{d}l^v_{x^0}(\widehat{f}) = 0$, если $f = \mathrm{const}$ (формула дифференцирования постоянной);

3) $l^v_{x^0}(\alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}) = \alpha l^v_{x^0}(\widehat{f}) + \beta l^v_{x^0}(\widehat{g})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ (линейность).

Рассмотрим множество $\{l\}_{x^0}$ всех функционалов $l\colon \mathcal{O}(x^0) \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих свойствам 1), 2), 3). Очевидно, $\{l\}_{x^0}$ — векторное пространство и $l^v_{x^0} \in \{l\}_{x^0}$. Если теперь вектор v «пробегает» пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$, то возникает отображение

$$\mathbb{R}^n_{x^0} \to \{l\}_{x^0}, \quad v \longmapsto l = l^v_{x^0}. \quad (3)$$

Теорема 1. *Отображение* (3) *является изоморфизмом векторных пространств* $\mathbb{R}^n_{x^0}$ *и* $\{l\}_{x^0}$.

Доказательство. Линейность отображения (3) следует из формулы (1). Отображение (3) — мономорфизм: если $l^v_{x^0} = l^w_{x^0}$, то $(\operatorname{grad} f(x^0), v) = (\operatorname{grad} f(x^0), w)$ для всякой функции f, гладкой в окрестности x^0; полагая $f(x) = x_i$ (координата точки x), получим равенства $v_i = w_i$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $v = w$.

Докажем эпиморфность отображения (3). Имеем

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x^0)(x_i - x_i^0) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0), \quad (4)$$

где

$$A_i(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \quad i = 1, \ldots, n, \quad (5)$$

а $A_{ij}(x)$ — функции класса C^∞ (см. упражнение 4° § 1).

Пусть теперь $l\colon \mathscr{E}(x^0)\to\mathbb{R}^1$ — произвольный функционал из $\{l\}_{x^0}$. Используя аксиомы 1), 2), 3), получаем из (4) равенства

$$l(\widehat{f})=\sum_{i=1}^{n} A_i'(x^0)l(\widehat{x}_i-x_i^0)=\sum_{i=1}^{n} A_i(x^0)l(\widehat{x}_i),$$

где $l(\widehat{x}_i)$ — значение l на ростке функции x_i — координате точки x.

Используя (5), получим окончательно

$$l(\widehat{f})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^0} v_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x^0} v_n=l_{x^0}^{v}(f), \tag{6}$$

где $v_1=l(\widehat{x}_1),\ \ldots,\ v_n=l(\widehat{x}_n)$. ■

В силу изоморфизма (3) можно отождествить векторное пространство $\mathbb{R}_{x^0}^n$ с n-мерным векторным пространством $\{l\}_{x^0}$ всех функционалов, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), 3). С помощью координатной системы в $\mathbb{R}^n$ можно, используя равенство (6), сопоставить каждому функционалу l_{x^0} дифференциальный оператор

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}, \tag{7}$$

действующий на гладкие функции по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}\right) f=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^0} v_i.$$

Упражнение 1°. Убедитесь, что множество всех дифференциальных операторов (7) образует векторное пространство, а указанное соответствие задает изоморфизм с векторным пространством $\{l\}_{x^0}$.

Таким образом, имеем еще один изоморфизм — векторного пространства $\mathbb{R}_{x^0}^n$ с векторным пространством дифференциальных операторов (7). При этом изоморфизме базисному вектору $e_i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте) соответствует дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}$.

2. Касательное расслоение. Данное в п. 1 истолкование пространства векторов в точке x^0 подсказывает соответствующее обобщение этого понятия для гладких многообразий.

Пусть M^n — многообразие класса C^∞ и x^0 — точка из M^n. Рассмотрим алгебру $\mathscr{E}(x^0)$ ростков гладких функций в точке x^0 (см. § 4) и функционалы

$$l_{x^0}\colon \mathscr{E}(x^0)\to\mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Упражнение 2°. Пусть (U, φ) — карта точки x^0 многообразия M^n. Проверьте, что функционал l_{x^0}, определяемый равенством

$$l_{x^0}(\hat f) = l^v_{\varphi^{-1}(x^0)}(f\varphi), \quad \hat f \in \mathscr{E}(x^0),$$

для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ задает функционал (8), удовлетворяющий аксиомам 1), 2), 3).

Определение 1. Множество всех функционалов (8), удовлетворяющих свойствам 1), 2), 3), называется *касательным пространством* $T_{x^0}M^n$ к многообразию M^n в точке x^0.

Касательное пространство $T_{x^0}M^n$ является векторным пространством с естественными алгебраическими операциями. Отдельный элемент l_{x^0} из $T_{x^0}M^n$ называется касательным вектором к многообразию M^n в точке x^0. Соответствие $l^v_{\varphi^{-1}(x^0)} \mapsto l_{x^0}$ (см. упр. 2) оказывается изоморфизмом пространств $\mathbb{R}^n_{\varphi^{-1}(x^0)}$ и $T_{x^0}M^n$. Действительно, линейность этого отображения очевидна, а обратное отображение задается формулой

$$\tilde l_{\varphi^{-1}(x^0)}(\hat g) = l_{x^0}(\hat g\varphi^{-1}), \quad g \in \mathscr{E}(\varphi^{-1}(x^0)),$$

где $\mathscr{E}(\varphi^{-1}(x^0))$, $\mathscr{E}(x^0)$ — алгебры ростков соответственно в точках $\varphi^{-1}(x^0) \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \in M^n$. Удобно считать в дальнейшем, что функционал l_{x^0} задан не только на ростках $\hat g \in \mathscr{E}(x^0)$, но и на функциях g, определенных в окрестности точки x^0 (полагая $l_{x^0}(g) = l_{x^0}(\hat g)$), и написать $l_{x^0}(g)$ вместо $l_{x^0}(\hat g)$.

Пусть $\Phi\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение многообразий и пусть $x^0 \in M^n$, $y^0 = \Phi(x^0) \in N^m$. Отображение Φ индуцирует отображение $\hat\Phi\colon \mathscr{E}(y^0) \to \mathscr{E}(x^0)$ между алгебрами ростков по правилу $\hat g \in \mathscr{E}(y^0)$, $\hat g \mapsto \hat f$, $f = g\Phi$. Это позволяет определить касательное отображение $T_{x^0}(\Phi)\colon T_{x^0}M^n \to T_{y^0}N^m$ по правилу $T_{x^0}(\Phi)l_{x^0} = l_{y^0}$, где $l_{y^0} = l_{x^0}\hat\Phi$.

Действие отображений Φ, $\hat\Phi$ показано на диаграммах

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "f = g\Phi"'] & & N^m \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{R}^1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{E}(x^0) \arrow[rr, "\hat\Phi"] \arrow[dr, "l_{x^0}"'] & & \mathscr{E}(y^0) \arrow[dl, dashed, "l_{y^0} = l_{x^0}\hat\Phi"] \\
& \mathbb{R}^1 &
\end{tikzcd}$$

Упражнения. 3°. Проверьте, что $l_{x^0}\hat\Phi$ — касательный вектор в точке y^0 многообразия N^m и что $T_{x^0}(\Phi)$ — линейное отображение.

Касательное отображение $T_{x^0}(\Phi)$ часто обозначают через $(\Phi_*)_{x^0}$ (или $d_{x^0}\Phi$).

4°. Покажите, что $[(1_{M^n})_*]_{x^0} = 1_{T_{x^0}M^n}$. Если $\Phi\colon M^n \to N^m$, $\Psi\colon N^m \to P^k$ — гладкие отображения многообразий, то $[(\Psi\Phi)_*]_{x^0} = (\Psi_*)_{\Phi(x^0)}(\Phi_*)_{x^0}$.

5°. Докажите, что если Φ — диффеоморфизм, то $(\Phi_*)_{x^0}$ — изоморфизм векторных пространств (и, следовательно, $m = n$).

Перейдем к построению касательного расслоения. Как и в § 6, положим $TM^n = \sqcup T_xM^n$ (дизъюнктное объединение). Задача состоит в том, чтобы определить структуру касательного расслоения на TM^n. Зададим проекцию $\pi\colon TM^n \to M^n$, сопоставляя элементу $l_x \in T_xM^n$ точку $x \in M^n$. Пусть (U, φ) — какая-нибудь карта точки x. Построим карту касательного пространства, соответствующую карте (U, φ),

$$\tau_\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Пусть $l_x \in T_xM^n$; тогда на алгебре $\mathscr{O}(\varphi^{-1}(x))$ определяется касательный вектор $\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}$ по правилу

$$\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}(g) = l_x(g\varphi^{-1}), \quad \hat{g} \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(x)).$$

В силу изоморфизма пространства дифференциальных операторов и касательного пространства (см. упр. 1°) имеем

$$\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{10}$$

где дифференциальные операторы $\partial/\partial x_i$ действуют в точке $\varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, а $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — однозначно определяемый вектор. Отображение (9) задается соответствием, линейным на каждом слое $\pi^{-1}(x)$:

$$l_x \mapsto (x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n). \tag{11}$$

Биективность этого отображения очевидна; как и в § 6, топологию в TM^n определим условием непрерывности отображений τ_φ для всех карт некоторого атласа многообразия M^n.

Покажем, что отображения (9), (11) определяют структуру касательного расслоения. Если (V, ψ) — другая карта точки x, то аналогично определен касательный вектор $\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}$:

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)} = w_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + w_n \frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{12}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — вектор в точке $\psi^{-1}(x) = (y_1, \ldots, y_n)$ и отображение τ_ψ действует по правилу $l_x \mapsto (y_1, \ldots, y_n; w_1, \ldots, w_n)$. Вычислим $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}$. Имеем

$$(y_1, \ldots, y_n) = \psi^{-1}\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= ((\psi^{-1}\varphi)_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, (\psi^{-1}\varphi)_n(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (13)$$

— отображение класса C^∞. Выразим $w_1, \ldots, w_n$ через $v_1, \ldots, v_n$. Пусть $\hat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(x))$, тогда из (12) получаем равенство

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = w_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} + \ldots + w_n \frac{\partial g}{\partial y_n},$$

но

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = l_x(g\psi^{-1}) = l_x(g\psi^{-1}\varphi\varphi^{-1}) = \tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g\psi^{-1}\varphi).$$

Теперь используем формулу (10)

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = v_1 \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x} + \ldots + v_n \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x_n}$$

и сравним два выражения для $\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g)$:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x_j}.$$

В силу произвольности ростка $\hat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(x))$ можно положить $g(y_1, \ldots, y_n) = y_i$, тогда из (13) имеем

$$(g\psi^{-1}\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = (\psi^{-1}\varphi)_i(x_1, \ldots, x_n),$$

а из предыдущего равенства находим

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (14)$$

Векторная компонента касательного вектора при преобразовании координат (13) преобразуется линейным преобразованием (14) с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)$, т. е. преобразованием $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)$. Преобразования (13) и (14) гладко зависят от точки $\varphi^{-1}(x)$ и определяют, таким образом, преобразование $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}$ каласса C^∞. Специальный вид этого координатного преобразования означает, что атлас $\{(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ на TM^n задает гладкую структуру касательного расслоения.

Упражнение 6°. Рассмотрите евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со структурой, задаваемой атласом, состоящим из одной карты $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$. Убедитесь, что $T_x\mathbb{R}^n$ изоморфно $\mathbb{R}^n_x$.

Теперь можно считать, что $T\mathbb{R}^n$ — множество всех пар (x, v), где $x \in \mathbb{R}^n$, а $v \in \mathbb{R}^n_x$. Можно считать также, что

$$T\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x_1, \dots, x_n;\, v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\},$$

где $x, \dots, x_n$ — координаты x а $v_1, \dots, v_n$ — координаты v; отображение $\tau_{1_{\mathbb{R}^n}}$ определяет единственную карту соответствующего атласа касательного расслоения $T\mathbb{R}^n$:

$$\left(x_1, \dots, x_n;\, v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \to (x_1, \dots, x_n;\, v_1, \dots, v_n). \qquad (15)$$

Тем самым в $T\mathbb{R}^n$ введена структура прямого произведения; говорят, что $T\mathbb{R}^n$ — тривиальное касательное расслоение.

Упражнение 7°. Покажите, что отображение (9) расщепляется в произведение $\tau_\varphi = \tau_{1_{\mathbb{R}^n}}(\varphi^{-1})_*$, действующее по правилу

$$l_x \overset{(\varphi^{-1})^*}{\longmapsto} \left(x_1, \dots, x_n;\, v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \overset{\tau_{1_{\mathbb{R}^n}}}{\longmapsto} (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n).$$

Часто бывает удобно работать не с координатным представлением вектора l_x, а с его образом $(\varphi^{-1})_* l_x$; векторная компонента последнего есть $v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$. При изменении карты (замене координат) ее координаты $v_1, \dots, v_n$ в базисе $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ преобразуются по формулам (14) к координатам $w_1, \dots, w_n$ в базисе $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}_{i=1}^n$.

3. Касательное отображение. Пусть $\Phi\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение многообразий. Для каждого $x \in M^n$ имеем линейное отображение $(\Phi_*)_x\colon T_x M^n \to T_y N^m$, где $y = \Phi(x)$. Тем самым определено отображение $\Phi_*\colon TM^n \to TM^m$. Убедимся, что Φ_* — гладкое отображение касательных расслоений.

Пусть (U, φ) — карта точки x, (V, ψ) — карта точки y, $l_x \in T_x M^n$ и $l_y = (\Phi_*)_x l_x$. В силу (11) имеем

$$\begin{aligned} &l_x \overset{\tau_\varphi}{\longmapsto} (x_1, \dots, x_n;\, v_1, \dots, v_n), \\ &l_y \overset{\tau_\psi}{\longmapsto} (y_1, \dots, y_m;\, w_1, \dots, w_m), \end{aligned} \qquad (16)$$

и нам необходимо найти преобразование

$$\tau_\psi (\Phi_*) \tau_\varphi^{-1}\colon\ (x_1, \dots, x_n;\, v_1, \dots, v_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m;\, w_1, \dots, w_m). \qquad (17)$$

Так как $(\psi^{-1}\Phi\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, то остается найти зависимость между $\{v_1\}$ и $\{w_l\}$. Если $\widehat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(y))$, то справедливы равенства

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(y)}(g) = l_y(g\psi^{-1}) = ((\Phi_*)_x l_x)(g\psi^{-1}) =$$
$$= l_x(g\psi^{-1}\Phi) = l_x(g\psi^{-1}\Phi\varphi\varphi^{-1}) = \tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}(g\psi^{-1}\Phi\varphi).$$

Но учитывая, что первый и последний функционалы равны соответственно

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \tag{18}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(g\psi^{-1}\Phi\varphi)}{\partial x_j}, \tag{19}$$

как и при выводе (14), приравнивая (18) и (19) и полагая $g \equiv y_i$, получаем

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(\psi^{-1}\Phi\varphi)_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

откуда и следует, что отображение (17) принадлежит классу C^∞. Формула (20) подтверждает ранее установленный факт, что векторная компонента касательного вектора преобразуется с помощью линейного преобразования $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\Phi\varphi)$.

4. Дифференциал функции и кокасательное расслоение. Рассмотрим действие вектора $l_{x^0} \in T_{x^0}M^n$ на функцию f, $\widehat{f} \in \mathscr{O}(x^0)$. Если фиксировать функцию f, то возникает линейный функционал на пространстве $T_{x^0}M^n$: $l_{x^0} \longmapsto l_{x^0}(f)$. Этот функционал обозначается символом $(df)_{x^0}$ и называется дифференциалом функции f в точке x^0. По определению

$$(df)_{x^0} l_{x^0} = l_{x^0}(f).$$

Таким образом, $(df)_{x^0}$ принадлежит $(T_{x^0}M^n)^*$ — сопряженному пространству к $T_{x^0}M^n$ с естественной векторной структурой.

Пусть (U, φ) — карта в точке x^0 и $\{x_i(x)\}_{i=1}^n$ — локальные координаты точки $x \in U$. Ниже мы отождествляем касательные векторы с соответствующими им дифференциальными операторами. Пусть $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}\right\}_{i=1}^n$ — базис в $T_{x^0}M^n$, а $(dx_i)_{x^0}$ — дифференциал функции $x_i(x)$, тогда

$$(dx_i)_{x^0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_i\right)_{x^0} = \delta_{ij} \tag{21}$$

($\delta_{ij}=0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij}=1$). Следовательно, $\{(dx_i)_{x^0}\}_{i=1}^n$ — двойственный к $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}\right\}_{i=1}^n$ базис в $(T_{x^0}M^n)^*$. Отсюда следует также, что $(T_{x^0}M^n)^*$ состоит из всевозможных линейных комбинаций $\{a_1(dx_1)_{x^0}+\ldots+a_n(dx_n)_{x^0}\}$ с вещественными коэффициентами. Для произвольной функции f, $\hat{f} \in \mathscr{O}(x^0)$, и вектора $l_{x^0}= = v_1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x^0}+\ldots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{x^0}$ имеем разложение

$$(df)_{x^0}l_{x^0}=l_{x^0}(f)=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)+\ldots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0).$$

С помощью (21) получаем

$$(dx_i)_{x^0}l_{x^0}=(dx_i)_{x^0}\left(\sum_{j=1}^n v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x^0}\right)=v_i$$

и, подставляя в предыдущее равенство, находим

$$(df)_{x^0}l_{x^0}=\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\,(dx_i)_{x^0}\right)l_{x^0}.$$

В силу произвольности $l_{x^0}\in T_{x^0}M^n$ имеем

$$(df)_{x^0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\,(dx_1)_{x^0}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\,(dx_n)_{x^0}.$$

Заменяя x^0 произвольной точкой $x\in U$, можно последнюю формулу записать более удобно:

$$(df)_x=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1+\ldots+\frac{df}{\partial x_n}(x)\,dx_n, \tag{22}$$

здесь $\{dx_i\}_{i=1}^n$ — базисные дифференциалы в точке x. Формула (22) оправдывает название «дифференциал» для $(df)_x$.

Выведем из (22) зависимость между дифференциалами координат различных локальных координатных систем в точке x. Пусть (V, ψ) — карта, задающая координаты $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, $x\in V$. Если $x\in U\cap V$, то координаты $\{x_i(x)\}_{i=1}^n$ и $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ связаны преобразованием $\psi^{-1}\varphi$ (см (13)). Из (22) имеем равенства

$$(dy_i)_x=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}(x)\,dx_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}(x)\,dx_n,$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x_j}y_i(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi^{-1}\varphi)_i\,(x_1,\ldots,x_n),$$

следовательно,

$$(dy_i)_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\, dx_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Таким образом, при переходе от одной системы локальных координат к другой дифференциалы координат, рассматриваемых как функции точки на многообразии, преобразуются по формулам (23), т. е. линейным преобразованием, задаваемым матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\right)$.

Рассмотрим дизъюнктное объединение $T^*M = \bigsqcup\limits_{x\in M^n} (T_xM^n)^*$. Построим на T^*M^n структуру векторного расслоения. Определено естественное проектирование $p\colon T^*M^n \to M^n$. Пусть (U, φ) — карта на M^n, $\{x_i(x)\}$ — локальные координаты точки $x \in U$. Определим на T^*M^n карту

$$\sigma_\varphi\colon p^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

задав отображение σ_φ по правилу

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \mapsto (x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n), \tag{25}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ — элемент из слоя $p^{-1}(x) = (T_xM^n)^*$.

Покажем, что $\{(p^{-1}(U), \sigma_\varphi\}$ — атлас C^∞-структуры, если $\{(U, \varphi)\}$ — атлас многообразия M^n. Пусть (V, ψ) — другая карта в точке x, определяющая локальные координаты $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, и

$$\sigma_\psi\colon p^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{26}$$

— другая карта на T^*M^n. Ясно, что $p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$. Если $x \in U \cap V$, то элементу $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ можно сопоставить координаты в карте (26):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \mapsto (y_1, \ldots, y_n; b_1, \ldots, b_n). \tag{27}$$

Из (25) и (27) заключаем о совпадении элементов в $(T_xM^n)^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, (dx_i)_x = \sum_{i=1}^{n} b_i\, (dy_i)_x. \tag{28}$$

Из (28) нетрудно получить зависимость между $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Действительно, подставляя в (28) выражение $(dy_i)_x$ из (23), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах dx_i в обеих частях равенства, получим равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\right)^{*-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix},$$

где * означает транспонирование матрицы. Отсюда видно, что в координатном представлении векторная компонента элемента слоя $p^{-1}(x)$ меняется при изменении координат по иному закону, чем векторная компонента касательного вектора, а именно: она преобразуется с помощью матрицы $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)^{*-1}$, в то время как векторная компонента касательного вектора преобразуется матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)$. Величины, меняющиеся по такому закону при изменении координатной системы, называются *ковекторами*. Элементы множества $(T_xM^n)^*$ называются *ковекторами в точке* x.

Теперь ясно, что, построив карты (25) для всех карт некоторого атласа на M^n, мы превратим множество всех ковекторов, т. е. T^*M^n, в гладкое многообразие; это многообразие называется *касательным расслоением*.

§ 8. Векторные поля на гладких многообразиях

Излагаемые в этом параграфе понятия важны как для целого ряда математических дисциплин (дифференциальные уравнения, динамические системы, топология многообразий), так и для приложений к механике и физике — здесь эти связи будут намечены в самой элементарной форме. Как и в § 7, для простоты формулировок мы рассматриваем все объекты класса C^∞, называя их гладкими.

1. Касательный вектор к гладкому пути. Пусть M^n — гладкое многообразие. Напомним, что путь в M^n — это непрерывное отображение $\chi\colon (a, b) \to M^n$ интервала числовой прямой в топологическое пространство M^n. Так как (a, b) — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^1$, можно рассматривать гладкие отображения χ, называя путь *гладким*.

Пусть χ — гладкий путь в M^n, $\chi(t)$ — точка этого пути, $t \in (a, b)$.

Определение 1. *Касательным вектором к пути* χ в точке $\chi(t)$ называется касательный вектор $l_{\chi(t)}$ к многообразию M^n в точке $\chi(t)$, определяемый равенством

$$l_{\chi(t)}(f) = \frac{d}{dt} f(\chi(t)) \Big|_t, \quad \hat{f} \in \mathscr{O}(\chi(t)). \tag{1}$$

Упражнение 1°. Проверьте, что правая часть в (1) задает касательный вектор к многообразию M^n.

Касательный вектор к пути $\chi(t)$ обозначают обычно как $\chi'(t)$. Найдем координатное представление вектора $\chi'(t)$. Пусть (U, φ) — карта точки $\chi(t)$. Если $\hat{g} \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(\chi(t)))$, то

$$l_{\chi(t)}(g\varphi^{-1}) = \frac{d}{dt}(g\varphi^{-1}\chi(t)) \Big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $\varphi^{-1}\chi(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — соответствующий путь в $\mathbb{R}^n$. Отсюда получаем координаты вектора $\chi'(t)$ в карте (U, φ):

$$\tau_\varphi l_{\chi(t)} = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t); \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right). \tag{2}$$

Здесь $x'(t) = (x'_1(t), \ldots, x'_n(t))$ — векторная компонента касательного вектора.

Если $A_x(u, v)$ — риманова метрика на M^n, то определяется длина $\|\chi'(t)\|_{\chi(t)}$ касательного вектора к пути и длина участка пути $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$S_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi(t))}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\chi'(t)\|_{\chi(t)}\, dt. \tag{3}$$

В локальных координатах формула (3) имеет вид

$$S_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t))\, dx_i dx_j},$$

где $g_{ij}(x)$ — соответствующая матрица билинейной формы.

2. Динамическая группа физической системы и ее инфинитезимальная образующая. Понятия гладкого пути и касательного вектора к нему находят естественное применение при математическом исследовании физических систем.

Будем говорить о множестве всех возможных состояний физической системы в некотором процессе и предполагать, что оно является гладким многообразием M^n, называемым *фазовым пространством* системы. Тогда $x \in M^n$ обозначает возможное состояние системы и соответствие «точка $x \longmapsto$ состояние» биективно. Состояние системы меняется в зависимости от времени в соответствии с физическим законом, следовательно, точка x, соответствующая этому состоянию, меняет свое положение в зависимости от времени t. Будем предполагать процесс детерминированным, что означает однозначную определенность состояния системы в будущем и прошедшем ее настоящим состоянием. Такие процессы описываются динамической группой физической системы, определяемой следующим образом. Если $x \in M^n$ — точка, отмечающая в настоящий момент ($t = 0$) состояние системы, то состоянию системы в момент t отвечает точка $\chi = \chi(t, x)$, $\chi(t, x) \in M^n$, $\chi(0, x) = x$. Таким образом, точка x описывает путь $\chi = \chi(t, x)$, $-\infty < t < +\infty$, называемый *фазовой траекторией* (*орбитой*) точки x. Для каждого $t \in (-\infty, +\infty)$ определяется преобразование U_t: $M^n \to M^n$ по правилу $x \mapsto \chi(t, x)$. В силу принципа причинности имеем

$$U_{t_1+t_2}(x) = U_{t_1}(U_{t_2}(x)), \quad t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty);$$

отсюда вытекает, что семейство преобразований $\{U_t\}$ является группой с обратным элементом $(U_t)^{-1} = U_{-t}$ и с единицей $U_0 = 1_{M^n}$.

Эта группа называется *динамической группой физической системы*. Будем предполагать, что отображение $\mathbb{R}^1 \times M^n \to M^n$: $(t, x) \mapsto U_t(x)$ является гладким; в этом случае группу диффеоморфизмов $\{U_t\}$ называют *гладко зависящей от* t. С физической точки зрения знание динамической группы означает полное описание поведения системы во времени. Такое описание не всегда возможно.

Физические законы обычно формулируются гораздо проще в «инфинитезимальной форме», что означает следующее: рассмотрим орбиту $\chi(t) = \chi(t, x)$ и касательный к ней вектор $\chi'(0)$ (в точке x). Для каждой точки $x \in M^n$ положим $X(x) = \chi'(0)$. Совокупность касательных векторов $\{X(x)\}$ называется *векторным полем на многообразии* M^n; это поле называют также *инфинитезимальной образующей динамической группы*. Физический закон выражается обычно путем описания инфинитезимальной образующей. Но тогда возникает задача построения (описания) динамической группы.

Ниже мы изучим более тщательно понятие векторного поля.

3. Гладкое векторное поле. *Векторным полем на многообразии* M^n называется отображение

$$X: M^n \to TM^n \tag{4}$$

такое, что $X(x) \in T_xM^n$ для каждого $x \in M^n$. Векторное поле называется *гладким* (класса C^∞), если отображение (4) является гладким (класса C^∞). В локальных координатах векторное поле имеет вид

$$\left(x_1, \ldots, x_n; X_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \tag{5}$$

Упражнение 2°. Покажите, что гладкость векторного поля эквивалентна гладкости функций $X_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть U_t — группа диффеоморфизмов многообразия M^n, гладко зависящая от t, и пусть $\chi(t, x) = U_t(x)$ — орбита точки x.

Определение 2. Векторное поле $X(x)$ называется *инфинитезимальной образующей группы* U_t, если для каждой орбиты $\chi(t) = \chi(t, x)$ имеем

$$\chi'(0) = X(x). \tag{6}$$

*Упражнения.*3°. Покажите, что равенство (6) эквивалентно равенству

$$\chi'(t) = X(\chi(t)), \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{7}$$

Указание. Используйте равенство $\chi(t) = U_t(x)$ и групповой закон.

4°. Покажите, что инфинитезимальная образующая $X(x)$ — гладкое векторное поле.

Рассмотрим задачу отыскания группы U_t по заданному гладкому векторному полю $X(x)$. Будем искать орбиту $\chi(t) = \chi(t, x_0)$ из условия (7). В локальных координатах имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — координатное задание пути χ, а $X_1, \ldots, X_n$ — координаты векторной части касательного вектора $X(x)$ (см. (2) и (5)). Функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ гладко зависят от $x_1, \ldots, x_n$. Для отыскания орбиты (точнее, той же части, которая лежит в карте), необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющее условию $x_1(0) = x_1^0, \ldots, x_n(0) = x_n^0$, где $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — координаты точки x^0. Используя теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить единственное решение $\chi(t) = \chi(t, x)$ для достаточно малого интервала $-\varepsilon < t < +\varepsilon$ и x из некоторой окрестности точки x^0, причем $\chi(t, x)$ гладко зависит от t, x. Но чтобы построить группу U_t, необходимо продолжить решение $\chi(t, x)$ на всю ось $-\infty < t < +\infty$ для любого $x \in M^n$. Это не всегда можно сделать (пример : уравнение $y' = y^2$ на $\mathbb{R}^1$). Однако если M^n компактно, то искомое продолжение существует, что несложно проверяется методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из этой теории вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если M^n — компактное гладкое многообразие и X — гладкое векторное поле, то оно является инфинитезимальной образующей однопараметрической группы диффеоморфизмов, гладко зависящей от параметра.*

Отметим, что орбиты часто называют интегральными кривыми векторного поля.

Пример 1. Пусть $M^{2n} = TQ^n$ (случай, рассматриваемый в механике, где Q^n — конфигурационное пространство, которое будем считать гладким многообразием). Пусть локальные координаты в Q^n — $(q_1, \ldots, q_n)$, в TQ^n — $(q_1, \ldots, q_n; v_1, \ldots, v_n)$.

Векторное поле на TQ^n вида (векторная компонента)

$$L_{q,v} = v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \alpha_1(q, v) \frac{\partial}{\partial v_1} + \ldots + \alpha_n(q, v) \frac{\partial}{\partial v_n}$$

с гладкими функциями $\alpha_1(q, v), \ldots, \alpha_n(q, v)$ называется *специальным*. Интегральные кривые этого поля описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_1}{dt} = \alpha_i(q_1, \ldots, q_n; v_1, \ldots, v_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

которая эквивалентна системе второго порядка

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = \alpha_i\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Классическая механика оперирует уравнениями типа (9).

Упражнение 5°. Найдите $\pi_* L_{q,v}$, где $\pi\colon TQ^n \to Q^n$ — проекция.

4. Алгебра Ли векторных полей. Пусть $C^\infty(M^n)$ — множество всех гладких отображений $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$. Гладкое векторное поле X на M^n определяет отображение $C^\infty(M^n) \to C^\infty(M^n)$ по правилу $f \mapsto X(f)$, где $X(f)(x) = X(x)(f)$ для всякой точки x из M^n. Если (в локальных координатах) $X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, то $X(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Очевидно, это линейное отображение векторного пространства $C^\infty(M^n)$.

Если X, Y — два векторных поля, то определяется их произведение — коммутатор $[X, Y]$ — формулой

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Упражнение 6°. Убедитесь, что $[X, Y]$ — векторное поле, и вычислите его в локальных координатах.

Очевидно, что множество всех векторных полей на M^n образует векторное пространство (над полем $\mathbb{R}^1$) с естественными операциями $X + Y$ и $\alpha \cdot X$. Коммутатор $[X, Y]$ линейно зависит от множителей X, Y. Таким образом, множество всех векторных полей на M^n является алгеброй.

Упражнение 7°. Покажите, что для любых векторных полей X, Y, Z на M^n справедливы равенства:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисимметричность);

2) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (тождество Якоби).

Таким образом, множество всех векторных полей на M^n является алгеброй Ли.

Множество всех векторных полей на гладком многообразии является не только векторным пространством, но и обладает структурой модуля над кольцом гладких функций на M^n. Действительно, для $f \in C^\infty(M^n)$ определено произведение $f \cdot X$, являющееся векторным полем: $(f \cdot X)(x) = f(x) \cdot X(x)$; ясно, что это гладкое поле, линейно зависящее и от f, и от X.

Изучение строения алгебр Ли векторных полей — одно из направлений современной топологии.

5. Ковекторные поля. Гладкое отображение $A\colon M^n \to T^*M^n$, при котором $A(x)$ принадлежит $T_x^*M^n$ — слою над точкой x, называется *гладким ковекторным полем на* M^n.

В локальных координатах поле A задается в виде

$$A(x) = (x_1, \ldots, x_n;\ a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n),$$

где $a_i(x)$ — гладкие функции от координат $(x_1, \ldots, x_n)$ точки x.

Если $f \in C^\infty(M^n)$, то $A(x) = (df)_x$ является ковекторным полем на M^n, гладким, так как в локальных координатах ковекторная часть $(df)_x$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

и координаты $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ этого ковектора — гладкие функции.

Пример 2. Пусть $M^{2n} = T^*Q^n$, где Q^n — конфигурационное пространство механической системы. Пусть $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots$ $\ldots, p_n)$ — локальные координаты на T^*Q^n, где $(p_1, \ldots, p_n)$ — координаты вектора в точке $(q_1, \ldots, q_n) \in Q^n$. Если $H\colon T^*Q^n \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция, то

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n} dp_n$$

— ковекторное поле на многообразии T^*Q^n. Образуем векторное поле на этом же многообразии:

$$L = -\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} - \ldots - \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial}{\partial q_n} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Интегральные кривые $(q_1(t), \ldots, q_n(t); p_1(t), \ldots, p_n(t))$ поля L удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

В механике выбирают функцию H, равную сумме кинетической и потенциальной энергий, и систему (10) называют *уравнениями движения в форме Гамильтона.*

§ 9. Расслоения и накрытия

1. Подготовительные примеры. Во многих задачах естественным образом возникают пространства, «склеенные» из прямых произведений. Такое пространство представляет собой непрерывную совокупность пространств — слоев, гомеоморфных друг другу и индексированных точками пространства — базы. Мы коснемся лишь самых первых понятий теории таких пространств; эта теория сейчас продвинута очень далеко. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть M^n — гладкое многообразие, TM^n — касательное расслоение, $\pi\colon TM^n \to M^n$ — проекция касательного расслоения на многообразие. Ясно, что для всякой точки $x \in M^n$ слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$ и, более того, для координатной окрестности U точки x имеем гомеоморфизм $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (см. § 6). Иногда, как, например, в случае $M^n = S^1$, имеет место гомеоморфизм $TM^n \simeq M^n \times \mathbb{R}^n$. Однако в общем случае это не так. (Например, для $M^n = S^2$.)

Касательное расслоение устроено «локально по x» как прямое произведение $U \times \mathbb{R}^n$, что является, конечно, следствием его определения. Наличие подобной структуры у сферы S^3 является более неожиданным и связано со свойствами комплексных чисел. Построим пример отображения S^3 в S^2, для которого прообраз любой точки гомеоморфен окружности. Рассмотрим S^3 как сферу в $\mathbb{C}^2$, т. е.

$$S^3 = \{(z_1, z_2)\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

а сферу S^2 — как расширенную комплексную плоскость (z-сферу). Формула $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$ определяет отображение $\pi\colon S^2 \to S^2$. Для $\lambda = t^{i\alpha}$ имеем $\pi(\lambda z_1, \lambda z_2) = \pi(z_1, z_2)$, поэтому $\pi^{-1}(z) \simeq S^1$ для любого $z \in S^2$. Напомним, что z-сфера S^2 имеет структуру C^∞-многообразия с локальными координатами z на области $U_1 = S^2 \setminus \infty$ и $1/z$ на области $U_2 = S^2 \setminus 0$ (см. § 2).

Рассмотрим прямые произведения $U_1 \times S^1$, $U_2 \times S^1$. Оказывается, что множества $\pi^{-1}(U_1)$, $\pi^{-1}(U_2)$ гомеоморфны соответственно $U_1 \times S^1$, $U_2 \times S^2$. Покажем это. Определим отображение $\varphi\colon U_1 \to S^3$ формулой

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\right);$$

очевидно, $\pi\varphi = 1\Big|_{U_1}$ и множество $\pi^{-1}(z)$, $z \in U_1$, состоит из точек вида $\lambda\varphi(z)$, где $\lambda = e^{ia}$. Определим отображение $\tilde{\varphi}\colon U_1 \times S^1 \to S^3$ формулой

$$\tilde{\varphi}(z, \lambda) = \left(\frac{\lambda z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{1+|z|^2}}\right), \quad z \in U_1, \quad \lambda \in S^1.$$

Ясно, что $\pi^{-1}(U_1) = \tilde{\varphi}(U_1 \times S^1)$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_1 \times S^1 \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_1) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U_1 &
\end{tikzcd}$$

где pr_1 — проекция прямого произведения на первый сомножитель, коммутативна. Аналогично определим отображение $\tilde{\psi}\colon U_2 \times S^1 \to S^3$ формулой

$$\tilde{\psi}(1/z, \lambda) = \left(\frac{\lambda \cdot (1/z)}{\sqrt{1+|1/z|^2}}, \frac{\lambda \cdot 1}{\sqrt{1+|1/z|^2}}\right), \quad 1/z \in U_2, \quad \lambda \in S^1,$$

причем $\pi^{-1}(U_2) = \tilde{\psi}(U_2 \times S^1)$. Ясно, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_2 \times S^1 \arrow[rr, "\tilde{\psi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_2) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U_2 &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение π локально (над координатными окрестностями S^2) устроено как проекция прямого произведения. Однако сфера S^3 не гомеоморфна прямому произведению $S^2 \times S^1$ (фундаментальные группы этих пространств не изоморфны).

Описанное отображение называется расслоением Хопфа; оно замечательно во многих отношениях. Так, например, расслоение Хопфа определяет образующий элемент группы $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$. Отметим, что для любых двух точек $u, v \in S^2$ окружности $\pi^{-1}(u)$ и $\pi^{-1}(v)$ зацеплены в S^3 (рис. 106).

2. Определение расслоения. Рассмотренные в п. 1 примеры естественно приводят нас к следующему определению.

Определение 1. *Локально тривиальным расслоением* называется четверка (E, B, F, p), где E, B, F — топологические пространства, p — сюръективное отображение E на B, причем для каждого $x \in B$ существет окрестность U точки x и гомеоморфизм φ_U: $p^{-1}(U) \to U \times F$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& U &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

где pr — естественная проекция, коммутативна.

Из определения вытекает, что для всякой точки x из U прообраз $p^{-1}(x)$ гомеоморфен пространству F, он называется *слоем* над точкой x.

Пространства E, B, F называются соответсвенно *пространством*, *базой* и *слоем* расслоения, а отображение p — *проекцией* расслоения. Окрестности U, участвующие в определении 1, называются *координатными окрестностями*, гомеоморфизмы φ_U — *координатными* или *распрямляющими гомеоморфизмами*.

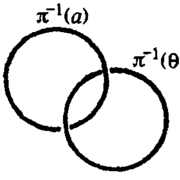


Рис. 106

Хотя в топологии рассматривают и более широкий класс расслоений, чем локально тривиальные расслоения, всюду ниже мы будем называть расслоениями только локально тривиальные расслоения.

Расслоение называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм φ_B: $E \to B \times F$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\varphi_B"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что касательное расслоение TM^n можно рассматривать как пространство локально тривиального расслоения с базой M^n, проекцией $p = \pi$ — проекцией касательного пространства на многообразие M^n, и слоем $\mathbb{R}^n$. В качестве окрестностей $U \subset M^n$ служат координатные окрестности многообразия M^n.

Рассмотренное выше отображение расслоения Хопфа является проекцией локально тривиального расслоения, пространством которого является S^3, базой — S^2, слоем — S^1.

Приведем еще ряд примеров локально тривиальных расслоений.

Пример 1. Лист Мёбиуса M (факторпространство прямого произведения $[0, 1] \times [-1, 1]$ по отношению эквивалентности $(0, y) \sim (1, -y))$ является пространством расслоения с базой S^1 («средняя» линия) и слоем $[-1, 1]$.

Проекция pr: $[0, 1] \times [-1, 1] \to [0, 1]$, действующая по правилу pr $(x, y) = x$, индуцирует факторотображение p: $M \to S^1$ — проекцию этого расслоения.

Пример 2. Прямое произведение $X \times Y$ топологических пространств X, Y образует пространство расслоения с естественной проекцией pr: $X \times Y \to X$, слоем Y и базой X.

Пример 3. Сфера S^n является пространством расслоения с базой $\mathbb{R}P^n$, слоем, состоящим из двух точек (дискретное множество), и проекцией, сопоставляющей точке $x \in S^n$ ее класс эквивалентности $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ (см. § 5 гл. II).

Сфера S^{2n+1} является пространством расслоения с базой $\mathbb{C}P^n$, слоем S^1 и проекцией, сопоставляющей точке $x \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ее класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^n$ (см. § 5 гл. II).

Упражнения. 1°. Покажите, что касательное расслоение многообразия M^n тривиально тогда и только тогда, когда существуют n (непрерывных) векторных полей на M^n, линейно независимых в каждой точке $x \in M^n$.

2°. Покажите, что локально тривиальное расслоение над отрезком тривиально.

Отображение s: $B \to E$, удовлетворяющее условию $ps = 1_B$, называется *сечением* расслоения (E, B, F, p).

Упражнения. 3° . Покажите, что существование сечения является необходимым условием тривиальности расслоения.

4°. Существуют ли сечения расслоения Хопфа? (Воспользуйтесь тем, что $\pi_2(S^3) = 0$ и $ps = 1_{S^2}$.)

5°. Приведите пример нетривиального расслоения, у которого существует сечение.

Установим некоторое отношение между отображениями в пространство расслоения и в его базу.

Определение 2. Отображение Ψ: $X \to E$ называется *поднятием отображения* Φ: $X \to B$, если для всякой точки $x \in X$ выполняется равенство $p\Psi(x) = \Phi(x)$. Говорят также, что отображение Ψ накрывает отображение Φ.

Введенное отношение характеризуется коммутативностью следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "\Phi"'] & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

Упражнение 6°. Покажите, что если у расслоения есть сечение, то для всякого отображения в базу существует поднятие этого отображения.

Приведем необходимое условие существования поднятия отображения в терминах функторов гомотопических групп (см. § 3 гл. III).

Теорема 1. *Пусть* (E, B, F, p) *— локально тривиальное расслоение со слоем* F, *пространством* E *и базой* B, X *— топологическое пространство. Для того чтобы у отображения* $\Phi\colon X \to B$ *существовало поднятие* Ψ, *удовлетворяющее условию* $\Psi(x_0) = e_0$, *где* $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $p(e_0) = b_0 = \Phi(x_0)$, x_0, e_0, b_0 *фиксированы, необходимо, чтобы*

$$\Phi_n(\pi_n(X, x_0)) \subset p_n(\pi_n(E, e_0)) \tag{3}$$

при всех $n \geqslant 1$.

Доказательство. Если такое поднятие Ψ существует, то диаграмма (2) коммутативна. Применяя функторы гомотопических групп, получаем коммутативные диаграммы (при всех $n \geqslant 1$)

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ \pi_n(X, x_0) \arrow[ur, "\Psi_n"] \arrow[r, "\Phi_n"'] & \pi_n(B, b_0) \end{tikzcd}$$

из которых следуют требуемые включения. ■

Локально тривиальные расслоения обладают следующим важным свойством.

Свойство накрывающей гомотопии. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение, X — хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство, $\Phi\colon X \times I \to B$ — гомотопия и пусть $f\colon X \to E$ — поднятие отображения $\Phi\big|_{X\times 0}$, т. е. $pf = \Phi\big|_{X\times 0}$. Тогда существует единственное поднятие $\Psi\colon X \times I \to E$ гомотопии Φ, удовлетворяющее условию $\Psi\big|_{X\times 0} = f$.

Это утверждение будет доказано для частного случая в п. 4.

3. Векторные расслоения. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение. Предположим, что U и V — координатные окрестности точки $x \in B$. Можно определить гомеоморфизм $g_V^U(x)$ пространства F формулой

$$g_V^U(x)h = \varphi_V\varphi_U^{-1}(x,\ h), \quad x \in U \cap V, \quad h \in F; \quad g_U^V(x) = 1_F.$$

Если W — третья окрестность точки x, то справедливы равенства

$$g_W^U(x) = g_W^V(x)g_V^U(x).$$

Таким образом, для каждой точки $x \in U \cap V$ определен гомеоморфизм $g_V^U(x)$, т. е. задано отображение $g_V^U\colon U \cap V \to H(F)$ множества $U \cap V$ в группу $H(F)$ гомеоморфизмов пространства F; отображения g_V^U называются *координатными преобразованиями.* Если F локально компактно и топология в $H(F)$ индуцирована вложением $H(F)$ в пространство $C(F,\ F)$ с компактно открытой топологией, то координатные преобразования, как легко видеть, непрерывны (см. упр. 11 § 1 гл. III).

Определение 3. *Векторным расслоением* называется локально тривиальное расслоение $(E,\ B,\ F,\ p)$, слой F которого является конечномерным векторным пространством и координатные преобразования g_V^U которого являются непрерывными отображениями в группу обратимых линейных преобразований пространства F (т. е. при U и V фиксированных $g_V^U(x)$ — непрерывно зависящее от $x \in U \cap V$ семейство обратимых линейных операторов).

Упражнение 7°. Покажите, что касательное расслоение является векторным расслоением.

Определение 4. *Морфизмом локально тривиального расслоения* $(E,\ B,\ F,\ p)$ *в локально тривиальное расслоение* $(E',\ B',\ F',\ p')$ называется пара непрерывных отображений $H\colon E \to E'$, $h\colon B \to B'$ таких, что $hp = p'H$.

Последнее равенство означает, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

коммутативна (слой переходит в слой).

Это определение превращает совокупность локально тривиальных расслоений в категорию.

Определение 5. Пусть $(E,\ B,\ F,\ p)$, $(E',\ B',\ F',\ p')$ — векторные расслоения, слои которых F и F' — векторные пространства над одним и тем же полем. Пусть $(H,\ h)$ — морфизм $(E,\ B,\ F,\ p)$ в $(E',\ B',\ F',\ p')$. Морфизм $(H,\ h)$ называется *морфизмом векторных расслоений*, если для любой точки $x \in B$ суперпозиция

$$F \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} p^{-1}(x) \xrightarrow{H} (p')^{-1}(h(x)) \xrightarrow{\varphi'_{h(x)}} F'$$

является линейным отображением, где φ_x ($\varphi'_{h(x)}$) — гомеоморфизмы слоя $p^{-1}(x)$ $((p')^{-1}(h(x)))$ и векторного пространства F (F'), возникающие в коммутативной диаграмме определения 1.

Упражнения. 8°. Проверьте, что векторные расслоения и их морфизмы образуют категорию.

9°. Проверьте, что, сопоставляя многообразию касательное расслоение, а гладкому отображению многообразий — касательное отображение расслоений, мы определяем ковариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных расслоений (над полем $\mathbb{R}$).

4. Накрытия. Остановимся подробнее на одном специальном классе локально тривиальных расслоений.

Рассмотрим окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ и определим отображение $p: \mathbb{R}^1 \to S^1$ формулой $p(t) = e^{2\pi i t}$. Поскольку $p(t_1) = p(t_2)$ тогда и только тогда, когда $t_1 - t_2 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, то прообраз $p^{-1}(z)$ всякой точки $z \in S^1$ гомеоморфен множеству целых чисел $\mathbb{Z}$ с дискретной топологией. Для всякой точки $z \in S^1$ отображение p гомеоморфно отображает каждую связную компоненту множества $p^{-1}(S^1 \backslash z) = \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$ на $S^1 \backslash z$. Многозначное отображение $p^{-1}: S^1 \backslash z \to \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$, $p^{-1}(u) = (1/2\pi i)\ln u$, имеет счетное число однозначных ветвей, одну из которых обозначим через φ.

Определим гомеоморфизм $\tilde{\varphi}: (S^1 \backslash z) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$ формулой $\tilde{\varphi}(u, k) = \varphi(u) + k$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(S^1 \backslash z) \times \mathbb{Z} \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & p^{-1}(S^1 \backslash z) \arrow[dl, "p"] \\
& S^1 \backslash z &
\end{tikzcd}$$

Систему множеств $\{S^1 \backslash z\}_{z \in S^1}$ можно принять за систему координатных окрестностей, так что четверка $(\mathbb{R}^1, S^1, \mathbb{Z}, p)$ является локально тривиальным расслоением, слой которого $\mathbb{Z}$ дискретен. Такие расслоения часто возникают в задачах анализа.

Определение 6. Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *накрытием*, если пространство E и база B расслоения линейно связны, а слой F — пространство с дискретной топологией.

Часто вместо четверки (E, B, F, p) там, где это не вызывает недоразумений, пишут $p: E \to B$ и называют накрытием отображение p. Слой $p^{-1}(x)$ над каждой точкой накрытия гомеоморфен пространству F с дискретной топологией, следовательно, сам является дискретным пространством.

В определении накрытия (а также локально тривиального расслоения с линейно связной базой) можно ослабить требования на гомеоморфизм φ_U, предполагая, что φ_U — гомеоморфизм на $U \times F_U$, где F_U — пространство (с дискретной топологией для накрытия), зависящее от координатной окрестности U. При таком определении, очевидно, $p^{-1}(x) \sim F_U$ (биекция, соответственно гомеоморфизм) для всякого $x \in U$. Но оказывается, $F_U \sim F_V$ (биекция, гомеоморфизм) для любых координатных окрестностей U, V, и если положить $F = p^{-1}(x_*)$, где x_* — фиксированная точка из B, то придем к определению 6 (или 1) (см. ниже замечание после доказательства леммы 1).

Пример 4. Расслоение сферы S^n над проективным пространством $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ является накрытием, слой которого состоит из двух точек.

Пример 5. Отображение p: $S^1 \to S^1$ (или p: $\mathbb{C} \backslash 0 \to \mathbb{C} \backslash 0$), задаваемое соответствием $z \longmapsto z^n$, является накрытием, слой которого состоит из n точек.

Накрытие, слой которого состоит из n точек, называется n-листным накрытием.

Заметим, что для координатной окрестности U накрытия (E, B, F, p) прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен произведению $U \times F$, состоящему из непересекающихся «листов» — открытых множеств $U \times \alpha$, $\alpha \in F$, следовательно, сам состоит из непересекающихся «листов» — открытых множеств $W_\alpha = \varphi_U^{-1}(U \times \alpha)$, гомеоморфных U; гомеоморфизмами служат p_α: $W_\alpha \to U$ — сужения p на W_α, что следует из соотношения $p = \mathrm{pr}\, \varphi_U$, выражающего коммутативность диаграммы 1.

Таким образом, проекция накрытия p: $E \to B$ является локальным гомеоморфизмом с дискретным, гомеоморфным слою F прообразом $p^{-1}(x)$ над каждой точкой $x \in B$.

Однако обратное неверно: не для всякого локального гомеоморфизма p: $E \to B$ можно построить покрытие пространства B координатными окрестностями U (например, для отображения p: $(a, b) \to S^1$ числового интервала на окружность, задаваемого формулой $p(t) = (\cos t, \sin t)$).

Говорят, что точки из слоя $p^{-1}(x)$ лежат «над» точкой x, а листы W_α «над» U; указанное выше свойство проекции накрытия p: $E \to B$ позволяет «поднимать» подмножества $A \subset U$ в лист W_α, рассматривая прообразы $p_\alpha^{-1}(A)$, а также «поднимать» отображения, пути, гомотопии в X. В соответствии с определением 2 путь f: $I \to E$ называется поднятием пути g: $I \to B$ (накрывающим путь g), если $pf = g$.

Лемма 1. *Пусть p: $E \to B$ — накрытие. Тогда верны следующие утверждения:* 1) *всякий путь γ в B, начинающийся в точке $b_0 \in B$, имеет единственный начинающийся в произвольной фиксированной точке $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ накрывающий путь $\tilde{\gamma}$ в E;* 2) *если*

$\gamma = \gamma_1\gamma_2$ — *произведение путей* γ_1, γ_2 *в* B, *то накрывающий путь* $\tilde\gamma = \tilde\gamma_2 \cdot \tilde\gamma_2$, *где* γ_1, γ_2 *накрывают соответственно* γ_1, γ_2, *причем* $\tilde\gamma_1(1) = \tilde\gamma_2(0)$; 3) *если* $\gamma = \gamma_1^{-1}$ — *путь, обратный* γ_1, *то* $\tilde\gamma = \tilde\gamma_1^{-1}$, *причем* $\tilde\gamma(0) = \tilde\gamma_1(1)$.

Доказательство. Пусть путь γ задан отображением $\gamma\colon I \to B$, $I = [0, 1]$, $\gamma(0) = b_0$. Каждая точка пути $\gamma(t)$ принадлежит некоторой координатной окрестности U_t, и найдется такая связная окрестность (т. е. интервал) Ω_t точки $t \in I$, что $\gamma(\Omega_t) \in U_t$. Из открытого покрытия $\{\Omega_t\}$ отрезка I выделим конечное покрытие $\{\Omega_{s_i}\}_1^k$. Пусть δ — лебегово число покрытия $\{\Omega_{s_i}\}_1^k$. Разобъем отрезок I на отрезки $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ длины, меньшей δ, точками деления t_i, $i = 0, \ldots, N$, $t_N = 1$. Тогда $\gamma(\Delta_i)$ лежит в некоторой координатной окрестности U_i, $i = 1, \ldots, N$. Следовательно, каждый участок γ_i пути γ, задаваемый отображением $\gamma_i\colon \Delta_i \to B$, допускает поднятие $\tilde\gamma_i$ в лист W_{α_i}, задаваемое отображением $f_i = p_{\alpha_i}^{-1}\gamma_i\colon \Delta_i \to W_{\alpha_i}$, где $p_{\alpha_i}\colon W_{\alpha_i} \to$ $\to U_i$ — гомеоморфизм на координатную окрестность U_i. В качестве W_{α_1} выберем лист, содержащий точку $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, и поднимем участок пути γ_1, тогда $\tilde\gamma_1$ начинается в точке e_0. Если $W_{\alpha_{i-1}}$ уже выбран и участок пути γ_{i-1} поднят, то за W_{α_i} выберем лист, содержащий конечную точку $f_{i-1}(t_{i-1})$ участка пути $\tilde\gamma_{i-1}$, лежащую над точкой $\gamma(t_{i-1})$. Тогда участок пути $\tilde\gamma_i$ имеет начало в точке $f_{i-1}(t_{i-1})$. Таким образом поднимем все участки γ_i, $i = 1, \ldots, N$, пути γ. Поскольку отображения $f_i\colon \Delta_i \to E$, $i = 1, \ldots, N$, согласованы на общих концах соседних промежутков Δ_i, их можно объединить в отображение $f\colon I \to E$, $f(t) = f_i(t)$ при $t \in \Delta_i$. Отображение f и определяет путь $\tilde\gamma$, накрывающий путь γ. Единственность накрывающего пути следует из того, что p — локальный гомеоморфизм. Этим доказано утверждение 1). Утверждения 2), 3) очевидны: ■

Замечание. Конструкция координатных окрестностей U_i, $i = 1, \ldots, N$, покрывающих путь $\gamma\colon I \to B$, позволяет доказать биективность слоев F_U над координатными окрестностями, где гомеоморфизм φ_U действует из $p^{-1}(U)$ на $U \times F_U$ (см. определение 6 накрытия и последующее обсуждение). Это очевидно, если $U \subset$ $\subset V \neq \varnothing$, так как для $x \in U \cap V$ имеем $p^{-1}(x) \sim F_U$ и $p^{-1}(x) \sim F_V$. Если $U \cap V = \varnothing$, то, выбрав точки $x \in U$, $y \in V$, соединим их путем $\gamma\colon I \to B$, используя линейную связность B. Для указанного покрытия $\{U_i\}$ слои F_{U_i} гомеоморфны (в дискретной топологии), откуда следует $p^{-1}(x) \sim p^{-1}(y)$ и $F_U \sim F_V$.

Опираясь на доказанную лемму, теперь нетрудно доказать для случая накрытий теорему о накрывающей гомотопии, упомянутую в п. 2.

Теорема 2 (свойство накрывающей гомотопии). *Пусть* (E, B, F, p) *— накрытие,* X *— топологическое пространство,* $f\colon X \to E$ *— отображение и* $\Phi\colon X \times I \to B$ *— такая гомотопия, что* $pf = \Phi\big|_{X\times 0}$. *Тогда существует единственное поднятие* Ψ *гомотопии* Φ, *т. е. такая гомотопия* $\Psi\colon X \times I \to E$, *где* $\Psi\big|_{X\times 0} = f$ *и* $p\Psi = \Phi$.

Доказательство. Гомотопия $\Phi\colon X \times I \to B$ для всякого $x \in X$ задает путь $g_x\colon I \to B$, где $g_x(t) = \Phi(x, t)$, $t \in I$. Точка $f(x)$ лежит над точкой $g_x(0) = \Phi(x, 0)$. Согласно лемме 1 путь g_x единственным образом поднимается в E, $\tilde{g}_x\colon I \to E$, с условием $\tilde{g}_x(0) = f(x)$. Положим $\Psi(x, t) = \tilde{g}_x(t)$. Таким образом, имеем отображение $\Psi\colon X \times I \to E$. Оно накрывает отображение Φ, так как

$$p\Psi(x, t) = p\tilde{g}_x(t) = g_x(t) = \Phi(x, t), \quad (x, t) \in X \times I.$$

При $t = 0$, очевидно, $\Psi(x, 0) = f(x)$, т. е. $\Psi\big|_{X\times 0} = f$.

Следующим упражнением завершается доказательство теоремы.

Упражнение 10°. Докажите, что отображение $\Psi\colon X \times I \to E$ непрерывно.

Лемма о поднятии пути в накрывающее пространство и теорема о накрывающей гомотопии позволяют изучить связь между фундаментальными группами базы B и накрывающего пространства E. Вначале сформулируем прямые геометрические следствия указанных предложений.

Лемма 2. *Пусть* $p\colon E \to B$ *— накрытие,* $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$ *— отмеченные точки. Тогда верны утверждения:*

1) *если* α *— замкнутый путь в* E *с началом в точке* e_0, *гомотопный* постоянному, то* $\beta = p\alpha$ *— замкнутый путь с началом в точке* b_0 *и также гомотопен постоянному;*

2) *если* α *— путь в* E *с началом в точке* e_0, *накрывающий замкнутый путь* β, *то гомотопия пути* β *поднимается в гомотопию пути* α *с фиксированными концами;*

3) *если* α *— некоторый путь в* E *с началом в точке* e_0, *накрывающий замкнутый путь* β, *гомотопный постоянному пути, то* α *тоже замкнут и гомотопен постоянному пути.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно вследствие непрерывности отображения p. Докажем утверждение 2). Пусть $\beta\colon I \to B$, $\beta(0) = \beta(1) = b_0$ — замкнутый путь в B, а $f_t\colon I \to B$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_0 = \beta$, — его гомотопия. Обозначим $\Psi_t\colon I \to E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

---

* Как и в гл. III, здесь рассматриваются гомотопии путей с фиксированными концами.

$\Psi_0 = \alpha$ — поднятие гомотопии f_t: $p\Psi_t = f_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Так как концы пути f_t неподвижны, т. е. $f_t(0) = f_t(1) = b_0$ при всех t, то концы $\Psi_t(0)$, $\Psi_t(1)$ пути Ψ_t принадлежат $p^{-1}(b_0)$ при всех t и непрерывно зависят от t. В силу дискретности топологии слоя $p^{-1}(b_0)$ концы пути $\Psi_t(0)$, $\Psi_t(1)$ постоянны, т. е. гомотопия пути α проходит при закрепленных концах $\alpha(0) = e_0$, $\alpha(1)$. Наконец, докажем утверждение 3). Пусть f_t — гомотопия пути β, а Ψ_t — гомотопия пути α, накрывающая f_t. По условию f_1 — постоянное отображение и $f_1(I) = b_0$, откуда $\Psi_1(I) \subset p^{-1}(b_0)$, т. е. Ψ_1 — отображение в слой над b_0. Образ $\Psi_1(I)$ отрезка I — связное множество, поэтому в силу дискретности топологии слоя $\Psi_1(I) = e_0' \in p^{-1}(b_0)$, в частности, $\Psi_1(0) = \Psi_1(1) = e_0'$. По утверждению 2) гомотопия Ψ_t проходит при неподвижных концах, т. е. $\Psi_t(1) = \alpha(1)$, $\Psi_t(0) = \alpha(0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, $\alpha(1) = \alpha(0) = e_0'$, $\Psi_1(I) = e_0'$, т. е. путь α замкнут и гомотопен постоянному пути. ■

Изучим связь между фундаментальными группами пространства накрытия и базы.

Проекция p: $E \to B$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(E)$ и $\pi_1(B)$ (см. § 3 гл. III). Действие этого гомоморфизма описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Гомоморфизм p_*: $\pi_1(E) \to \pi_1(B)$ фундаментальных групп, индуцированный проекцией накрытия, является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$, $b_0 \in B$ — отмеченные точки, причем $p(x_0) = b_0$; пусть $\pi_1(E, x_0)$, $\pi_1(B, b_0)$ — фундаментальные группы и p_*: $\pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ — гомоморфизм, индуцированный проекцией p: $E \to B$. Рассмотрим прообраз $p_*^{-1}(e)$ единицы группы $\pi_1(B, b_0)$. Достаточно показать, что $p_*^{-1}(e) = e'$, где e' — единица группы $\pi_1(E, x_0)$. Если $[\alpha]^* \in p_*^{-1}(e)$, то α накрывает путь $\beta = p\alpha$, гомотопный постоянному в B. Согласно утверждению 3 путь α также гомотопен постоянному (в E), следовательно, $[\alpha] = e'$. ■

Из теоремы 3 следует, таким образом, что группа $\pi_1(E)$ изоморфна подгруппе группы $\pi_1(B)$ (именно подгруппе $N = p_*(\pi_1(E))$. Рассмотрим смежные классы (например, правые) группы $\pi_1(B)$ по подгруппе N. Имеет место важная теорема.

Теорема 4. *Для всякого накрытия p: $E \to B$ слой $p^{-1}(b_0)$ находится в биективном соответствии с множеством смежных классов группы $\pi_1(B)$ по подгруппе N.*

Доказательство. Гомотопическому классу $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ сопоставим точку $x_\beta \in p^{-1}(b_0)$ по следующему правилу: поднимем путь β в путь α в E с началом в точке x_0 (лемма о поднятии пути) и положим $x_\beta = \alpha(1)$; согласно лемме 2 (утверждение 2)) конец пути α не зависит от выбора представителя $\beta \in [\beta]$, следовательно, определено отображение $\pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$, $[\beta] \mapsto x_\beta$. Если $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ принадлежат одному смежному классу, то $[\beta_1] \cdot [\beta_2]^{-1} \in$ $\in p_*(\pi_1(E, x_0))$; тогда петля $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ с началом в b_0 гомотопна некоторой петле $p\alpha$, где α — петля в E с началом в x_0. Обозначим α' поднятие петли $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ с началом в x_0 и заметим, что петли α и α' гомотопны при фиксированных концах (утверждение 2) леммы 2), следовательно, α' — замкнутая петля, накрывающая петлю $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$. Но $\alpha' = \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ по лемме 1 (утверждения 2), 3)). Замкнутость пути $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ означает, что начало пути $\tilde{\beta}_1$ совпадает с началом пути $\tilde{\beta}_2$, а конец пути $\tilde{\beta}_1$ — с концом пути $\tilde{\beta}_2$. Следовательно, $x_{\beta_1} = x_{\beta_2}$. Таким образом, отображение $[\beta] \mapsto x_\beta$ постоянно на каждом смежном классе. При этом разным смежным классам соответствуют разные образы. Действительно, в предположении противного найдутся $[\beta_1]$ и $[\beta_2]$ из разных смежных слассов, но $x_{\beta_1} = x_{\beta_2}$; последнее означает, что концы (и начала) поднятий $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ совпадают, следовательно, $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ — петля в E с началом в точке x_0, $p(\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}) = \beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ — петля (с началом в точке b_0), откуда следует, что гомотопический класс $[\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}] = [\beta_1] \cdot [\beta_2]^{-1} = p_*[\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}]$ этой петли принадлежит $p_*(\pi_1(E, x_0))$, т. е. $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ из одного смежного класса вопреки предположению. Наконец, остается показать, что любая точка $\tilde{x} \in p^{-1}(b_0)$ является образом x_β для некоторого $[\beta]$. Рассмотрим путь α, идущий в E из точки x_0 в точку $\tilde{x}$ (используя условие линейной связности E), и положим $\beta = p\alpha$; β — замкнутый путь в B с началом в точке b_0, путь α является его поднятием, следовательно, $x_\beta = \tilde{x}$. ■

Следствие. *Если пространство накрытия $p\colon E \to B$ односвязно, т. е. $\pi_1(E) = 0$, то слой F и фундаментальнаягруппа $\pi_1(B)$ находятся в биективном соответствии.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in E$, $p(x_0) = b_0$ и рассмотрим $\pi_1(E, x_0) = e'$, $\pi_1(B, b_0)$. Имеем $p_*(\pi_1(E, x_0)) = e$, следовательно, множество смежных классов совпадает с множеством $\pi_1(B, b_0)$. Таким образом, $\pi_1(B, b_0) \sim p^{-1}(b_0) \sim F$ (эквивалентность — биекция).

Определение 7. Накрытие (E, B, F, p) называется *универсальным*, если пространство E односвязно, т. е. $\pi_1(E) = 0$. Пространство E в этом случае называется *универсальным накрывающим пространством.*

Знание универсальных накрытий для некоторых пространств полезно для вычисления фундаментальной группы $\pi_1(B)$.

Пример 6. Накрытие $p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, $F = \mathbb{Z}$. Мы уже знаем (§ 3 гл. III), что $\pi_1(\mathbb{R}^1) = 0$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}$ (сравните с § 4 гл. III).

Пример 7. Накрытие p: $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ со слоем $F \sim \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$. Имеем $\pi_1(S^n) = 0$, $n \geqslant 2$, откуда $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \sim \mathbb{Z}_2$.

Однако полученные результаты неполны. Установив биекцию группы $\pi_1(B)$ с некоторой группой, мы не можем быть уверены в том, что биекция сохраняет групповые операции, т. е. является гомоморфизмом групп. Усилим теорему 4 и следствие в этом направлении, предположив, что в накрывающем пространстве E задано действие некоторой группы G, согласованное со структурой накрытия.

Будем рассматривать группу G, действующую (слева) на пространстве E, и будем для краткости отождествлять элемент $g \in G$ с соответствующим гомеоморфизмом h_g: $E \to E$ (см. § 5 гл. II).

Определение 8. Говорят, что группа G *действует разрывно* (или что G — *разрывная группа преобразований*), если орбита O_y любой точки $y \in E$ является дискретным подпространством.

Определение 9. Группа преобразований G, действующая в E разрывно, называется *вполне разрывной*, если для всякой точки $y \in E$ найдется такая окрестность $U(y)$ точки y, называемая ниже *элементарной*, что образы $g(U)$, $g \in G$, попарно не пересекаются.

Определение 10. Говорят, что группа G *действует в E свободно* (или *без неподвижных точек*), если $g(y) \neq y$ для всякого $y \in E$, каков бы ни был элемент $g \in G$, $g \neq e$.

Очевидно, что вполне разрывная группа преобразований G действует свободно. Если E хаусдорфово, группа G конечна и действует свободно, то G — вполне разрывная группа (проверьте!).

Пусть G — вполне разрывная группа преобразований пространства E. Рассмотрим пространство орбит $E/G = B$ и естественную проекцию p: $E \to B$ (см. § 5 гл. II).

Лемма 3. *Пусть E — линейно связное пространство, а G — вполне разрывная группа преобразований в E. Тогда p: $E \to E/G = B$ является накрытием со слоем $p^{-1}(b)$, $b \in B$, равным орбите O_y точки y, $p(y) = b$.*

Доказательство. По определению пространства орбит проекция p — непрерывное отображение и $p^{-1}(b) = O_y$, если $p(y) = b$, причем $O_y \sim G$. Линейная связность пространства $p(E) = B$ следует из линейной связности E и непрерывности p. Остается построить координатные окрестности в B. Пусть $U(y)$ — элементарная окрестность точки $y \in E$, $b = O_y$ — орбита точки y и $V(b)$ — открытая окрестность точки $b \in B$, состоящая из всех орбит O_z, $z \in U_y$, проходящих через окрестность $U(y)$. Для вполне разрывной группы G и элементарной окрестности $U(y)$ имеем $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{g \in G} g(U)$, причем $g(U)$ открыты в E и не пересекаются. Образ $g(U)$ — это «лист» W_g над V накрытия $p\colon E \to B$. Действительно, $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{g \in G} W_g$, при этом W_g гомеоморфен V, так как сужение $p_g = p\Big|_{W_g} : W_g \to V$ — гомеоморфизм в силу биективности и открытости отображения p_g. Окрестность $V(b)$ является координатной, так как определен гомеоморфизм $\varphi_V\colon p^{-1}(V) \to V \times G$ (G рассматривается с дискретной топологией), задаваемый на открытых непересекающихся множествах W_g отображениями $p_g\colon W_g \to V \times g$ для всякого $g \in G$. ■

Пример 8. Накрытие $p\colon S^{2n+1} \to L(k, k_1, \ldots, k_n)$ сферы над обобщенным линзовым пространством, определяемое проекцией комплексной сферы $S^n_{\mathbb{C}}$ (гомеоморфной S^{2n+1}) на факторпространство орбит $L(k, k_1, \ldots, k_n)$ по действию группы $\mathbb{Z}_k$ (см. § 5 гл. II). Слой этого накрытия совпадает с орбитой группы $\mathbb{Z}_k$, т. е. состоит из k элементов. Так как $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$, то $\pi_1(L) \sim \mathbb{Z}_k$.

Пример 9. Рассмотрим $E = \mathbb{R}^n$ как абелеву группу; она содержит подгруппу $\mathbb{Z}^n$ всех векторов с целочисленными координатами. Факторгруппа $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, наделенная фактортопологией, называется n-мерным тором T^n. Факторотображение $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ является накрытием со слоем $\mathbb{Z}^n$. Так как $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, то заключаем $\pi_1(T^n) \sim \mathbb{Z}^n$.

Для накрытий $p\colon E \to E/G = B$ верна

Лемма 4. *В условиях леммы 3 подгруппа* $N = p_*(\pi_1(E,\ e_0))$ *фундаментальной группы* $\pi_1(B,\ b_0)$, *где* $p(e_0) = b_0$, *является нормальным делителем.*

Доказательство. Пусть $[\beta] \in N$, $[\beta_1] \in \pi_1(B, b_0)$. Проверим, что $[\gamma] = [\beta_1]^{-1} \cdot [\beta] \cdot [\beta_1] \in N$. Поднимем путь $\gamma = \beta_1^{-1} \cdot \beta \cdot \beta_1$ в путь $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}_1^{-1} \cdot \tilde{\beta} \cdot \tilde{\beta}_1$, где $[\tilde{\beta}] \in \pi_1(E, e_0)$, $\tilde{\beta}_1$ идет из точки e_0 в точку e_1, $p(e_1) = b_0$, $\tilde{\beta}_1^{-1}$ идет из точки e_1 в точку e_0. Следовательно, $\tilde{\gamma}$ — петля в точке e_1, и $p\tilde{\gamma} = \gamma$. Так как слой $p^{-1}(b_0)$ является орбитой O_{e_1} группы G , то найдется элемент $g_1 \in G$ такой, что $g_1(e_1) = e_0$. Гомеоморфизм g_1 отображает петлю $\tilde{\gamma}$ в петлю $g_1\tilde{\gamma}$ в точке e_0, так что $[g_1\tilde{\gamma}] \in \pi_1(E, e_0)$. Путь $g_1\tilde{\gamma}$ накрывает путь γ, так как отображение p постоянно на орбитах группы G, следовательно, $p(g_1\tilde{\gamma}) = \gamma$ и $[\gamma] = p_*([g_1\tilde{\gamma}])$, т. е. $[\gamma] \in N$. ■

Накрытия, у которых подгруппа $N = p_*(\pi_1(E, e_0))$ является нормальным делителем, называют *регулярными.*

Для регулярных накрытий множество смежных классов группы $\pi_1(B, b_0)$ по подгруппе N является факторгруппой.

Прежде чем перейти к вычислению $\pi_1(F/G)$, введем важное понятие группы монодромии накрытия.

Пусть $p\colon E \to B$ — накрытие и $b_0 \in B$ — фиксированная точка в базе. Определим действие группы $\pi_1(B, b_0)$ в слое $p^{-1}(b_0) \sim F$. Пусть $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ и $e_\alpha \in p^{-1}(b_0)$ — произвольная точка слоя над b_0, занумерованная элементом $\alpha \in F$. Пусть $\tilde{\beta}$ — поднятие пути β в точку e_α; положим $e_{\alpha'} = \tilde{\beta}(1)$, где α' — элемент слоя, содержащий $\tilde{\beta}(1)$. Мы уже знаем, что $\tilde{\beta}(1)$ не зависит от выбора пути β из класса $[\beta]$, но зависит от класса $[\beta]$. Таким образом, класс $[\beta]$ определяет отображение $\sigma_\beta\colon p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0)$ по правилу $e_\alpha \mapsto e_{\alpha'}$ (или отображение $\sigma_\beta\colon F \to F$ по правилу $\alpha \mapsto \alpha'$). ■

Легко видеть, что отображение σ_β биективно накрывает пространство $p^{-1}(b_0)$.

Очевидны равенства: $\sigma_{\beta_1, \beta_2} = \sigma_{\beta_2}\sigma_{\beta_1}$, $\sigma_\beta = 1_F$, если $\beta \in e$ (единице $\pi_1(B, b_0)$), $\sigma_{\beta^{-1}} = \sigma_\beta^{-1}$, следующие из леммы 1 о поднятии путей.

Эти равенства означают, что соответствие $\sigma\colon [\beta] \mapsto \sigma_\beta$ является представлением группы $\pi_1(B, b_0)$ «гомеоморфизмами», т. е. «перестановками» дискретного пространства $p^{-1}(b_0)$ (или F). Это представление σ называется *монодромией накрытия,* а множество перестановок $\{\sigma_\beta\}$, $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ — *группой монодромии накрытия.*

Таким образом, монодромия σ — это гомоморфизм * группы $\pi_1(B, b_0)$ в группу всех перестановок слоя.

Из теоремы 3 следует, что точка $e_\alpha \in p^{-1}(b_0)$ является неподвижной для тех и только тех перестановок σ_β, для которых $[\beta] \in$ $\in p_*(\pi_1(E, e_\alpha))$. Как говорят, $p_*(\pi_1(e_\alpha))$ — стационарная подгруппа точки e_α в группе $\pi_1(B, b_0)$, действующей на слое $p^{-1}(b_0)$. Более того, $\sigma_\beta(e_\alpha) = \sigma_{\beta'}(e_\alpha)$ в том и только том случае, когда $[\beta']$ принадлежит $p_*(\pi_1(E, e_\alpha))[\beta]$ — смежному классу, содержащему элемент $[\beta]$ (откуда немедленно следует и теорема 4). Для различных точек e_α, $e_{\alpha'} \in p^{-1}(b_0)$ подгруппы $p_*(\pi_1(E, e_\alpha))$, $p_*(\pi_1(E, e_{\alpha'}))$ сопряжены

---

* Более строго было бы назвать монодромию «антигомоморфизмом»; если же изменить порядок записи умножения в $\pi_1(B, b_0)$ или в группе всех перестановок слоя, то монодромия станет «настоящим» гомоморфизмом.

относительно того элемента $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$, для которого $\sigma_\beta(e_\alpha) = e_{\alpha'}$; действительно, если $\tilde{\beta}$ — соответствующий накрывающий путь, то соответствие $\gamma \mapsto \gamma' = \tilde{\beta}^{-1} \cdot \gamma \cdot \tilde{\beta}$, где $[\gamma] \in \pi_1(E, e_\alpha)$, устанавливает изоморфизм между $\pi_1(E, e_\alpha)$ и $\pi_1(E, e_{\alpha'})$, переводящийся мономорфизмом p_* в изоморфизм $p_*(\pi_1(E, e_\alpha)) \to$ $\to [\beta]^{-1} p_*(\pi_1(E, e_\alpha))[\beta] = p_*(\pi_1(E, e_{\alpha'}))$.

Вычислим группу монодромии $\{\sigma_\beta\}$ для накрытия $p\colon E \to E/G = B$, порожденного вполне разрывной группой преобразований G.

Лемма 5. *Группа монодромии накрытия* $p\colon E \to E/G = B$, *порожденного вполне разрывной группой преобразований линейно связного пространства* E, *изоморфна* G.

Доказательство. Пусть $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0)$ — отмеченные точки. Имеем $p^{-1}(b_0) = O_{e_0}$, где O_{e_0} — орбита точки e_0 группы G, т. е. множество точек $\{g(e_0)\}$, $g \in G$. Пусть $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ и σ_β — соответствующее преобразование монодромии. Тогда найдется $g_\beta \in G$ такой, что $\sigma_\beta(e_0) = g_\beta(e_0)$, откуда $\sigma_\beta(g(e_0)) = g(\sigma_\beta(e_0))$ для $\forall g \in G$. Соответствие $\sigma_\beta \to g_\beta$ задает гомоморфизм группы монодромии в группу G. Действительно, если $\sigma_{\beta_2} \cdot \sigma_{\beta_1}$ — суперпозиция σ_{β_1} и σ_{β_2}, то $(\sigma_{\beta_2} \cdot \sigma_{\beta_1}) e_0 = \sigma_{\beta_2}(g_{\beta_1} e_0) = g_{\beta_1}(g_{\beta_2} e_0) = (g_{\beta_1} g_{\beta_2}) e_0$, следовательно, $\sigma_{\beta_2} \cdot \sigma_{\beta_1} \mapsto g_{\beta_1} \cdot g_{\beta_2}$.

Далее, перестановка $\sigma_\beta^{-1} = \sigma_{\beta^{-1}}$ соответствует g_β^{-1}, а тождественная перестановка $\sigma_\beta = 1_{O_{e_0}}$ ($[\beta] = e$) соответствует $g_\beta = e_G$ — единице группы G. Покажем, что гомоморфизм $\sigma_\beta \mapsto g_\beta$ есть мономорфизм группы монодромии в группу G. Действительно, если $g_\beta = e_G$, то $\sigma_\beta(ge_0) = ge_Ge_0 = ge_0$ для всякого $g \in G$ и, следовательно, σ_β — тождественное отображение слоя O_{e_0}.

Эпиморфность гомоморфизма $\sigma_\beta \mapsto g_\beta$ следует из линейной связности E, позволяющей соединить некоторым путем α точку e_0 с точкой $g_* e_0$, где $g_* \in G$ произвольно, так что α является поднятием петли $\beta_* = p\alpha$ и $\sigma_{\beta_*} e_0 = \alpha(1) = g_*(e_0)$, следовательно, $\sigma_{\beta_*} \mapsto g_*$. Таким образом, установлен изоморфизм группы монодромии с группой G.■

Теперь нетрудно доказать основную теорему.

Теорема 5. *Для накрытия* $p\colon E \to E/G = B$, *порожденного вполне разрывной группой преобразований* G *линейно связного пространства* E, *факторгруппа группы* $\pi_1(B, b_0)$ *по нормальному делителю* $p_*(\pi_1(E, e_0))$, $p(e_0) = b_0$, *изоморфна группе* G.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $s\colon \pi_1(B, b_0) \to G$, задаваемый композицией гомоморфизма группы $\pi_1(B, b_0)$ в группу монодромии накрытия и изоморфизма группы монодромии в группу G, т. е. гомоморфизм, задаваемый соответствием $[\beta] \mapsto \sigma_\beta \mapsto g_\beta$. Прообраз $s^{-1}(e_G)$ состоит из тех классов $[\beta]$, для которых $g_\beta = e_G$, т. е. σ_β — тождественное преобразование слоя $p^{-1}(b_0)$. Следовательно, $s^{-1}(e_G) = p_*(\pi_1(E, e_0))$, и факторгомоморфизм $\hat{s}$: $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0)) \to G$ — изоморфизм.■

Следствие. *Если накрытие* p: $E \to E/G = B$ *универсально, то группа* $\pi_1(B)$ *изоморфна группе* G.

Вернемся к примерам 6, 7, 8, 9.

Универсальное накрытие p: $\mathbb{R}^1 \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, порождено вполне разрывной группой преобразований трансляций $t \mapsto t + n$, $n \in \mathbb{Z}$, оси $\mathbb{R}^1$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (изоморфизм). Группа монодромии также $\mathbb{Z}$ и действует на слое $F \sim \mathbb{Z}$ трансляциями $m \mapsto m + n$.

Универсальное накрытие p: $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geqslant 2$, порождено вполне разрывной группой преобразований $\mathbb{Z}_2$ с образующей a: $S^n \to S^n$, действующей по правилу $a(x) = -x$, следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$. Группа монодромии есть $\mathbb{Z}_2$ и действует на слое $F = p^{-1}(b_0) = \{x_0, -x_0\}$, $x_0 \in S^n$; для образующей σ имеем $\sigma(x_0) = -x_0$, $\sigma(-x_0) = x_0$, т. е. σ переставляет точки слоя. Соответствующий элементу σ образующий элемент группы $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, b_0)$ образован гомотопическим классом пути $p\gamma$, где γ — путь на S^n, соединяющий точки x_0, $-x_0$.

Универсальное накрытие p: $S^{2n+1} \to L(k; k_1, \ldots, k_n)$ порождено вполне разрывным действием группы $\mathbb{Z}_k$ с образующей a: $S^{2n+1} \to S^{2n+1}$. Следовательно, $\pi_1(L) \simeq \mathbb{Z}_k$, группа монодромии также $\mathbb{Z}_k$ и действует на слое; ее образующая соответствует образующей $[\gamma] \in \pi_1(L)$, где γ — проекция пути в S^{2n+1}, соединяющего точку x_0 с точкой $a(x_0)$ (найдите a, $a(x_0)$, основываясь на п. 3 § 5 гл. II).

Универсальное накрытие p: $\mathbb{R}^n \to T^n$ порождено вполне разрывным действием группы $\mathbb{Z}^n$ с образующими a_i, действующими по правилу

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $\pi_i(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, а образующие $[\gamma_i]$, $i = 1, \ldots, n$, группы $\pi_1(T^n)$ содержат петли γ_i, полученные проекцией p из путей в $\mathbb{R}^n$, соединяющих точку 0 с точками $a_i(0)$. Группа монодромии действует на слой $F \sim \mathbb{Z}^n$, ее образующие σ_{a_i}, $i = 1, \dots, n$, действуют на целочисленные векторы из $\mathbb{Z}^n$ по правилу

$$(k_1, \dots, k_n) \mapsto (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_n).$$

Для изучения универсальных накрытий на базу накрытия необходимо наложить более сильные условия, чем линейная связность. Введем следующие определения.

Определение 11. Топологическое пространство X называется *локально линейно связным*, если для каждой точки $x \in X$ существует база открытых линейно связных окрестностей. Если окрестности базы дополнительно обладают свойством односвязности, то пространство называется *локально односвязным.*

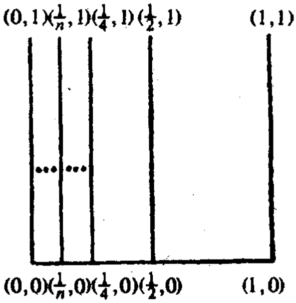


Рис. 107

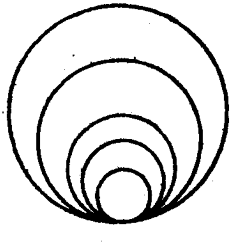


Рис. 108

Нетрудно привести примеры локально линейно связных и локально односвязных пространств (например, евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ или многообразия). Локально односвязное пространство не обязано быть односвязным — например окружность S^1. На рис. 107 изображено пространство («гребенка»), которое линейно связно, но не обладает свойствами локальной линейной связности (а следовательно, и локальной односвязности). Рис. 108, изображающий бесконечную последовательность окружностей радиусов $1/n$, $n = 1, 2, \dots$, имеющих общую точку касания, иллюстрирует линейно связное и локально линейно связное, но не локально односвязное пространство.

Однако для дальнейших построений достаточно предполагать выполнение более слабого условия, чем локальная односвязность пространства. Это условие содержится в следующем определении.

Определение 12. Топологическое пространство X называется *полулокально односвязным,* если для всякой точки $x \in X$ существует окрестность, в которой любые два пути с общими концами гомотопны по крайней мере во всем пространстве (или, эквивалентным образом, в которой любая петля стягиваема по крайней мере во всем пространстве).

Нетрудно видеть, что если пространство X локально линейно связно и полулокально односвязно, то в каждой точке $x \in X$ существует база открытых линейно связных окрестностей, обладающих тем свойством, что любые два пути с общими концами в окрестности из этой базы гомотопны во всем пространстве X.

Примером полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства может служить конус над пространством, изображенным на рис. 108.

Заметим еще, что связное и локально линейно связное пространство является линейно связным.

Термин «универсальное накрытие» связан с тем, что односвязное пространство, накрывающее B, является накрывающим пространством над любым другим пространством, накрывающим B. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $(\tilde{E}, B, \tilde{F}, \tilde{p})$ — *универсальное накрытие над связным, локально линейно связным пространством* B. *Для любого накрытия* (E, B, F, p) *над* B *существует сюръективное отображение* $f\colon \tilde{E} \to E$ *такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \tilde{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{4}$$

коммутативна. При этом отображение f *является проекцией накрытия* $(\tilde{E}, E, F', f)$, *слой* F' *которого — дискретное пространство, находящееся в биективном соответствии с группой* $\pi_1(E)$.

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

1. Отображение f строится следующим образом. Пусть $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0) \subset E$, $\tilde{e}_0 \in \tilde{p}^{-1}(b_0) \subset \tilde{E}$. Построим отображение f как поднятие отображения $\tilde{p}\colon \tilde{E} \to B$, удовлетворяющее условию $f(\tilde{e}_0) = e_0$. Для произвольной точки $x \in \tilde{E}$ рассмотрим путь $\gamma\colon I \to \tilde{E}$ с началом в $\tilde{e}$ и концом в x. Согласно лемме 1 существует единственное поднятие $\xi_\gamma\colon I \to E$ пути $\tilde{p}\gamma\colon I \to B$, $\xi_\gamma(0)6 = e_0$. Положим $f(x) = \xi_\gamma(1)$. Поскольку пространство $\tilde{E}$ односвязно, отображение f определено корректно. Действительно, любые два пути, γ, ω, в $\tilde{E}$ из x в y гомотопны (с фиксированными концами), следовательно, гомотопны их проекции $\tilde{p}\gamma$, $\tilde{p}\omega$ в B и поднятия последних ξ_γ, ξ_ω (с общим началом) в E. Согласно лемме 2 ξ_γ и ξ_ω имеют общий конец. Коммутативность диаграммы (4) очевидна.

Отображение f является непрерывным и, более того, локальным гомеоморфизмом. Это легко увидеть для достаточно малых окрестностей точек $\tilde{e}_0$ и e_0, именно, листов $\tilde{W}_\alpha$, W_β, лежащих в $\tilde{E}$, E над линейно связной координатной окрестностью V. Действительно, для путей γ, лежащих в окрестности $\tilde{W}_\alpha$, получим $\xi_\gamma = (p_\beta^{-1}\tilde{p}_\alpha)\gamma$, следовательно, отображение $f\big|_{\widetilde{W}_\alpha} = p_\beta^{-1}\widetilde{p}_\alpha$ — локальный гомеоморфизм. Чтобы убедиться в этом факте для любой пары точек $x \in \widetilde{E}$, $y \in E$, где $f(x) = y$, достаточно заметить, что x, y можно принять за новые отмеченные точки $\widetilde{e}_0$, e_0, и отображение f при этом не изменится (проверку этого предоставим читателю).

2. Покажем сюръективность f. Пусть y — произвольная точка из E, рассмотрим путь $\gamma\colon I \to E$ с началом в e_0 и концом в y. Для пути $p\gamma\colon I \to B$ существует единственное поднятие $\eta_\gamma\colon I \to \widetilde{E}$ с началом в $\widetilde{e}_0$ и концом в некоторой точке $x = \eta_\gamma(1)$. Тогда пути $f\eta_\gamma$ и γ имеют общее начало и накрывают один и тот же путь $p\gamma$ в B. Поэтому $f\eta_\gamma(1) = \gamma(1)$, т. е. $f(x) = y$, что и означает сюръективность f.

3. Покажем, что $f\colon \widetilde{E} \to E$ — проекция накрытия. Для произвольной точки $e \in E$ рассмотрим пересечение $\Omega = U \cap V$ содержащих точку $p(e)$ координатных окрестностей U и V для накрытий $(\widetilde{E}, B, \widetilde{F}, \widetilde{p})$ и (E, B, F, p) соответственно. Окрестность Ω является координатной для обоих рассматриваемых накрытий; без ограничения общности ее можно считать линейно связной. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{p}^{-1}(\Omega) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{p}"'] & & p^{-1}(\Omega) \arrow[dl, "p"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

В ней сужение отображения f на любой лист $\widetilde{W}_\alpha$ из $\widetilde{p}^{-1}(\Omega)$ есть гомеоморфизм

$$f\big|_{\widetilde{W}_\alpha}\colon \widetilde{W}_\alpha \to W_\beta, \quad f_{\widetilde{W}_\alpha} = p_\beta^{-1}\widetilde{p}_\alpha,$$

где $W_\beta = f(\widetilde{W}_\alpha)$ — лист из $p^{-1}(\Omega)$.

Возьмем лист W_β, содержащий некоторую точку e. Множество тех листов $\widetilde{W}_\alpha$, из которых состоит прообраз $f^{-1}(W_\beta)$, обозначим F'_β; $\widetilde{W}_\alpha \in \widetilde{F}_\beta$ — это компоненты связности прообраза $f^{-1}(W_\beta)$. Наделим множество F'_β дискретной топологией. Определим отображение

$$\psi_{W_\beta}\colon f^{-1}(W_\beta) \to W_\beta \times F'_\beta$$

формулой

$$\psi_{W_\beta}(x) = (f(x), c(x)),$$

где $c(x)$ — содержащая точку $f(x)$ компонента связности, играющая роль «номера листа». Очевидно, ψ_{W_β} — локальный гомеоморфизм и биекция, а следовательно, — гомеоморфизм.

Тем самым для произвольной точки $e \in E$ построены координатная окрестность W_β и координатный гомеоморфизм ψ_{W_β} (коммутативность соответствующей диаграммы очевидна). В силу замечания об определении накрытия слой F'_β с точностью до биекции не зависит от выбора точки e и координатной окрестности $W_\beta \subset E$.

4. Итак, $f\colon \tilde{E} \to E$ — накрытие. Поскольку оно универсально $(\pi_1(\tilde{E}) = 0)$, его слой F' находится в биективном соответствии с группой $\pi_1(E)$.■

Следствие. *Два любых универсальных накрытия,* (E_1, B, F_1, p_1) *и* (E_2, B, F_2, p_2), *над связным, локально линейно связным пространством B эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм* $f\colon E_1 \to E_2$ *такой, что диагоамма*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Локальный гомеоморфизм, устанавливаемый теоремой 6, является биекцией в силу теоремы 4.■

Переходим к теореме существования универсального накрытия.

Теорема 7. *Пусть X — связное, локально линейно связное, полулокально односвязное пространство. Тогда существует универсальное накрытие над X.*

Доказательство. Заметим вначале, что если в базе накрытия гомотопируется с фиксированными концами некоторый путь, то накрывающий путь также гомотопируется с фиксированными концами. Следовательно, точкам e односвязного накрывающего пространства биективно соответствуют гомотопические классы путей в базе с началами в отмеченной точке x_0 и с концами в проекциях $p(e)$ точек e. Это свойство позволяет «обратить конструкцию» и восстанавливать односвязное накрывающее пространство по гомотопическим классам путей базы.

Итак, пусть x_0 — фиксированная точка в X. Рассмотрим некоторый гомотопический класс $[\gamma_x]$ путей γ_x в X с началом в точке x_0 и с концом в некоторой точке $x \in X$. Множество $\Gamma(x)$ всех таких классов при фиксированном x будет служить слоем над точкой x, а объединение $E = \bigcup\limits_{x \in X} \Gamma(x)$ всех слоев — пространством накрытия. Проекция $p\colon E \to X$ определяется естественным образом: классу $[\gamma_x]$ проекция p сопоставляет точку x. Очевидно, что $p^{-1}(x) = \Gamma(x)$.

В первую очередь построим топологию E. Для каждой точки $[\gamma_x]\in E$ зададим базу открытых окрестностей $\{\Omega_U([\gamma_x])\}$ следующим образом. Пусть U — произвольная открытая линейно связная окрестность точки x. В качестве окрестности точки $[\gamma_x]$ возьмем $\Omega_U([\gamma_x])$ — множество гомотопических классов $[\gamma_y]$ тех путей γ_y из x_0 в $y\in U$, которые являются произведениями $\gamma_y=\gamma_x\cdot\beta_y$ некоторого пути из класса $[\gamma_x]$ на путь β_y из x в y, лежащий в U; $[\gamma_y]$ зависит лишь от $[\gamma_x]$ и гомотопического класса $[\beta_y]$ пути β_y. Окрестность $\Omega_U([\gamma_x])$ является «открытой», т. е. окрестностью каждой своей точки: $\Omega_U([\gamma_y])=\Omega_U([\gamma_x])$, если $[\gamma_y]\in\Omega_U([\gamma_x])$. Действительно, $\gamma_y=\gamma_x\cdot\beta_y$, $\gamma_y\cdot\beta_y^{-1}\sim\gamma_x\cdot(\beta_y\cdot\beta_y^{-1})$, и так как $\beta_y\cdot\beta_y^{-1}$ — петля в точке x, гомотопная постоянному пути, то $\gamma_x\sim\gamma_y\cdot\beta_y^{-1}$ (гомотопия с фиксированными концами). Поскольку $\beta_y^{-1}=\beta_x$ — путь в U из y в x, получаем $\gamma_x\sim\gamma_y\cdot\beta_x$. Если теперь $[\gamma_z]\in\Omega_U([\gamma_x])$, то $\gamma_z=\gamma_x\cdot\beta_z\sim\gamma_y\cdot(\beta_x\cdot\beta_z)$; если же $[\gamma_z]\in\Omega_U([\gamma_y])$, то $\gamma_z=\gamma_y\cdot\beta'_z\sim\gamma_x\cdot(\beta_y\cdot\beta'_z)$; отсюда делаем вывод о совпадении окрестностей $\Omega_U([\gamma_x])$, $\Omega_U([\gamma_y])$. Проведенные рассуждения иллюстрирует рис. 109.

Заметим, что в силу полулокальной односвязности пространства X существует такая линейно связная открытая окрестность V точки x, для которой гомотопический класс произведения $\gamma_y=\gamma_x\cdot\beta_y$ не зависит от выбора пути β из x в y. Окрестность V будет служить координатной окрестностью конструируемого накрытия. Окрестности Ω_V также образуют базу окрестностей точки γ_x.

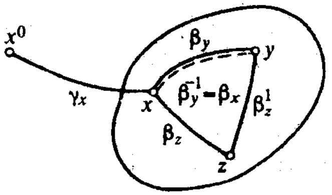


Рис. 109

Теперь проверим непрерывность отображения p. Для этого достаточно убедиться, что $p^{-1}(U)$ открыто для всякой линейно связной открытой окрестности U точки x. Пусть $[\gamma_y]\in p^{-1}(U)$. Тогда $[\gamma_y]$ содержится в $p^{-1}(U)$ вместе с некоторой своей окрестностью, именно, окрестностью $\Omega_U([\gamma_y])$, т. е. $p^{-1}(U)$ открыто.

Далее покажем, что p — локальный гомеоморфизм. Для этого выберем «координатную окрестность» V точки $x\in X$ и окрестность $\Omega_V([\gamma_x])$ некоторой фиксированной точки $[\gamma_x]$ слоя $\Gamma(x)$. Если $[\gamma_y]$ — произвольная точка из этой окрестности, то $\gamma_y=\gamma_x\cdot\beta_y$, причем всевозможные пути β_y (из x в y в V) в силу полулокальной односвязности попадают в единственный гомотопический класс $[\beta_y]$. Следовательно, соответствие $[\gamma_y]\mapsto y$, задающее отображение p: $\Omega_V([\gamma_x])\to V$, биективно. Более того, отображение $p\big|_{\Omega_V}$:

$\Omega_V([\gamma_x]) \to V$ — гомеоморфизм, так как оно непрерывно (как сужение непрерывного отображения $p\colon E \to X$ на открытое множество) и открыто (так как $p(\Omega_W([\gamma_y]) = W$ для любой «координатной окрестности» $W \subset V$ точки y и $[\gamma_y] \in \Omega_V([\gamma_x]))$ (рис. 110).

Таким образом, p — локальный гомеоморфизм между E и X, при этом для «координатной окрестности» точки $x \in X$ имеем $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma(x)} W_\alpha$, где при $\alpha = [\gamma_x]$ $W_\alpha = \Omega_V([\gamma_x])$ и $p_\alpha = p\big|_{W_\alpha} \colon W_\alpha \to V$ — гомеоморфизмы; каждое W_α открыто в E и линейно связно. Более того, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ $W_{\alpha_1} \cap W_{\alpha_2} = \varnothing$. Действительно, в предположении противного найдутся негомотопные пути γ_x^1, γ_x^2 и путь γ_z, $z \in V$, такие, что $[\gamma_z]$ лежит в пересечении окрестностей $\Omega_V([\gamma_x^1])$, $\Omega_V([\gamma_x^2])$. По предыдущему $\gamma_z \sim \gamma_x^1 \cdot \beta_z$, $\gamma_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z'$ (гомотопии с фиксированными концами). Так как $\beta_z' \sim \beta_z$ в силу полулокальной односвязности X, то $\gamma_z \sim \gamma_x^1 \cdot \beta_z$, $\gamma_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z$, т. е. $\gamma_x^1 \cdot \beta_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z$; умножив обе части последнего соотношения на β_z^{-1} и учитывая, что петля $\beta_z \cdot \beta_z^{-1}$ гомотопна постоянной, получим $\gamma_x^1 \sim \gamma_x^2$, в противоречии с исходным предположением.

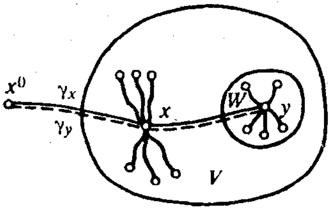


Рис. 110

Таким образом, $p^{-1}(V)$ распадается в объединение непересекающихся листов W_α, открытых, линейно связных в E (и гомеоморфных V), где α пробегает слой $\Gamma(x)$.

Теперь естественно определить координатный гомеоморфизм $\varphi_V\colon p^{-1}(V) \to V \times \Gamma(x)$, приняв за «координаты» точки $[\gamma_y] \in p^{-1}(V)$ «номер» листа W_α, которому она принадлежит, и точку $y \in V$ — проекцию точки $[\gamma_y]$ при гомеоморфизме $p_\alpha = p\big|_{W_\alpha} \colon W_\alpha \to V$; таким образом, положим $\varphi_V([\gamma_y]) = (y, [\gamma_x])$, если $[\gamma_y] \in \Omega_V([\gamma_x])$. Из вышеизложенного очевидно, что определение отображения φ_V корректно. Остается показать, что φ_V — гомеоморфизм открытого множества $p^{-1}(V)$ в E и топологического произведения $V \times \Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ рассматривается с дискретной топологией.

Биективность φ_V следует очевидным образом из вышеприведенных построений. Непрерывность φ_V следует из непрерывности двух отображений, $p\colon p^{-1}(V) \to V$, $p([\gamma_y]) = y$, и $q_V\colon p^{-1}(V) \to \Gamma(x)$, $q_V([\gamma_y]) = [\gamma_x]$, участвующих в определении φ_V. Непрерывность p установлена ранее, а непрерывность q_V следует из того, что q_V локально постоянно (на каждом листе $W_\alpha = \Omega_V([\gamma_x]))$. Непрерывность φ_V^{-1} является следствием дискретности топологии слоя $\Gamma(x)$ и того, что p_α: $W_\alpha \to V$ — гомеоморфизм. Действительно, базу открытых окрестностей точки $\{y \times \alpha\} \in V \times \Gamma(x)$ образуют множества $S(y) \times \alpha$, где $S(y) \subset V$ — линейно связная открытая окрестность точки y, и прообраз $\varphi_V^{-1}(S(y) \times \alpha)$ равен $p_\alpha^{-1}(S(y))$ — открытому подмножеству в W_α.

Таким образом, φ_V — гомеоморфизм. Коммутативность диаграммы, требуемой в определении координатного гомеоморфизма, очевидна.

Убедимся в линейной связности пространства E. Для этого достаточно показать, что произвольную точку $[\gamma_x]$ из E можно соединить путем в E с точкой $[C_{x_0}]$ — гомотопическим классом постоянного пути (в точке x_0). Пусть γ_x: $I \to X$ — представитель класса $[\gamma_x]$. Определим путь ζ^s: $I \to X$ при фиксированном s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, формулой $\zeta^s(t) = \gamma_x(st)$. Сопоставляя числу s гомотопический класс $[\zeta^s]$ пути ζ^s, получаем отображение ω: $I \to E$, удовлетворяющее условиям $\omega(0) = [C_{x_0}]$, $\omega(1) = [\gamma_x]$. Непрерывность отображения ω легко устанавливается на достаточно малых промежутках в $[0, 1]$, образы которых попадают в координатные окрестности $\Omega_V([\gamma_z])$, где $z = \gamma_x(s)$. Следовательно, ω — путь в E с началом в $[C_{x_0}]$ и концом в $[\gamma_x]$, откуда следует линейная связность E.

Итак, $(E, X, \Gamma(x), p)$ — накрытие. Чтобы завершить доказательство теоремы, установим односвязность пространства E. Рассмотрим петлю φ пространства E в точке e_0, где e_0 — гомотопический класс постоянного отображения C_{x_0}. Покажем, что петля $\gamma = p\varphi$: $I \to X$ (в точке x_0) гомотопна постоянной. Заметим, что в силу конструкции пространства E для произвольного пути ξ: $I \to X$ с началом в x_0 и его единственного накрывающего пути η: $I \to E$ с началом в e_0 конец $\eta(1)$ пути η — это гомотопический класс пути ξ (в классе путей с фиксированными концами). Поскольку φ является единственным путем с началом в e_0, накрывающим путь γ, получаем $\varphi(1) = [\gamma] = [C_{x_0}] = e_0$, т. е. пути γ и C_{x_0} гомотопны с фиксированными концами, что и означает стягиваемость петли $\gamma = p\varphi$. В силу того, что проекция p индуцирует мономорфизм фундаментальных групп, петля φ также гомотопна постоянной.

Следовательно, $\pi_1(E, e_0) = 0$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Отметим, что условие (3) $(n = 1)$

$$f_1(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

необходимое для поднятия отображения $f\colon X \to B$, является достаточным для связного, локально линейно связного пространства X. Конструкция поднятия в этом случае основана на поднятии путей вида $f\alpha$, где α — путь в X с началом в x_0 и концом в произвольной точке x. Корректность этой конструкции проверяется с помощью свойства накрывающей гомотопии.

Связь между гомотопическими группами π_n, $n \geqslant 2$, пространства и базы накрытия очень проста.

Теорема 8. *Пусть* $p\colon E \to B$ *— накрытие. Тогда при* $n \geqslant 2$ *гомоморфизм гомотопических групп*

$$p_n\colon \pi_n(E) \to \pi_n(B),$$

индуцированный проекцией накрытия, является изоморфизмом.

Доказательство теоремы 8 мы разобьем на 3 несложных утверждения, предложив их в качестве упражнений читателю.

Упражнения. 11°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, X — односвязное, локально односвязное пространство (с отмеченными точками e_0, b_0, x_0 соответственно, $p(e_0) = b_0$), $f\colon X \to B$ — отображение такое, что $f(x_0) = b_0$, то существует единственное отображение $F\colon X \to E$ такое, что $F(x_0) = e_0$ и $pF = f$.

Указание. Для построения отображения $F(x)$ рассмотрите путь α в X, соединяющий x_0 с x; затем постройте путь в E, накрывающий путь $f\alpha$ в B, положите $F(x) = f\alpha(1)$. Для доказательства единственности F используйте односвязность X, для доказательства непрерывности F — локальную односвязность X.

12°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, то p_n: $\pi_n(E) \to \pi_n(B)$ при $n \geqslant 2$ — эпиморфизм.

Указание. Покажите, что в силу результата упражнения 11° всякий сфероид $\varphi\colon (S^n, s_0) \to (B, b_0)$ можно накрыть сфероидом $\Phi\colon (S^n, s_0) \to (E, e_0)$.

13°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, то p_n: $\pi_n(E) \to \pi_n(B)$ при $n \geqslant 2$ — мономорфизм.

Указание. Покажите что в силу результата упражнения 11° всякую гомотопию $\psi\colon (S^n \times I, s_0 \times I) \to (B, b_0)$ сфероидов в B можно накрыть гомотопией $\Psi\colon (S^n \times I, s_0 \times I) \to (E, e_0)$ сфероидов в E.

Из теоремы 8 и приведенного в § 4 гл. III результата $\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0$, $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ $(n \geqslant 2)$ получаем

Следствие. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Тогда* $\pi_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ *при* $1 < k < n$ *и* $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Как уже было показано выше, $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 2$.

5. Разветвленные накрытия. В заключение этого параграфа остановимся на понятии разветвленного накрытия. Примером разветвленного накрытия (как показывает пример § 4 гл. I римановой поверхности функции $w=\sqrt{z}$) может служить отображение z-сферы S^2 в себя, задаваемое формулой $f(z)=z^2$. Очевидно, четверка

$$(S^2\backslash\{0, \infty), S^2\backslash\{0, \infty\}, \mathbb{Z}_2, f)$$

(где $\mathbb{Z}_2$ — двухточечное пространство с дискретной топологией) является накрытием.

Определение 13. Четверка $(\widetilde{M}, M, \mathbb{Z}_n, p)$, где $p\colon \widetilde{M}\to M$, называется *разветвленным накрытием*, если: 1) $\widetilde{M}$ и M — двумерные многообразия; $\mathbb{Z}_n$ — пространство с дискретной топологией, состоящее из n точек; 2) для некоторого конечного множества $T\subset\widetilde{M}$ четверка $(\widetilde{M}\backslash T, M\backslash p(T), \mathbb{Z}_n, p)$ является n-листным накрытием; 3) для всякой точки $y\in M$ и ее достаточно малой окрестности $V(y)$, гомеоморфной диску, компоненты связности множества $p^{-1}(V(y))$ гомеоморфны диску.

Точки $x\in T$ будем называть особыми точками разветвленного накрытия.

Упражнение 14°. Покажите, что риманова поверхность P, определяемая алгебраической функцией

$$w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(z)w+a_n(z)=0,$$

где $a_i(z)$, $i=1, \ldots, n$, — многочлены (см. § 4 гл. I), является разветвленным накрытием $(P, S^2, \mathbb{Z}_n, p)$. Укажите особые точки этого накрытия. При $n=2$ сравните с результатами § 4 гл. I.

Рассмотрим гомеоморфную диску открытую окрестность $V(p(x^i))$ образа особой точки x^i такую, что для всех других особых точек x^j из условия $p(x^j)\in V(p(x^i))$ следует $p(x^i)=p(x^j)$. Прообраз границы $\partial V(p(x^i))$ этой окрестности распадается на несколько замкнутых кривых — окружностей, ограничивающих связные компоненты множества $p^{-1}(V(p(x^i)))$, гомеоморфные открытым дискам. Пусть $U(x^i)$ — связная компонента $p^{-1}(V(p(x^i)))$, содержащая точку x^i. Степень отображения (см. § 4 гл. III)

$$p\Big|_{\partial U(x^i)}\colon \partial U(x^i)\to\partial V(p(x^i))$$

называется кратностью ветвления в точке x^i; мы будем обозначать ее k_i. Кратность ветвления, очевидно, может быть определена и для точек, не являющихся особыми. Если $p\Big|_{U(x^i)}\colon U(x^i)\to V(p(x^i))$ — гомеоморфизм, то, очевидно, $\deg p\Big|_{\partial U(x^i)}=\pm 1$. В общем случае имеется произвол в выборе образующих в $\pi_1(\partial U(x^i))$ и $\pi_1(\partial V(p(x^i)))$ и, следовательно, в знаке k_i. Однако в ряде случаев знак k_i определяется естественным образом. Так, для разветвленного накрытия $(S^2, S^2, \mathbb{Z}_2, z^2)$ кратности точек 0 и ∞ равны 2, а кратность любой другой точки равна 1. Для разветвленного накрытия $(S^2, S^2, \mathbb{Z}_2, \bar{z}^2)$ кратности точек 0 и ∞ равны -2, а кратность любой другой точки равна -1.

Упражнение 15°. Подсчитайте кратность ветвления особых точек разветвленных накрытий из упражнения 14°.

Установим следующую важную формулу:

$$\chi(\widetilde{M})=n\cdot\chi(M)-\sum_i(|k_i|-1), \tag{5}$$

связывающую кратности ветвления особых точек с эйлеровыми характеристиками пространства и базы.

Будем считать пространства $\widetilde{M}$ и M компактными и триангулируемыми, т. е. замкнутыми поверхностями. Для каждой особой точки $x_i\in T$ выберем окрестность $V(p(x_i))$, как это было сделано выше. Рассмотрим теперь четверку

$$\left(\widetilde{M}\setminus\bigcup U(x^i), M\setminus\bigcup V(p(x^i)), \mathbb{Z}_n, p\right),$$

где x^i пробегает все множество T. Очевидно это n-листное накрытие (не разветвленное), пространство и базу которого можно считать триангулируемыми. Эти триангуляции можно выбрать достаточно мелкими и согласованными, так что полные прообразы вершины, ребра и треугольника из базы являются набором из n вершин, ребер и треугольников соответственно. Поэтому выполняется равенство

$$\chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) = n\cdot\chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right). \tag{6}$$

Пусть полный прообраз $p^{-1}(p(x^j))$ состоит из m точек $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_m}$. Тогда полный прообраз $p^{-1}(V(p(x^j)))$ состоит из m дисков $U(x^{j_s})$. Поскольку граница $\partial U(x^{j_s})$ отображается на $\partial V(p(x^j))$ локально гомеоморфно со степенью k_{j_s}, $s=1, \dots, m$, для каждой точки $y \in \partial V(p(x^j))$ множество $p^{-1}(y) \bigcap \partial U(x^{j_s})$ состоит в точности из $|k_{j_s}|$ точек. Следовательно, для каждой особой точки x^j и точек $x^{j_s} \in (p(x^j))$ имеем

$$\sum_{s=1}^{m} |k_{j_s}| = n, \tag{7}$$

а число m компонент связности множества $p^{-1}(V(p(x^j)))$ удовлетворяет соотношению

$$n - \sum_{s=1}^{m} (|k_{j_s}| - 1) = m. \tag{8}$$

Заклеим пространство $\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)$ дисками $\overline{U}(x^{j_s})$, лежащими над диском $V(p(x^j))$. Обозначим полученное пространство через $\widetilde{M}'$. Поскольку эйлерова характеристика диска равна 1 и эйлерова характеристика его границы равна 0, получаем

$$\chi(\widetilde{M}') = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) = \sum_{s=1}^{m} \chi\left(\overline{U}(x^{j_s})\right) -$$

$$- \sum_{s=1}^{m} \chi\left(\overline{U}(x^{j_s}) \bigcap (\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i))\right) = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + m =$$

$$= \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + n - \sum_{s=1}^{m} (|k_{j_s}| - 1). \tag{9}$$

Последовательно приклеим новые диски, расположенные над остальными точками $p(x^i) \in M$ — проекциями особых точек $x^i \in T \subset \widetilde{M}$; тогда

$$\chi(\widetilde{M}) = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + l\cdot n - \sum_i (|k_i| - 1), \tag{10}$$

где l — число различных образов $p(x^i)$ особых точек x^i. Напомним, что $\chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right)$ и $\chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right)$ связаны равенством (6). Заметим теперь, что

$$\chi(M) = \chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right) + l, \tag{11}$$

поскольку M можно получить из $M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))$ приклеиванием l дисков. Таким образом, из (6), (10) и (11) получаем

$$\chi(\widetilde{M}) = n\cdot\chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right) + n\cdot l - \sum_i (|k_i| - 1) = n\cdot\chi(M) - \sum_i (|k_i| - 1). \ \blacksquare$$

Вспоминая выражение эйлеровой характеристики через род замкнутой поверхности, из формулы (5) легко выразить сумму кратностей особых точек на $\widetilde{M}$ через род M и род $\tilde{M}$. Например, в случае ориентируемых M и $\tilde{M}$ рода p, $\tilde{p}$ соответственно имеем

$$\sum_i (|k_i|-1)=2(\tilde{p}+n(1-p)-1).$$

Эта формула является комбинаторным аналогом известной в теории римановых поверхностей формулы Римана–Гурвица.

Упражнение 16°. Сравните последнюю формулу с формулой числа точек ветвления одной алгебраической функции, установленной в конце § 4 гл. I.

§ 10. Гладкая функция на многообразии и клеточная структура многообразия (пример)

1. Пример функции на торе. Многообразие —это топологическое пространство, локально устроенное как евклидово пространство. Однако в целом многообразие может быть устроено весьма сложно. Изучение свойств многообразий в целом представляет значительные трудности. Как различать недиффеоморфные, негомеоморфные или гомотопически неэквивалентные многообразия? Например, гомеоморфны ли комплексное проективное пространство и сфера одной размерности? Наиболее грубой из перечисленных эквивалентностей является гомотопическая эквивалентность. Поэтому в первую очередь следует изучать гомотопический тип многообразия. Исключительно полезным орудием для исследования гомотопического типа многообразия и решения многих других задач топологии многообразий является теория критических точек гладких функций на многообразиях. Проиллюстрируем этот метод на простейшем примере.

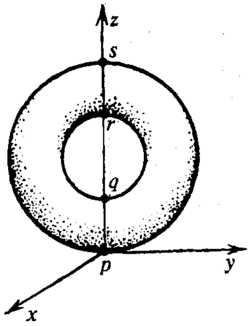


Рис. 111

Рассмотрим двумерный тор $M\subset\mathbb{R}^3$, касающийся плоскости xy (рис. 111). Рассмотрим функцию f на торе, значение которой в точке тора с координатами (x, y, z) равно z — высоте точки над плоскостью xy.

Упражнение 1°. Убедитесь, что определенная таким образом функция f является гладкой функцией на торе.

Обозначим точку касания тора и плоскости через p, а точки тора, лежащие над ней на перпендикуляре к плоскости, — через q, r и s в порядке возрастания высоты.

При изучении функций на многообразии будут использоваться понятия *лебегова множества* $(\varphi\leqslant c)=\{x\in X\colon \varphi(x)\leqslant c\}$ функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ и *множества уровня* $(\varphi=c)=\{x\in X\colon \varphi(x)=c\}$ функции φ. Эти множества будут существенно использоваться при анализе функций на многообразии в § 12.

Очевидно, линия уровня $(f=c)$ функции $f=z$ является пересечением тора с плоскостью $z=c$. Множество точек тора, лежащих не выше плоскости $z = c$, является множеством $(f \leqslant c)$; обозначим его M^c. Множество M^c пусто при $c < 0$; при $c = 0$ M^c состоит из одной точки — является нульмерным многообразием; при $0 < c < f(q)$ M^c гомеоморфно плоскому замкнутому диску; при $f(q) < c < f(r)$ это множество гомеоморфно цилиндру; при $f(r) < c < f(s)$ множество M^c есть тор со срезанной шапочкой (которая гомеоморфна открытому плоскому диску); при $c \geqslant f(s)$ $M^c = M$. Все эти случаи изображены на рис. 112.

Упражнения. 2°. Опишите множества $M^{f(q)}$ и $M^{f(r)}$.

3°. Покажите, что при $0 < c < f(s)$ и $c \neq f(q)$, $f(r)$ множество M^c — двумерное многообразие с краем $(f = c)$.

Геометрическая интуиция подсказывает, что множества, изображенные на рис. 112, не только не гомеоморфны, но и гомотопически не эквивалентны. Изменение гомотопического типа множества M^c происходит, когда c проходит через значения функции f в выделенных нами точках p, q, r, s. Изучим это изменение подробнее.

Очевидно, что множество M^c при $0 \leqslant c < f(q)$ гомотопически эквивалентно нульмерному диску — точке (рис. 113), при $c = f(q)$ множество M^c гомотопически эквивалентно диску с приклеенной дужкой (рис. 114). Далее, при $f(q) \leqslant c < f(r)$ этот гомотопический тип сохраняется (рис. 115). При $c = f(r)$ множество M^c — цилиндр со склеенными в одной точке краями, следовательно, M^c гомотопически эквивалентно цилиндру с приклеенной дужкой или диску с двумя дужками (рис. 116). При $f(r) < c < f(s)$ множество M^c — тор со срезанной шапочкой; очевидно, что его гомотопический тип тот же, что и в предыдущем случае (рис. 117). Наконец, при $c \geqslant f(s)$ множество M^c — весь тор, получающийся из предыдущего типа приклеиванием срезанной шапочки, гомеоморфной плоскому диску.

Таким образом, используя гладкую функцию f, мы «сконструировали» тор из дисков различной размерности путем последовательной приклейки дисков и перехода к гомотопически эквивалентным фигурам.

В дальнейшем будет показано, что любое гладкое многообразие может быть получено таким образом.

2. Клеточный комплекс. Проанализируем операции приклейки дисков в разобранном примере. Опишем точнее, что значит «приклеить диск».

Пусть X — хаусдорфово пространство и пусть $\overline{D}^n$ — замкнутый диск радиуса 1 с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, а S^{n-1} — его граница. Пусть $g\colon S^{n-1} \to X$ — непрерывное отображение. Результатом приклеивания к X диска $\overline{D}^n$ по отображению g является факторпространство $XU_g\overline{D}^n = (X \cup \overline{D}^n)/R$ несвязного

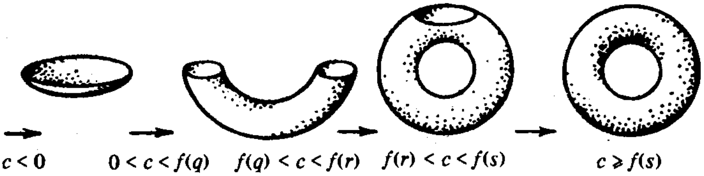


Рис. 112

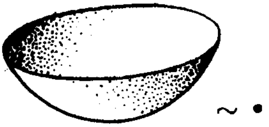


Рис. 113

Рис. 114

Рис. 115

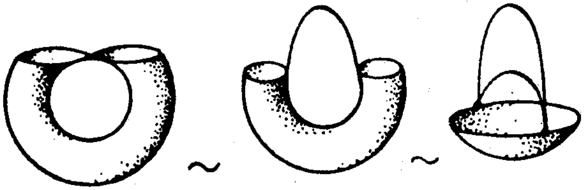


Рис. 116

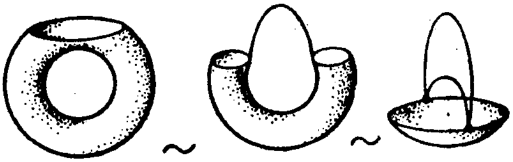


Рис. 117

(непересекающегося) объединения X и $\overline{D}^n$ по отношению эквивалентности R, при котором $u \sim g(u)$, $u \in S^{n-1}$.

Клеткой называют образ e^n множества $\operatorname{int} \overline{D}^n$ в $X \bigcup_{g} \overline{D}^n$ относительно отображения факторизации.

Таким образом, диск приклеивается к X по границе с помощью заданного непрерывного отображения g.

В случае $n = 0$ диск $\overline{D}^0$ — точка, его граница — пустое множество; результатом приклеивания $\overline{D}^0$ к X является несвязное объединение X и $\overline{D}^0 = e^0$ — пространство X с отдельно лежащей точкой. Другой пример — приклеивание лиска $\overline{D}^n$ к диску $\overline{D}^0$ — дает сферу S^n.

Можно приклеивать диски последовательно один за другим, взяв за начальное пространство клетку e^0. При этом будем придерживаться правила: приклеивать границу диска D^k к конечному множеству клеток размерности не выше $(k-1)$. Пространство, которое, таким образом, можно представить как результат последовательного приклеивания дисков (различных размерностей), называется клеточным комплексом.

Например, сфера S^n является клеточным комплексом, состоящим из двух клеток, e^n и e^0, где e^n приклеена к e^0 по границе.

Приведем независимое от предыдущих рассмотрений и не использующее последовательной приклейки клеток определение клеточного комплекса, эквивалентное данному выше.

Определение 1. *Клеточным комплексом* будем называть хаусдорфово пространство K, которое можно представить в виде объединения $\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i \in I_n} e_i^n\right)$ попарно непересекающихся множеств e_i^n, называемых клетками, причем для каждой клетки e_i^n зафиксировано отображение $g_i^n \colon \overline{D}^n \to K$ замкнутого шара в пространство K, называемое *характеристическим отображением*; ограничение g_i^n на $\operatorname{int} \overline{D}^n = D^n$ является гомеоморфизмом на e_i^n. При этом должны быть выполнены две аксиомы:

1) граница $\partial e_i^n = \overline{e}_i^n \backslash e_i^n$ каждой клетки e_i^n содержится в объединении конечного числа клеток меньших размерностей;

2) топология K такова, что множество $A \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждой клетки e_i^n полный прообраз $(g_i^n)^{-1}(A \cap \overline{e}^n) \subset \overline{D}^n$ замкнут в $\overline{D}^n$.

Клеточный комплекс называется конечным, если он состоит из конечного числа клеток.

Следует заметить, что пространство может быть разложено на клетки различными способами. Схему разбиения клеточного комплекса на клетки будем называть клеточным разбиением.

Упражнения. 4°. Покажите, что двумерный тор является клеточным комплексом.

5°. Покажите, что множества, гомотопически эквивалентные лебеговым множествам $(f \leqslant c)$ в примере п. 1, изображенные на рис. 113—117 справа, являются клеточными комплексами, и сравните их клеточные разбиения. Обратите внимание на изменение гомотопического типа этих комплексов.

Рассмотрим замкнутое подпространство L клеточного комплекса K. Если L — клеточный комплекс, все клетки которого являются клетками комплекса K с теми же характеристическими отображениями, то L называется *подкомплексом комплекса* K.

Упражнения. 6°. Пусть K — клеточный комплекс, L — его подкомплекс, X — топологическое пространство. Пусть отображения $F\colon K \to X$ и $f\colon L\times I \to X$ таковы, что $f\big|_{L\times 0} = F\big|_{L}$. Покажите, что существует отображение $\tilde{F}\colon K\times I \to X$ такое, что $\tilde{F}\big|_{L\times I} = f$ и $F\big|_{K\times 0} = F$ (теорема Борсука о продолжении гомотопии).

Указание. Продолжите гомотопию на каждую 0-мерную клетку, затем на каждую 1-мерную и т. д.

7°. Пусть K — клеточный комплекс, L — его стягиваемый подкомплекс. Покажите, что пространства K и K/L гомотопически эквивалентны.

8°. Докажите, что всякий клеточный комплекс — нормальное пространство.

Обратим внимание на то, что в разобранном примере п. 1 гомотопический тип множества M^c менялся при переходе через значения $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$, $f(s)$. Точки p, q, r, s отличаются от других точек тора следующим: если в окрестности любой из этих точек, например, в точке p, выбрать локальную систему координат ξ, η на торе, то обе частные производные, $\partial f/\partial\xi$ и $\partial f/\partial\eta$, в точке p (или же в q, r, s соответственно) обратятся в нуль. Такие точки называют критическими точками функции f; значения функции в этих точках называют критическими значениями функции f.

Упражнение 9°. Используя в качестве локальных координат в окрестностях точек p, q, r, s координаты плоскости x, y, покажите, что $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ в любой из этих точек. Разложите в этих точках функцию в ряд по степеням x и y до членов второго порядка включительно. Обратите внимание на то, что число минусов при членах второй степени есть в точности размерность клетки, которую нужно приклеить к M^a для перехода к M^b, когда между числами a и b лежит критическое значение, соответствующее рассматриваемой критической точке.

§ 11. Невырожденная критическая точка и ее индекс

1. Невырожденные критические точки. Пусть M^n — многообразие класса C^∞ и $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^∞.

Точка $p \in M^n$ называется *критической точкой функции* f, если в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ имеет место равенство $\partial f/\partial x_1 = \ldots = \partial f/\partial x_n = 0$. Число $f(p)$ называется *критическим значением функции* f. Все остальные точки многообразия M^n будем называть *некритическими точками* функции f. Все числа, не являющиеся критическими значениями функции f, будем называть *некритическими значениями* этой функции.

Упражнение 1°. Сравните понятия критического и некритического значения функции с понятиями регулярного и нерегулярного значения гладкого отображения (см. § 5).

Критическая точка называется изолированной, если найдется такая ее окрестность, в которой нет других критических точек. Критическая точка называется *невырожденной*, если матрица вторых частных производных $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ не вырождена. В противном случае критическая точка называется *вырожденной*.

Рассмотрим квадратичную форму (Ax, x), где $x \in \mathbb{R}^n$. Ее называют *гессианом* функции f в точке p. Матрица A симметричная; квадратичная форма (Ax, x) может быть приведена к каноническому виду

$$(Ax, x) = -y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \ldots + y_h^2$$

подходящим выбором координат $y_1, \ldots, y_h$, $h \leqslant n$; если матрица A не вырождена, то $h = n$.

Число λ называется *индексом функции* f в точке p, а число $(n - h)$ — *степенью вырождения функции* f *в точке* p.

Пример. Зададим функцию на $\mathbb{R}^2$ формулой $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Очевидно, частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy$$

одновременно обращаются в нуль лишь в точке (0, 0), которая, таким образом, является изолированной критической точкой. Все вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6x$$

равны нулю в точке (0, 0). Следовательно, матрица вторых частных производных функции f в точке (0, 0) является нулевой, а гессиан функции f в точке (0, 0) является квадратичной формой, тождественно равной нулю. Значит, критическая точка (0, 0) является вырожденной; степень вырождения f в точке (0, 0) равна двум, а индекс f — нулю.

Упражнения. 2°. Покажите корректность (независимость от выбора системы локальных координат) определений критической точки, невырожденной критической точки, степени вырождения и индекса функции в критической точке.

3°. Исследуйте критические точки следующих функций на $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$:

а) $f(x) = x^2$, б) $f(x, y) = x^3$, в) $f(x, y) = x^2y^3$; исследуйте критические точки функции на торе (см. п. 1 § 10).

2. Лемма Морса. Замечательным фактом в теории критических точек является то, что вблизи невырожденной критической точки функция может быть представлена в виде квадратичной формы, и поведение функции описывается ее индексом.

Теорема 1 (лемма Морса). *Пусть $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ и пусть p — невырожденная критическая точка функции f. Тогда в некоторой окрестности U точки p существует такая локальная система координат $y_1, \ldots, y_n$, что $y_i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и в U справедливо тождество*

$$f(u) = f(p) - y_1^2 - \ldots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \ldots + y_n^2, \tag{1}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки u, а λ — индекс функции f в точке p.

Доказательство. Покажем, что если существует такая система координат, в которой функция f имеет вид (1), то λ — индекс функции f в точке p. Действительно, если такая система координат существует, то матрица частных производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right)\Big|_p$ имеет диагональный вид. По диагонали стоят числа ± 2, и число отрицательных собственных значений, с одной стороны, равно числу λ в представлении (1), а с другой стороны, является по определению индексом f в точке p.

Докажем теперь, что такое представление (1) для функции f существует. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — такая локальная система координат, что точка p имеет координаты $(0, \ldots, 0)$. В некоторой окрестности U точки p можно применить лемму 1 § 1 к функции $f(u) - f(p)$, откуда получаем равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n),$$

причем

$$g_i(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) = 0,$$

так как p — критическая точка f.

Применим снова лемму 1 § 1 к функциям g_i. Получим

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_i h_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

и, следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Обозначим $\overline{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, тогда $\overline{h}_{ij} = \overline{h}_{ji}$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \overline{h}_{ij}(x_1, \ldots, x_n).$$

Так как $\overline{h}_{ij}(0, \ldots, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(0, \ldots, 0)$, то матрица $(\overline{h}_{ij}(0, \ldots, 0))$ не вырождена. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать в (2) матрицу (h_{ij}) симметрической.

Если бы функции h_{ij} были константами, то для доказательства теоремы нам было бы достаточно привести квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ к каноническому виду. В общем же случае рассуждения приходится несколько изменить.

Для дальнейшего будет удобно дополнительно предполагать, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, \ldots, 0) \neq 0$. Это предположение также не ограничивает общности, так как линейным изменением локальных координат (изменением карты) всегда можно добиться этого. Действительно, квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_{ij}(0, \ldots, 0) x_i x_j$ линейной невырожденной заменой координат можно привести к виду, где элемент ее матрицы $a_{11} \neq 0$. Сделав эту замену координат в формуле (2), мы снова получим для f (в новых координатах $x_1', \ldots, x_n'$) такое же представление

$$f(x_1', \ldots, x_n') - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j' h_{ij}'(x_1, \ldots, x_n),$$

но уже $h_{11}'(0, \ldots, 0) \neq 0$.

Итак, считая, что $h_{11}(0, \ldots, 0) \neq 0$, можно записать (в некоторой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$)

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(0, \dots, 0) =$$

$$= \sum_{i, j=1}^{n} h_{ij}x_ix_j = h_{11}x_1^2 + 2\sum_{i>1}^{n} h_{i1}x_ix_1 + \sum_{i, j>1}^{n} h_{ij}x_ix_j =$$

$$= \operatorname{sign} h_{11}(0, \dots, 0)\left(\sqrt{|h_{11}|}\, x_1 + \sum_{i>1}^{n} \frac{h_{i1}}{\operatorname{sign} h_{11}(0, \dots, 0)\sqrt{|h_{11}|}}\, x_i\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{|h_{11}|} \sum_{i, j>1}^{n} h_{i1}h_{1j}x_ix_j + \sum_{i, j>1}^{n} h_{ij}x_ix_j =$$

$$= \operatorname{sign} h_{11}(0, \dots, 0)\, y_1^2 + \sum_{i, j>1}^{n} \left(h_{ij} - \frac{h_{i1}\cdot h_{j1}}{|h_{11}|}\right) x_ix_j,$$

где новая координата y_1 гладко зависит от $x_1, \dots, x_n$:

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}(x_1, \dots, x_n)|}\, x_1 + \sum_{i>1}^{n} \frac{h_{i1}(x_1, \dots, x_n)x_i}{\operatorname{sign} h_{11}(0, \dots, 0)\sqrt{|h_{11}(x_1, \dots, x_n)|}}.$$

Применяя теорему об обратном отображении (см. § 1), убедимся, что преобразование $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \dots, x_n)$ — диффеоморфизм в окрестности точки $(0, \dots, 0)$.

Заметим, далее, что матрица

$$\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{j1}}{|h_{11}|}\right), \quad 1 < i, j \leqslant n,$$

невырождена в точке $(0, \dots, 0)$ и симметрична (проверьте!). Следовательно, мы можем применить приведенное выше рассуждение к функции

$$\sum_{i,j>1}^{n} \left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{j1}}{|h_{11}|}\right) x_ix_j$$

и так далее, как в классическом алгоритме Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. В результате приходим к выражению вида (1) для функции f. ∎

Упражнения. 4°. Докажите, что всякая невырожденная критическая точка является изолированной.

5°. Найдите представления (1), определяемые леммой Морса, для функции высоты на торе (см. § 10) в критических точках.

6°. Докажите, что точки максимума и минимума гладкой функции на многообразии без края являются критическими. Вычислите индексы в точках максимума и минимума, если известно, что эти точки невырождены.

3. Поле градиента. Пусть $A_x(u, v)$ — риманова метрика на M^n. Выберем для каждой точки $x \in M^n$ вектор $y_x \in T_xM^n$ так, чтобы было выполнено следующее условие: для произвольного вектора $l_x \in T_x M^n$ справедливо равенство

$$A_x(y_x, l_x) = (df)_x(l_x), \tag{3}$$

где $(df)_x(l_x)$ — значение дифференциала функции f в точке x на векторе l_x.

Полученное поле y_x называется *полем градиента* функции и обозначают $\operatorname{grad} f(x)$.

Упражнения. 7°. Покажите, что в локальных координатах поле градиента имеет вид

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(x_1, \ldots, x_n, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i1}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{in}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

где $a^{ij}(x)$ — коэффициенты матрицы, обратной матрице $(a_{ij}(x))$ формы $A_x(u, v)$.

8°. Докажите, что для функции класса C^∞ поле градиента — гладкое векторное поле.

9°. Докажите, что $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ тогда и только тогда, когда x^0 — критическая точка функции f.

§ 12. Критические точки и гомотопический тип многообразия

В этом параграфе критические точки гладкой функции на многообразии будут использоваться для изучения гомотопического типа многообразия. Основоположником этого подхода является М. Морс. Будет показано, что компактное многообразие гомотопически эквивалентно клеточному комплексу. Детали доказательств (в ряде случаев достаточно тонкие) будут опускаться.

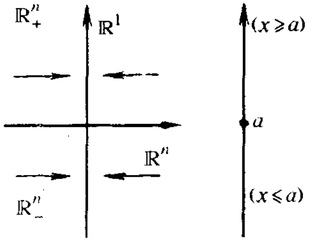


Рис. 118

1. Строение лебеговых множеств гладких функций. Пусть M — компактное n-мерное C^∞-многообразие, f — функция класса C^∞ на M, все критические точки которой невырожденны. Для любого числа a множество $(f < a)$ является открытым подмножеством в M, а следовательно, подмногообразием в M. Предположим теперь, что a — некритическое значение f и $f^{-1}(a) = \varnothing$. Покажем, что множество $M^a = (f \leqslant a)$ является многообразием с краем $(f = a)$. Пусть $u \in f^{-1}(a)$. По теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) функцию f в некоторой окрестности точки u можно представить в локальных координатах как проекцию π пространства $\mathbb{R}^n$ на прямую $\mathbb{R}^1$ (рис. 118). Прообразом точки a при этой проекции является подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$, являющееся краем полупространства $\mathbb{R}^n_-$. В точках полупространства функция f принимает значения, не большие a. Это означает, что в M^a существует окрестность точки u, гомеоморфная полупространству.

Следовательно, $M^a = (f \leqslant a)$ — n-мерное многообразие, край которого — $(n-1)$-мерное многообразие $(f = a)$.

2. Условия гомотопической эквивалентности лебеговых множеств. Пусть a и b — некритические значения функции f и отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений. Будем сдвигать множества $(f=c)$ на множество $(f=a)$ по линиям, ортогональным многообразиям уровня $(f=c)$, $a\leqslant c\leqslant b$ (рис. 119). Таким образом мы задаем деформацию $\varphi_a^b(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, многообразия M^b на многообразие M^a. Следовательно, M^a является сильным деформационным ретрактом M^b, откуда M^a и M^b гомотопически эквивалентны.

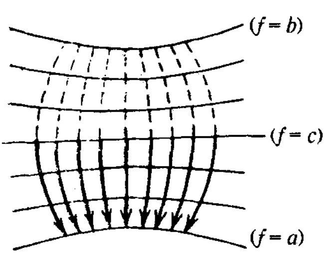


Рис. 119

Строгое доказательство существования отображения φ_a^b должно включать построение линий, ортогональных многообразиям уровня. Их можно определить как интегральные кривые векторного поля $X(u)$, где вектор $X(u)\in T_uM$ определяется из условия $\langle X(u), h\rangle=0$ для всех $h\in T_u(f=c=f(u))$, т. е. из условия ортогональности вектора $X(u)$ пространству, касательному к многообразию уровня $(f=c)$. Символ $\langle,\rangle$ обозначает риманову метрику, которая всегда существует на многообразии (см. § 6). Чтобы подмногообразие уровня переходило в подмногообразие уровня в любой момент t, определим векторное поле $X(u)$ формулой

$$X(u)=\rho(u)\ \mathrm{grad}\ f(u),$$

где $\rho(u)$ — гладкая функция на M, равная $1/\langle\mathrm{grad}\ f(u), \mathrm{grad}\ f(u)\rangle$ на $M^b\setminus M^a$ и нулю вне некоторой не содержащей критических точек окрестности $M^b\setminus M^a$.

Деформация M^b на M^a может быть корректно определена и в том случае, если a — критическое значение f.

3. Изменение гомотопического типа при переходе через критическое значение. Итак, гомотопический тип множества M^c не меняется, если число c, возрастая (или убывая), не переходит через критическое значение c_0. Посмотрим теперь, что происходит при таком переходе.

Следующее полезное утверждение предлагается доказать самостоятельно.

Упражнение 1°. Докажите, что гладкая функция на компактном многообразии, все критические точки которой невырожденны, имеет конечное число критических точек и критических значений.

Рассмотрим критическое значение c_0. Предположим, что ему соответствует единственная критическая точка p, $f(p)=c_0$. Выберем окрестность U точки p и локальные координаты, определяемые леммой Морса (см. § 11), где функция f представлена в этих координатах $y_1, \ldots, y_n$ в виде

$$f(u)=c_0-y_1^2-\ldots-y_\lambda^2+y_{\lambda+1}^2+\ldots+y_n^2.$$

Выберем такое ε, что множество $[c_0-\varepsilon, c_0+\varepsilon]$ не содержит других критических значений и точка с локальными координатами $(y_1, \ldots, y_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\leqslant 2\varepsilon$, принадлежит U.

Мы построим гладкую функцию F на M, отличающуюся от f лишь в U, причем множества $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$ и $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ окажутся гомотопически эквивалентными. Сделав это, мы сравним множества $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ и $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$. Оказывается, это более удобно, чем непосредственное сравнение множеств $(f\geqslant c_0-\varepsilon)$ и $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$. Для построения функции F потребуется гладкая функция μ на $\mathbb{R}^1$, обладающая следующими свойствами:

$$\mu(0)>\varepsilon;\quad \mu(x)=0 \text{ при } x>2\varepsilon;\quad -1<\mu'(x)\leqslant 0 \text{ при } -\infty<x<\infty.$$

Вид графика функции μ, удовлетворяющей этим свойствам, указан на рис. 120.

Упражнение 2°. Проведите пример функции μ, обладающей указанными свойствами.

Зададим гладкую функцию F формулами

$$F(v)=\begin{cases} f(v) & \text{при } v\notin U,\\ f(vf)-\mu\left(\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2+2\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2\right) & \text{при } v\in U.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что критические точки функции F совпадают с критическими точками функции f (хотя $f(p)\neq F(p)$).

Критической точке p функции F соответствует критическое значение $F(p)=c_0-\mu(0)<c_0-\varepsilon$. Поскольку в других критических точках значения функции F совпадают со значениями функции f в этих точках, отрезок $[c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon]$ не содержит критических значений F. Поэтому множество $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ является сильным деформационным ретрактом множества $(F\leqslant c_0+\varepsilon)$. Но $(F\leqslant c_0+\varepsilon)=(f\leqslant c_0+\varepsilon)$. Следовательно, $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ является сильным деформационным ретрактом множества $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$. Итак, эти множества гомотопически эквивалентны.

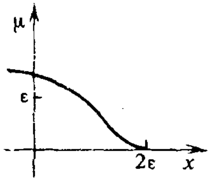


Рис. 120

Далее будем сравнивать гомотопические типы множеств $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ и $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ (вместо того, чтобы сравнивать гомотопические типы множеств $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ и $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$). Обозначим через H замыкание множества $(F\leqslant c_0-\varepsilon)\setminus(f\leqslant c_0-\varepsilon)$. Рассмотрим клетку e^λ, состоящую из точек $u\in U$, координаты $y_1, \ldots, y_n$ которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2<\varepsilon,\qquad \sum_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2=0.$$

Клетка e^λ лежит внутри H: она приклеена к множеству $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ по множеству тех точек u, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2=\varepsilon$. На рис. 121 изображена окрестность критической точки индекса 1 на двумерном многообразии (например, точки q примера из § 10); множество $M^{c_0-\varepsilon}=(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ заштриховано, множество H заштриховано дважды, клетка e^λ обозначена толстой линией.

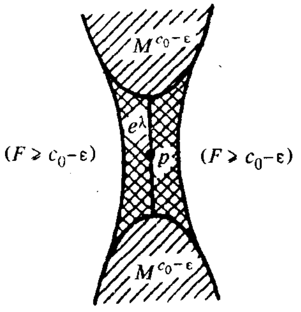


Рис. 121

Зададим деформацию Γ_t множества $(F\leqslant c_0-\ -\varepsilon)=M^{c_0-\varepsilon}\bigcup H$ на множество $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^\lambda$ следующим образом: Γ_t — тождественное отображение на $M^{c_0-\varepsilon}$, а на H определено формулой

$$\Gamma_t(y_1, \ldots, y_n)=\begin{cases} y_1, \ldots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \ldots, ty_n & \text{при } \sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2\leqslant\varepsilon,\\ y_1, \ldots, y_\lambda, s_ty_{\lambda+1}, \ldots, s_ty_n & \text{при } \varepsilon<\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2<\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2+\varepsilon,\end{cases}$$

где $s_t=t+(1-t)\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2-\varepsilon\right)\Big/\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. На рис. 122 эта деформация показана стрелками.

Упражнение 3°. Проверьте, что деформация Γ_t задана корректно.

Итак, множество $(f\leqslant c_0-\varepsilon)\bigcup e^\lambda$ есть сильный деформационный ретракт множества $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$, а следовательно, и множества $(f\leqslant c_0+\varepsilon)=M^{c_0+\varepsilon}$. Таким образом, $M^{c_0+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип множества $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^\lambda$, т. е. множества $M^{c-\varepsilon}$ с определенным образом приклеенной клеткой * размерности, равной индексу критической точки, соответствующей значению c_0.

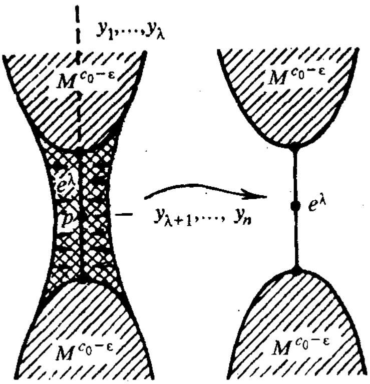


Рис. 122

Мы рассмотрели случай, когда критическому значению функции отвечала единственная критическая точка. Рассмотрим общий случай.

Упражнение 4°. Постройте гладкую функцию на двумерном многообразии, все критические точки которой невырожденны, такую, что одному критическому значению соответствует несколько критических точек.

Пусть критическому значению c_0 соответствуют $k>1$ критических точек. Все описанные выше конструкции можно проводить одновременно в окрестности каждой критической точки. Множество $M^{c_0+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип множества $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}$, т. е. множества $M^{c_0-\varepsilon}$ с определенным образом приклеенными к нему клетками e^{λ_i}, причем размерность λ_i равна индексу i-й критической точки, соответствующей c_0.

Пусть c' — наименьшее из критических значений, больших c_0, и в ε-окрестностях c_0 и c' нет других критических значений. Пусть значению c' соответствует k' критических точек с индексами $\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{k'}$. Множество $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}$ гомотопически эквивалентно множеству M^a для $c_0\leqslant a<c'$. В свою очередь, множество $M^{c'}$ гомотопически эквивалентно множеству $M^a\bigcup e^{\lambda'_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda'_{k'}}$.

Установим гомотопическую эквивалентность множеств $M^{c'}$ и $\left(M^{c_0-\varepsilon}\bigcup\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}\right)\bigcup e^{\lambda'_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda'_{k'}}$. Для этого продеформируем множество $M^a\bigcup e^{\lambda'_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda'_{k'}}$ на множество

$$\left(M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}\right)\bigcup e^{\lambda'_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda'_{k'}},$$

используя построенную нами деформацию M^a на $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}$.

Упражнение 5°. Выясните, как будут приклеены клетки $e^{\lambda'_1},\ldots,e^{\lambda'_{k'}}$ к множеству $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^{\lambda_1}\bigcup\ldots\bigcup e^{\lambda_k}$.

Подчеркнем, что приклеивание клетки на каждом этапе происходит не произвольным, а строго определенным образом (с точностью до гомотопического класса отображения сферы — границы клетки в соответствующее пространство). Поэтому приклеивание клетки определяется элементом из гомотопической группы соответствующего пространства; размерность этой группы равна уменьшенной на единицу размерности клетки.

---

* Здесь и ниже мы опускаем в записи отображения приклейки.

4. Гомотопический тип многообразия. Наметим построение клеточного комплекса, гомотопически эквивалентного многообразию M, так, как это было сделано для тора в § 10.

Пусть c_1 — наименьшее из критических значений функции f. Очевидно, для $a < c_1$ множество $(f \leqslant a)$ пусто. Поскольку c_1 — наименьшее критическое значение, все критические точки, соответствующие c_1, являются точками минимума; их индексы равны нулю. Множество $(f \leqslant c_1)$ состоит из конечного числа точек; его можно считать результатом приклеивания к пустому множеству нескольких клеток размерности 0.

Пусть c_2 — следующее по величине критическое значение. При $c_1 < c < c_2$ множество $(f \leqslant c)$ получается «раздутием» точек из $(f \leqslant c_1)$; оно состоит из конечного числа множеств, гомеоморфных n-мерному диску, и гомотопически эквивалентно множеству $(f \leqslant c_1)$. Множество $(f \leqslant c_2)$ гомотопически эквивалентно множеству $(f \leqslant c_1)$ с приклеенными к нему клетками различных (вообще говоря, любых от 0 до n) размерностей, равных индексам критических точек, соответствующих c_2; последнее множество, очевидно, является клеточным комплексом.

Взяв следующие по величине критические значения c_3, получим, что $(f \leqslant c_3)$ гомотопически эквивалентно результату последовательного приклеивания к $(f \leqslant c_1)$ клеток, соответствующих критическим точкам, отвечающим критическому значению c_2, а затем клеток, соответствующих критическим точкам, отвечающим критическому значению c_3. Такое пространство можно сделать клеточным комплексом, подправив отображения границ приклеиваемых клеток.

Упражнение 6°. Докажите, что каждое отображение сферы S^m в клеточный комплекс K гомотопно отображению сферы в подпространство K^m пространства K, состоящее из клеток размерности меньшей или равной m.

В общем случае множество $M^a = (f \leqslant a)$ при $a \geqslant \max\limits_{u \in M} f(u)$ гомотопически эквивалентно пространству, являющемуся клеточным комплексом, полученному из пустого множества последовательным приклеиванием клеток, соответствующих критическим точкам с критическими значениями c_i, в порядке возрастания $-\infty < c_i \leqslant a$.

Отметим, что если c_r — наибольшее критическое значение, то критические точки, значение функции f в которых равно c_r, являются точками максимума, и, следовательно, их индексы равны размерности многообразия M.

Сформулируем окончательное утверждение.

Теорема 1. *Каждая гладкая функция f на компактном многообразии M, имеющая лишь невырожденные критические точки, определяет гомотопическую эквивалентность многообразия M с некоторым конечным клеточным комплексом, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции f, причем размерность клетки равна индексу соответствующей критической точки.*

Остановимся теперь на существовании на компактном многообразии гладкой функции, имеющей лишь невырожденные критические точки. Такую функцию можно построить следующим образом. Рассмотрим вложение многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^l$ достаточно высокой размерности l. Определим функцию f формулой $f(p) = (u-p, u-p)$, где $(,)$ — скалярное произведение, u — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^l$, а $p \in M \subset \mathbb{R}^l$. Используя теорему Сарда (см. § 5), можно показать, что существует вектор $u \in \mathbb{R}^l$ такой, что функция f имеет лишь невырожденные критические точки.

Этот результат позволяет сделать следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Всякое компактное гладкое многообразие имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса.*

Следует заметить, что теорема 1 не позволяет однозначно восстановить гомотопический тип многообразия по информации о критических точках функции. В общем случае мы можем установить число клеток и их размерности, но, вообще говоря, не способ приклейки этих клеток друг к другу. Таким образом, клеточный комплекс в общем случае нельзя восстановить по информации о критических точках.

5. Понятие точной последовательности расслоения (дополнение к § 9). Изложенные в § 9 результаты о вычислении фундаментальной группы базы накрытия имеют глубокое обобщение на уровне локально тривиальных расслоений. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение и e_0, b_0 — отмеченные точки в $F = p^{-1}(b_0)$, B соответственно. Отображения проекции p и вложения $i\colon F \to E$ индуцируют гомоморфизмы гомотопических групп: $\pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_n} \pi_n(B, b_0)$, $\pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(E, e_0)$, $n \geqslant 1$. Распространим эти отображения на случай $n = 0$, подразумевая под $\pi_0(F, e_0)$, $\pi_0(E, e_0)$, $\pi_0(B, b_0)$ множества компонент линейной связности пространств F, E, B. Компоненту, содержащую отмеченную точку $e_0(b_0)$, назовем «нулевым» элементом θ. Определим еще один гомоморфизм: $\partial_n\colon \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$, $n \geqslant 1$. Пусть $\varphi\colon (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ — сфероид. По свойству накрывающей гомотопии существует для φ поднятие $\Phi\colon I^n \to E$, так как $I^n = I^{n-1} \times I$ и $\varphi\colon I^{n-1} \times I \to B$ — гомотопия отображения $\varphi_0\colon I^{n-1} \times \{0\} \to B$, которое накрывается отображением $\Phi_0\colon I^{n-1} \times \{0\} \to e_0$; при этом $p\Phi(y \times \{t\}) = \varphi(y \times \{t\})$, $y \in I^{n-1}$, $t \in I$, и $p\Phi(\partial I^{n-1} \times \{t\}) = \varphi(\partial I^{n-1} \times \{t\}) = b_0$, откуда $\Phi(\partial I^n) \in F$. Итак, $\Phi\colon \partial I^n \to F$ является $(n-1)$-мерным сфероидом, определяющим класс $\alpha \in \pi_{n-1}(F, e_0)$. Положим $\partial_n[\varphi] = \alpha$. Очевидна корректность этого определения ∂_n, $n \geqslant 1$; не сложно убедиться, что ∂_n — гомоморфизм. При $n = 0$ положим $\partial_0 = 0$.

Гомотопической последовательностью локально тривиального расслоения (E, B, F, p) называется бесконечная слева последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_n} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_{n-1}} \ldots \xrightarrow{p_0} \pi_0(B, b_0) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Она обладает важным свойством — в каждом члене последовательности образ «входящего» гомоморфизма равен ядру «выходящего»: $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Ker} i_n$, $\operatorname{Im} i_n = \operatorname{Ker} p_n$, $\operatorname{Im} p_n = \operatorname{Ker} \partial_n$, $n = 0, 1, \ldots$ Это свойство называется «точностью» гомотопической последовательности расслоения.

Пример 1. Рассмотрим накрытие $p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$, $p = e^{2\pi i t}$ (см. пример 6 п. 4 § 9). Слой накрытия — группа $\mathbb{Z}$ (с дискретной топологией). Очевидно, $\pi_k(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$; $\pi_k(\mathbb{R}^1) = 0$, $k \geqslant 0$.

Отсюда $\ldots \to 0 \to 0 \to \pi_k(S^1) \to 0 \to \ldots \to 0 \to 0 \to \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$ — точная гомотопическая последовательность расслоения $(\mathbb{R}^1, S^1\mathbb{Z}, p)$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_k(S^1) = 0$, $k \geqslant 2$.

Пример 2. Расслоение Хопфа (S^3, S^2, S^1, π) (п. 1 § 9). Точная гомотопическая последовательность имеет вид $\to 0 \to \mathbb{Z} \to \pi_3(S^2) \to 0 \to 0 \to \pi_2(S^2) \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$, так как $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = \pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = \pi_1(S^2) = 0$ (см. пример 1). Используя точность последовательности, немедленно получаем $\pi_3(S^2) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Сводка гомотопических групп, приведенная в конце гл. III, получена подобным образом с помощью точных гомотопических последовательностей для специальных расслоений.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическими курсами по теории многообразий и расслоений являются [19, 24, 45, 47, 49, 50, 53, 56, 57, 60, 62, 67, 68, 71, 72, 80—83].

Наглядное изложение основных понятий теории многообразий и расслоений имеется в [14, 46].

Фундаментальный очерк развития идей современной топологии дан в [51].

Задачники по материалу гл. IV—[48, 52].

Сведения из анализа, используемые в гл. IV, имеются в [25, 37, 50].

Классификация одномерных и двумерных многообразий—[14, 27, 46, 62]. Классификация трехмерных и четырехмерных многообразий доступно изложена в [74, 75] (см. также [27]).

Теорема Сарда и теория степени гладких отображений—[19, 24, 46, 49, 53, 58, 60, 62, 67, 80].

Теоремы вложения многообразий—[45, 46, 49, 50, 56, 60, 62, 67, 80].

Теория групп Ли—[24, 55, 72, 74, 83].

Теория накрывающих пространств—[43, 66, 76].

Теория критических точек гладких функций на многообразиях —[44, 46, 57, 74, 75, 62].

Векторные поля на гладких многообразиях, динамические системы, гамильтонов формализм—[7, 9, 24, 49, 53, 60, 67, 72, 74].

Глава V

Теория гомологий

В этой главе для всякого топологического пространства будут определены группы гомологий. Идея построения групп гомологий, как уже отмечалось, восходит к А. Пуанкаре. Полезная идея алгебраизации топологических задач в историческом плане впервые была реализована построением групп гомологий и фундаментальной группы. Центральное положение теории гомологий сохраняется и до настоящего времени. Во многих случаях топологические инварианты в конечном итоге выражают через группы гомологий и когомологий. Это обстоятельство связано с лучшей вычислимостью групп гомологий и когомологий, хотя их определение несколько сложнее, чем определение, например, гомотопических групп.

§ 1. Вступительные замечания

Здесь мы проиллюстрируем ход рассуждений, приведший к появлению понятия гомологий.

При изучении достаточно просто устроенных пространств геометрическая интуиция часто помогает нам различать пространства, отличающиеся с топологической точки зрения, т. е. не гомеоморфные одно другому. Как правило, нетрудно установить, гомеоморфны или нет различные конкретные не слишком сложно устроенные подмножества прямой, плоскости, трехмерного пространства (в индуцированных топологиях). Непосредственно из определения многообразия следует, что многообразие X не может быть гомеоморфно пространству Y, не являющемуся C^0-многообразием. Но при изучении многообразий размерности большей, чем 1—2, геометрическая интуиция оказывается недостаточно эффективной.

Чтобы различать негомеоморфные многообразия высокой размерности, можно опираться на следующее соображение. Пусть M_1^n, M_2^n — два n-мерных многообразия. Будем рассматривать в M_1^n, M_2^n компактные C^0-подмногообразия.

Если в M_1^n всякое q-мерное подмногообразие ($q < n$) является краем некоторого ($q+1$)-мерного подмногообразия в M_1^n, а в M_2^n имеется q-мерное подмногообразие, не являющееся краем подмногообразия в M_2^n, то многообразия M_1^n и M_2^n заведомо не гомеоморфны. Так, любое 1-мерное подмногообразие (компактное) сферы S^2 является краем, в то время как в торе $T^2 = S^1 \times S^1$ нетрудно указать окружности, не являющиеся краем никакого двумерного подмногообразия в T^2 (рис. 123).

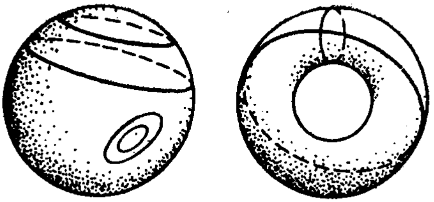


Рис. 123

Если же подмногообразия, не являющиеся краями, имеются и в M_1^n, и в M_2^n, то можно попытаться сравнить «количество» таких многообразий в M_1^n и M_2^n. Рассмотрим множество $\{V_\alpha^q\}$ всех q-мерных циклов, т. е. q-мерных подмногообразий (без края) многообразия M^n. Пусть W^{q+1} — подмногообразие M^n с краем, состоящим из связных многообразий $V_1^q, \ldots, V_m^q$, $V_i^q \in \{V_\alpha^q\}$. Будем говорить в этом случае, что цикл $V_1^q + \ldots + V_m^q$ гомологичен нулю. Таким образом, в множестве $\{V_\alpha^q\}$ введено отношение эквивалентности: два цикла эквивалентны (гомологичны), если они различаются на гомологичный нулю цикл; классы эквивалентности q-мерных циклов назовем q-мерными *гомологиями многообразия* M^n.

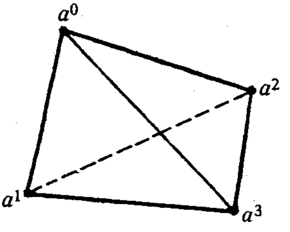


Рис. 124

Если найдется такое q, при котором q-мерных гомологий многообразия M_1^n больше, чем q-мерных гомологий многообразия M_2^n, то это означает, что M_1^n и M_2^n не гомеоморфны.

В множестве $\{V_\alpha^q\}$ введено понятие суммы двух непересекающихся циклов, однако это не означает, что в нем введена структура группы. Поэтому мы не можем пока считать, что гомологии образуют группу. Наглядное определение гомологий, данное выше, однако, неудобно для вычислений. Более эффективно рассматривать циклы (многообразия), составленные из некоторых элементарных многообразий с краями. Покажем, как это можно сделать, на следующем примере.

Пусть Π^2 — поверхность тетраэдра (рис. 124); очевидно, Π^2 гомеоморфна сфере S^2. Будем рассматривать 0-мерные многообразия, состоящие из вершин тетраэдра, 1-мерные многообразия, состоящие из его ребер, и 2-мерные многообразия, состоящие из его граней, допуская наличие края у 1-мерных и 2-мерных многообразий; операцию объединения двух многообразий естественно трактовать как сумму. Для того чтобы использовать это замечание для алгебраизации изучаемых объектов, рассмотрим группу формальных линейных комбинаций * с целочисленными коэффициентами вершин (группа 0-мерных цепей), ребер (группа 1-мерных цепей) и граней (группа 2-мерных цепей). При этом для каждого ребра фиксируем порядок вершин (a^i, a^j) и отождествим $(-1)(a^i, a^j)$ с (a^j, a^i); для каждой грани фиксируем направление обхода вершин (a^i, a^j, a^k), отождествим $(-1)(a^i, a^j, a^k)$ с (a^j, a^i, a^k).

Определим границу ребра (a^i, a^j) как сумму $a^j+(-1)a^i$, а границу грани (a^i, a^j, a^k) — как сумму ограничивающих эту грань ребер (с тем направлением обхода, которое зафиксировано у грани), т. е. $(a^i, a^j)+(a^j, a^k)+(a^k, a^i)$; границу вершины положим равной нулю. Определенные таким образом операции взятия границы продолжаются на группы цепей по линейности. Циклом назовем цепь, граница которой равна нулю; цикл, таким образом, является алгебраическим аналогом замкнутого многообразия (без края).

Поскольку нас интересуют гомологии — классы эквивалентных циклов, отличающихся друг от друга на границу, будем рассматривать смежные классы q-мерных циклов по подгруппе границ $(q+1)$-мерных цепей $(q=0, 1, 2)$. Эти смежные классы образуют группу, называемую q-мерной группой целочисленных гомологий поверхности Π^2. Группы гомологий Π^2 нетрудно вычислить; они изоморфны $\mathbb{Z}$, 0 и $\mathbb{Z}$ для размерностей 0, 1 и 2 соответственно. Такую конструкцию можно осуществить для более высоких размерностей, используя разбиение на тетраэдры и их аналоги (симплексы). Зная, каким образом данное пространство разбивается на симплексы, можно вычислить его группы гомологий. На практике, однако, редко пользуются для вычисления групп гомологий определением, а применяют разнообразные технические приемы (точные последовательности, спектральные последовательности и др.).

Группы гомологий являются топологическими инвариантами, т. е. группы гомологий гомеоморфных пространств совпадают (изоморфны). Другими примерами топологических инвариантов являются число компонент связности (или линейной связности) пространства,

---

* Группой формальных линейных комбинаций элементов τ_α из некоторого множества $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с коэффициентами в абелевой группе G называют прямую сумму $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ групп $G_\alpha=\{g\cdot\tau_\alpha\}$, $g\in G$, изоморфных G, где изоморфизм задается правилом $g\cdot\tau_\alpha\longrightarrow g$.

эйлерова характеристика, фундаментальная и гомотопическая группы (см. гл. III). Примечательно, что фундаментальная и гомотопическая группы тесно связаны с группами гомологий (см. § 4 этой главы), а остальные упомянутые топологические инварианты могут быть вычислены через группы гомологий (см. § 4 и 8 этой главы). Отметим также, что группы гомологий на самом деле являются не только топологическими, но и гомотопическими инвариантами в том смысле, что группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств изоморфны. Заметим, что и другие названные выше инварианты являются гомотопическими инвариантами.

В ряде случаев геометрическая интуиция помогает не только различить негомеоморфные пространства, но и доказать их негомеоморфность.

Упражнения. 1°. Докажите (не используя группы гомологий) негомеоморфность следующих пространств, изображаемых символами: О, П, X, Р, Ы, 8.

2°. Является ли ориентируемость поверхности топологическим инвариантом? Гомеоморфны ли S^2 и $\mathbb{R}P^2$?

§ 2. Гомологии цепных комплексов

Начнем с изучения абстрактных алгебраических объектов.

Последовательность (бесконечная)

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \qquad (1)$$

абелевых групп C_k и их гомоморфизмов ∂_k, удовлетворяющих для всякого $k \geqslant 1$ условию $\partial_{k-1}\partial_k = 0$, называется *цепным комплексом.* Его мы будем обозначать C_*; группы C_k называются *группами цепей,* гомоморфизмы ∂_k — *дифференциалами* или *граничными гомоморфизмами.*

Множество $\operatorname{Ker} \partial_k = \{c \in C_k\colon \partial_k c = 0\}$ образует подгруппу в C_k, называемую группой *k-мерных циклов*; ее элементы называются *k-мерными циклами.* Множество $\operatorname{Im} \partial_{k+1} = \{c \in C_k\colon c = \partial_{k+1} u\}$ также образует подгруппу в C_k, называемую *группой k-мерных границ*; ее элементы называются *k-мерными границами.*

Гомоморфизмом φ_* *цепного комплекса* C_* в цепной комплекс C'_* называется последовательность гомоморфизмов $\varphi_k\colon C_k \to C'_k$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \ldots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

коммутативна, т. е. $\varphi_{k-1}\partial_k = \partial'_k\varphi_k$ для любого k.

Введем одно из важнейших понятий алгебраической топологии — группы гомологий. Рассмотрим цепной комплекс C_*. В силу соотношения $\partial_k\partial_{k+1} = 0$ выполнено включение $\operatorname{Im}\partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_k$. Факторгруппа группы циклов по группе границ $\operatorname{Ker}\partial_k/\operatorname{Im}\partial_{k+1}$ называется *k-й группой гомологий комплекса C_** и обозначается $H_k(C_*)$. Циклы c_1, c_2 из одного класса смежности называются *гомологичными*, что обозначается $c_1 \sim c_2$.

Пусть $\varphi_*\colon C_* \to C'_*$ — гомоморфизм цепных комплексов. Из коммутативности диаграммы (2) немедленно следует, что

$$\varphi_k(\operatorname{Ker}\partial_k) \subset \operatorname{Ker}\partial'_k \quad \text{и} \quad \varphi_k(\operatorname{Im}\partial_{k+1}) \subset \operatorname{Im}\partial'_{k+1}.$$

Поэтому φ_* индуцирует *гомоморфизм групп гомологий*:

$$\varphi_{*k}\colon H_k(C_*) \to H_k(C'_*).$$

Продолжим изучение цепных комплексов и их групп гомологий. Пусть C_* и C^0_* — такие цепные комплексы, что группы C^0_k являются подгруппами групп C_k и дифференциалы ∂^0_k комплекса C^0_* получены сужением ∂_k на C^0_k. В этом случае комплекс C^0_* называется *подкомплексом комплекса C_**. Определен гомоморфизм $i_*\colon C^0_* \to C_*$ цепных комплексов, где $i_k\colon C^0_k \to C_k$ есть мономорфизм вложения; i_* называется *мономорфизмом вложения цепных комплексов.*

Рассмотрим последовательность факторгрупп $\widehat{C}_k = C_k/C^0_k$. Гомоморфизмы ∂_k индуцируют гомоморфизмы $\widehat{\partial}_k\colon \widehat{C}_k \to \widehat{C}_{k-1}$.

Упражнение 1°. Покажите, что группы $\widehat{C}_k$ и гомоморфизмы $\widehat{\partial}_k$ образуют цепной комплекс $\widehat{C}_*$, а эпиморфизмы факторизации j_k: $C_k \to \widehat{C}_k$ образуют гомоморфизм цепных комплексов $j_*\colon C_* \to \widehat{C}_*$ (эпиморфизм факторизации).

Последовательность

$$\ldots \to A_{k+1} \xrightarrow{\psi_{k+1}} A_k \xrightarrow{\psi_k} A_{k-1} \to \ldots$$

групп A_k и их гомоморфизмов ψ_k называется точной, если для всех k образ гомоморфизма ψ_{k+1} совпадает с ядром гомоморфизма ψ_k, т. е. $\operatorname{Im}\psi_{k+1} = \operatorname{Ker}\psi_k$.

Упражнение 2°. Покажите, что последовательность

$$0 \to C^0_k \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{j_k} \widehat{C}_k \to 0$$

точна для всех k.

О последовательности цепных комплексов и их гомоморфизмов

$$0 \to C^0_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{j_*} \widehat{C}_* \to 0, \tag{3}$$

где i_* — вложение, j_* — факторизация, говорят, что она точна.

Согласно общему определению можно построить группы гомологий факторкомплекса $\widehat{C}_*$, т. е. группы $H_k(\widehat{C}_*)$. Оказывается, что новые группы связаны с группами $H_k(C_*)$ и $H_k(C^0_*)$ в некоторой точной последовательности.

Построим эту последовательность. Гомоморфизмы i_* и j_* индуцируют гомоморфизмы

$$i_{*k}\colon H_k(C^0_*) \to H_k(C_*), \qquad j_{*k}\colon H_k{*}C_*) \to H_k(\widehat{C}_*).$$

Получаем короткие последовательности:

$$\begin{tikzcd}
H_k(C^0_*) \arrow[r, "i_{*k}"] & H_k(C_*) \arrow[r, "j_{*k}"] & H_k(\widehat{C}_*) \arrow[dll, dashed, "\delta_k"'] \\
H_{k-1}(C^0_*) \arrow[r, "i_{*k-1}"] & H_{k-1}(C_*) \arrow[r, "j_{*k-1}"] & H_{k-1}(\widehat{C}_*)
\end{tikzcd}$$

Оказывается, существуют гомоморфизмы

$$\partial_k\colon H_k(\widehat{C}_*) \to H_{k-1}(C^0_*),$$

объединяющие эти короткие последовательности в длинную точную последовательность

$$\ldots \to H_{k+1}(\widehat{C}_*) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(C^0_*) \xrightarrow{i_{*k}} H_k(C_*) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(\widehat{C}_*) \to \ldots \to H_0(\widehat{C}_*) \to 0. \tag{4}$$

Опишем построение гомоморфизмов δ_k. Рассмотрим последовательность (3). Пусть $\widehat{a} \in H_k(\widehat{C}_*)$, $k > 0$, т. е. $\widehat{a}$ — класс смежности некоторого элемента $a \in \operatorname{Ker} \widehat{\partial}_k$ по подгруппе $\operatorname{Im} \widehat{\partial}_{k+1}$. В свою очередь, $a \in \widehat{C}_k$ и его можно рассматривать как класс смежности некоторого элемента $d \in C_k$ по подгруппе C^0_k. Из $\widehat{\partial}_k a = 0$ следует, что $\partial_k d \in C^0_{k-1}$, а из $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ — что $\partial_k d \in \operatorname{Ker} \partial_{k-1}$.

Упражнение 3°. Покажите, что класс смежности $[\partial_k d]^0$ элемента $\partial_k d$ в $H_{k-1}(C^0_*)$ не зависит от выбора элементов a и d из соответствующих классов смежности.

Каждому элементу $\widehat{a}$ из $H_k(\widehat{C}_*)$ мы сопоставили элемент $[\partial_k d]^0$ из $H_{k-1}(C^0_*)$, задав тем самым отображение, которое мы будем обозначать

$$\delta_k\colon H_k(\widehat{C}_*) \to H_{k-1}(C^0_*)$$

и называть *связывающим гомоморфизмом.*

Упражнение 4°. Покажите, что δ_k действительно гомоморфизм.

Конструкцию связывающего гомоморфизма можно дополнить, положив δ_0: $H_0(\widehat{C}_*) \to 0$.

Лемма 1. *Последовательность* (4) *точна.*

Доказательство сводится к прямой проверке соотношений

$$\operatorname{Im} \delta_{k+1} = \operatorname{Ker} i_{*k}, \quad \operatorname{Im} i_{*k} = \operatorname{Ker} j_{*k}, \quad \operatorname{Im} j_{*k} = \operatorname{Ker} \delta_k$$

и предоставляется читателю.

Упражнение 5° (С. Ленг). Возьмите любую книгу по гомологической алгебре и докажите все теоремы, не заглядывая в доказательства, данные в книге.

§ 3. Группы гомологий симплициальных комплексов

Применим алгебраическую технику, развитую в § 2, к построению групп гомологий геометрических объектов.

1. Симплициальные комплексы и полиэдры. Сначала дадим необходимые определения.

Определение 1. *Стандартным k-мерным симплексом* σ^k, $k \geqslant 0$, называется выпуклое замыкание $k+1$ точек в $\mathbb{R}^{k+1}$ с координатами $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, т. е. совокупность точек с координатами $(t_0, \ldots, t_k)$ таких, что $t_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Определение 2. *Симплексом размерности k* или *k-мерным симплексом* $\tau^k = (a^0, a^1, \ldots, a^k)$ называется выпуклое замыкание $k+1$ точек $a^0, \ldots, a^k$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$, находящихся в общем положении (не лежащих в одной m-плоскости размерности, меньшей k), т. е. совокупность точек вида $x = \sum\limits_{i=0}^{k} t_i a^i$, где $t_i \geqslant 0$ для всех i, $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Точки a^i называются *вершинами сиплекса* $(a^0, \ldots, a^k)$, а числа t_i — *барицентрическими координатами точки* $x \in (a^0, \ldots, a^k)$.

Естественно определяется понятие грани симплекса.

Определение 3. *Гранью размерности s* или *s-мерной гранью k-мерного симплекса* τ^k, где $0 \leqslant s \leqslant k$, называется выпуклое замыкание подмножества из $s+1$ вершин симплекса τ^k.

Грани размерности $s < k$ симплекса τ^k размерности k будем называть *собственными.*

Очевидно, s-мерная грань симплекса является s-мерным симплексом. В частности, симплексами являются грани стандартного симплекса (и сам стандартный симплекс). Легко убедиться, что k-мерный симплекс афинно гомеоморфен стандартному симплексу той же размерности; внутренность (в несущей k-плоскости) симплекса τ^k можно рассматривать как частный случай k-мерной клетки.

Таким образом, можно строить клеточные комплексы из симплексов разной размерности. Наличие граней у симплекса позволяет соединить симплексы более упорядоченным способом, чем клетки в общем клеточном комплексе.

Определение 4. *Симплициальным комплексом* K называется множество $\{\tau_j^k\}$ симплексов в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) вместе с каждым симплексом τ_j^k в K входит любая его грань; 2) два симплекса могут пересекаться лишь по их общей грани.

Симплициальный комплекс называется *конечным*, если он состоит из конечного числа симплексов.

Рассмотрим теоретико-множественное объединение $|K| \subset \mathbb{R}^n$ всех симплексов из K. Введем в множестве $|K|$ топологию, сильнейшую из тех, в которых отображение вложения каждого симплекса в $|K|$ непрерывно. Другими словами, множество $A \subset |K|$ замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap \tau_i^k$ замкнуто в τ_i^k для всякого $\tau_i^k \in K$. Если симплициальный комплекс K конечен, то эта топология совпадает с топологией, индуцированной метрикой $\mathbb{R}^n$.

Определение 5. Пространство $|K|$ и, более общим образом, всякое топологическое пространство X, гомеоморфное $|K|$, называется *полиэдром*.

Определение 6. *Триангуляцией полиэдра* X называют симплициальный комплекс K такой, что пространство $|K|$ гомеоморфно X.

Примерами полиэдров являются замкнутые поверхности (см. § 4 гл. II). Их триангуляция задается разбиением поверхности на топологические треугольники, их ребра и вершины.

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс K. Фиксируем в пространстве $|K| \subset \mathbb{R}^n$ метрику из $\mathbb{R}^n$. Очевидно, существуют различные триангуляции пространства $|K|$. Пусть K' — некоторая триангуляция $|K|$. *Мелкостью триангуляции* K' называют наибольшую из длин входящих в K' одномерных симплексов.

Упражнения. 1°. Докажите, что полиэдр является: а) нормальным пространством; б) конечным клеточным комплексом.

2°. Докажите, что если K — конечный симплициальный комплекс, то пространство $|K|$ является: а) компактным пространством; б) конечным клеточным комплексом.

3°. Докажите, что симплициальный комплекс K конечен тогда и только тогда, когда полиэдр $|K|$ компактен.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем конечные симплициальные комплексы и компактные полиэдры. Легко видеть, что компактный полиэдр является метризуемым пространством.

Пусть X — полиэдр, K — симплициальный комплекс и $\varphi\colon |K| \to X$ — гомеоморфизм. Гомеоморфизм φ порождает разбиение (триангуляцию) пространства X на множества $\sum\limits_i^k = \varphi(\tau_i^k)$, $\tau_i^k \in K$, которые называют *криволинейными симплексами*; образы вершин симплекса τ_i^k назовем *вершинами криволинейного симплекса* $\sum\limits_i^k$.

Упражнения. 4°. Покажите, что симплициальными комплексами являются: а) множество $\{\tau^n\}$ — совокупность симплекса τ^n и всех его граней, $|\{\tau^n\}| = \tau^n$; б) множество $\{\partial\tau^n\}$ — совокупность собственных граней симплекса τ^n, $|\{\partial\tau^n\}|$ совпадает с границей $\partial\tau^n$ множества τ^n в несущей n-плоскости.

5°. Покажите, что замкнутый диск $\bar{D}^n$ и сфера S^{n-1} являются полиэдрами, и задайте их разбиение на криволинейные симплексы.

Указание. Рассмотрите гомеоморфизм симплекса τ^n на $\bar{D}^n$ и воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения. Гомеоморфизм можно задать так: рассмотрим симплекс $\tau^n = (a^0, a^1, \ldots, a^n) \subset \mathbb{R}^n$, где

$$\begin{aligned}
&a^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad a^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \quad \ldots,\\
&a^n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1),\\
&a^0 = (-1, -1, -1, \ldots, -1, -1).
\end{aligned}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $x \neq \theta$. Положим $\lambda(x) = \sup\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\frac{x}{\|x\|} \in \tau^n\right\}$. Тогда для $x \in \bar{D}^n$ определим отображение $\psi\colon \bar{D}^n \to \tau^n$ так:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0,\\ \lambda(x)\cdot x & \text{при} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что ψ — гомеоморфизм; требуемые разбиения на криволинейные симплексы задает обратный к нему.

2. Гомологии симплициальных комплексов и полиэдров. Сопоставим теперь симплициальному комплексу K некоторый цепной комплекс. Занумеруем вершины каждого симплекса $\tau_i^k \in K$ числами $0, 1, \ldots, k$ в каком-либо порядке $a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}$. Таких нумераций будет $(k+1)!$ Две нумерации называют эквивалентными, если от одной можно перейти к другой четным числом транспозиций номеров. Множество всех нумераций распадается на два класса эквивалентности, один из которых обозначим Λ_i^+, другой Λ_i^-.

Определение 7. Симплекс τ^k с указанием одного из классов Λ^+, Λ^-, т. е. одна из пар (τ^k, Λ^+), (τ^k, Λ^-), называется *ориентированным симплексом*, а соответствующий класс — его *ориентацией*.

Удобнее записывать ориентированный симплекс $\left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right)$ иначе, а именно, задать какую-нибудь нумерацию $a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}$ из класса ориентации и обозначить так:

$$\left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right) = \left[a^{i_0}, a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\right];$$

тогда

$$\left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right) = \left[a^{i_1}, a^{i_0}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\right].$$

Определение 8. *Группой k-мерных цепей* C_k $(K; G)$ симплициального комплекса K с коэффициентами в абелевой группе G называется факторгруппа группы формальных линейных комбинаций (конечных) вида $\sum\limits_i g_i \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i\right)$, $g_i \in G$, $\Lambda_i = \Lambda_i^+$ или $\Lambda_i = \Lambda_i^-$, по подгруппе элементов вида

$$g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right) + g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right) \qquad (1)$$

и их линейных комбинаций.

Другими словами, мы отождествляем элементы $g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right)$, $-g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right)$ в группе формальных линейных комбинаций ориентированных симплексов.

Дифференциал

$$\partial_k \colon C_k(K; G) \to C_{k-1}(K; G)$$

определим равенством

$$\partial_k\left(g \cdot [a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}]\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{j-1}}, a^{i_{j+1}}, \ldots, a^{i_k}] \quad (2)$$

для каждого ориентированного симплекса и распространим на всю группу $C_k(K; G)$ по аддитивности. Для $k = 0$ положим ∂_0: $C_0(K; G) \to 0$.

Предложение 1. *Для всех* $k \geqslant 1$ *выполняется равенство* $\partial_{k-1}\partial_k = 0$.

Доказательство. Действительно, в сумму $\partial_{k-1}\partial_k(g \cdot [a^{i_0}, \ldots$ $\ldots, a^{i_k}])$ входят одновременно слагаемые

$$(-1)^p(-1)^{q-1} g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{p-1}}, a^{i_{p+1}}, \ldots, a^{i_{q-1}}, a^{i_{q+1}}, \ldots, a^{i_k}]$$

и

$$(-1)^p(-1)^q g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{p-1}}, a^{i_{p+1}}, \ldots, a^{i_{q-1}}, a^{i_{q+1}}, \ldots, a^{i_k}],$$

которые взаимно уничтожаются. ■

Итак, группы $C_k(K; G)$ и дифференциалы ∂_k образуют цепной комплекс, обозначаемый $C_*(K; G)$. В качестве G можно взять, например, группу $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Определение 9. Группы гомологий цепного комплекса $C_*(K;\,G)$ называются *группами гомологий симплициального комплекса K* с коэффициентами в абелевой группе G и обозначаются $H_k(K;\,G)$.

Определение 10. *Группами гомологий $H_k(X;\,G)$ полиэдра X* с коэффициентами в абелевой группе G называются группы гомологий триангуляции K полиэдра X с коэффициентами в G.

Корректность (независимость от выбора триангуляции) этого определения доказывается технически сложно; мы отложим обсуждение этих вопросов до § 5.

3. Вычисление гомологий конкретных полиэдров. Вычислим группы гомологий $H_k(\tau^n;\,G)$ полиэдра τ^n. Очевидно, для τ^0 — пространства, состоящего из одной точки, имеем

$$C_k(\{\tau^0\};\,G) = \operatorname{Ker}\partial_k = \operatorname{Im}\partial_k = 0 \quad \text{при} \quad k > 0,$$

$$C_0(\{\tau^0\};\,G) = \operatorname{Ker}\partial_0 \simeq G.$$

Отсюда получаем группы гомологий

$$H_k\ (\tau^0;\,G) = 0 \quad \text{при} \quad k > 0; \quad H_0(\tau^0;\,G) \simeq G. \tag{3}$$

Перед вычислением $H_k(\tau^n;\,G)$ при $n > 0$ решим более общую задачу. Рассмотрим симплициальный комплекс K, лежащий в гиперплоскости $\Pi^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ и точку $a \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\Pi^m$. *Косинусом aK над комплексом K с вершиной a* будем называть совокупность симплексов, состоящую из симплексов $\tau_i^k \in K$, симплекса a и симплексов вида $(a,\,\tau_i^k)$, т. е. таких симплексов $(a,\,a^{i_0},\,\dots,\,a^{i_k})$, что $\tau_i^k = (a^{i_0},\,\dots,\,a^{i_k})$ — некоторый симплекс из K.

Упражнение 6°. Покажите, что aK — симплициальный комплекс.

Предложение 2. *Пусть aK — косинус с вершиной a над симплициальным комплексом K; тогда*

$$H_k(aK;\,G) = 0 \quad \text{при} \quad k > 0; \quad H_0(aK;\,G) \simeq G. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную 0-мерную цепь $g\cdot a + \sum\limits_i g_i a^i$ из $C_0(aK;\,G) = \operatorname{Ker}\ \partial_0$; имеем

$$g\cdot a + \sum_i g_i a^i = \left(g + \sum_i g_i\right)\cdot a + \sum_i\,(g_i\cdot a_i - g_i\cdot a).$$

Ввиду равенства

$$\sum_i\,(g_i\cdot a^i - g_i\cdot a) = \partial_1(\,\sum_i g_i\cdot[a,\,a^i])$$

произвольный цикл $g\cdot a+\sum\limits_i g_i\cdot a^i$ из $\operatorname{Ker}\partial_0$ гомологичен циклу $g'\cdot a=\left(g+\sum\limits_i g_i\right)\cdot a$, который при $g'\neq 0$ не гомологичен нулю в группе $C_0(aK;\,G)$. Получаем изоморфизм $H_0(aK;\,G)\simeq G$.

Рассмотрим теперь произвольный k-мерный цикл в $C_k(aK,\,G)$

$$z_k=\sum_i g_i\cdot[\tau_i^k]+\sum_i h_i\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]\in\operatorname{Ker}\partial_k,$$

где $i\in I_k$, $j\in I_{k-1}$, g_i, $h_j\in G$ и через $[\tau_i^k]$, $[a,\,\tau_i^{k-1}]$ обозначены ориентированные симплексы. Имеем

$$\sum_i g_i\cdot[\tau_i^k]\sim\sum_i\left(g_i\cdot[\tau_i^k]-\partial_{k+1}(g_i\cdot[a,\,\tau_i^k])\right)=\sum_i g_j'\cdot[a\cdot\tau_j^{k-1}].$$

Поэтому цикл z_k гомологичен циклу

$$z_k'=\sum_j h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]=\sum_j(g_j'+h_j)\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}].$$

В сумму $\partial_k\left(\sum\limits_j h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]\right)$ симплекс $[\tau_j^{k-1}]$ входит с коэффициентом h_j' (только один раз!). Поэтому $\sum\limits_j h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]$ — цикл тогда и только тогда, когда $h_j'=0$ для всех j.

Итак, мы установили, что в $C_*(aK;\,G)$ при $k>0$ всякий цикл из $\operatorname{Ker}\partial_k$ гомологичен нулю в $C_k(aK;\,G)$. Следовательно, $H_k(aK;\,G)=0$ при $k>0$. ■

Заметим, что комплекс $\{\tau^n\}$, соответствующий симплексу $\tau^n=(a^0,\,\ldots,\,a^n)$, является конусом $a^0\{\tau^{n-1}\}$ с вершиной a^0 над комплексом $\{\tau^{n-1}\}$, соответствующим симплексу $\tau^{n-1}=(a^1,\,\ldots,\,a^n)$. Поэтому из равенств (3) и (4) получаем группы гомологий n-мерного симплекса:

$$H_k(\tau^n;\,G)\simeq\begin{cases}0 & \text{при}\quad k>0,\\ G & \text{при}\quad k=0\end{cases}\tag{5}$$

для всех $n\geqslant 0$.

Перейдем к вычислению групп гомологий $H_k(|\{\partial\tau^n\}|;\,G)$ полиэдра $|\{\partial\tau^n\}|$, триангуляция $\{\partial\tau^n\}$ которого состоит из всех собственных граней симплекса τ^n. Рассмотрим случай $n>1$. Тогда при $k<n$ имеем $C_k(\{\partial\tau^n\};\,G)=C_k(\{\tau^n\};\,G)$, и дифференциалы цепных комплексов $C_*(\{\partial\tau^n\};\,G)$ и $C_*(\{\tau^n\};\,G)$ совпадают при $k<n$. Поэтому при $k<n-1$

$$H_k(\{\partial\tau^n\};\,G)\simeq H_k(\{\tau^n\};\,G).\tag{6}$$

Очевидно, при $k > n - 1$

$$H_k(\{\partial\tau^n\}; G) = 0. \tag{7}$$

Поскольку $H_{n-1}(\{\tau^n\}; G) = 0$, всякий цикл $z_{n-1} \in C_{n-1}(\{\tau^n\}; G)$ является границей $\partial_n(g \cdot [\tau^n])$ цепи $g \cdot [\tau^n] \in C_n(\{\tau^n\}; G)$, а следовательно, в комплексе $C_*(\{\tau^n\}; G)$ имеем $\operatorname{Ker} \partial_{n-1} = \operatorname{Im} \partial_n \simeq G$. Дифференциалы в комплексах $C_*(\{\tau^n\}; G)$ и $C_*(\{\partial\tau^n\}; G)$ совпадают на группах цепей $C_{n-1}(\{\tau^n\}; G) = C_{n-1}(\{\partial\tau^n\}; G)$. Значит, в $C_*(\{\partial\tau^n\}; G)$ группа $\operatorname{Ker} \partial_{n-1}$ изоморфна группе G, в то время как $\operatorname{Im} \partial_n = \partial_n(C_n(\{\partial\tau^n\}; G)) = 0$; следовательно,

$$H_{n-1}(\{\partial\tau^n\}; G) \simeq G. \tag{8}$$

Итак, при $n > 1$ вычислены гомологии границы n-мерного симплекса:

$$H_k(|\{\partial\tau^n\}|; G) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq 0, n-1, \\ G & \text{при} \quad k = 0, n-1. \end{cases} \tag{9}$$

Упражнение 7°. Докажите, что

$$H_k(|\{\partial\tau^1\}|; G) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k > 0, \\ G \oplus G & \text{при} \quad k = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Остановимся на наглядной геометрической интерпретации групп гомологий симплициального комплекса. Цикл из $C_k(K; \mathbb{Z})$ является набором k-мерных симплексов из K, каждый из которых взят с некоторой кратностью; этот набор замкнут в том смысле, что каждый $(k-1)$-мерный симплекс входит в границу k-мерного цикла одинаковое число раз с противоположными ориентациями. Два k-мерных цикла эквивалентны (гомологичны), если их разность является границей $(k+1)$-мерной цепи, т. е. ограничивает некоторый набор $(k+1)$-мерных симплексов; группа $H_k(|K|;\mathbb{Z})$ — группа классов эквивалентности таких k-мерных циклов. Грубо говоря, $H_k(|K|; \mathbb{Z})$ состоит из тех замкнутых совокупностей k-мерных симплексов, которые нельзя «заклеить» совокупностями $(k+1)$-мерных симплексов. Таким образом, интуитивно группа $H_k(|K|; \mathbb{Z})$ соответствует группе, порожденной $(k+1)$-мерными «дырками» в пространстве $|K|$.

Определение 11. *Подкомплексом* симплициального комплекса называется подмножество L симплексов из K, являющееся симплициальным комплексом.

Пусть L — подкомплекс симплициального комплекса K. Очевидно, $C_*(L; G)$ является подкомплексом цепного комплекса $C_*(K; G)$. Поэтому определен факторкомплекс

$$C_*(K, L; G) = C_*(K; G)/C_*(L; G).$$

Обозначая группы гомологий этого цепного комплекса через $H_k(K, L; G)$, получим из точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to C_*(L; G) \xrightarrow{i_*} C_*(K; G) \xrightarrow{j_*} C_*(K, L; G) \to 0$$

длинную точную последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_{k+1}(K, L; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(L; G) \xrightarrow{i_{*k}}$$

$$\to H_k(K; G) \xrightarrow{i_{*k}} H_k(K, L; G) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(L; G) \to \ldots$$

Она называется *точной последовательностью пары* (K, L), группы $H_k(K, L; G)$ называются *относительными группами гомологий* или *группами гомологий пары* (K, L).

Определение относительных групп гомологий полезно «расшифровать».

Поскольку цепь $\widehat{\gamma}_k$ из $C_k(K, L; G)$ есть смежный класс группы $C_k(K; G)$ по подгруппе $i_k(C_k(L; G)) \simeq C_k(L; G)$, в смежном классе $\widehat{\gamma}_k$ существует единственный представитель — цепь γ_k из $C_k(K; G)$, в которую с ненулевыми коэффициентами входят лишь те ориентированные симплексы комплекса K, которые не являются ориентированными симплексами подкомплекса L. Из определения граничного гомоморфизма в факторкомплексе следует, что граничный гомоморфизм ∂_k: $C_k(K, L; G) \to C_{k-1}(K, L; G)$ переводит цепь $\widehat{\gamma}_k$ в цепь $\widehat{\gamma}_{k-1}$, являющуюся смежным классом группы $C_{k-1}(K; G)$ по подгруппе $i_{k-1}(C_{k-1}(L; G)) \simeq C_{k-1}(L; G)$ с представителем $\partial_k\gamma_k \in C_{k-1}(K, G)$. Отбросим в цепи $\partial_k\gamma_k$ все слагаемые $g_m[\tau_m^{k-1}]$, для которых τ_m^{k-1} — симплекс из L. Полученная цепь γ_{k-1}, очевидно, принадлежит тому же самому смежному классу $\widehat{\gamma}_{k-1}$, что и цепь $\widehat{\partial_k\gamma_k}$.

Ясно, что цепной комплекс $C_*(K, L; G)$ изоморфен следующему цепному комплексу $\widetilde{C}_*$: цепи — это формальные линейные комбинации ориентированных симплексов (в смысле определения 8) из $K\backslash L$, граничный гомоморфизм сопоставляет k-мерной цепи γ_k цепь размерности $k-1$, получаемую вычислением на γ_k значения граничного гомоморфизма ∂_k (в цепном комплексе $C_*(K; G)$) и отбрасыванием всех лишних слагаемых $g_m \cdot [\tau_m^{k-1}]$, для которых τ_m^{k-1} принадлежит L. Поскольку изоморфизм цепных комплексов индуцирует изоморфизм групп гомологий, то $H_k(\widetilde{C}_*) \simeq H_k(K, L; G)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, мы пришли к более наглядному определению групп гомологий пары. Отметим, что цепи, циклы и границы комплекса $\widetilde{C}_*$ называются относительными (для пары (K, L)).

Теперь выясним геометрический смысл связывающего гомоморфизма

$$\delta_k\colon H_k(K, L; G) \to H_{k-1}(L; G).$$

Пусть $\tilde{h}_k \in H_k(K, L; G)$ — класс гомологий относительного цикла $z_k \in \tilde{C}_k$. Рассмотрим z_k как цепь в $C_*(K; G)$ и вычислим в нем ее границу $\partial_k z_k$. По определению относительного цикла в цепь $\partial_k z_k$ после приведения подобных войдут с ненулевыми коэффициентами лишь ориентированные симплексы из L. Поэтому $\partial_k z_k$ можно рассматривать как цепь в $C_*(L; G)$. Без труда проверяется, что $\partial_k z_k$ — цикл, класс гомологий которого $h_{k-1} \in H_{k-1}(L; G)$ не зависит от выбора представителя z_k класса $\tilde{h}_k$. Согласно общей конструкции связывающего гомоморфизма (§ 2) $\delta_k \tilde{h}_k = h_{k-1}$. Если относительный цикл представлять себе как составленное из k-мерных ориентированных симплексов многообразие с краем, лежащим в L, то $\partial_k z_k$ — именно этот край с соответствующими ориентациями $(k-1)$-мерных симплексов.

Пример (рис. 125). Пусть симплициальный комплекс состоит из симплексов

$$a^0,\ a^1, a^2,\ a^3,$$
$$(a^0, a^1),\ (a^1, a^2),\ (a^2, a^3),\ (a^3, a^0),\ (a^1, a^3),$$
$$(a^0, a^1, a^3),\ (a^1, a^2, a^3),$$

а его подкомплекс L состоит из тех же симплексов, кроме

$$(a^1, a^3),\quad (a^0, a^1, a^3),\quad (a^1, a^2, a^3).$$

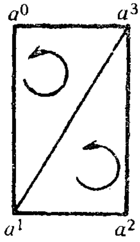


Рис. 125

Таким образом, $|K|$ — это прямоугольник (с «внутренностью»), а $|L|$ — его граница. Очевидно, цепь $\gamma_2 \in C_2(K; \mathbb{Z})$,

$$\gamma_2 = [a^0, a^1, a^3] + [a^1, a^2, a^3],$$

является относительным циклом пары (K, L). Действительно, в ее границу

$$\partial_2\gamma_2 = [a^3, a^0] + [a^0, a^1] + [a^1, a^2] + [a^2, a^3]$$

входят с ненулевыми коэффициентами лишь ориентированные симплексы из подкомплекса L. Цепь $\gamma_1 = [a^1, a^3]$ из $C_1(K; \mathbb{Z})$ является одновременно относительным циклом (проверьте!) и относительной границей, так как может быть получена из

$$\partial_2[a^0, a^1, a^3] = [a^1, a^3] + [a^3, a^0] + [a^0, a^1]$$

отбрасыванием слагаемых $[a^3, a^0]$ и $[a^0, a^1]$ — ориентированных симплексов из подкомплекса L. Нетрудно видеть, что относительный цикл γ_2 определяет образующую группы $H_2(K, L; \mathbb{Z})$. Связывающий гомоморфизм δ_2: $H_2(K, L; \mathbb{Z}) \to H_1(L; \mathbb{Z})$ сопоставляет этой образующей элемент (также образующий) группы $H_1(L; \mathbb{Z})$, состоящий из одного цикла $\delta_2\gamma_2$.

Упражнения. 8°. Напишите точную последовательность пары (K, L) для рассмотренного примера.

9°. Пусть L_1 и L_2 — подкомплексы симплициального комплекса K. Докажите, что $L_1 \cap L_2$ и $L_1 \cup L_2$ — также подкомплексы комплекса K, и установите точность последовательности

$$0 \to C_*(L_1 \cap L_2; G) \xrightarrow{l_*} C_*(L_1; G) \oplus C_*(L_2; G) \to C_*(L_1 \cap L_2; G) \to 0,$$

где $l_k\left(\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k]\right) = \left(\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k],\ -\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k]\right)$. Выведите отсюда точную последовательность

$$\ldots \to H_{k+1}(L_1 \cup L_2; G) \to H_k(L_1 \cap L_2; G) \to$$
$$\to H_k(L_1; G) \oplus H_k(L_2; G) \to H_k(L_1 \cup L_2; G) \to$$
$$\to H_{k-1}(L_1 \cap L_2; G) \to \ldots \qquad (11)$$

называемую *точной последовательностью Майера—Виеториса.*

Точная последовательность (11) позволяет вычислять группы гомологий сложных симплициальных комплексов.

10°. Используя (5), (9), (10) и (11), вычислите группы гомологий комплекса, состоящего из симплексов размерности 0 и 1, изображенного на рис. 126.

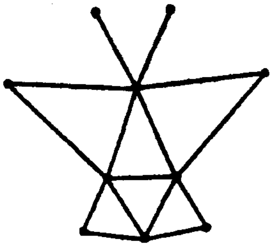


Рис. 126

Указание. Рассмотрите комплекс как последовательное объединение подкомплексов.

11°. Покажите, что для ориентируемой поверхности M_p рода p имеем изоморфизм $H_2(M_p; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Указание. Покажите, что любой 2-мерный цикл кратен циклу, равному сумме всех криволинейных 2-симплексов триангуляции M_p, взятых с согласованной ориентацией.

Отметим, что для любого линейно связного полиэдра X оказывается $H_0(X; G) \sim G$. Действительно, если a — вершина триангуляции K полиэдра X, то всякий цикл из $C_0(K; G)$ гомологичен циклу вида $g \cdot a$, не гомологичному нулю при $g \neq 0$; для цикла вида $\sum\limits_i g_i a^i$ такая гомологичность легко устанавливается с помощью последовательностей одномерных симплексов, «ведущих» от точек a^i к точке a. Более общим образом, для любого полиэдра X группа $H_0(X; G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько компонент связности имеет полиэдр (заметим, что для полиэдров понятия связности и линейной связности эквивалентны, т. е. связный полиэдр линейно связен).

Используя корректность определения групп гомологий полиэдра, мы можем провести ряд интересных вычислений. Прежде всего заметим, что в силу определений 5, 6 группы гомологий гомеоморфных полиэдров одинаковы (изоморфны).

Поэтому группы гомологий замкнутого n-мерного диска (и n-мерного куба) совпадают с группами гомологий симплекса τ^n, а группы гомологий $(n-1)$-мерной сферы (и границы n-мерного куба) совпадают с группами гомологий полиэдра $|\{\partial\tau^n\}|$ — границы симплекса (см. упр. 4°, 5° и формулы (5), (9), (10)).

С помощью точной последовательности (11) нетрудно вычислить группы гомологий полиэдра $C = S^1 \times [0; 1]$ — цилиндра над окружностью. Разрежем вдоль образующих отрезков I_1 и I_2 цилиндр на два искривленных прямоугольника, P_1 и P_2, с общей границей $I_1 \cup I_2$ и запишем точную последовательность (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$)

$$0 \to C_*(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to C_*(P_1; \mathbb{Z}) \oplus C_*(P_2; \mathbb{Z}) \to C_*(P_1 \cup P_2; \mathbb{Z}) \to 0;$$

в группах гомологий получаем точную последовательность (Майера—Виеториса)

$$\begin{aligned} 0 \to H_2(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to H_2(P_1; \mathbb{Z}) \oplus H_2(P_2; \mathbb{Z}) \to \\ \to H_2(C; \mathbb{Z}) \to H_1(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to H_1(P_1; \mathbb{Z}) \oplus \\ \oplus H_1(P_2; \mathbb{Z}) \to H_1(C; \mathbb{Z}) \to H_0(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to \\ \to H_0(P_1; \mathbb{Z}) \oplus H_0(P_2; \mathbb{Z}) \to H_0(C; \mathbb{Z}) \to 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 0 \to 0 \oplus 0 \to 0 \oplus 0 \to H_2(C; \mathbb{Z}) \to 0 \oplus 0 \to 0 \oplus 0 \to H_1(C; \mathbb{Z}) \to \\ \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $H_2(C; \mathbb{Z}) = 0$ и $H_1(C; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Итак,

$$H_i(C; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 0, 1, \\ 0 & \text{при} \quad i = 2. \end{cases}$$

Теперь нетрудно вычислить группы гомологий тора $T^2 \simeq S^1 \times S^1$. Разобьем тор на два искривленных цилиндра, C_1 и C_2, пересекающихся по основаниям S^1_1 и S^1_2. Получим точную последовательность

$$0 \to C_*(S^1_1 \cup S^1_2; \mathbb{Z}) \to C_*(C_1; \mathbb{Z}) \oplus C_*(C_2; \mathbb{Z}) \to C_*(T^2; \mathbb{Z}) \to 0,$$

в группах гомологий имеем точную последовательность

$$0 \to H_2(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to H_2(C_1; \mathbb{Z}) \oplus H_2(C_2; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to H_2(T^2; \mathbb{Z}) \to H_1(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to H_1(C_1; \mathbb{Z}) \oplus$$
$$\oplus H_1(C_2; \mathbb{Z}) \to H_1(T^2; \mathbb{Z}) \to H_0(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to H_0(C_1; \mathbb{Z}) \oplus H_0(C_2; \mathbb{Z}) \to H_0(T^2; \mathbb{Z}) \to 0;$$

поскольку тор T^2 линейно связен, то $H_0(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, а в силу упражнения 11° $H_2(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, поэтому получаем точную последовательность

$$0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(T^2; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0,$$

откуда следует, что $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Итак,

$$H_i(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i > 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 0, 2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 1. \end{cases}$$

Упражнения. 12°. Покажите, что для ориентируемой поверхности M_p рода p имеем

$$H_1(M_p; \mathbb{Z}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{2p}.$$

Указание. Рассмотрите M_p как результат приклеивания к сфере S^2 с $2p$ дырками p ручек («искривленных цилиндров») и примените точную последовательность Майера—Виеториса.

13°. Покажите, что

$$H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

и

$$h_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 1, 2, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Указание. Используйте симплициальное разбиение $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

14°. Покажите, что для неориентируемой поверхности N_q рода q

$$H_k(N_q; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

15°. Покажите, что

$$H_k(M_p; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 2, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{2p}, & k = 1, \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

и

$$H_k(N_q; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 2, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{q}, & k = 1, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

4. Барицентрические подразделения. Симплициальные отображения. Пусть $\tau^k = (a^0, \ldots, a^k)$ — k-мерный комплекс. *Барицентром симплекса* τ^k называется точка с барицентрическими координатами $1/(k+1), \ldots, 1/(k+1)$. Обозначим эту точку $b^{0, 1, \ldots, k}$; более общим образом, обозначим через $b^{i_0, \ldots, i_p}$ точку, барицентрические координаты t_i которой определены следующим образом:

$$t_i = \begin{cases} \dfrac{1}{p+1}, & i = i_0, \ldots, i_p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для всевозможных наборов $a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}$ из $p+1$ вершин $(0 \leqslant p \leqslant k)$ соответствующие им точки $b^{i_0, \ldots, i_p}$ являются барицентрами p-мерных граней $(a^{i_0}, \ldots, a^{i_p})$ симплекса τ^k (0-мерные грани — это вершины a^i, а k-мерная грань — сам симплекс τ^k). Рассмотрим всевозможные симплексы вида

$$(b^{i_0, i_1, \ldots, i_p}, \quad b^{i_0, i_1, \ldots, i_{p-1}}, \ldots, b^{i_0, i_1}, b^{i_0}), \\ 0 \leqslant p \leqslant k.$$

Совокупность всех таких симплексов и их граней образует симплициальный комплекс, называемый *барицентрическим подразделением симплекса* τ^k (рис. 127).

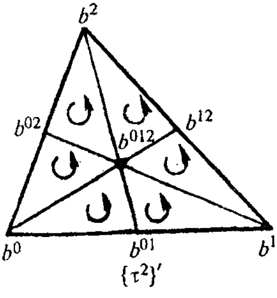


Рис. 127

Пусть k — симплициальный комплекс. Барицентрические подразделения всех его симплексов образуют симплициальный комплекс K', называемый *барицентрическим подразделением комплекса* K. Мы будем рассматривать также симплициальные комплексы $K^{(2)} = (K')', \ldots K^{(r)} = (K^{(r-1)})'$.

Операция барицентрического подразделения комплекса определяет цепной гомоморфизм

$$\Xi_*\colon C_*(K; G) \to C_*(K'; G).$$

На вершинах a^i гомоморфизм Ξ_0 определяется формулой

$$\Xi_0(g\cdot a^i) = g\cdot a^i, \tag{12}$$

а на симплексах большей размерности он может быть определен индуктивно формальным соотношением

$$\Xi_p\left(g\cdot[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}]\right) = \left[b^{i_0, \ldots, i_p}, \Xi_{p-1}\partial_p\left(g\cdot[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}]\right)\right], \tag{13}$$

которое означает, что если выполняется равенство

$$\Xi_{p-1}\partial_p\left(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]\right) = \sum_i g_k\cdot\left[c_k^{j_0}, \ldots, c_k^{j_{p-1}}\right],$$

то имеем

$$\Xi_p\left(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]\right) = \sum_k g_k\cdot\left[b^{i_0, \ldots, i_p}, c_k^{j_0}, \ldots, c_k^{j_{p-1}}\right].$$

Затем Ξ_p можно по линейности распространить на всю группу $C_p(K; G)$. Нетрудно проверить, что Ξ_* — цепной гомоморфизм.

Наряду с Ξ_*: $C_*(K; G) \to C_*(K'; G)$ естественно определены гомоморфизмы

$$\Xi_*^{(r)}\colon C_*(K; G) \to C_*(K^{(r)}; G).$$

Пусть K и L — симплициальные комплексы. Отображение f: $K \to L$ называется *симплициальным*, если образом каждого симплекса τ^k из K является некоторый симплекс из L и отображение $f\big|_{\tau^k}$ линейно в барицентрических координатах:

$$f\left(t_0a^{i_0} + \ldots + t_ka^{i_k}\right) = t_0f(a^{i_0}) + \ldots + t_kf(a^{i_k}).$$

Понятия барицентрического подразделения и симплициального отображения имеют смысл и при рассмотрении полиэдров, составленных из криволинейных симплексов, поскольку барицентрические координаты могут быть перенесены на криволинейные симплексы с помощью гомеоморфизма триангуляции.

Пусть f: $|K| \to |L|$ — симплициальное отображение. Определим гомоморфизмы

$$\hat{f}_p\colon C_p(K; G) \to C_p(L; G)$$

следующим образом: для каждого симплекса $\left(a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right) \in K$ положим

$$\hat{f}_p(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]) = \begin{cases} g\cdot\left[fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right], & \text{если } \left(fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right) \text{ — симплекс размерности } p; \\ 0, & \text{если } \left(fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right) \text{ — симплекс размерности, меньшей чем } p, \end{cases}$$

и распространим $\hat{f}_p$ по линейности на $C_p(K; G)$.

Упражнения. 16°. Покажите, что совокупность гомоморфизмов $\{\hat{f}_p\}$ является гомоморфизмом цепных комплексов

$$\hat{f}_*\colon C_*(K;\, G) \to C_*(L;\, G)$$

и, следовательно, индуцирует гомоморфизмы

$$f_{*p}\colon H_p(K;\, G) \to H_*(L;\, G).$$

17°. Покажите, что симплициальные отображения являются морфизмами категории, объектами которой являются симплициальные комплексы, а соответствие

$$K \dashrightarrow H_p(K;\, G),$$

$$f\colon K \dashrightarrow f_{*p}\colon H_p(K;\, G) \to H_p(L;\, G)$$

является ковариантным функтором из описанной выше категории в категорию абелевых групп.

18°. Покажите, что соответствие, сопоставляющее абелевой группе G группу гомологий $H_p(K;\, G)$ симплициального комплекса K с коэффициентами в G, является ковариантным функтором из категории абелевых групп в эту же категорию.

§ 4. Сингулярная теория гомологий

1. Группы сингулярных гомологий. В этом параграфе будет построен еще один функтор из категории гомотопических типов пространств в категорию абелевых групп — гомологический функтор. Чтобы привлечь алгебраические конструкции § 2 для изучения топологического пространства, необходимо разработать способы построения цепных комплексов по заданному пространству X. В алгебраической топологии имеется несколько таких приемов, предполагающих выполнение тех или иных свойств для пространства X; изложим один из самых общих.

Сингулярным k-мерным симплексом топологического пространства X называется непрерывное отображение $f^k\colon \sigma^k \to X$ стандартного симплекса σ^k в топологическое пространство X.

Пусть G — кольцо с единицей *, например кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Формальная линейная комбинация $\sum\limits_i g_i f_i^k$ сингулярных k-мерных симплексов пространства X с коэффициентами g_i из G, лишь конечное число которых отлично от нуля, называется *k-мерной сингулярной цепью* пространства X. Множество всех k-мерных сингу-

---

* В качестве G можно было бы взять, как и в § 3, любую абелеву группу. Для удобства изложения, однако, полезно иметь коэффициент 1 с тем, чтобы не писать его вовсе (в § 3 мы не пользовались этим приемом).

лярных цепей X с коэффициентами в G обозначается $C_k^s(X;\ G)$. Оно является абелевой группой относительно сложения цепей как линейных комбинаций. Если $G = \mathbb{Z}$, то группа $C_k^s(X;\ \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа и ее образующими являются всевозможные сингулярные k-мерные симплексы.

Определим дифференциал

$$\partial_k^s\colon C_k^s(X;\ G) \to C_{k-1}^s(X;\ G).$$

Для этого рассмотрим стандартные $(k-1)$- и k-мерные симплексы σ^{k-1} и σ^k. Сопоставим точке

$$(t_0,\ \ldots,\ t_{i-1},\ t_i,\ \ldots,\ t_{k-1}) \in \sigma^{k-1}$$

точку

$$(t_0,\ \ldots,\ t_{i-1},\ 0,\ t_i,\ \ldots,\ t_{k-1}) \in \sigma^k.$$

Это сопоставление определяет отображение $\Delta_i^{k-1}\colon \sigma^{k-1} \to \sigma^k$, отображающее σ^{k-1} на i-ю $(k-1)$-мерную грань симплекса σ^k. Если f^k — k-мерный сингулярный симплекс, то суперпозиция $f^k\Delta_i^{k-1}$, очевидно, является $(k-1)$-мерным сингулярным симплексом. Для всякого симплекса f^k, $k \geqslant 1$, положим

$$\partial_k^s f^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (f^k \Delta_i^{k-1})$$

и определим гомоморфизм ∂_k^s на всей группе $C_k^s(X;\ G)$ по линейности:

$$\partial_k^s \left(\sum_i g_i f_i^k \right) = \sum_i g_i \partial_k^s f_i^k.$$

Если $k = 0$, то естественно положить $\partial_0^s f^0 = 0$ и в согласии с предыдущим продолжить ∂_0^s нулевым значением на $C_0^s(X;\ G)$.

Упражнение 1°. Проверьте, что $\partial_k^s \partial_{k+1}^s = 0$.

Указание. Достаточно проверить это равенство на произвольном симплексе f^{k+1}.

Как видим, последовательность групп $C_k^s(X;\ G)$ и гомоморфизмов ∂_k^s образует цепной комплекс, который мы обозначим $C_*^s(X;\ G)$. Он называется *сингулярным цепным комплексом* пространства X.

Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого k-мерного сингулярного симплекса $f^k\colon \sigma^k \to X$ пространства X суперпозиция φf^k является k-мерным сингулярным симплексом пространства Y. Очевидно, φ индуцирует гомоморфизм $\varphi_k\colon C_k^s(X;\ G) \to C_k^s(Y;\ G)$.

Упражнение 2°. Докажите, что система гомоморфизмов φ_k образует гомоморфизм цепных комплексов

$$\varphi_*\colon C_*^s(X;\ G)\to C_*^s(Y;\ G),$$

т. е. для $k\geqslant 1$ выполнены равенства $\bar\partial_k^s\varphi_k=\varphi_{k-1}\partial_k^s$, где ∂_k^s, $\bar\partial_k^s$ — дифференциалы комплексов $C_*^s(X;\ G)$, $C_*^s(Y;\ G)$.

Определение 1. Группы гомологий комплекса $C_*(X,\ G)$ называются *группами сингулярных гомологий пространства* X с коэффициентами в G; k-я группа гомологий обозначается $H_k^s(X;\ G)$, совокупность групп $\{H_k^s(X;\ G)\}_{k\geqslant 0}$ обозначается $H_*^s(X;\ G)$.

Пример. Вычислим группы гомологий точки $*$. Очевидно, что $C_k^s(*;\ G)\simeq G$, поскольку имеется лишь один сингулярный симплекс $f^k\colon \sigma^k\to *$ для всякого k. Значение дифференциала на нем при $k\geqslant 1$ вычисляем по формуле

$$\partial_k^s f^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot f^k\Delta_i^{k-1}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot f^{k-1}=\begin{cases}0 & \text{при нечетном } k,\\ f^{k-1} & \text{при четном } k.\end{cases}$$

Напомним, что $\partial_k^s=0$ при $k=0$. Отсюда получаем, что если k нечетно, то

$$\operatorname{Im}\partial_{k+1}^s=C_k^s(*;\ G)=\operatorname{Ker}\partial_k^s\simeq G,$$

если же k четно и не равно нулю, то

$$\operatorname{Im}\partial_{k+1}^s=\operatorname{Ker}\partial_k^s=0.$$

Наконец, $\operatorname{Im}\partial_1^s=0$, $\operatorname{Ker}\partial_0^s\simeq 0$; следовательно,

$$H_0^s(*;\ G)\simeq G;\quad H_i^s(*;\ G)\simeq 0,\quad i>0. \quad \blacklozenge \tag{1}$$

Поскольку непрерывное отображение $\varphi\colon X\to Y$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*\colon C_*^s(X;\ G)\to C_*^s(Y;\ G)$ сингулярных цепных комплексов пространств X и Y, оно индуцирует *гомоморфизмы групп сингулярных гомологий*

$$\varphi_{*k}\colon H_k^s(X;\ G)\to H_k^s(Y;\ G).$$

Упражнения. 3°. Покажите, что если $\varphi\colon X\to Y$, $\psi\colon Y\to Z$ — непрерывные отображения, то $(\psi\varphi)_{*k}=\psi_{*k}\varphi_{*k}$. Покажите, что тождественному отображению X соответствует тождественное отображение групп гомологий, т. е. $(1_X)_{*k}=1_{H_k^s(X;\ G)}$. Выведите отсюда, что группы гомологий гомеоморфных пространств совпадают (теорема о топологической инвариантности групп гомологий).

4°. Покажите, что постоянное отображение $X \to Y$, т. е. отображение, переводящее X в точку $y_0 \in Y$, индуцирует тривиальный (нулевой) гомоморфзм в группах гомологий старших размерностей, $k > 0$.

2. Свойства групп сингулярных гомологий. В п. 1 построен ковариантный функтор, точнее, совокупность функторов $H_*^s = \{H_k^s(\cdot\,; G)\}_{k \geqslant 0}$ из категории топологических пространств в категорию абелевых групп. Изучим важнейшие свойства этого функтора.

Теорема 1. *Пусть отображения* φ, ψ: $X \to Y$ *гомотопны. Тогда индуцированные гомоморфизмы групп гомологий совпадают.*

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* B *— выпуклое множество евклидова пространства; тогда*

$$H_*^s(B; G) \simeq H_*^s(*; G). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть f^k: $\sigma^k \to B$ — сингулярный симплекс. Определим сингулярный симплекс $D_k f^k$: $\sigma^{k+1} \to B$ равенством

$$D_k f(t_0, \ldots, t_{k+1}) = \\ = \begin{cases} t_0 w + (1 - t_0) f^k \left(\dfrac{t_1}{1 - t_0}, \ldots, \dfrac{t_{k+1}}{1 - t_0} \right) & \text{при} \quad t_0 \neq 1, \\ w & \text{при} \quad t_0 = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где w — точка из B, а t_i — барицентрические координаты точки из σ^{k+1}.

Продолжая D_k по линейности на всю группу $C_k^s(B; G)$, получаем гомоморфизм

$$D_k\colon C_k^s(B; G) \to C_{k+1}^s(B; G).$$

Из равенства (3) следует, что гомоморфизмы D_k и дифференциалы ∂_k^s связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\partial_{k+1}^s D_k = 1_{C_k^s(B;\, G)} - D_{k-1} \partial_k^s \quad \text{при} \quad k > 0, \\ &\partial_1^s D_0 f^0 = f^0 - h^0, \end{aligned} \tag{4}$$

где сингулярный симплекс h^0 отображает σ^0 в точку w из B.

Пусть $z_k \in \operatorname{Ker} \partial_k^s$, $k > 0$. Тогда в силу (4) имеем $\partial_{k+1}^s D_k z_k = z_k$, откуда следует, что $z_k \in \operatorname{Im} \partial_{k+1}^s$. Таким образом, $H_k^s(B; G) = 0$ при $k > 0$. Аналогично, 0-мерный цикл f^0 гомологичен циклу h^0, следовательно, $H_0^s(B; G) \simeq G$. ■

Конструкция, использованная в доказательстве леммы 1, весьма полезна. Дадим следующее определение.

Пусть C_*, C'_* — цепные комплексы, φ_*, ψ_*: $C_* \to C'_*$ — гомоморфизмы. *Цепной гомотопией*, связывающей φ_* с ψ_*, называется система гомоморфизмов $\{D_k\}$,

$$D_k\colon C_k \to C'_{k+1},$$

такая, что выполняется соотношение

$$\partial'_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k = \psi_k - \varphi_k, \quad D_{-1} \overset{\text{def}}{\equiv} 0. \tag{5}$$

Гомоморфизмы этого соотношения показаны на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "D_k"'] \arrow[d, "\psi_k - \varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "D_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизмы φ_* и ψ_* называются *цепно гомотопными*. Если $\{D_k\}$ — цепная гомотопия, связывающая φ_* и ψ_*, то для $z_k \in \operatorname{Ker} \partial_k$ имеем

$$(\psi_k - \varphi_k)z_k = \partial'_{k+1}D_k z_k \in \operatorname{Im} \partial'_{k+1}.$$

Отсюда следует, что гомоморфизмы групп гомологий, индуцируемые цепными гомоморфизмами φ_* м ψ_*, совпадают.

Упражнение 5°. Пусть цепные гомоморфизмы φ_*, ψ_*: $C_* \to C'_*$ и системы гомоморфизмов $\{D^1_k\}$, $\{D^2_k\}$, $D^i_k\colon C_k \to C'_{k+1}$, $i = 1, 2$, таковы, что $\partial'_{k+1}D^1_k + D^2_{k-1}\partial_k = \psi_k - \varphi_k$. Покажите, что гомоморфизмы групп гомологий, индуцируемые гомоморфизмами φ_* и ψ_*, совпадают.

Покажем, что гомотопные отображения топологических пространств индуцируют цепно гомотопные гомоморфизмы цепных комплексов. Для этого применим следующую конструкцию. Пусть X — топологическое пространство, $X \times I$ — цилиндр над ним; отображения α^X, β^X: $X \to X \times I$, определенные формулами

$$\alpha^X(x) = (x, 0), \quad \beta^X(x) = (x, 1),$$

естественно называть нижним и верхним основаниями цилиндра. Очевидно, α^X и β^X гомотопны.

Лемма 2. *Для всякого пространства X существует цепная гомотопия $\{D^X_k\}$, связывающая α^X_* с β^X_*, т. е.*

$$\beta^X_k - \alpha^X_k = D^X_{k-1}\partial^s_k + \partial^s_{k+1}D^X_k. \tag{6}$$

Доказательство. Построим цепную гомотопию $\{D^X_k\colon C^s_k(X; G) \to G^s_{k+1}(X \times I, G)\}$ индукцией по k.

Для $k=0$ положим $D_0^X f^0 = f^0 \times 1_I$, где сингулярный симплекс $f^0 \times 1_I$ определен формулой

$$f^0 \times 1_I(t_0, t_1) = (f^0(1), f_1),$$

и распространим $D_0^X f^0$ на $C_0^s(X; G)$ по линейности.

Для $k>0$ предположим, что гомоморфизмы D_m^X уже определены при $m<k$ для любого X и функториальны.

Рассмотрим цепь

$$c_k \in C_k^s(\sigma^k \times I; G), \quad c_k = \beta_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) - \alpha_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) - D_{k-1}^{\sigma^k}\partial_k^s(1_{\sigma^k}),$$

где 1_{σ^k} рассматривается как сингулярный симплекс. По индуктивному предположению

$$\partial_k c_k^s = \left(\beta_{k-1}^{\sigma^k} - \alpha_{k-1}^{\sigma^k} - \partial_k^s D_{k-1}^{\sigma^k}\right) \quad \partial_k^s(1_{\sigma^k}) = D_{k-2}^{\sigma^k}\partial_{k-1}^s\partial_k^s(1_{\sigma^k}) = 0;$$

следовательно, $c_k \in \operatorname{Ker} \partial_k^s \subset C_k^s(\sigma^k \times I; G)$. Но $\sigma^k \times I$ — выпуклое подмножество евклидова пространства; по лемме 1 $H_k^s(\sigma^k \times I; G) = 0$. Поэтому $c_k \in \operatorname{Im} \partial_{k+1}^s$, т. е. существует цепь $u_{k+1} \in$ $\in C_{k+1}^s(\sigma^k \times i; G)$ такая, что $\partial_{k+1}^s u_{k+1} = c_k$.

Положим $D_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) = u_{k+1}$. Пусть теперь $f^k\colon \sigma^k \to X$ — сингулярный симплекс пространства X. Определим цепь $D_k^X f^k$ равенством

$$D_k^X f^k = (f^k \times 1_I)_{k+1} D_k^{\sigma^k} 1_{\sigma^k} = (f^k \times 1_I)_{k+1} u_{k+1},$$

где $(f^k \times 1_I)(x, t) = (f^k(x), t)$, $x \in \sigma^k$, $t \in I$. Так как f_k и ∂_k перестановочны, а D_{k-1}^X функториальны, получаем

$$\begin{aligned}
\partial_{k+1}^s D_k^X f^k = \partial_{k+1}^s (f^k \times 1_I)_{k+1} u_{k+1} &= \\
= (f^k \times 1_I)_k \partial_{k+1}^s u_{k+1} = (f^k \times 1_I)_k c_k &= \\
= (f^k \times 1_I)_k \left(\beta_k^{\sigma^k} - \alpha_k^{\sigma^k} - D_{k-1}^{\sigma^k}\partial_k^s\right)(1_{\sigma^k}) &= \\
= \beta_k^X f^k - \alpha_k^X f^k - D_{k-1}^X \partial_k^s f^k&.
\end{aligned}$$

Продолжая D_k^X по линейности на $C_k^s(X; G)$, получаем требуемый гомоморфизм D_k^X.

Подчеркнем, что конструкция $\{D_k^X\}$ функториальна, т. е. для всякого непрерывного отображения $\varphi\colon X \to Y$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
G_k^s(X; G) \arrow[r, "D_k^X"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k+1}^s(X \times I; G) \arrow[d, "(\varphi \times 1_I)_{k+1}"] \\
C_k^s(Y; G) \arrow[r, "D_k^Y"] & C_{k+1}^s(X \times I; G)
\end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $F\colon X\times I\to Y$ — гомотопия, соединяющая φ и ψ. Определим цепную гомотопию $\{D_k\colon C^s_k(X;\,G)\to C^s_{k+1}(Y;\,G)\}$, связывающую φ_* с ψ_* как суперпозиции $\{D_k=F_{k+1}D^X_k\}$ гомоморфизмов последовательности

$$C^s_k(X;\,G)\xrightarrow{D^X_k}C^s_{k+1}(X\times I;\,G)\xrightarrow{F_{k+1}}C^s_{k+1}(Y;\,G).$$

Утверждение теоремы следует из того, что цепно гомотопные гомоморфизмы цепных комплексов индуцируют одинаковые гомоморфизмы групп гомологий. ■

Следствие. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм групп гомологий.*

Таким образом, гомотопически эквивалентные пространства, в частности гомеоморфные, имеют одинаковые (изоморфные) группы гомологий.

Упражнения. 6°. Покажите, что если X — стягиваемое пространство, то $H^s_0(X;\,G)\simeq G$, $H^s_k(X;\,G)=0$ при $k>0$.

7°. Покажите, что для гомологий несвязного объединения $X\cup Y$ имеет место изоморфизм

$$H^s_k(X\cup Y;\,G)\simeq H^s_k(X;\,G)\oplus H^s_k(Y;\,G).$$

Покажите, что $H^s_0(S^0;\,G)\simeq G\oplus G$, $H^s_k(S^0;\,G)=0$ при $k>0$.

8°. Покажите, что если X и Y линейно связны (см. § 10 гл. II), то $H^s_0(X;\,G)\simeq G\simeq H^s_0(Y;\,G)$ и любое непрерывное отображение $\varphi\colon X\to Y$ индуцирует изоморфизм

$$\varphi_{*0}\colon\ H^s_0(X;\,G)\simeq H^s_0(Y;\,G).$$

Отметим, что результат упражнения 6 нам дает группы гомологий открытого и замкнутого дисков D^n, $\bar{D}^n$.

Пусть пространство X таково, что в нем каждая компонента связности линейно связна (такими пространствами являются полиэдры, клеточные комплексы, многообразия, многообразия с краями и др.). Тогда из упражнений 7° и 8° немедленно следует, что группа $H^s_0(X;\,G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько компонент (линейной) связности имеет пространство X.

Пусть X_0 — пространство X, $i\colon X_0\to X$ — отображение вложения. Положив

$$C^s_k(X,\,X_0;\,G)=C^s_k(X;\,G)/C^s_k(X_0;\,G),$$

имеем в силу § 2 точную последовательность цепных комплексов

$$0\to C^s_*(X_0;\,G)\xrightarrow{i_*}C^s_*(X;\,G)\xrightarrow{j_*}C^s_*(X,\,X_0;\,G)\to 0.$$

Группы гомологий комплекса $C^s_*(X, X_0; G)$ называются *группами сингулярных гомологий пары* (X, X_0) и обозначаются

$$H^s_*(X, X_0; G) = \{H^s_k(X, X_0; G)\}_{k \geqslant 0}.$$

Из леммы § 2 немедленно вытекает точность гомологической последовательности

$$\ldots \to H^s_{k+1}(X, X_0; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H^s_k(X_0; G) \xrightarrow{i_{*k}} \\ \to H^s_k(X; G) \xrightarrow{j_{*k}} H^s_k(X, X_0; G) \xrightarrow{\delta_k} \ldots \to H^s_0(X, X_0; G) \to 0. \qquad (7)$$

Точные гомологические последовательности являются основным рабочим аппаратом теории гомологий.

Дадим следующее более наглядное описание групп гомологий пары, вытекающее из введенных выше определений. Пусть в цепи $\gamma = \sum\limits_i g_i \cdot f^k_i$ приведены подобные слагаемые, т. е. все сингулярные симплексы f^k_i попарно различны и все коэффициенты g_i отличны от 0; носителем цепи γ назовем подмножество пространства X, равное объединению образов всех отображений f^k_i, входящих в γ с ненулевыми коэффициентами. Согласно определению факторкомплекса (см. § 2) элемент $\widehat{z}_k$ ядра $\operatorname{Ker} \widehat{\partial}_k$ граничного гомоморфизма $\widehat{\partial}_k$: $C^s_k(X, X_0; G) \to C^s_{k-1}(X, X_0; G)$ является смежным классом, состоящим из всех таких цепей в $C^s_k(X, X_0; G)$, что: 1) два различных представителя элемента $\widehat{z}_k$ отличаются ($\widehat{z}_k$ — смежный класс!) на слагаемое из $i_k C^s_k(X_0; G) \subset C^s_k(X; G)$, т. е. на цепь с носителем в подпространстве X_0 (i_k — цепной гомоморфизм в размерности k, индуцированный вложением i: $X_0 \to X$); 2) носитель границы $\partial^s_k z_k$ любого представителя z_k элемента $\widehat{z}_k$ содержится в X_0 ($\widehat{z}_k$ — цикл «по модулю X_0»). Аналогично, элемент $\widehat{b}_k$ образа гомоморфизма $\widehat{\partial}_{k+1}$ является смежным классом, состоящим из всех таких цепей b_k в $C^s_k(X; G)$, что: 1) два представителя различаются на цепь с носителем в X_0; 2) каждый представитель b_k смежного класса $\widehat{b}_k$ можно записать в виде $\partial^s_{k+1}\gamma_{k+1} + \gamma^0_k$, где γ_{k+1} — некоторая цепь из $C^s_{k+1}(X; G)$, а γ^0_k — некоторая (любая) цепь с носителем в X_0. Таким образом, элементы групп гомологий — это относительные («по модулю подпространства X_0») циклы $\widehat{z}_k$, рассматриваемые с точностью до относительных («по модулю X_0») границ $\widehat{b}_k$. На рис. 128 приведен пример двумерного относительного цикла.

Связывающий гомоморфизм δ_k сопоставляет элементу $\widehat{h}_k$ из группы гомологий пары $H^s_k(X, X_0; G)$ элемент h^0_{k-1} из группы гомологий

$H^s_k(X_0; G)$ подпространства X_0 по следующему правилу, вытекающему из определения связывающего гомоморфизма для цепных комплексов (см. конец § 2). Пусть относительный цикл $\hat{z}_k \in C^s_k(X, X_0; G)$ — представитель элемента $\hat{h}_k$, а цикл $z_k \in C^s_k(X; G)$ — представитель элемента $\hat{z}_k$, рассматриваемого как смежный класс. Рассмотрим цепь $\partial^s_k z_k \in C^s_{k-1}(X; G)$. Ясно, что: 1) носитель цепи $\partial^s_k z_k$ содержится в X_0, и поэтому цепь $\partial^s_k z_k$ можно считать цепью из $C^s_{k-1}(X_0; G)$; 2) поскольку $\partial^s_{k-1}\partial^s_k z_k = 0$, то цепь $\partial^s_k z_k$ является циклом в $C^s_*(X_0; G)$. Цикл $\partial^s_u z_k$, вообще говоря, не является границей в $C^s_*(X_0; G)$, так как z_k может не принадлежать $i_k C^s_k(X_0;,G) \simeq C^s_k(X_0; G)$ — носитель цепи z_k может не лежать в X_0. Класс гомологий h^0_{k-1} цикла $\partial^s_k z_k$ в $H^s_{k-1}(X_0; G)$ и является образом $\partial_k \hat{h}_k$ класса гомологий $\hat{h}_k$. Очевидно, что произвол в выборе представителей $\hat{z}_k$ и z_k приводит лишь к тому, что для двух различных цепей, u_k и v_k, определяющих один и тот же класс $\hat{h}_k$, разность $\partial^s_k u_k - \partial^s_k v_k$ является границей в $C^s_*(X_0; G)$, а не только в $C^s_*(X; G)$. Поэтому класс гомологий h^0_{k-1} определен корректно.

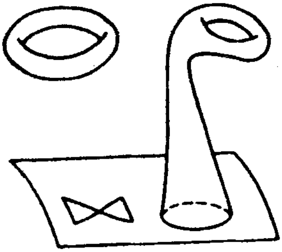


Рис. 128

Упражнения. 9°. Пусть $*$ — точка из X. Покажите, что $H^s_k(X; G) \simeq H^s_k(X, *; G)$ при $k \geqslant 1$.

10°. Пусть вложение i: $X_0 \to X$ является гомотопической эквивалентностью. Покажите, что $H^s_k(X, X_0; G) = 0$ для всех k.

Отметим, что для сингулярных гомологий утверждение о точности последовательности Майера–Виеториса (см. § 3), вообще говоря, неверно (почему? Попытайтесь построить контрпример.) Однако при дополнительных предположениях эта последовательность точна. Например, если K_1 и K_2 — подкомплексы сиплициального комплекса K, то для сингулярных гомологий пространств $|K_1|$ и $|K_2|$ имеет место точная последовательность Майера–Виеториса.

Для развития приложений сингулярных гомологий (см. § 6) нам потребуется умение измельчать сингулярные симплексы. Точная формулировка нужного результата дана ниже в упр. 12°. Установить этот результат можно с помощью барицентрического подразделения сингулярных симплексов.

Рассмотрим барицентрическое подразделение стандартного симплекса σ^k. Будем обозначать через $\langle c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q}\rangle$ композицию линейного (в барицентрических координатах) отображения стандартного симплекса σ^q на симплекс $(c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q})$ из барицентрического подразделения σ^k, переводящего j-ю вершину стандартного симплекса в j-ю вершину c^{i_j} из набора $\{c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q}\}$, и отображения вложения симплекса $(c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q})$ в симплекс σ^k.

Отметим, что тождественное отображение 1_{σ^k} симплекса σ^k можно рассматривать как элемент группы $C^s_k(\sigma^k; G)$, граница которого имеет вид $\partial^s_k 1_{\sigma^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \Delta^{k-1}_i$ (см. п. 1).

Пусть теперь X — произвольное топологическое пространство. Определим гомоморфизмы

$$\Omega_k\colon C^s_k(X; G) \to C^s_k(X; G), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

индуктивно. Положим

$$\Omega_0 = 1_{C^s_0(X;\, G)}. \tag{8а}$$

Предложим, что гомоморфизмы Ω_{k-1} уже определены для произвольного топологического пространства X, причем для сингулярного комплекса 1_{σ^k} пространства σ^k цепь $\Omega_{k-1}\left(\partial^s_k 1_{\sigma^k}\right)$ можно представить в виде

$$\Omega_{k-1}\left(\partial^s_k 1_{\sigma^k}\right) = \sum_j g_j \langle c^0_j, c^1_j, \ldots, c^{k-1}_j \rangle, \tag{8б}$$

где c^r_j — вершины барицентрического подразделения $(k-1)$-мерных граней симплекса σ^k. Очевидно, это требование выполняется при $k-1=0$. Положим теперь

$$\Omega_k(1_{\sigma^k}) = \sum_j g_j \cdot \langle b^{0,1,\ldots,k}, c^0_j, c^1_j, \ldots, c^{k-1}_j \rangle, \tag{8в}$$

где $b^{0,1,\ldots,k}$ — барицентр симплекса σ^k, а g_j и c^r_j — те же, что и в (8б).

Определим гомоморфизм Ω_k на сингулярном симплексе $f^k\colon \sigma^k \to X$ для произвольного пространства X.

Пусть $f^k_*\colon C^s_*(\sigma^k; G) \to C^s_*(X; G)$ — гомоморфизм цепных комплексов, индуцированный отображением $f^k\colon \sigma^k \to X$. Положим

$$\Omega_k(f^k) = f^k_k \Omega_k(1_{\sigma^k}). \tag{8г}$$

Продолжив Ω_k на $C^s_k(X; G)$ по линейности:

$$\Omega_k\left(\sum_i g_i f^k_i\right) = \sum_i g_i \Omega_k(f^k_i), \tag{8д}$$

завершим определение Ω_k. Ясно, что цепь $\Omega_k\left(\partial^s_{k+1} 1_{\sigma^{k+1}}\right)$ допускает представление, аналогичное (8б). Индуктивное построение Ω_k закончено.

Гомоморфизмы функториальны и коммутируют с дифференциалами $\partial^s_k \Omega_k = \Omega_k \partial^s_k$ (проверьте!). Совокупность гомоморфизмов Ω_k образует гомоморфизм Ω_*: $C^s_*(X; H) \to C^s_*(X; G)$ комплекса $C^s_*(X; G)$ в себя.

Упражнения. 11°. Покажите, что гомоморфизм Ω_* и $1_{C^s_*(X;\, G)}$ цепно гомотопны.

12°. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся подпространства нормального хаусдорфова пространства X. Покажите, что для всякого цикла $z_k \in C^s_k(X; G)$ существует гомологичный ему цикл $(\Omega_k)^r z^k$ такой, что для каждого сингулярного симплекса f^k, входящего в цикл $(\Omega_k)^r z_k$, его образ не пересекается одновременно с A и B.

3. Гомологии и гомотопии. Естественно попытаться установить связь между группами сингулярных гомологий и гомотопическими группами пространства. Оказывается, эта задача весьма сложна; известны лишь частные результаты. Так, одномерная группа гомологий линейно связного пространства полностью определяется его фундаментальной группой.

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0; тогда*

$$H^s_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)], \tag{9}$$

где $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ — коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$.*

Поясним схему доказательства формулы (9), останавливаясь лишь на геометрических идеях. Во-первых, заметим, что всякая петля пространства X (с началом в точке x_0) является сингулярным циклом (сингулярный симплекс

$$[0; 1] \to [0; 1]/0 \sim 1 \simeq S^1 \xrightarrow{\alpha} X$$

является циклом). Отсюда возникает гомоморфизм группы $\pi_1(X, x_0)$ в $H^s_1(X; \mathbb{Z})$, который мы будем обозначать через θ.

Во-вторых, можно показать, что θ — эпиморфизм. Действительно, каждый цикл в $H^s_1(X; \mathbb{Z})$ определяет (неоднозначно) несколько петель в пространстве X, возможно, начинающихся в различных точках. Эти различные петли можно превратить в единую петлю, соединив их начала с точкой x_0 путем, проходимым в прямом и обратном направлениях (рис. 129). Получающуюся сложную петлю в точке x_0 гомоморфизм θ переводит в первоначальный сингулярный цикл. (Точнее, класс этой петли переходит в класс первоначального цикла.)

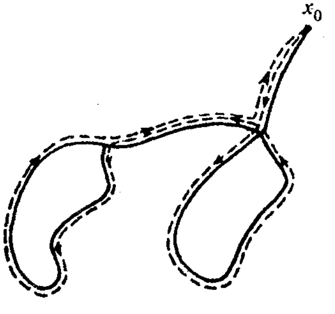


Рис. 129

В-третьих, коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$ лежит в ядре θ. В самом деле, петля $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$ при действии гомоморфизма θ переходит, грубо говоря, в цикл

---

* Напомним, что коммутантом $[\pi, \pi]$ группы π называется подгруппа, порожденная коммутаторами — элементами вида $g_1 \cdot g_2 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2^{-1}$, где $g_1, g_2 \in \pi$. Коммутант группы является ее нормальным делителем.

$\alpha+\beta+\alpha^{-1}+\beta^{-1}$; группа сингулярных циклов коммутативна, а циклы $\alpha+\alpha^{-1}$ и $\beta+\beta^{-1}$ гомологичны нулю. Следовательно, петля $\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$ переходит в гомологичный нулю цикл.

Можно показать, что коммутант составляет все ядро гомоморфизма θ (фактически при доказательстве эпиморфности θ строится «обратный» гомоморфизм группы H_1^s в $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$).

Упражнение 13°. Восстановите доказательство теоремы 2 по намеченной схеме.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 3 (Гуревич). *Пусть X — линейно связное топологическое пространство такое, что $\pi_k(X)=0$ при $k<q$ и $\pi_q(X)\neq 0$, $q>1$. Тогда $H_k^s(X;\mathbb{Z})=0$ при $0<k<q$ и $H_q^s(X;\mathbb{Z})\simeq\pi_q(X)$, причем для любого отображения $f\colon X\to X$ коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \pi_q(X) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
H_q(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_{*q}"] & H_q(X;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

§ 5. Аксиомы теории гомологий. Когомологии

В двух предыдущих параграфах были рассмотрены две теории гомологий — симплициальная и сингулярная. Кроме них в алгебраической топологии существует еще несколько теорий гомологий. Исторически более ранней является симплициальная теория гомологий. В дальнейшем были развиты различные подходы к построению теории гомологий для общих топологических пространств (теория гомологий Александрова—Чеха, теория сингулярных гомологий и др.). Достаточно сложным оказался вопрос о том, в каких случаях две различные теории эквивалентны.

В этой связи полезным является аксиоматический подход к теории гомологий, при котором основные свойства соответствия между топологическими и алгебраическими понятиями аксиоматизируются, а все остальные свойства выводятся из принятых аксиом. Такая система аксиом была развита Стинродом и Эйленбергом, и мы сейчас сформулируем их аксиомы.

Теорией гомологий H_* со связывающим гомоморфизмом δ_* называется совокупность ковариантных функторов $\{H_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, из категории пар топологических простанств (X, A), $A\subset X$, в категорию абелевых групп, и совокупность функториальных гомоморфизмов $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,

$$\delta_k(X, A)\colon H_k(X, A)\to H_{k-1}(A, \varnothing).$$

При этом требуется выполнение следующих аксиом.

1. **Аксиома гомотопии.** Пусть отображения f, $g\colon X\to Y$ гомотопны и $F\colon X\times I\to Y$ — соединяющая их гомотопия. Пусть $A\subset X$, $B\subset Y$ и $F(A\times I)\subset B$. Тогда

$$H_*(f)=H_*(g)\colon H_*(X, A)\to H_*(Y, B)$$

для произвольных X, Y, A, B, f, g.

2. Аксиома точности. Для всякой пары (X, A) и вложений i: $(A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$, j: $(X, \varnothing) \to (X, A)$ имеет место точная последовательность

$$\begin{gathered} \ldots \xrightarrow{\delta_{k+1}(X, A)} H_k(A, \varnothing) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(X, \varnothing) \xrightarrow{H_k(j)} \\ \to H_k(X, A) \xrightarrow{\delta_k(X, A)} H_{k-1}(A, \varnothing) \to \ldots \to H_0(X, A) \to 0. \end{gathered} \tag{1}$$

3. Аксиома вырезания. Пусть (X, A) — произвольная пара и пусть U открыто в X и $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$. Тогда вложение пар j: $(X \backslash U, A \backslash U) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизм

$$H_*(j)\colon\ H_*(X \backslash U, A \backslash U) \approx H_*(X, A).$$

4. Аксиома размерности. Для пространства $*$, состоящего из одной точки $H_k(*, \varnothing) = 0$ при $k > 0$.

Упражнение 1°. Проверьте выполнение аксиом теории гомологий для сингулярной теории гомологий.

Аксиомы теории гомологий полны в следующем смысле.

Теорема единственности. *Пусть H_* и $\overline{H}_*$ — две теории гомологий. Если существует изоморфизм h_0: $H_0(*, \varnothing) \simeq \overline{H}_0(*, \varnothing)$, то на категории пар компактных полиэдров эти теории естественно изоморфны, т. е.:*

1) *для любой пары компактных полиэдров (X, A) такой, что триангуляция A — подмножество триангуляции X, и всех $k \geqslant 0$ определено единственное семейство изоморфизмов $h_k(X, A)$: $H_k(X, A) \simeq \overline{H}_k(X, A)$, причем $h_0(*, \varnothing) = h_0$;*

2) *для любого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ пар компактных полиэдров и всех $k \geqslant 0$ справедливы соотношения $H_k(f) = \overline{H}_k(f)$, обозначающие коммутативность диаграммы*

$$\begin{tikzcd} H_k(X, A) \arrow[r, "H_k(f)"] \arrow[d, "\wr", "h_k(X, A)"'] & H_k(Y, B) \arrow[d, "\wr"', "h_k(Y, B)"] \\ \overline{H}_k(X, A) \arrow[r, "\overline{H}_k(f)"] & \overline{H}_k(Y, B) \end{tikzcd} \tag{2}$$

3) *диаграммы*

$$\begin{tikzcd} H_{k+1}(X, A) \arrow[r, "\delta_{k+1}(X, A)"] \arrow[d, "\wr", "h_{k+1}(X, A)"'] & H_k(A, \varnothing) \arrow[d, "\wr"', "h_k(A, \varnothing)"] \\ \overline{H}_{k+1}(X, A) \arrow[r, "\overline{\delta}_{k+1}(X, A)"] & \overline{H}_k(A, \varnothing) \end{tikzcd} \tag{3}$$

возникающие при изоморфизме точных последовательностей вида (1), *коммутативны.*

Мы не приводим доказательства теоремы единственности, поскольку оно выходит за пределы элементарного курса.

В частности, сингулярная и симплициальная теории совпадают на категории пар компактных полиэдров. Таким образом, для компактного полиэдра $|K|$ имеет место изоморфизм

$$H_*(|K|;G) \simeq H^s_*(|K|;G).$$

Этот факт (доказательство здесь не приводится) мы будем применять в § 6, 8 при переходе от одной теории гомологий к другой.

Отметим, что независимость симплициальных гомологий компактного полиэдра от выбора триангуляции может быть установлена как в рамках самой симплициальной теории, так и с использованием сингулярной теории гомологий. Последний способ состоит в построении изоморфизма между группами гомологий произвольной триангуляции полиэдра группами сингулярных гомологий этого полиэдра. Детали этого рассуждения достаточно сложны, и мы их здесь не приводим.

Упражнение 2°. Опираясь на теорему единственности, установите справедливость точной последовательности Майера—Виеториса для сингулярной теории гомологий:

$$\begin{aligned} \ldots \to & H^s_k(|K_1| \cap |K_2|;G) \to \\ & \to H^s_k(|K_1|;G) \oplus H^s_k(|K_2|;G) \to H^s_k(|K_1| \cup |K_2|;G) \to \\ & \to H^s_{k-1}(|K_1| \cap |K_2|;G) \to \ldots \to H^s_0(|K_1| \cup |K_2|;G) \to 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где K_1, K_2 — подкомплексы конечного симплициального комплекса K.

Отметим, что существуют теории гомологий, удовлетворяющие аксиомам 1)—3), но не удовлетворяющие аксиоме размерности. Такие теории гомологий называются экстраординарными, их исследование в значительной мере составляет предмет современной алгебраической топологии.

В алгебраической топологии наряду с группами гомологий применяются так называемые группы когомологий. Главное отличие теории когомологий от теории гомологий заключается в том, что теории когомологий — совокупность H^* контрвариантных функторов H^k, поэтому большинство стрелок в теории когомологий меняют свое направление сравнительно с теорией гомологий.

Фундаментальным объектом когомологий является коцепной комплекс C^* — последовательность

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \to C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \to \ldots$$

абелевых групп C^* (групп коцепей) и их гомоморфизмов d^k (дифференциалов или кограничных гомоморфизмов) такая, что $d^{k+1}d^k = 0$. Группами когомологий коцепного комплекса называются факторгруппы $H^k(C^*) = \mathrm{Ker}\, d^k / \mathrm{Im}\, d^{k-1}$. Часто коцепные комплексы получают из цепных с помощью следующего приема. Пусть C_* — цепной комплекс, G — абелева группа. Положим $C^k = \mathrm{Hom}\,(C_k, G)$ — множество всех гомоморфизмов группы C_k в группу G. Для $\psi^k \in \mathrm{Hom}\,(C_k; G)$ определим элемент

$d^k\psi^k i \in \mathrm{Hom}\,(C_{k+1}, G)$ равенством

$$(\partial^k\psi^k)\gamma_{k+1} = \psi^k(\partial_{k+1}, \gamma_{k+1})$$

на произвольном элементе $\gamma_{k+1} \in C_{k+1}$. Таким образом, по граничным гомоморфизмам ∂_k цепного комплекса C_k мы определим кограничные гомоморфизмы d^k коцепного комплекса $C^\cdot$. Очевидно,

$$(d^{k+1}d^k\psi^k)\gamma_{k+2} = (d^k\psi^k)(\partial_{k+2}\gamma_{k+2}) = \psi^k(\partial_{k+1}\partial_{k+2}\gamma_{k+2}) = \psi^k(0) = 0,$$

так что $C^\cdot$ — действительно коцепной комплекс.

Применяя этот прием к $C_\bullet = C_\bullet(K; \mathbb{Z})$ — цепному комплексу симплициального комплекса K с целочисленными коэффициентами, мы получаем коцепной комплекс $C^\cdot(K; G)$, где $C^k(K; G) = \mathrm{Hom}\,(C_k(K; \mathbb{Z}), G)$. Группы когомологий $H^k(C^\cdot(K; G))$ называются группами симплициальных когомологий симплициального комплекса K (или полиэдра $|K|$) с коэффициентами в G. Здесь, однако, приходится преодолевать некоторые трудности, связанные с бесконечным числом образующих групп сингулярных цепей. Для теорий когомологий существует система аксиом и верна теорема единственности, аналогичные аксиомам и теореме для теорий гомологий. Важным преимуществом теорий когомологий перед теориями гомологий является то, что группы когомологий геометрических объектов образуют кольца с, вообще говоря, нетривиальным умножением. В ряде задач применяют одновременно гомологии и когомологии.

§ 6. Гомологии сфер. Степень отображения

1. Группы гомологий сферы. Приступим к вычислению сингулярных групп гомологий сфер S^n. Знание этих групп позволит нам ввести весьма полезные в приложениях понятия степени отображения, характеристики и индекса особой точки векторного поля.

Пусть X — клеточный комплекс, Y — конечный подкомплекс. Покажем, что

$$H_k^s(X, Y; G) \simeq H_k^s(X/Y; G) \qquad (1)$$

при $k > 0$, где X/Y — факторпространство X по Y.

Заметим сначала, что клеточный комплекс X/Y гомотопически эквивалентен комплексу $X \underset{i}{\cup} CY$, где CY — конус * над Y с вершиной $*$, $i\colon Y \to X$ — вложение. Действительно, комплекс X/Y совпадает с комплексом $(X \underset{i}{\cup} CY)/CY$. Поскольку CY — стягиваемый подкомплекс комплекса $X \underset{i}{\cup} CY$, комплексы $(X \underset{i}{\cup} CY)/CY$ и $X \underset{i}{\cup} CY$ гомотопически эквивалентны (см. упр. 7° § 10 гл. IV). Поэтому

$$H_k^s(X/Y; G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY; G)$$

---

* Напомним, что для топологического пространства Y конус CY определяется как факторпространство $(Y \times I)(Y \times 0)$.

и при $k > 0$

$$H_k^s(X/Y;\ G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\ *;\ G)$$

(см. упр. 9° § 4).

Конус CY гомотопически эквивалентен точке $* \in CY$, следовательно,

$$H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\ *;\ G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\ CY;\ G).$$

Рассмотрим отображение вложения пар I: $(X, Y) \to (X \underset{i}{\cup} CY,\ CY)$; оно индуцирует гомоморфизм I_*: $H_*^s(X, Y;\ G) \to H_*^s(X \underset{i}{\cup} CY,\ CY;\ G)$.

Покажем, что I_* — изоморфизм. Разобьем конус CY на две части, C^1Y и C^2Y, как показано на рис. 130. Очевидно, что $H_*^s(X \underset{i}{\cup} C^2Y,\ C^2Y;\ G) \simeq H_*^s(X, Y;\ G)$.

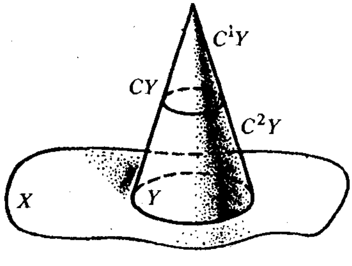


Рис. 130

Каждый цикл $z_k \in C_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\ CY;\ G)$ можно заменить на гомологичный ему цикл $(\Omega_k)^r z_k$ такой, что образ каждого сингулярного симплекса из $(\Omega_k)^r z_k$, пересекающийся с X, не будет пересекаться с C^1Y, и наоборот, каждый сингулярный симплекс, пересекающийся с C^1Y, не будет пересекаться с X (см. упр. 12° § 4). Отбросив в цепи $(\Omega_k)^r z_k$ все симплексы, пересекающиеся с C^1Y, мы получим цикл $z_k' \in C_k(X \underset{i}{\cup} CY,\ CY;\ G)$, гомологичный исходному.

С другой стороны, z_k' можно рассматривать как цикл в группе цепей $C_k^s(X \underset{i}{\cup} C^2Y,\ C^2Y;\ G)$, следовательно, I_k — эпиморфизм.

Аналогично можно показать, что I_k — мономорфизм.

Дадим приложение формулы (1) к вычислению гомологий сферы S^n. Нам будут нужны гомологии диска $\overline{D}^n$. Так как $\overline{D}^n$ стягивается к точке, то группы гомологий диска изоморфны группам гомологий точки, а именно

$$H_k^s(\overline{D}^n;\ G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad k > 0 \end{cases}$$

(см. упр. 6° § 4). Начнем вычисления с малых размерностей n. Поскольку S^0 — несвязное объединение двух точек, то $H_0^s(S^0;$

$G) \simeq G \oplus G$, $H_k^s(S^0; G) = 0$ при $k > 0$. Далее, в силу линейной связности S^n при $n > 0$ имеем

$$H_0^s(S^n; G) \simeq G, \quad n > 0.$$

Теперь заметим, что сфера S^n гомеоморфна факторпространству $\overline{D}^n/S^{n-1}$. Поэтому в силу (1)

$$H_k^s(\overline{D}^n, S^{n-1}; G) \simeq H_k^s(S^n; G) \quad \text{при} \quad k > 0.$$

Воспользуемся этим обстоятельством.

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары $(\overline{D}^1, S^0)$, заменив при $k > 0$ группы гомологий пары группами гомологий окружности S^1:

$$\ldots \to H_k^s(S^0; G) \to H_k^s(\overline{D}^1; G) \to H_k^s(S^1; G) \to$$
$$\to H_{k-1}^s(S^0; G) \to \ldots \to H_1^s(S^0; G) \to H_1^s(\overline{D}^1; G) \to$$
$$\to H_1^s(S^1; G) \to H_0^s(S^0; G) \to H_0^s(\overline{D}^1; G) \to H_0^s(\overline{D}^1, S^0; G). \quad (2)$$

Заметив, что $H_k^s(\overline{D}^1; G) = 0$ при $k \geqslant 1$ и $H_{k-1}^s(S^0; G) = 0$ при $k > 1$, получим из (2) короткую точную последовательность

$$0 \to H_k^s(S^1; G) \to 0, \quad k > 1,$$

откуда вытекает, что $H_k^s(S^1; G) = 0$ при $k > 1$. Кроме того, гомоморфизм $H_0^s(S^0; G) \to H_0^s(\overline{D}^1; G)$ эпиморфен (проверьте по определению). Поэтому наша точная последовательность (2) приводит к короткой точной последовательности

$$0 \to H_1^s(S^1; G) \to G \oplus G \xrightarrow{\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2} G \to 0,$$

откуда получаем изоморфизм $H_1^s(S^1; G) \simeq G$.

Применим теперь индукцию. Предположим, что при $1 \leqslant q \leqslant n - 1$ для сфер S^q установлены изоморфизмы

$$H_k^s(S^q; G) \simeq \begin{cases} G, & k = 0, q, \\ 0, & k \neq 0, q. \end{cases}$$

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары $(\overline{D}^n, S^{n-1})$, заменяя, как и раньше, гомологии пары на гомологии сферы S^n:

$$\ldots \to H_k^s(\overline{D}^n; G) \to H_k^s(S^n; G) \to H_{k-1}^s(S^{n-1}; G) \to$$
$$\to H_{k-1}^s(\overline{D}^n; G) \to \ldots \quad (3)$$

При $k > 1$ имеем $H^s_k(\overline{D}^n; G) = 0$, $H^s_{k-1}(\overline{D}^n; G) = 0$, поэтому рассматриваемый участок точной последовательности (3) принимает вид

$$0 \to H^s_k(S^n; G) \to H^s_{k-1}(S^{n-1}; G) \to 0,$$

откуда вытекает изоморфизм $H^s_k(S^n; G) \simeq H^s_{k-1}(S^{n-1}; G)$, $k > 1$. Итак, при $n \geqslant 2$ получаем

$$H^s_2(S^n; G) = 0, \ \ldots, \ H^s_{n-1}(S^n; G) = 0,$$

$$H^s_n(S^n; G) \simeq H^s_{n-1}(S^{n-1}; G) \simeq G, \ H^s_{n+1}(S^n; G) = 0, \ \ldots$$

Чтобы вычислить $H^s_1(S^n; G)$, положим в (3) $k = 1$:

$$\ldots \to H^s_1(\overline{D}^n; G) \to H^s_1(S^n; G) \to H^s_0(S^{n-1}; G) \xrightarrow{i_{*0}} H^s_0(\overline{D}^n; G) \to \ldots$$

Так как S^{n-1}, $\overline{D}^n$ линейно связны, имеем $H^s_0(S^{n-1}; G) \overset{i_{*0}}{\simeq}$ $\overset{i_{*0}}{\simeq} H^s_0(\overline{D}^n; G) \simeq G$ (см. упр. 8° § 4), отсюда Ker $i_{*0} = 0$, и в силу точности (3) получим короткую точную последовательность

$$0 \to H^s_1(S^n; G) \to 0, \ \text{т. е.} \ H^s_1(S^n; G) = 0, \ n \geqslant 2.$$

Индуктивное предположение распространено для $q = n$. Поэтому окончательно имеем

$$H^s_0(S^n; G) \simeq G; \ H^s_j(S^n; G) = 0, \ j \neq 0, \ n \geqslant 1;$$

$$H^s_n(S^n; G) \simeq G, \ n \geqslant 1; \ H^s_0(S^0; G) \simeq G \oplus G; \qquad (4)$$

$$H^s_j(S^0; G) = 0, \ j \geqslant 1.$$

Итак, группы гомологий S^n вычислены.

Вычисляя гомологии S^n, мы не использовали теорему единственности теории гомологий (см. § 5). Воспользоваться ею мы могли бы следующим образом. Поскольку сфера S^n гомеоморфна границе $\partial\tau^{n+1}$ симплекса τ^{n+1}, то имеем изоморфизм

$$H_i(|\{\partial\tau^{n+1}\}|; G) \simeq H^s_i(S^n; G), \qquad (5)$$

откуда на основании результатов (см. (9) § 3) о $H_*(\{\partial\tau^{n+1}\}; G)$ получаем тот же результат, что и в (4).

Заметим, что в § 4 гл. III теорема Брауэра о неподвижной точке и теорема о невозможности ретракции n-диска на граничную сферу опирались на функториальность гомотопических групп и на недоказанный результат $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Теперь, опираясь на установленный факт изоморфизма $H^s_n(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ и на гомологический функтор, можно считать вполне строго установленными обе названные важные теоремы. Действительно, их доказательство использовало только аксиомы функтора в категорию абелевых групп и знание группы пространства S^n.

Упражнение 1°. Выведите из теоремы 3 § 4, что

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad k < n; \quad \pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}.$$

Обсудим вопрос о топологической инвариантности понятия размерности евклидова пространства. Из курса алгебры известно, что два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны, а следовательно, и гомеоморфны. Известно также, что пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не изоморфны при $m \neq n$. Возникает вопрос: не будут ли они гомеоморфны? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос и тем самым утверждает, что размерность евклидова пространства является топологическим инвариантом.

Теорема 1. *Если $m \neq n$, то пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим одноточечные компактификации $\tilde{\mathbb{R}}^m = \mathbb{R}^m \cup \xi^m$ и $\tilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \xi^n$ пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ (см. § 14 гл. II). Базисами окрестностей точек ξ^m, ξ^n являются дополнения к замкнутым шарам с центрами в начале координат пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Легко видеть, что одноточечная компактификация евклидова пространства гомеоморфна сфере той же размерности.

Предположим, что существует гомеоморфизм $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Его можно продолжить до отображения $\tilde{\Phi}\colon \tilde{\mathbb{R}}^m \to \tilde{\mathbb{R}}^n$, положив $\tilde{\Phi}(\xi^m) = \xi^n$. Легко видеть, что отображение $\tilde{\Phi}$ — также гомеоморфизм. Отсюда получаем, что сферы S^m и S^n также гомеоморфны. Тогда в силу топологической инвариантности групп гомологий

$$H^s_k(S^m; \mathbb{Z}) \simeq H^s_k(S^n; \mathbb{Z}) \text{ при всех } k.$$

Однако мы знаем, что это не так при $m \neq n$. Следовательно, предположение о существовании гомеоморфизма $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $m \neq n$ неверно. ■

2. Степень отображения. Перейдем к изучению гомоморфизмов групп гомологий, индуцируемых отображениями n-мерных сфер. Из линейной связности сфер следует, что если $\varphi\colon S^n_1 \to S^n_2$ — отображение одного экземпляра сферы в другой, то гомоморфизм φ_{*0}: $H^s_0(S^n_1; G) \to H^s_0(S^n_2; G)$ есть изоморфизм. Гомоморфизм

$$\varphi_{*n}\colon H^s_n(S^n_1; G) \to H^s_n(S^n_2; G),$$

вообще говоря, изоморфизмом не является. Если в качестве группы коэффициентов G взять группу целых чисел $\mathbb{Z}$ и зафиксировать изоморфизмы $H_n^s(S_i^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, то гомоморфизм φ_{*n} можно рассматривать как эндоморфизм $\varphi_{*}n$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}$. Такой гомоморфизм однозначно определяется значением φ_{*n} на образующем элементе $1 \in \mathbb{Z}$, поскольку $\varphi_{*n}(m) = m \cdot \varphi_{*n}(1)$.

Определение 1. Число $\varphi_{*n}(1)$ называется *степенью отображения* φ и обозначается $\deg \varphi$.

Отметим, что $\deg \varphi$ может, вообще говоря, принимать любые целочисленные значения. Знак $\deg \varphi$ зависит от выбора образующих элементов в группах $H_n^s(S_1^n; \mathbb{Z})$, $H_n^s(S_2^n; \mathbb{Z})$, т. е. от способа установления изоморфизмов этих групп с группой $\mathbb{Z}$. Если γ — образующий элемент группы $H_n^s(S^n; \mathbb{Z})$, то $(-\gamma)$ — также ее образующий элемент; таким образом, изоморфизм $H_n^s(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ может быть установлен двумя способами. Если φ — отображение S^n в себя, то $\deg \varphi$ не зависит от выбора образующего элемента.

Отметим, что из теоремы 3 § 4 вытекает, что понятия $\deg \varphi$ степени отображения φ: $S^n \to S^n$, определяемые через гомотопические группы (см. § 4 гл. III) и гомологические группы, тождественны.

Очевидно, что если φ, ψ: $S^n \to S^n$ — гомотопные отображения, то $\deg \varphi = \deg \psi$. Справедливо и обратное утверждение (теорема Хопфа), доказательство которого мы не приводим.

Упражнения. 2°. Докажите, что для φ, ψ: $S^n \to S^n$ верна формула $\deg (\varphi\psi) = \deg \varphi \cdot \deg \psi$.

Указание. Воспользуйтесь функториальностью групп гомологий (см. п. 8 § 4 гл. V).

3°. Покажите, что степень постоянного отображения сферы S^n в себя равна нулю.

4°. Пусть отображение Φ: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ таково, что $\Phi(x) \neq 0$ при $r \leqslant \|x\| \leqslant R$; отображения $\tilde{\Phi}_\rho$: $S^n \to S^n$ определяются равенствами

$$\tilde{\Phi}_\rho(x) = \frac{\Phi(\rho x)}{\|\Phi(\rho x)\|}, \quad x \in S^n, \quad r \leqslant \rho \leqslant R.$$

Докажите, что $\deg \tilde{\Phi}_r = \deg \tilde{\Phi}_R$.

Указание. Постройте гомотопию, соединяющую отображения $\tilde{\Phi}_r$ и $\tilde{\Phi}_R$.

Следующие два упражнения нетрудно выполнить, опираясь на изоморфизм сингулярных и симплициальных гомологий.

Упражнения. 5°. Пусть A: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — невырожденный линейный оператор. Определим отображение $\tilde{A}$: $S^n \to S^n$ формулой

$$\tilde{A}(x) = \frac{A(x)}{\|A(x)\|}, \quad x \in S^n.$$

Пусть A — диагонализируемый оператор с собственными значениями $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = -1$ и $\lambda_{m+1} = \ldots \ = \lambda_{n+1} = 1$, где $m \leqslant n+1$. Докажите, что для этого оператора $\deg \tilde{A} = (-1)^m$.

Указание. Оператор A можно представить как композицию m операторов B, у каждого из которых одно собственное значение λ_i, равно -1, а остальные n собственных значений равны 1. Соответственно отображение $\tilde{A}$ есть композиция отображений $\tilde{B}_i$ и $\deg \tilde{A} = \prod\limits_{i=1}^{m} \deg \tilde{B}_i$. Степень каждого из $\tilde{B}_i$ равна (-1). Чтобы заметить это, нужно построить триангуляцию K сферы S^n, инвариантную относительно отображения $\tilde{B}_i$; эта триангуляция получается из объединения двух конусов над триангуляцией «экватора» — сферы $S_э^{n-1}$, лежащей в собственном подпространстве, соответствующем $\lambda = 1$, а вершины конусов — «северный» и «южный» полюса — лежат в собственном подпространстве, соответствующем $\lambda_i = -1$. Образующий элемент группы $H_n(K; \mathbb{Z})$ состоит из цикла γ, равного сумме всех n-мерных симплексов из K, взятых с согласованной ориентацией. Отображение $\tilde{B}_i$ переводит цикл γ в цикл $(-\gamma)$ (меняя ориентацию симплексов); поэтому $\deg \tilde{B}_i = -1$.

6°. Докажите, что для произвольного невырожденного линейного оператора A: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ справедливо равенство $\deg \tilde{A} = \operatorname{sign} |A|$.

Указание. Покажите, что A гомотопен в классе невырожденных линейных операторов оператору A', матрица которого диагональна и диагональные элементы равны ± 1.

Рассмотрим непрерывное отображение Φ: $U \to \mathbb{R}^{n+1}$, где U — область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обычно в задачах об исследовании решений уравнения

$$\Phi(x) = 0 \tag{6}$$

отображение Φ называют векторным полем (точке x поставлен в соответствие вектор $\Phi(x)$), а решения уравнения (6) называют особыми точками векторного поля Φ.

В некоторых задачах отображение Φ может не быть непрерывным на всей области U. Если оно имеет конечное число точек разрыва (или точек, в которых значение не определено), то такие точки также называют особыми. Большая часть последующих результатов верна и для таких векторных полей.

Пусть x^0 — изолированная особая точка векторного поля Φ, т. е. $\Phi(x^0) = 0$, и в некоторой окрестности точки x^0 нет других решений уравнения (6). Тогда для достаточно малого R при $0 < r < R$ определена степень отображения $\tilde{\Phi}_r$: $S^n \to S^n$, задаваемого равенством

$$\tilde{\Phi}_r(x) = \frac{\Phi(rx + x^0)}{\|\Phi(rx + x^0)\|}, \tag{7}$$

и эта степень не зависит от выбора r (сравните с упражнением 3°).

Определение 2. Степень $\deg \tilde{\Phi}_r$ отображений $\tilde{\Phi}_r$ (при достаточно малых r) называется *индексом изолированной особой точки* x^0 *векторного поля* Φ; мы будем обозначать его $\operatorname{ind}(x^0, \Phi)$.

Пусть поле Φ не имеет особых точек на границе $S_r^n(x^0)$ шара $D_r^{n+1}(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 (теперь не предполагается, что x^0 — особая точка, а r мало). Очевидно, и в этом случае формула (7) определяет отображение $\tilde{\Phi}_r$: $S^n \to S^n$.

Определение 3. Степень $\deg \tilde{\Phi}_r$ отображения $\tilde{\Phi}_r$ называют *характеристикой векторного поля* Φ на границе шара $D_r^{n+1}(x^0)$. Мы будем обозначать характеристику $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0))$.

Наряду с термином «характеристика векторного поля» часто употребляют термин «вращение векторного поля» по аналогии с 2-мерным случаем, где для φ: $S^1 \to S^1$ степень $\deg \varphi$ есть алгебраическое число оборотов вектора $\varphi(x)$, когда x пробегает (в положительном направлении) окружность S^1.

Теорема 2. *Пусть поле* Φ *не имеет особых точек в замкнутом шаре* $\bar{D}_r^{n+1}(x^0)$; *тогда* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) = 0$.

Доказательство. Отображение $\tilde{\Phi}_r$ гомотопно постоянному отображению Φ_0, отображающему S^n в точку $\Phi(x^0)/\|\Phi(x^0)\| \in S^n$, степень которого равна нулю. Соответствующая гомотопия задается, например, формулой

$$\Phi(t, x) = \frac{\Phi(trx + x^0)}{\|\Phi(trx + x^0)\|}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in S^n. \ ■$$

Следствие. *Если* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) \neq 0$, *то поле* Φ *имеет по крайней мере одну особую точку в шаре* $D_r^{n+1}(x^0)$.

Отметим, что характеристика $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0))$ определена, даже если поле Φ задано только на границе $S_r^n(x^0)$ шара $D_r^{n+1}(x^0)$ *.

Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть поле* Φ *задано на сфере* $S_r^n(x^0)$ *и не имеет особых точек. Если* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) \neq 0$, *то* Φ *нельзя продолжить на шар* $\bar{D}_r^{n+1}(x^0)$ *без особых точек.*

Справедлива и теорема, обратная тереме 3; она вытекает из упомянутой теоремы Хопфа.

Упражнения. 7°. Пусть x^0 — особая точка гладкого векторного поля Φ на $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и матрица Якоби $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ отображения Φ в точке

---

* Поле Φ: $S_r^n(x^0) \to \mathbb{R}^{n+1}$ в этом случае, очевидно, не является векторным полем на многообразии $S_r^n(x^0)$ в смысле § 8 гл. IV.

x^0 невырожденна (такие точки называют невырожденными). Докажите, что x^0 — изолированная особая точка поля Φ и что

$$\operatorname{ind}(x^0, \Phi) = \operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x^0}.$$

Указание. Постройте гомотопию, соединяющую векторные поля Φ_r и $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x^0}$ на S^n.

8°. Пусть отображение Φ: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ определено формулой $\Phi(z) = z^n$, где $n > 0$ — целое число. Рассматривая Φ как отображение Φ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, вычислите индекс нулевой особой точки поля Φ. Сделайте то же самое для отображения $\Psi(z) = (\bar{z})^n$.

Рассмотрим векторное поле $X(x)$ на многообразии M^n. Пусть $x^0 \in M^n$ — изолированная особая точка поля $X(x)$, т. е. $X(x^0) = 0$ и существует окрестность $U(x^0) \subset M^n$ точки x^0, в которой $X(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. В локальных координатах поле $X(x)$ имеет вид

$$\left(x_1, \ldots, x_n; X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Индекс $\operatorname{ind}(x^0, X)$ особой точки x^0 векторного поля $X(x^0)$ на многообразии можно определить как индекс особой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (здесь x_i^0 — координаты точки x^0) векторного поля $\Phi = \{X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Упражнения. 9°. Докажите, что индекс $\operatorname{ind}(x^0, X)$ не зависит от выбора локальных координат.

10°. Пусть f — гладкая функция на многообразии, x^0 — невырожденная критическая точка индекса λ функции f (см. § 11 гл. IV). Докажите, что $\operatorname{ind}(x^0, \operatorname{grad} f) = (-1)^\lambda$.

Указание. Воспользуйтесь результатами упражнений 7° § 12 гл. IV и 6° этого параграфа.

3. Вращение векторного поля. Понятие характеристики векторного поля обобщим на случай границы области произвольной формы.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область, $\bar{U}$ — ее замыкание, ∂U — граница. Рассмотрим непрерывное векторное поле Φ: $\bar{U}\to\mathbb{R}^n$, не имеющее особых точек на границе; таким образом, определено непрерывное отображение Φ: $\partial U\to\mathbb{R}^n\setminus 0$, однако допускаются особые точки в $U = \operatorname{int}\bar{U}$.

Развивая понятия п. 2, определим глобальную характеристику $\varkappa(\Phi, \partial U)$ (или «вращение») векторного поля Φ на границе ∂U. На первом шаге конструкции перейдем к меньшей полиэдральной (замкнутой) области $P_\alpha \subset U$, «хорошо аппроксимирующей» замыкание $\overline{U}$: $P_\alpha \supset \overline{U}\backslash S_\alpha(\partial U)$, где $S_\alpha(\partial U)$ — α-окрестность границы ∂U при достаточно малом заданном $\alpha > 0$ (т. е. объединение открытых шаров радиуса α с центром в точках $x \in \partial U$, когда x меняется на границе ∂U). Чтобы построить такой полиэдр P_α, достаточно совершить правильное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ плоскостями, параллельными координатным, на конгруэнтные кубы достаточно малого диаметра $d = \sqrt{n}\,\rho$, где ρ — сторона куба, и потребовать $\rho < \alpha/\sqrt{n}$; тогда P_α — объединение всех кубов, пересекающихся с замыканием $\overline{U\backslash S_\alpha(\partial U)}$ (которое предполагается непустым ввиду малости α). Триангулируя каждый куб из P_α стандартным образом (т. е. в каждой грани I^k куба I^n производя коническую конструкцию из ее центра над границей ∂I^k последовательно при $k = 1, 2, \ldots, n$), получим триангуляцию K полиэдра P_α. Ориентируем все n-мерные симплексы $\tau_i^n \in K$ одинаково; это означает, что если $[\tau_i^n] = [a_i^0, \ldots, a_i^n]$ — ориентированный симплекс указанной ориентации, то реперы $e_i^1, \ldots, e_i^n$, где $e_i^k = \overrightarrow{a_i^0 a_i^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для любого i задают ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$, совпадающую с фиксированной. Образуем целочисленную цепь $x_n = \sum_i 1 \cdot [\tau_i^n]$ и назовем ее фундаментальной цепью P_α. Ее граница $\partial_n x_n = \sum_i \partial_n[\tau_i^n]$ обладает следующим важным свойством — она состоит из $(n-1)$-мерных симплексов: $\partial_n x_n = \sum_j 1 \cdot [t_j^{n-1}]$, где симплексы t_j^{n-1} принадлежат теоретико-множественной границе ∂P_α и $\partial P_\alpha = \bigcup_j t_j^{n-1}$, а ориентация $[t_j^{n-1}]$ индуцирована ориентацией единственного симплекса $[\tau_i^n]$, в границу которого входит $[t_j^{n-1}]$ (т. е. $\partial_n[\tau_i^n] = [t_j^{n-1}] + \ldots$). Этот целочисленный цикл $z_{n-1} = \partial_n x_n$ назовем *фундаментальным циклом границы* ∂P_α.

Можно показать, что группа $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой, имеющей столько образующих, сколько компонент связности имеет граница ∂P_α; обозначим это число через L (вообще говоря, L зависит от α: $L = L_\alpha$). При этом

$$\partial_n x_n = \sum_j 1 \cdot [t_j^{n-1}] = \sum_{i=1}^{L} \left(\sum_{p=1}^{M_i} 1 \cdot [t_p^{n-1}] \right),$$

где симплексы t_p^{n-1} из каждой внутренней суммы входят в одну и ту же компоненту связности ∂P_α; класс гомологий $[z_{n-1}^i]$ каждой внутренней суммы $\sum\limits_{p=1}^{M_i} 1\cdot[t_p^{n-1}] = z_{n-1}^i$ есть образующая группы $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$.

Второй шаг конструкции связан с рассмотрением векторного поля $\Phi\colon\ P_\alpha \to \mathbb{R}^n$ на полиэдре P_α. Так как на границе ∂U поле Φ не имеет особых точек, то в силу непрерывности оно их не будет иметь в окрестности $S_\alpha(\partial U)$ (точнее, на пересечении $S_\alpha(\partial U) \cap \overline{U}$) при достаточно малом $\alpha > 0$. Зафиксируем такое α и построим полиэдр P_α, как описано выше. Тогда на границе ∂P_α поле Φ не имеет особых точек и определено отображение $\Phi\colon\ \partial P_\alpha \to \mathbb{R}^n\backslash 0$. Это отображение индуцирует гомоморфизм сингулярных групп гомологий Φ_{*n-1}: $H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}) \to H^s_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$. Так как $\mathbb{R}^n\backslash 0 \sim S^{n-1}$ (гомотопическая эквивалентность), то $H^s_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$ и $H^s_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ изоморфны и являются свободными абелевыми группами с одной образующей. В силу теоремы единственности теории гомологий группы $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ и $H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ изоморфны; пусть $[z^i_{n-1}]^s$ — образ при этом изоморфизме образующей $[z^i_{n-1}]$ из $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$, а $\tilde{\gamma}^s_{n-1}$ — образующая в $H^s_{n-1}(\mathbb{R}\backslash 0; \mathbb{Z})$. Тогда $\Phi_{*n-1}[z^i_{n-1}]^s = m_i\cdot\tilde{\gamma}^s_{n-1}$, где $m_i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим класс гомологий $[z_{n-1}]^s \in H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$, соответствующий классу $[z_{n-1}] \in H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ цикла $z_{n-1} = \partial_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{L} z^i_{n-1}$. Тогда $\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m\cdot\tilde{\gamma}^s_{n-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$. Целое число m назовем характеристикой $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ («вращением») векторного поля Φ на границе ∂P_α. Заметим, что в силу теоремы единственности теории гомологий $[z_{n-1}]^s = \sum\limits_{i=1}^{L} [z^i_{n-1}]^s$, и, следовательно $m = \sum\limits_{i=1}^{L} m_i$.

Очевидно, что знак $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ зависит от выбора образующей в группе $H^s_{n-1}(\mathbb{R}\backslash 0; \mathbb{Z})$. Удобно фиксировать выбор образующих в группах $H^s_{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$, $H^s_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ следующим образом. Зафиксируем симплекс τ^n с барицентром в точке 0 пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда центральная проекция π осуществляет гомеоморфизм границы $\partial\tau^n$ и S^{n-1}; так как граница $\partial\tau^n$ триангулирована естественным образом, то и S^{n-1} получает соответствующую триангуляцию, и π становится симплициальным отображением полиэдров $\partial\tau^n$, S^{n-1} и индуцирует цепное отображение $\hat{\pi}_*$ их цепных комплексов (над $\mathbb{Z}$). Пусть $[\tau^n]$

ориентирован в соответствии с ориентацией $\mathbb{R}^n$. Тогда $\partial_n[\tau^n] = q_{n-1}$ — фундаментальный цикл полиэдра $\partial\tau^n$, что следует из формулы (9) § 3 для гомологий $H_*(\{\partial\tau^n\}; \mathbb{Z})$. Его образ $\gamma_{n-1} = \hat{\pi}_{n-1} q_{n-1}$ в $C_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ является фундаментальным циклом полиэдра $S^{n-1} = \partial D^n$, а соответствующий класс гомологий $[\gamma_{n-1}]$ — образующей в $H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, которую мы фиксируем. Очевидно, $[\gamma_{n-1}] = \pi_{*n-1}[q_{n-1}]$. Изоморфизм между H_*- и H^s_*-гомологиями определяет образующую γ^s_{n-1} в $H^s_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, причем $\gamma^s_{n-1} = \pi_{*n-1}[q_{n-1}]^s$. Образующая $\tilde{\gamma}^s_{n-1} \in H^s_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$ определяется фиксацией отображения $r\colon \mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$ и гомотопически обратного к нему $\varphi\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$, где $r(x) = x/\|x\|$ и $\varphi(x) = x$; r и φ индуцируют изоморфизмы $\varphi_{*n-1} = r^{-1}_{*n-1}\colon H^s_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H^s_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0; \mathbb{Z})$ и $\tilde{\gamma}^s_{n-1} = \varphi_{*n-1}(\gamma^s_{n-1})$.

Фиксировав таким образом образующие в группах $H^s_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$, $H^s_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, будем иметь для определения характеристики m равенство $\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m \cdot \tilde{\gamma}^s_{n-1}$, или, поскольку $\tilde{\gamma}^s_{n-1} = \varphi_{*n-1}(\gamma^s_{n-1}) = r^{-1}_{*n-1}(\gamma^s_{n-1})$, равенство $r_{*n-1}\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m\gamma^s_{n-1}$. Так как $r_{*k}\Phi_{*k} = (r \cdot \Phi)_{*k}$, где $(r \cdot \Phi)(x) = \Phi(x)/\|\Phi(x)\|$, $r \cdot \Phi = \tilde{\Phi}\colon \partial P_\alpha \to S^{n-1}$, то m интерпретируется как степень отображения $\tilde{\Phi}\colon \partial P_\alpha \to S^{n-1}$ в соответствии с определением 3 § 6.

Третий шаг — доказательство независимости характеристики $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ от выбора полиэдра P_α — мы опускаем ввиду громоздкости используемой нами элементарной конструкции (здесь пришлось бы ссылаться на инвариантность симплициальных гомологий и на теорему единственности).

Определение 4. *Характеристикой* (*вращением*) $\varkappa(\Phi, \partial U)$ *векторного поля* Φ *на границе* ∂U будем называть характеристику $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ на границе ∂P_α какой-либо полиэдральной области P_α указанного типа (см. первый шаг).

Теорема 4. *Если* $\Phi\colon \overline{U} \times [0; 1] \to \mathbb{R}^n$ — *гомотопия векторного поля, не имеющая на* ∂U *особых точек* (*т. е.* $\Phi\colon (\partial U) \times [0; 1] \to \mathbb{R}^n \setminus 0$), *то характеристика* $\varkappa(\Phi_t, \partial U)$ *векторного поля* $\Phi_t = \Phi\colon (\partial U \times t) \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ *не меняется при изменении* $t \in [0; 1]$, *в частности*, $\varkappa(\Phi_0, \partial U) = \varkappa(\Phi_1, \partial U)$.

Доказательство. В силу непрерывности отображения $\Phi(x, t)$ по переменным (x, t) найдется такое $\alpha_0 > 0$, что в α_0-окрестности $S_{\alpha_0}(\partial U)$ поле Φ_t не имеет особых точек при любом $t \in [0; 1]$. Тогда $\Phi_t\colon \partial P_{\alpha_0} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ для всякого $t \in [0; 1]$, где P_{α_0} построено по α_0 на первом шаге, — непрерывная гомотопия; следовательно, гомоморфизм $(\Phi_t)^s_{*n-1}$ сингулярных гомологий постоянен по t, что означает постоянство $\varkappa(\Phi_t, \partial P_\alpha)$, а следовательно, и постоянство $\varkappa(\Phi_t, \partial U)$. ■

Теорема 5. *Если непрерывное поле* $\Phi\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *не имеет на области* $\overline{U}$ *особых точек, то* $\varkappa(\Phi, \partial U) = 0$.

Доказательство. Пусть $z_{n-1} = \partial_n x_n$ — фундаментальный цикл границы ∂P_α. В условиях теоремы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\partial P_\alpha \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\Phi|_{\partial P_\alpha}"'] & & P_\alpha \arrow[dl, "\Phi|_{P_\alpha}"] \\
& \mathbb{R}^n\setminus 0 &
\end{tikzcd}$$

где i — вложение, $\Phi\big|_{\partial P_\alpha}$ и $\Phi\big|_{P_\alpha}$ — сужения отображения $\Phi\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n\setminus 0$. Рассматривая гомоморфизмы H^s_*-гомологий, порожденные отображениями диаграммы, а также изоморфизмы h_{n-1} H_{*n-1}- и H^s_{*n-1}-групп (см. теорему единственности для теории гомологий), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "i_{*n-1}"] \arrow[d, "h'_{n-1}"] & & H_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[d, "h''_{n-1}"] \\
H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "i_{*n-1}"] \arrow[dr, "(\Phi|_{\partial P_\alpha})_{*n-1}"'] & & H^s_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[dl, "(\Phi|_{P_\alpha})_{*n-1}"] \\
& H_{n-1}(\mathbb{R}^n\setminus 0; \mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

Так как $i_{*n-1}[z_{n-1}] = 0$ и $H_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$ ввиду гомологичности $z_{n-1} \sim 0$ в $C_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$ цикла $z_{n-1} = \partial_n x_n$, имеем $h''_{n-1}(i_{*\,n-1}[z_{n-1}]) = 0$, а из коммутативности квадрата получаем $i_{*\,n-1}(h'_{n-1}[z_{n-1}]) = 0$; отсюда и из равенства $[z_{n-1}]^s = h'_{n-1}[z_{n-1}]$ следует, что $i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = 0$ в $H^s_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$. Этот факт вместе с коммутативностью треугольника дает следующие равенства:

$$\left(\Phi\Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z^s_{n-1}] = \left(\Phi\Big|_{P_\alpha}\right)_{*\,n-1} i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s =$$

$$= \left(\Phi\Big|_{P_\alpha}\right)_{*\,n-1}(i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s) = 0,$$

что и означает равенство нулю вращения

$$\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha) = \varkappa(\Phi, \partial U). \ \blacksquare$$

Следствие 1. *Если для непрерывного векторного поля* Φ: $\overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *без особых точек на границе* ∂U *характеристика* $\varkappa(\Phi, \partial U)$ *отлична от нуля, то внутри области имеется точка* $x^* \in U$: $\Phi(x^*) = 0$.

Доказательство. Предположив противное, немедленно получим противоречие в силу теоремы. ■

Выше отмечалось, что в приложениях под особой точкой полезно понимать не только нуль ($\Phi(x_*) = 0$), но и, более широким образом, точки разрыва или неопределенности векторного поля (см., например, § 6 гл. I). Следующее утверждение является незначительной модификацией предыдущего.

Следствие 2. *Если на некоторой* ε*-окрестности* $S_\varepsilon(\partial U)$, $\varepsilon > 0$, *векторное поле* Φ *непрерывно, а на границе не имеет нулей и* $\varkappa(\Phi, \partial U) \neq 0$, *то поле нельзя продолжить внутрь области* $\overline{U}$ *без особой точки в расширенном смысле.*

Действительно, допустив противное, проводим рассуждение, как и выше.

Замечание. Если $\overline{U}$ — полиэдр, состоящий из объединения n-мерных симплексов (при связности U), то в последнем предложении достаточно требовать непрерывность Φ только на границе ∂U.

Пусть теперь $x_0 \in U$ — изолированная особая точка (в расширенном смысле) векторного поля Φ, т. е. существует диск $\overline{D}_r(x_0)$, в котором нет другой отличной от x_0 особой точки. Имеем непрерывное отображение

$$\Phi\colon \ (\overline{D}_r(x_0) \backslash x_0) \to \mathbb{R}^n \backslash 0.$$

Рассмотрим полиэдры $\overline{D}_r(x_0)$, $\overline{D}_1(x_0)$ и их границы $S_r^{n-1}(x_0)$, $S_1^{n-1}(x_0)$ соответственно; определим для последних фундаментальные циклы γ_{n-1}^r, γ_{n-1}^1, перенеся барицентр фиксированного симплекса τ^n в точку x_0 и используя гомеоморфизмы — центральные проекции $\pi^{(r)}$, $\pi^{(1)}$ из точки x_0 границы $\partial\tau^n$ на сферы $S_r^{n-1}(x_0)$, $S_1^{n-1}(x_0)$. Для центральной проекции π: $S_1^{n-1}(x_0) \to S_r^{n-1}(x_0)$, которая, очевидно, симплициальна, имеем $\gamma_{n-1}^r = \hat{\pi}_{n-1}\gamma_{n-1}^1$, так как $\pi = \pi^{(r)}(\pi^{(1)})^{-1}$ и соответственно $\hat{\pi}_{n-1} = \hat{\pi}_{n-1}^{(r)} \cdot (\hat{\pi}_{n-1}^{(1)})^{-1}$ для цепных комплексов; отсюда следует равенство $[\gamma_{n-1}^r] = \pi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^1]$ симплициальных классов гомологий, а также соответствующих сингулярных $[\gamma_{n-1}^r]^s = \pi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^1]^s$.

Отображение Φ: $S_r^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}^n\backslash 0$ индуцирует гомоморфизм Φ_*: $H_{n-1}^s(S_r^{n-1}(x_0); \mathbb{Z}) \to H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$; пусть $\Phi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^r]^s = m\cdot\tilde{\gamma}_{n-1}^s$. Число m назовем индексом ind (x_0, Φ) особой точки x_0 векторного поля Φ.

Если воспользоваться зависимостью между классами гомологий $[\gamma_{n-1}^r]^s$ и $[\gamma_{n-1}^1]^s$, то получим равносильное равенство $\Phi_{*\,n-1}\pi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^1]^s = m\tilde{\gamma}_{n-1}^s$; так как $\Phi_{*\,n-1}\pi_{*\,n-1} = (\Phi\pi)_{*\,n-1}$, и учитывая, что $\Phi\pi$: $S_1^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}^n\backslash 0$ задается формулой $(\Phi\pi)(x) = \Phi(r(x-x_0)+x_0)$, $x \in S_1^{n-1}(x_0)$, заключаем об эквивалентности определения ind (x_0, Φ) ранее данному (определению 2, п. 2); индекс ind (x_0, Φ) не зависит от радиуса сферы $S_r^{n-1}(x_0)$ (r можно брать как угодно малым).

Теорема 6 (об алгебраическом числе особых точек). *Пусть векторное поле Φ на границе области $\bar{U}$ непрерывно и не имеет особых точек, а внутри области имеет конечное число особых точек $\{x_i\}_{i=1}^k$ в расширенном смысле. Тогда справедливо равенство*

$$\varkappa(\Phi, \partial U) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(x_i, \Phi), \tag{9}$$

где сумма справа называется алгебраическим числом особых точек.

Доказательство. Так как отображение Φ непрерывно на $\bar{U}\backslash\{x_1, \ldots, x_k\}$, то можно построить полиэдр P_α, указанный на первом шаг. Некоторые из точек $x_1, \ldots, x_k$ могут оказаться на $(n-1)$-мерных симплексах триангуляции полиэдра P_α; путем достаточно малых сдвигов полиэдра, задаваемых параллельным переносом на вектор, ортогональный плоскости, содержащей такую грань, можно добиться того, что все особые точки окажутся внутри n-мерных симплексов $\{t_i^n\}_{i=1}^k$ триангуляции.

Будем считать, что P_α уже обладает этим свойством, и что такие симплексы t_i^n не пересекаются один с другим и с ∂P_α, т. е. $t_i^n \cap t_j^n = \varnothing$ при $i \neq j$ и $t_i^n \cap \partial P_\alpha = \varnothing$. Фундаментальную цепь x_n полиэдра P_α разобьем на две части: $x_n = x_n^1 + x_n^2$, где $x_n^1 = \sum_{i=1}^{k} 1\cdot[t_i^n]$, а x_n^2 состоит из остальных симплексов $\{\tau_j^n\}$: $x_n^2 = \sum 1\cdot[\tau_j^n]$; напомним, что все n-мерные симплексы ориентированы одинаково (в соответствии с ориентацией $\mathbb{R}^n$). Будем называть носителем некоторой цепи

$c_l = \sum\limits_i g_i \tau_i^l$ комплекса $C_*(K; G)$, соответствующего симплициальному комплексу K, объединение всех симплексов τ_i^l, входящих в цепь c_l с ненулевыми коэффициентами. Носители цепей x_n^1, x_n^2 обозначим соответственно Q_1, Q_2. Для фундаментального цикла границы ∂P_α имеем равенство $z_{n-1} = z_{n-1}^1 + z_{n-1}^2$, где $z_{n-1}^1 = \partial_n x_n^1$, $z_{n-1}^2 = \partial_n x_n^2$ — фундаментальные циклы полиэдров ∂Q_1 (Q_1 не связен, если $k > 1$) и ∂Q_2; так как носитель $|\partial_n x_n^1|$ содержится в $Q_1 \cap Q_2$, то можно считать z_{n-1}^1, z_{n-1}^2 циклами полиэдра ∂Q_2, причем класс гомологий $[z_{n-1}^2] = 0$ в $H_{n-1}(Q_2; \mathbb{Z})$; так как $\partial P_\alpha \subset \partial Q_2$, можно считать z_{n-1} циклом полиэдра ∂Q_2.

Из равенства $z_{n-1}^2 = z_{n-1} - z_{n-1}^1$ получаем $[z_{n-1}^2] = [z_{n-1}] - [z_{n-1}^1]$ в $H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ и $[z_{n-1}^2]^s = [z_{n-1}]^s - [z_{n-1}^1]^s$ в $H_{n-1}^s(\partial Q_2; \mathbb{Z})$, где верхний индекс s указывает на то, что рассматривается соответствующий класс сингулярных гомологий. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z}) \arrow[r, "i_{*\,n-1}"] \arrow[d, "h'_{n-1}"] & H_n(Q_2; \mathbb{Z}) \arrow[d, "h''_n"] \\
H_{n-1}^s(\partial Q_2; \mathbb{Z}) \arrow[r, "i_{*\,n-1}"] & H_n^s(Q_2; \mathbb{Z})
\end{tikzcd} \qquad (10)$$

где $i_{*\,n-1}$ — гомоморфизмы, порожденные вложением $i\colon \partial Q_2 \to Q_2$, а h', h'' — изоморфизмы гомологий H_* и H_*^s. Класс $[z_{n-1}^2]$ из $H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} i_{*\,n-1}$, так как $[z_{n-1}^2] = 0$ в $H_{n-1}(Q_2; \mathbb{Z})$. Из коммутативности диаграммы, как в теореме 5, получаем $i_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^s = 0$ в $H_{n-1}^s(Q_2; \mathbb{Z})$; более того, полиэдры ∂Q_2, Q_2 теперь играют роль полиэдров ∂P_α, P_α в доказательстве теоремы 5; поэтому имеем еще равенство $\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^s = 0$ в $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$. С другой стороны, в $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$ имеем

$$\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^2 = \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s - \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^1]^s,$$

что в итоге приводит к равенству

$$\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^1]^s. \qquad (11)$$

Принимая во внимание равенство $[z^1_{n-1}]^s = \sum\limits_i [\partial_n[t_i^n]]^s$, перепишем (11) в виде

$$\left(\Phi\Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi\Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t_i^n]]^s. \qquad (12)$$

Так как $\partial Q_2 = \partial P_\alpha \cup (\bigcup\limits_i \partial t_i^n)$ и симплексы t_i^n не пересекаются, то группы C_*^s, H_*^s сингулярных цепей и гомологий полиэдра ∂Q_2 разлагаются в прямые суммы групп, соответствующих симплексам t_i^n в ∂Q_2 и ∂P_α. Отождествляя классы $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t_i^n]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ с классами $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t_i^n]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$, $H^s_{n-1}(\partial t_i^n; \mathbb{Z})$ в соответствии с указанным разложением, перепишем последнее соотношение (12) в виде

$$\left(\Phi\Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi\Big|_{\partial t_i^n}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t_i^n]]^s;$$

учитывая, что

$$\left(\Phi\Big|_{\partial t_i^n}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t_i^n]]^s = m_i\cdot\tilde{\gamma}^s_{n-1},$$

где $m_i = \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, получим $\left(\Phi\Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum\limits_i m_i\tilde{\gamma}^s_{n-1}$, следовательно, $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha) = \sum\limits_i \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Формула (9) является одной из важнейших в теории особых точек векторных полей и неподвижных точек отображений.

§ 7. Гомологии клеточного комплекса

Перейдем к изучению гомологий пространств, имеющих гомотопический тип клеточного комплекса. Этот класс пространств интересен, во-первых, потому, что он достаточно широк (см. § 12 гл. IV), а во-вторых, потому, что гомологии клеточного комплекса могут быть вычислены весьма простым и изящным способом.

Пусть X — конечный клеточный комплекс. Построим цепной комплекс $\tilde{C}_*(X; G)$ следующим образом. В качестве группы $\tilde{C}_k(X; G)$ возьмем абелеву группу формальных линейных комбинаций $\sum\limits_i g_i\cdot\tau_i^k$, где $g_i \in G$ — произвольные элементы, τ_i^k — k-мерные клетки комплекса X; суммирование идет по всем k-мерным клеткам. Следовательно, группа $\tilde{C}_k(X; G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько клеток размерности k в клеточном разбиении X. Будем при этом считать, что каждый экземпляр G соответствует одной из k-мерных клеток.

Определим дифференциал $\tilde{\partial}_k\colon \tilde{C}_k(X; G) \to \tilde{C}_{k-1}(X; G)$. Пусть τ^k — k-мерная клетка X; ее граница содержится в объединении клеток размерности, не выше $k-1$ ($(k-1)$*-мерном остове* X, обозначаемом X^{k-1}). По определению клеточного комплекса, клетка τ^k задается отображением приклеивания $f\colon S^{k-1} \to X^{k-1}$. Рассмотрим композицию $S^{k-1} \to X^{k-1} \to X^{k-1}/X^{k-2}$, где последняя стрелка — отображение факторизации. Пространство X^{k-1}/X^{k-2} является клеточным комплексом; оно состоит из одной клетки размерности нуль — точки $*$, в которую перешло пространство X^{k-2} при факторизации, и стольких клеток размерности $(k-1)$, приклеенных по границам к точке $*$, сколько их было в остове X^{k-1}, т. е. в X. Такое пространство называется букетом $(k-1)$-мерных сфер. Выделим в X^{k-1} клетку τ_j^{k-1}; в букете сфер X^{k-1}/X^{k-2} ей соответствует некоторая сфера S_j^{k-1}. Рассмотрим композицию отображений

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X^{k-1} \to X^{k-1}/X^{k-2} \to S_j^{k-1},$$

где последняя стрелка обозначает отображение факторизации по подпространству пространства X^{k-1}/X^{k-2}, состоящему из всех сфер, кроме S_j^{k-1}. Степень отображения этой композиции называется *коэффициентом инцидентности* клеток τ^k и τ_j^k и обозначается $[\tau^k, \tau_j^{k-1}]$; коэффициент инцидентности показывает, сколько раз граница клетки τ^k «накручивается» на клетку τ_j^{k-1} при приклеивании клетки τ^k к остову X^{k-1}. Обозначим через Ω^{k-1} множество клеток размерности $k-1$ в клеточном комплексе X. Для каждой клетки τ^k определим дифференциал $\tilde{\partial}_k$ формулой

$$\tilde{\partial}_k \tau^k = \sum_{j \in \Omega^{k-1}} [\tau^k, \tau_j^{k-1}] \cdot \tau_j^{k-1}$$

и распространим $\tilde{\partial}_k$ и $\tilde{C}_k(X; G)$ по линейности *.

При $k=1$ коэффициент инцидентности $[\tau^1, \tau_j^0]$ может быть равен 0, 1 и -1. Если $f((0; 1))$ — 1-мерная клетка τ^1, то

$$[\tau^1, \tau_j^0] = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad [f(0) \cup f(1)] \cap \tau_j^0 = \varnothing \\ & \qquad\qquad\qquad \text{или} \quad f(0) = f(1) = \tau_j^0, \\ 1, & \text{если} \quad f(1) = \tau_j^0 \quad \text{и} \quad f(0) \neq \tau_j^0, \\ -1, & \text{если} \quad f(0) = \tau_j^0 \quad \text{и} \quad f(1) \neq \tau_j^0. \end{cases}$$

Можно показать, что $\tilde{\partial}_{k-1} \cdot \tilde{\partial}_k = 0$.

---

* Как и в § 4, мы считаем, что G — кольцо с единицей.

Итак, построен цепной комплекс $\widetilde{C}_*(X; G)$. Оказывается, что его гомологии совпадают с группами сингулярных гомологий комплекса X. Доказательство этого факта использует лишь технику точных последовательностей; мы не приводим его, поскольку оно чересчур длинно.

Выгода метода вычисления гомологий с помощью комплекса $\widetilde{C}_*(X; G)$ очевидна: группы $\widetilde{C}_k(X; \mathbb{Z})$ имеют конечное число образующих в отличие от групп $C_k^s(X; \mathbb{Z})$. Следовательно, подгруппы k-мерных циклов и границ тоже имеют конечное число образующих, как и их факторгруппа $H_k^s(X; \mathbb{Z})$. Из теории абелевых групп следует, что

$$H_k^s(X; \mathbb{Z}) \simeq (\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\rho_k}) \oplus \mathbb{Z}_{\rho_1^k} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{\rho_{s_k}^k},$$

где $\mathbb{Z}_{\rho_i^k}$ — конечная циклическая группа порядка ρ_i^k, причем ρ_i^k делится на ρ_{i-1}^k. Число ρ_k называется k-мерным числом Бетти, а числа ρ_i^k — k-мерными числами кручения пространства X.

Описанный способ, несмотря на некоторую сложность его обоснования, является весьма удобным с практической точки зрения и позволяет просто вычислить гомологии целого ряда конкретных пространств.

Упражнение 1°. Представив сферу S^n в виде клеточного комплекса $S^n = e^n \cup e^0$, $n \geqslant 1$, подсчитайте гомологии S^n. Покажите, что $\rho_k = 0$, $k \neq 0$, n; $\rho_0 = \rho_n = 1$ и что все $\rho_i^k = 0$.

Вычислим группы гомологий комплексного проективного пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Для этого представим $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ в виде клеточного комплекса. Точка из $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ задается большим кругом $(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\alpha}\xi_2, \ldots$ $\ldots, e^{i\alpha}\xi_{n+1})$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, из $S^n_{\mathbb{C}}$ (т. е. $\xi_i \in \mathbb{C}$, $|\xi_1|^2 + \ldots$ $\ldots + |\xi_{n+1}|^2 = 1$). Определим клетку τ^{2k}, где $0 \leqslant k \leqslant n$, с помощью характеристического отображения $g^{2k}\colon \overline{D}^{2k} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, сопоставляющего точке

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \left\{ \xi \in \mathbb{C}^k\colon \sum_{j=1}^{k} |\xi_j|^2 \leqslant 1 \right\} \simeq \overline{D}^{2k}$$

точку из $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, заданную большим кругом

$$(e^{i\alpha}\xi_1, \ldots, e^{i\alpha}\xi_k, \quad e^{i\alpha}\sqrt{1 - |\xi_1|^2 - \ldots - |\xi_k|^2}, 0, \ldots, 0).$$

При $k = 0$ это большой круг (точка в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$) $(e^{i\alpha} \cdot 1, 0, \ldots, 0)$.

Таким образом, пространство $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ представлено в виде клеточного комплекса (проверьте!), имеющего по одной клетке в четных размерностях до $2n$ включительно, и не имеющего клеток в остальных размерностях. Поэтому

$$\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2m \quad \text{и} \quad k \leqslant 2n, \\ 0 & \text{при} \quad k = 2m+1 \quad \text{или} \quad k > 2n. \end{cases}$$

Поскольку одна из групп $\tilde{C}_{k-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, $\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$ тривиальна, в комплексе $\tilde{C}_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, состоящем из групп $\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, граничный гомоморфизм может быть только тривиальным. Получаем изоморфизм $H_k^s(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, т. е.

$$H_k^s(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2i \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Гомологии комплексного проективного пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ могут быть вычислены и другим способом. Сначала мы зададим гладкую функцию f на многообразии $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, все критические точки которой невырождены, а затем с ее помощью установим структуру клеточного комплекса, гомотопически эквивалентного $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, и вычислим его группы гомологий.

Будем рассматривать $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ как пространство орбит группы S^1, действующей на S^{2n+1}. Определим функцию $\varphi\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$, положив $\varphi(z_0, \ldots, z_n) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j |z_j|^2$, где c_j — вещественные числа, причем $c_j < c_{j+1}$. Пусть

$$(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{j=0}^{n} |z_j|^2 = 1.$$

Легко видеть, что для любого комплексного числа λ такого, что $|\lambda| = 1$, выполнено равенство $\varphi(z_0, \ldots, z_n) = \varphi(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$. Таким образом, φ определяет функцию на $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Обозначим ее $f\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$.

Построим на $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ следующую локальную систему координат. Пусть U_j — множество классов эквивалентности точек $(z_0, \ldots$ $\ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ таких, что $z_j \neq 0$. Положим $|z_j| \cdot \frac{z_k}{z_j} = x_{jk} + i y_{jk}$. Функции $x_{jk}(z_0, \ldots, z_n)$, $y_{jk}(z_0, \ldots, z_n)$, $k = 0, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, задают диффеоморфизм множества U_j на открытый единичный шар в $\mathbb{R}^{2n}$.

Упражнение 2°. Проверьте, что множества U_j и отображения, задаваемые функциями

$$x_{jk}, \; y_{jk}, \qquad k = 0, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

образуют атлас гладкого многообразия $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Поскольку $|z_k|^2 = x_{jk}^2 + y_{jk}^2$ и $|z_j|^2 = 1 - \sum_{k \neq j} (x_{jk}^2 + y_{jk}^2)$, то в локальных координатах в U_j функцию f можно представить в виде

$$f(\ldots, x_{jk}, y_{jk}, \ldots) = c_j + \sum_{k \neq j} (c_k - c_j)(x_{jk}^2 + y_{jk}^2).$$

Единственной критической точкой функции f в U_j является точка $x_{jk} = y_{jk} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Эта критическая точка невырождена, ее индекс равен удвоенному числу отрицательных разностей $c_k - c_j$, т. е. удвоенному числу c_k, меньших c_j. Поэтому индекс критической точки в U_0 равен нулю, индекс критической точки в U_1 равен двум и т. д. Вообще, индекс критической точки в U_j равен $2j$.

Итак, функция f имеет n критических точек, индексы которых равны $2j$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому (см. § 12 гл. IV) пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса K, состоящего из клеток четных размерностей $2j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, по одной в каждой размерности. Для такого комплекса K имеем

$$\tilde{C}_k(K; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2j \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку одна из групп $\tilde{C}_k(K; G)$, $\tilde{C}_{k-1}(K; G)$ тривиальна, в комплексе $\tilde{C}_*(K; G)$, состоящем из групп $\tilde{C}_k(K; G)$, дифференциал может быть только тривиальным. Получаем изоморфизм

$$H_k^s(K; G) \simeq \tilde{C}_k(K; G).$$

Учитывая, что группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств совпадают, имеем окончательный результат:

$$H_k^s(\mathbb{C}P^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при } k = 2j \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Его группы гомологий также можно вычислить, представив $\mathbb{R}P^n$ в виде клеточного комплекса.

Точка из $\mathbb{R}P^n$ задается как пара $\{x, -x\}$, где $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n+1}) \in S^n$, т. е. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Определим клетку τ^k, где $0 \leqslant k \leqslant n$, с помощью характеристического отображения $g^k\colon \overline{D}^k \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющего точке $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \left\{\xi \in \mathbb{R}^k\colon \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \leqslant 1\right\} = \overline{D}^k$ точку из $\mathbb{R}P^n$ вида $(x, -x)$, где

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \sqrt{1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_k^2}, 0, \ldots, 0).$$

При $k = 0$ имеем $x = (1, 0, \ldots, 0)$.

Таким образом, пространство $\mathbb{R}P^n$ представлено в виде клеточного комплекса, имеющего по одной клетке в каждой размерности от 0 до n. Заметим, что в полученном клеточном комплексе его k-мерный остов является пространством $\mathbb{R}P^n$, где $0 \leqslant k \leqslant n$.

Вычислим сначала $H^s_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. В соответствующем цепном комплексе

$$\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для вычисления граничного гомоморфизма рассмотрим коэффициенты инцидентности $[\tau^k, \tau^{k-1}]$ — степени отображений φ_k: $S^{k-1} \to S^{k-1}$, возникающих как композиции

$$S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \to S^{k-1},$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$.

Каждое из этих отображений φ_k можно представить иным способом в виде композиции $\varphi_k = \beta_k \alpha_k$. Отображение φ_k действует так: сначала в сфере S^{k-1} стягивается экватор S^{k-2} в точку, а затем в полученном пространстве («букете») две сферы склеиваются таким образом, что каждая точка склеивается с точкой, «в прошлом» (в исходной сфере) центрально симметричной данной. Таким образом, α_k отображает S^{k-1} на букет двух $(k-1)$-мерных сфер, причем образующая γ группы $H^s_{k-1}(S^{k-1}; \mathbb{Z})$ переходит на сумму $\gamma_1 + \gamma_2$ образующих $(k-1)$-мерной группы гомологий. Отображение β_k склеивает две сферы; в группах гомологий образующие γ_1 и γ_2 переходят на $\pm\gamma$, поскольку на каждой из сфер букета β_k — гомеоморфизм. Таким образом, гомоморфизм $(\varphi_k)_{*\,k-1}$ может переводить образующую γ либо в $2 \cdot \gamma = \gamma + \gamma$, либо в $0 \cdot \gamma = \gamma - \gamma$. В любом случае $\deg \varphi_k \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$, т. е. $[\tau^k, \tau^{k-1}] \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ при $2 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом, граничный гомоморфизм $\tilde{\partial}_k$ в $C_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ тривиален при $2 \leqslant k \leqslant n$. При $k = 1$ нетрудно видеть, что $[\tau^1, \tau^0] = 0$. Следовательно, граничный гомоморфизм $\tilde{\partial}_k$ тривиален при всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому группы гомологий $H^s_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ изоморфны группам цепей $C_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, т. е.

$$H^s_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n. \end{cases}$$

Перейдем к вычислению целочисленных групп гомологий $H^s_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$. Очевидно, $\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ при $0 \leqslant k \leqslant n$, при $k > n$ имеем $\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = 0$. Для вычисления $\tilde{\partial}_k$ снова рассмотрим отображения $\varphi_k = \beta_k \cdot \alpha_k$. Можно показать (используя результат упражнения 5° § 6), что гомоморфизм $(\beta_k)_{*\, k-1}$ при четном $k-1$ (т. е. нечетном k) переводит образующую γ_1 в γ и γ_2 в $(-\gamma)$, а при нечетном $k-1$ (т. е. четном k) обе образующие, γ_1 и γ_2, переходят в γ. Поэтому $(\varphi_k)_{*\, k-1}\gamma = 0 \cdot \gamma$ при нечетном k и $(\varphi_k)_{*\, k-1}\gamma = 2 \cdot \gamma$ при четном k. Соответственно, $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 0$ при нечетном k и $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 2$ при четном k. Таким образом, граничный гомоморфизм ∂_k тривиален при нечетном k и заключается в умножении на 2 при четном $k \leqslant n$. Следовательно, $H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq 0$, $H_3(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$ и т. д. (при $n > 3$).

Получаем следующий результат:

при $n = 2m$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p + 1, \ \ 1 \leqslant k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $n = 2m + 1$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0, n, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p + 1, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следующее упражнение выполните, опираясь на описание гомотопического типа многообразия (см. п. 4 § 12 гл. IV).

Упражнение 3°. Покажите, что если M^n — компактное гладкое многообразие размерности n, то $H_k^s(M^n; G) = 0$ при $k > n$.

§ 8. Эйлерова характеристика и число Лефшеца

Весьма важным для приложений является вопрос о том, когда непрерывное отображение $f\colon X \to X$ топологического пространства X в себя имеет неподвижную точку, т. е. когда существует такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$. Достаточные условия существования неподвижных точек могут быть даны в терминах групп гомологий и их гомоморфизмов. Этим вопросам посвящен настоящий параграф. Всюду ниже мы рассматриваем топологические пространства, являющиеся компактными полиэдрами.

1. Число Лефшеца симплициального отображения. Группу коэффициентов G в дальнейшем будем считать полем. Рассмотрим симплициальное отображение $f\colon |K| \to |K|$, где K в соответствии с договоренностью § 3 — конечный симплициальный комплекс. Индуцированный гомоморфизм группы симплициальных гомологий

$$f_{*p}\colon H_p(K; G) \to H_p(K; G)$$

является эндоморфизмом векторного пространства $H_p(K; G)$. Выбор базиса в $H_p(K; G)$ позволяет сопоставить эндоморфизму матрицу, след которой $\mathrm{Sp}(f_{*p})$ от выбора базиса не зависит.

Определение 1. *Числом Лефшеца симплициального отображения* $f\colon |K| \to |K|$ компактного полиэдра $|K|$ в себя называется величина

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \,\mathrm{Sp}\,(f_{*p}). \tag{1}$$

В силу конечности симплициального комплекса K сумма (1) является суммой конечного числа слагаемых (конечность K нужна также и для того, чтобы $H_p(K; G)$ были конечномерными векторными пространствами и следы $\mathrm{Sp}(f_{*p})$ были корректно определены).

Обозначим через $\mathrm{Sp}(\hat{f}_p)$ след матрицы эндоморфизма $\hat{f}_p\colon C_p(K; G) \to C_p(K; G)$ векторного пространства $C_p(K; G)$.

Теорема 1. *Для симплициального отображения f справедлива формула*

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \,\mathrm{Sp}(\hat{f}_p). \tag{2}$$

Теорема 1 утверждает, что альтернированная сумма следов эндоморфизма цепного комплекса равна альтернированной сумме следов индуцированного эндоморфизма групп гомологий.

Для доказательства теоремы 1 необходимы следующие две леммы, являющиеся легкими упражнениями по курсу линейной алгебры.

Лемма 1. *Пусть $A\colon E \to E$ — эндоморфизм векторного пространства E, E_0 — векторное подпространство пространства E и $AE_0 \subset E_0$. Тогда A определяет эндоморфизм $\tilde{A}\colon E/E_0 \to E/E_0$ и*

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A\big|_{E_0}) + \mathrm{Sp}(\tilde{A}). \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $\Delta\colon E \to F$ — изоморфизм векторных пространств; $A\colon E \to E$, $B\colon F \to F$ — такие операторы, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "A"'] & F \arrow[d, "B"] \\ E \arrow[r, "\Delta"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $B\Delta = \Delta A$; тогда

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B). \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1. Поскольку $f_*\colon C_*(K;G)\to C_*(K;G)$ — гомоморфизм цепных комплексов, то

$$\hat f_p(\operatorname{Ker}\partial_p)\subset\operatorname{Ker}\partial_p \quad\text{и}\quad \hat f_p(\operatorname{Im}\partial_{p+1})\subset\operatorname{Im}\partial_{p+1}.$$

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Ker}\partial_p=Z_p$, $\operatorname{Im}\partial_{p+1}=B_p$, $C_p(K;G)/\operatorname{Ker}\partial_p=T_p$, $Z_p/B_p=H_p$. По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}(\hat f_p)&=\operatorname{Sp}\left(\hat f_p\Big|_{Z_p}\right)+\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_p\Big|_{T_p}\right)=\\&=\operatorname{Sp}\left(\hat f_p\Big|_{B_p}\right)+\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_p\Big|_{H_p}\right)+\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_p\Big|_{T_p}\right).\qquad(5)\end{aligned}$$

Но дифференциал ∂_p индуцирует канонический изоморфизм $\tilde\partial_p\colon T_p\to B_{p-1}$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}T_p \arrow[r, "\tilde\partial_p"] \arrow[d, "\tilde f_p"'] & B_{p-1} \arrow[d, "\tilde f_{p-1}"] \\ T_p \arrow[r, "\tilde\partial_p"] & B_{p-1}\end{tikzcd}$$

По лемме 2 получим

$$\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_p\Big|_{T_p}\right)=\operatorname{Sp}\left(\hat f_{p-1}\Big|_{B_{p-1}}\right).\qquad(6)$$

Ввиду того, что $C_0(K;G)=\operatorname{Ker}\partial_0$, имеем

$$\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_0\Big|_{T_0}\right)=\operatorname{Sp}\left(\hat f\Big|_0\right).\qquad(7)$$

Ясно, что гомоморфизм $\tilde{\hat f}\colon H_p\to H_p$ совпадает по определению с гомоморфизмом $f_{*p}\colon H_p(K;G)\to H_p(K;G)$. Таким образом, из равенств (5), (6), (7) получаем

$$\operatorname{Sp}\left(\tilde{\hat f}_p\Big|_{T_p}\right)=\operatorname{Sp}\left(\hat f_p\Big|_{B_p}\right)+\operatorname{Sp}(f_{*p})+\operatorname{Sp}\left(\hat f_{p-1}\Big|_{B_{p-1}}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\operatorname{Sp}(\hat f_p)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\Big[\operatorname{Sp}\left(\hat f_p\Big|_{B_p}\right)+\operatorname{Sp}(f_{*p})+\\+\operatorname{Sp}\left(\hat f_{p-1}\Big|_{B_{p-1}}\right)\Big]=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\operatorname{Sp}(f_{*p});\end{aligned}$$

итак,

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(\hat{f}_p) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(f_{*p}). \ \blacksquare \qquad (8)$$

Следствие. *Число Лефшеца Λ_f над полем коэффициентов характеристики нуль, в частности, над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, — целое число.*

Действительно, рассмотрев в $C_p(K; G)$ базис из ориентированных симплексов, получим, что $\operatorname{Sp}(\hat{f}_p)$ — целое число, а следовательно, в силу (4) Λ_f — целое число. ■

Роль числа Λ_f раскрывает следующая

Теорема 2. *Пусть $f\colon |K| \to |K|$ — симплициальное отображение и $\Lambda_f \neq 0$. Тогда существует неподвижная точка отображения f, т. е. такая точка $x \in |K|$, что $f(x) = x$.*

Доказательство. В силу (2) из условия $\Lambda_f \neq 0$ следует $\sum\limits_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(\hat{f}_p) \neq 0$, поэтому найдется p, для которого $\operatorname{Sp}(\hat{f}_p) \neq 0$. В базисе, состоящем из ориентированных симплексов, матрица эндоморфизма $\hat{f}_p$ состоит из элементов, равных 0, $+1$ и -1. Поскольку $\operatorname{Sp}(\hat{f}_p) \neq 0$, то найдется $\tau_i^p \in K$, для которого $f_p[\tau_i^p] = \pm[\tau_i^p]$. Следовательно, $f\big|_{\tau_i^p}$ — гомеоморфизм τ_i^p на себя, линейный в барицентрических координатах, откуда вытекает, что барицентр τ_i^p — неподвижная точка отображения f. ■

Обсудим важное дополнение к теореме 2. Пусть $f\colon |K^{(r)}| \to |K|$ — симплициальное отображение; конечно же, оно является непрерывным отображением $f\colon |K| \to |K|$, но не обязательно симплициальным. Введем следующую суперпозицию $\Xi_*^{(r)}\hat{f}_*$ (см. § 3) цепных гомоморфизмов:

$$C_*(K^{(r)}; G) \xrightarrow{\hat{f}_*} C_*(K; G) \xrightarrow{\Xi_*^{(r)}} C_*(K^{(r)}; G).$$

Цепной гомоморфизм $\Xi_*^{(r)}\hat{f}_*$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $(\Xi_*^{(r)}\hat{f}_*)\colon H_*(K^{(r)}; G) \to H_*(K^{(r)}; G)$. Положим по определению

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}\,[(\Xi_*^{(r)}\hat{f}_*)_{*p}]. \qquad (9)$$

Упражнение 1°. Докажите, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(\Xi_p^{(r)}\hat{f}_p) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}\,[(\Xi_*^{(r)}\hat{f}_*)_{*p}] \qquad (10)$$

и что если $\Lambda_f \neq 0$, то существуют такие симплексы $\tau^p \in K^{(r)}$ и $\mu^p \in K$, что $\tau^p \subset \mu^p$ и $f(\tau^p) = \mu^p$.

Указание. Рассмотрите цепной гомоморфизм $\Xi_*^{(r)} \widehat{f}_*$ и проведите для него рассуждения теорем 1, 2.

Рассмотрим теперь пример, когда $f = 1_K \colon |K| \to |K|$ — тождественное отображение полиэдра $|K|$. Обозначим через β_p размерность векторного пространства $H_p(|K|; G)$ *, а через d_p — число p-мерных симплексов в симплициальном комплексе K. Очевидно, что

$$\mathrm{Sp}\,((1_K)_{*p}) = \beta_p, \quad \mathrm{Sp}\,((1_K)_p) + \mathrm{Sp}\,(1_{C_p(K;\,G)}) = d_p.$$

Формула (8) приобретает вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p d_p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_p. \tag{11}$$

Формула (11) устанавливает соотношение между геометрическими и гомологическими характеристиками полиэдра.

Определение 2. *Эйлеровой характеристикой компактного полиэдра* $|K|$ называется величина

$$\chi(|K|) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p d_p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_p. \tag{12}$$

Ясно, что $\chi(|K|) = \Lambda_{1_{|K|}}$.

Упражнение 2°. Покажите, что справедливо равенство $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

2. Число Лефшеца непрерывного отображения. В предыдущих рассуждениях мы рассматривали лишь симплициальные отображения. Оказывается, что конструкцию числа Лефшеца и утверждение теоремы 2 можно обобщить и для произвольных непрерывных отображений. При этом мы будем опираться на теорему единственности теории гомологий (см. § 5). Воспользуемся методом аппроксимации непрерывного отображения полиэдра симплициальным отображением.

Теорема 3 (о симплициальной аппроксимации). *Пусть* $X = |L|$ *— компактный полиэдр,* $f \colon X \to X$ *— непрерывное отображение. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такая триангуляция* K *полиэдра* X*, ее* r*-кратное барицентрическое подразделение* $K^{(r)}$ *и такое симплициальное отображение* $f_\varepsilon \colon |K^{(r)}| \to |K|$*, что*

---

* Если G — поле характеристики нуль, то β_p совпадает с p-мерным числом Бетти ρ_p пространства $|K|$ в смысле определения § 7.

для любой точки $x \in X$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем на полиэдре X триангуляцию K такую, что мелкость триангуляции K меньше ε. Будем называть звездой $\mathrm{St}\, a$ с вершиной $a \in K$ внутренность объединения всех симплексов, вершиной которых является a. Очевидно, звезды всех вершин K образуют покрытие X; покрытие образуют также и прообразы $\{f^{-1}(\mathrm{St}\, a^p)\}_{a^p \in K}$.

Поскольку X компактно, по лемме о лебеговом числе (см. теорему 13 § 13 гл. II) существует число $\nu > 0$ такое, что всякое множество диаметра $\delta < \nu$ содержится в одном из множеств $f^{-1}(\mathrm{St}\, a^p)$. Выберем такое r, чтобы мелкость $K^{(r)}$ была меньше $\nu/2$. Тогда отображение f переводит всякую звезду $\mathrm{St}\, b^q$, $b^q \in K^{(r)}$, в некоторую звезду $\mathrm{St}\, a^p$, $a^p \in K$. Определим симплициальное отображение f_ε: $|K^{(r)}| \to |K|$ равенствами

$$f_\varepsilon(b^q) = a^p. \tag{13}$$

Упражнение 3°. Проверьте, что формула (13) действительно определяет симплициальное отображение.

Вычислим теперь $\rho(f(x), f_\varepsilon(x))$ для $x \in X$. Если x — вершина $K^{(r)}$, то $f(\mathrm{St}\, x) \subset \mathrm{St}\, a^p$, $a^p \in K$, и, в частности, $f(x) \in \mathrm{St}\, a^p$, поэтому

$$\rho(f(x), a^p) = \rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon.$$

Если же $x \in \mathrm{Int}\,(b^0, \ldots, b^q)$, где $(b^0, \ldots, b^q) \in K^{(r)}$, то $x \in \in \bigcap\limits_{i=0}^{q} \mathrm{St}\, b^i$. Имеем $f(x) \in \bigcap\limits_{a^i = f_\varepsilon(b^i)} \mathrm{St}\, a^i$, откуда следует, что $f(x)$ лежит в симплексе, определяемом вершинами $a^i = f_\varepsilon(b^i)$. В силу того, что f_ε — симплициальное отображение, $f_\varepsilon(x)$ попадает в этот же симплекс из K. Таким образом, и в этом случае $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$. ■

Упражнения. 4°. Покажите, что отображение f_ε гомотопно отображению f.

5°. Покажите, что для компактного полиэдра X существует положительное число $\alpha = \alpha(X)$ такое, что из неравенства $\rho(f(x), g(x)) < \alpha$, выполненного для всех $x \in X$ (f, g: $X \to X$ — непрерывные отображения), следует, что отображения f и g гомотопны.

В силу теоремы единственности теории гомологий имеет место изоморфизм $H_*(K; G) \simeq H^s_*(X; G)$ для компактного полиэдра $X = |K|$ и, следовательно, $\dim_G \oplus H^s_p(X, G) < \infty$. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 3. *Числом Лефшеца непрерывного отображения* $f\colon X \to X$ компактного полиэдра X в себя называется величина

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(f^s_{*p}), \tag{14}$$

где $f^s_{*p}\colon H^s_p(X; G) \to H^s_p(X; G)$.

В силу теоремы единственности теории гомологий для симплициального отображения $f\colon |K^{(r)}| \to |K|$, $r \geqslant 1$, справедливо равенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(f^s_{*p}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}[(\Xi^r_* \hat{f}_*)_{*p}]. \tag{15}$$

Таким образом, определения 1 и 3 согласованы между собой.

Очевидно, что для гомотопных непрерывных отображений $f, g\colon X \to X$ имеем $\Lambda_f = \Lambda_g$. Поэтому число Лефшеца его симплициальной аппроксимации $f_\varepsilon\colon |K^{(r)}| \to |K|$, где K — триангуляция X. Можно было бы определить число Лефшеца непрерывного отображения как число Лефшеца его симплициальной аппроксимации, не используя сингулярной теории гомологий.

Следующая теорема является весьма полезной для различных приложений. В ее доказательстве мы используем теорему единственности теории гомологий.

Теорема 4 (Лефшец). *Пусть* $f\colon X \to X$ — *непрерывное отображение компактного полиэдра* $X = |L|$ *в себя и* $\Lambda_f \neq 0$. *Тогда существует неподвижная точка отображения* f, *т. е. такая точка* $x \in X$, *что* $f(x) = x$.

Доказательство. Предположим, что f не имеет неподвижных точек. Тогда найдется такое $\gamma > 0$, что $\rho(f(x), x) \geqslant \gamma$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим триангуляцию K мелкости $\gamma/3$ полиэдра $X = |L|$ и симплициальную аппроксимацию $f_{\gamma/3}\colon K^{(r)} \to K$ отображения f. Для произвольных точек x, y любого симплекса $\tau^q \in K^{(r)}$ имеем неравенства $\rho(f_{\gamma/3}(x), y) \geqslant \rho(f(x), x) - \rho(x, y) - \rho(f_{\gamma/3}(x), f(x)) \geqslant \gamma/3$. Это означает, что включение $\tau^q \subset f_{\gamma/3}(\tau^q)$ невозможно. С другой стороны, в силу того, что $\Lambda_{f_{\gamma/3}} = \Lambda_f \neq 0$, найдется $\tau^q \in K^{(r)}$, для которого такое включение имеет место (см. упр. 1°, 4°). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Упражнения. 6°. Распространите определение 2 и теорему 4 для компактного полиэдра X, гомеоморфного $|L|$.

7°. Проверьте, что в условиях теоремы Брауэра о неподвижной точке (см. § 4 гл. III) $\Lambda_f + 1$.

Указание. Постройте гомотопию к постоянному отображению.

3. Эйлерова характеристика многообразия и особые точки векторного поля. Остановимся теперь на применении полученных результатов к теории многообразий.

Теорема 5. *Пусть M^n — одновременно гладкое компактное многообразие и полиэдр *. Пусть $\chi(M^n) \neq 0$. Тогда для всякого векторного поля X на M^n существует точка $x^0 \in M^n$ такая, что $X(x^0) = 0$.*

Другими словами, на многообразии с ненулевой эйлеровой характеристикой не существует векторного поля без нулей.

Доказательство. Как замечено в § 8 гл. IV, для векторного поля X существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $U(x, t)$ такое, что $U(x, 0) \equiv x$ и поле X является его инфинитезимальной образующей. При этом орбита $\bigcup_t U(x, t)$ точки x называется интегральной кривой поля X в точке x. Легко видеть, что семейство диффеоморфизмов $U(x, t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, осуществляет гомотопию между диффеоморфизмами

$$U_0 = 1_{M^n} \text{ и } U_{t_0}\colon M^n \to M^n, \text{ где } U_{t_0}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x, t_0).$$

Следовательно, $\Lambda_{1_{M^n}} = \Lambda_{U_{t_0}}$, но $\Lambda_{1_{M^n}} = \chi(M^n)$; таким образом, для всякого t_0 получаем $\Lambda_{U_{t_0}} = \chi(M^n) \neq 0$. Поэтому (см. теорему 4) диффеоморфизм U_{t_0} имеет неподвижную точку (для каждого t_0).

Предположим теперь, что поле X нигде на M^n не обращается в нуль. Тогда в силу компактности M^n найдутся положительные α и β такие, что для всякого $x \in M^n$ в римановой метрике выполнено неравенство $\alpha \leqslant \langle X(x), X(x)\rangle \leqslant \beta$. Отсюда следует, что каждая точка $x \in M^n$ обязательно сдвигается диффеоморфизмом U_t вдоль интегральной кривой точки x при достаточно малом $t > 0$; это можно проверить, рассмотрев интегральную кривую в карте точки x. Последнее противоречит существованию неподвижной точки у диффеоморфизма U_t. ■

Следствие. *Если n четно, то на сфере S^n не существует векторного поля без нулей.*

Лемма 3. *На компактном гладком многообразии существует гладкое векторное поле, сумма индексов особых точек которого равна эйлеровой характеристике многообразия.*

Доказательство. Пусть M^n — компактное гладкое многообразие, $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса (гладкая функция, все критические точки которой невырожденны). Пространство M^n имеет гомотопический тип клеточного комплекса K, число клеток размерности λ которого равно числу $m(\lambda)$ критических точек x_i^λ

---

* Отметим, что все гладкие компактные многообразия являются полиэдрами.

индекса λ функции f (см. § 11 гл. IV). Эйлерова характеристика $\chi(K)$ пространства K равна

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\ \dim_G\widetilde{C}_{\lambda}(K;\,G)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\ \dim_G H^s_{\lambda}(K;\,G)$$

(сравните с определением 2 и теоремой 1 этого параграфа). Таким образом,

$$\chi(M^n)=\chi(K)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\,m(\lambda). \tag{16}$$

С другой стороны, в силу упражнения 10° § 6 индекс особой точки x_i^{λ} поля градиента равен $(-1)^{\lambda}$. Поэтому $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}m(\lambda)$ есть сумма индексов особых точек поля градиента функции f. ■

Лемма 4. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особыми точками на компактном гладком многообразии не зависит от выбора векторного поля.*

Доказательство этой леммы дадим вкратце. Пусть M^n — связное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^m$, $m>n+1$; выберем достаточно малую «трубчатую» окрестность многообразия M^n в $\mathbb{R}^m$, т. е. такую окрестность $U(M^n)$, которая является пространством локально тривиального расслоения с базой M^n и слоем, гомеоморфным диску D^{m-n}. При этом отображение проекции расслоения r — гладкая ретракция, а многообразие M^n — сильный деформационный ретракт пространства $U(M^n)$. Интуитивно трубчатую окрестность многообразия M^n можно представить себе состоящей из дисков $D^{m-n}_{\varepsilon}(x)$ над каждой точкой $x\in M^n$, лежащих в $(m-n)$-мерных плоскостях, ортогональных к касательным плоскостям многообразия M^n. Множество $U(M^n)$ является компактным полиэдром. Нетрудно показать, что $H^s_{m-1}(\partial U(M^n);\,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$; образующая этой группы есть цикл, ограничивающий $U(M^n)$. Поэтому всякое отображение φ: $\partial U(M^n)\to S^{m-1}$ определяет элемент $\deg\varphi\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим некоторое поле Φ: $\overline{U(M^n)}\to\mathbb{R}^m$, не обращающееся в нуль на $\partial U(M^n)$. Сопоставим полю Φ нормированное отображение

$$\widetilde{\Phi}\colon\ \partial U(M^n)\to S^{m-1},\quad \widetilde{\Phi}x=\Phi x/\|\Phi x\|.$$

Степень $\deg\widetilde{\Phi}$ отображения $\widetilde{\Phi}$ равняется сумме индексов точек поля Φ. Пусть теперь v — векторное поле на многообразии M^n. Определим поле w: $U(M^n)\to\mathbb{R}^m$ формулой $w(x)=v(rx)+x-r(x)$. Сумма индексов особых точек поля w совпадает с суммой индексов особых точек касательного поля v (с помощью теоремы Сарда общий случай можно свести к изучению гладких полей с невырожденными особыми точками и применить результат упражнения 7° § 6). Поле w на $\partial U(M^n)$ гомотопно без особых точек векторному полю $z(x)=x-r(x)$. Отсюда для нормированных отображений $\widetilde{w}$, $\widetilde{z}$ получим $\deg\widetilde{w}=\deg\widetilde{z}$, и, следовательно, $\deg\widetilde{w}$ не зависит от поля v. ■

Из лемм 3, 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особыми точками на гладком компактном многообразии равняется эйлеровой характеристике многообразия.*

Упражнение 8°. Пусть M^n — гладкое компактное многообразие и $\beta_p(M^n)\overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=}\dim_G H^s_p(M^n;\,G)\neq 0$. Покажите, что любая функция Морса на многообразии M^n имеет не менее $\beta_p(M^n)$ критических точек индекса p (неравенства Морса).

4. Число Лефшеца как сумма индексов неподвижных точек.

Замечательным фактом в алгебраической топологии является теорема Лефшеца—Хопфа, связывающая число Лефшеца непрерывного отображения компактного полиэдра с характеристиками (индексами) неподвижных точек этого отображения. Дадим ряд основных определений.

Определение 4. Симплициальный комплекс K называется *размерно-однородным*, если существует такое число n, что всякий симплекс из K является гранью (возможно, несобственной) некоторого n-мерного симплекса из K; полиэдр $|K|$ размерно-однородного симплициального комплекса K называется размерно-однородным полиэдром, а число n называется размерностью полиэдра $|K|$.

Упражнения. 9°. Покажите, что полиэдр, являющийся одновременно и многообразием (с краем или без края), является размерно-однородным полиэдром.

10°. Приведите пример размерно-однородного полиэдра, не являющегося многообразием.

Пусть f: $X \rightarrow X$ — непрерывное отображение размерно-однородного (размерности n) полиэдра $x \subset \mathbb{R}^M$ в себя ($n \leqslant M$).

Определение 5. Точку $x_0 \in X$ будем называть *регулярной неподвижной точкой отображения* f, если: 1) $f(x_0) = x_0$; 2) существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, гомеоморфная n-мерному диску D^n, в которой нет других неподвижных (т. е. таких, что $f(x) = x$) точек; 3) вышеупомянутый гомеоморфизм h: $U(x_0) \rightarrow D^n$ есть ограничение на $U(x_0)$ отображения H: $\mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющегося суперпозицией двух отображений: проекции $\mathbb{R}^M$ на некоторое n-мерное подпространство и афинного отображения, сдвигающего проекцию точки x_0 в начало координат и растягивающего образ окрестности $U(x_0)$ на D^n.

Если, например, $x_0 \in \tau^n \backslash \partial \tau^n \subset X$, то в качестве H можно взять суперпозицию таких трех отображений: переноса несущей n-плоскости симплекса τ^n в соответствующее n-мерное подпространство, сдвига образа точки в начало координат и растяжения в достаточно большое число раз так, чтобы $H\tau^n \supset D^n$. Тогда $U(x_0)$ можно выбрать как $H^{-1}(D^n) \cap \tau^n$.

Упражнения 11°. Пусть X — одновременно полиэдр (криволинейный) и гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^M$ (возможно, с краем), f: $X \rightarrow X$ — непрерывное отображение с конечным числом неподвижных точек, не принадлежащих краю многообразия X. Покажите, что все неподвижные точки — регулярные изолированные.

Указание. Используйте проекцию на касательное пространство.

12°. Покажите, что если f имеет только регулярные изолированные неподвижные точки, а полиэдр X компактен, то число неподвижных точек конечно.

Очевидно, если X — полиэдр и многообразие с краем, то регулярные изолированные точки отображения f не могут принадлежать краю.

Пусть x_0 — регулярная неподвижная изолированная точка отображения f, h: $U(x_0) \to D^n$ — гомеоморфизм, указанный в определении 5. Рассмотрим гомеоморфную D^n окрестность $V(x_0)$ точки x_0, настолько малую, что $\overline{V(x_0)} \subset U(x_0)$ и $f(\overline{V(x_0)}) \subset U(x_0)$. В этом случае можно рассмотреть векторное поле $\Phi(x) = 1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1}$, заданное на $h(\overline{V(x_0)})$.

Определение 6. Индексом ind (f, x_0) *регулярной изолированной неподвижной точки* x_0 отображения f называется индекс ind $(0, \Phi)$ изолированной особой точки $0 \in \mathbb{R}^n$ векторного поля $\Phi(x) = 1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1}$.

Упражнение 13°. Покажите, что индекс ind (f, x_0) не зависит от выбора гомеоморфизма h и окрестности $V(x_0)$.

Указание. Выберите достаточно малую окрестность $W(x_0)$ и воспользуйтесь тем, что

$$1_{\mathbb{R}^n} - h_2 f h_2^{-1} = h_2 h_1^{-1}(1_{\mathbb{R}^n} - h_1 f h_1^{-1}) h_1 h_2^{-1}$$

на $h_2(\overline{W(x_0)})$, когда $h_2 h_1^{-1}$ — линейный оператор.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 7 (Лефшец—Хопф). *Пусть f: $X \to X$ — непрерывное отображение компактного размерно-однородного полиэдра в себя с регулярными изолированными неподвижными точками $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_N$, причем f не имеет других неподвижных точек. Тогда выполняется равенство*

$$\Lambda_f = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}\,(f, x_i), \tag{17}$$

где Λ_f — число Лефшеца отображения f, а ind (f, x_i) *— индекс неподвижной точки x_i отображения f.*

Доказательство этой теоремы потребует дополнительных определений.

Определение 7. *Открытым k-мерным симплексом* с вершинами $a^0, a^1, \ldots, a^k$ называется множество тех точек обычного (замкнутого) симплекса $(a^0, a^1, \ldots, a^k)$, у которых все барицентричекие координаты строго положительны.

Другими словами, в размерности $k = 0$ открытый симплекс совпадает с замкнутым симплексом, а в размерности $k > 0$ — это внутренность (относительно несущей k-плоскости) замкнутого симплекса. Легко видеть, что замыкание открытого симплекса есть замкнутый симплекс той же размерности.

Определение 8. *Полным симплициальным комплексом* будем называть совокупность открытых симплексов, замыкания которых составляют симплициальный комплекс в смысле определения 4 § 3 гл. V.

Определение 9. *Неполным симплициальным комплексом* будем называть произвольное подмножество (т. е. совокупность открытых симплексов) некоторого полного симплициального комплекса, если оно само не является полным симплициальным комплексом.

Таким образом, как в полном, так и неполном комплексах примыкание симплексов должно быть правильным, но в неполном комплексе, в отличие от полного, симплекс может входить в комплекс без некоторых своих граней. Как для полных, так и для неполных симплициальных комплексов вводится понятие подкомплекса (полного или неполного) аналогично определению 11 § 3 гл. V и понятие полиэдра аналогично определению 5 § 3 гл. V.

Заметим, что понятие подчиненности одного симплекса другому, т. е. такой ситуации, когда один симплекс является гранью другого, полностью переносится на открытые симплексы. Везде ниже термин «симплекс» будет обозначать открытый симплекс, термин «комплекс» — полный или неполный симплициальный комплекс (из открытых симплексов); термин «грань симплекса» — открытый симплекс, являющийся гранью (быть может, несобственной) данного открытого симплекса; термин «*звезда симплекса*» — симплициальный комплекс (обычно неполный), состоящий из всех тех симплексов, гранью которых является данный симплекс. Термин «триангуляция» будет обозначать комплекс (всегда полный), полиэдр которого совпадает с данным пространством (или гомеоморфен ему). Отметим, что полиэдр полного комплекса открытых симплексов совпадает с полиэдром комплекса, состоящего из их замыканий.

Определение 10. Пусть K — комплекс (полный или неполный). Его *комбинаторным замыканием* называется полный симплициальный комплекс $\bar{K}$, состоящий из всех симплексов из K и всех их граней. Очевидно, что комбинаторное замыкание комплекса — полный комплекс; если K — полный комплекс, то $\bar{K} = K$.

Определение 11. Пусть K — полный симплициальный комплекс, L — комплекс, $f\colon |K| \to |\bar{L}|$ — симплициальное отображение, отображающее каждый симплекс из K в некоторый симплекс из L. Будем в этом случае называть f *симплициальным отображением симплициальных комплексов* и обозначать $f\colon K \to L$.

Определение 12. Пусть L — неполный комплекс, M — комплекс, $\bar{g}\colon \bar{L} \to M$ — симплициальное отображение. Будем называть ограничение $g = \bar{g}\big|_L : L \to M$ отображения $\bar{g}$ на L *симплициальным отображением неполного комплекса* L в комплекс M.

Далее нам понадобится конструкция так называемого *центрального подразбиения комплекса относительно данного подразбиения его подкомплекса.*

Пусть K^n — размерно-однородный комплекс размерности n, K^l — его l-мерный остов, т. е. подкомплекс, состоящий из всех симплексов из K^n размерности не выше l, $l \leqslant n$. Пусть $\widehat{K}^l$ — некоторое подразбиение K^l, т. е. комплекс, полиэдр которого совпадает с полиэдром $|K^l|$ и каждый симплекс из K^l есть объединение нескольких (возможно, одного) симплексов из $\widehat{K}^l$.

Мы строим центральное подразбиение $\widehat{K}^n$ индуктивно. Опишем шаг индукции, т. е. построение подразбиения $\widehat{K}^{m+1}$ его $(m+1)$-мерного остова K^{m+1}, в предположении, что подразбиение $\widehat{K}^m$ уже построено.

Пусть симплекс τ^{m+1} принадлежит K^{m+1}, точка b_0 — барицентр симплекса τ^{m+1}. Тогда полиэдр $|\{\partial\tau^{m+1}\}|$ границы $\partial\tau^{m+1}$ можно представить как объединение некоторых симплексов из $\widehat{K}^m$ и, возможно, еще некоторых граней симплекса τ^{m+1}, не вошедших в K^m, следовательно, и в $\overline{K}^m$. Множество точек открытых интервалов, соединяющих барицентр b_0 симплекса τ^{m+1} со всеми точками какого-нибудь (одного) из перечисленных граничных симплексов, есть также симплекс размерности на единицу больше, чем размерность этого граничного симплекса. Совокупность всех построенных таким образом внутри τ^{m+1} симплексов вместе с барицентром b_0 представляет собой подразбиение симплекса τ^{m+1}. Осуществив такие подразбиения всех симплексов размерности $m+1$ и объединив их с имеющимся подразбиением $\widehat{K}^m$, получим новое подразбиение $\widehat{K}^{m+1}$ остова K^{m+1}, которое назовем центральным относительно $\widehat{K}^m$. Шаг индукции закончен.

Теперь, отправляясь от $\widehat{K}^l$, мы построим подразбиения $\widehat{K}^{l+1}$, $\widehat{K}^{l+2}$, ..., $\widehat{K}^n$, т. е. в итоге построим подразбиение $\widehat{K}^n$ всего комплекса K^n. Это подразбиение $\widehat{K}^n$ будем называть также центральным относительно исходного подразбиения $\widehat{K}^l$ остова K^l.

Заметим, что барицентрическое подразбиение полного комплекса является центральным относительно его 0-мерного остова.

Определение 13. Пусть $\widehat{K}$ — подразбиение комплекса K, φ: $\widehat{K} \to K$ — симплициальное отображение. Симплекс $\tau^r \in K$ будем называть *неподвижным относительно* φ, если $\tau^r \subset \varphi(\tau^r)$.

Поскольку мы рассматриваем открытые симплексы, из определения 13 следует, что размерности симплексов в τ^r и $\varphi(\tau^r)$ совпадают (равны).

Определение 14. *Звездой* St (τ^r) *симплекса* τ^r из комплекса K называется совокупность всех симплексов в K, гранью которых является симплекс τ^r (включая и его самого).

Перейдем к доказательству теоремы. Оно распадается на несколько этапов, некоторые из них мы изложим в виде лемм; в формулировках лемм предполагается выполнение условий теоремы.

Лемма 5 (о специальной симплициальной аппроксимации). *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существуют конечные последовательности* $\{K_{(m)}\}$

подразбиений данной триангуляции K и $\{f_{(m)}\}$ симплициальных отображений ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$), обладающих следующими свойствами:

1) *$K_{(m+1)}$ — центральное подразбиение $K_{(m)}$;*

2) *$f_{(m)}\colon K_{(m)} \to K$ — симплициальное отображение, имеющее неподвижные симплексы лишь в размерности не ниже m;*

3) *$\rho(f_{(m)}(x), f_{(m+1)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$ для всех $x \in X$ и $m = 0, 1, \ldots, n$;*

4) *$\rho(f(x), f_{(0)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$ для всех $x \in X$;*

5) *звезды любых двух различных неподвижных относительно $f_{(m)}$ m-мерных симплексов в $K_{(m)}$ не пересекаются.*

В частности, каждое отображение $f_{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, является симплициальной ε-аппроксимацией отображения f, и если f_n имеет неподвижные симплексы, то только в размерности n.

Доказательство леммы 5. По теореме о симплициальной аппроксимации найдется r-кратное барицентрическое подразделение $K_{(0)} = K^{(r)}$ мелкости $d < \varepsilon/2(n+1)$ комплекса K и симплициальное отображение $f_{(0)}\colon K_{(0)} \to K$ такие, что для всех $x \in X$ $\rho(f(x), f_{(0)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$. Очевидно, при $r \geqslant 1$ для $K_{(0)} = K^{(r)}$ выполняется свойство 5. Таким образом, при $r \geqslant 1$ построено первое из отображений, требуемых в лемме.

Теперь проведем индукцию по m. Считая, что подразбиение $K_{(m)}$ и отображение $f_{(m)}\colon K_{(m)} \to K$, обладающие вышеуказанными свойствами, уже построены, построим подразбиение $K_{(m+1)}$ и отображение $f_{(m+1)}\colon K_{(m+1)} \to K$. Будем подразбивать только симплексы, входящие в звезды неподвижных относительно $f_{(m)}$ симплексов размерности m. Пусть τ^m — такой неподвижный симплекс, $\mathrm{St}(\tau^m)$ — его звезда в $K_{(m)}$. Сделаем центральное подразбиение τ^m относительно его границы (неподразбитой). Затем выполняем центральное подразбиение комплекса $\mathrm{St}\,(\tau^m)$ относительно только что выполненного подразбиения τ^m (заметим, что τ^m есть m-мерный остов комплекса $\mathrm{St}\,(\tau^m)$), и переходим к комбинаторному замыканию подразбитой звезды. Выполнив указанное подразбиение для всех звезд неподвижных симплексов и оставив без изменения остальные симплексы из $K_{(m)}$, мы и получим искомое подразбиение $K_{(m+1)}$.

Теперь построим симплициальное отображение $f_{(m+1)}\colon K_{(m+1)} \to K$. Положим $f_{(m+1)} = f_{(m)}$ вне подразбитых звезд неподвижных симплексов. Построим новое симплициальное отображение на каждой подразбитой звезде неподвижного относительно $f_{(m)}$ симплекса. Барицентр неподвижного m-мерного симплекса τ^m переведем в произвольно выбранную вершину звезды $\mathrm{St}(f_{(m)}(\tau^m))$ образа

$f_{(m)}(\tau^m)$, но не в вершину самого образа. И наоборот, барицентры симплексов подразбиения звезды $\mathrm{St}(\tau^m)$, не являющихся неподвижными, переводим в произвольно выбранные вершины образа $f_{(m)}(\tau^m)$. Проделав описанную конструкцию для всех звезд (непересекающихся!) неподвижных m-мерных симплексов, получаем искомое симплициальное отображение $f_{(m+1)}$: $K_{(m+1)} \to K$.

Упражнение 14°. Проверьте корректность конструкции симплициального отображения $f_{(m+1)}$.

Теперь покажем, что отображение $f_{(m+1)}$ не имеет неподвижных симплексов в размерностях ниже $m+1$. Заметим прежде всего, что всякий неподвижный относительно симплициального отображения $f_{(m)}$: $K_{(m)} \to K$ симплекс из $K_{(m)}$ лежит в симплексе той же размерности (его образе) в K, а также в симплексе той же размерности любого из предыдущих разбиений. Кроме того, из определения неподвижного симплекса и конструкции центрального подразбиения вытекает, что если вершина b есть барицентр симплекса τ^r размерности r исходного подразбиения K или же одного из последующих подразбиений $K_{(0)}, \ldots, K_{(m-1)}$ и эта же вершина b является вершиной неподвижного симплекса τ^l размерности l из K, то $l \geqslant r$. Действительно, в противном случае симплекс τ^l должен быть подмножеством l-мерного симплекса из K, поэтому барицентр b симплекса τ^r, $r > l$, из K или одного из подразбиений $K_{(0)}, \ldots, K_{(m-1)}$ не может быть вершиной неподвижного симплекса τ^l. Нужный факт докажем от противного. Предположим, что в $K_{(m+1)}$ есть неподвижный относительно $f_{(m+1)}$ симплекс τ^s размерности s, $s < m+1$. Из построения $f_{(m+1)}$ следует, что τ^s содержится в одном из комбинаторных замыканий подразбитых, как описано выше, звезд типа $\mathrm{St}\ (\tau^m)$, где τ^m — неподвижный симплекс отображения $f_{(m)}$. Ведь вне этих звезд $f_{(m+1)} = f_{(m)}$, а там $f_{(m)}$ не имеет неподвижных симплексов. Далее, симплексы из комбинаторного замыкания подразбитой $\mathrm{St}\ (\tau^m)$, не лежащие в τ^m, либо являются симплексами из $K_{(m)}$ и поэтому не являются неподвижными, либо имеют в качестве одной из вершин барицентр симплекса размерности, большей чем m, и поэтому не могут быть неподвижными симплексами размерности, меньшей или равной m. Таким образом, мы получим, что $\tau^s \subset \tau^m$, и, следовательно, $s = m$. Но это противоречит конструкции $f_{(m+1)}$, так как одна из вершин симплекса τ^s непременно барицентр подразбиваемого неподвижного симплекса τ^m, а этот барицентр переводится отображением $f_{(m+1)}$ вне множества вершин симплекса $f_{(m)}(\tau^m)$, в котором содержится τ^m, а значит, и τ^s. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением $s < m+1$ и тем самым доказали, что у отображения $f_{(m+1)}$ нет неподвижных симплексов в размерностях, меньших $m+1$.

Покажем теперь, что звезды двух неподвижных (относительно $f_{(m+1)}$) симплексов τ_1^{m+1} и τ_2^{m+1} из $K_{(m+1)}$ не пересекаются. В самом деле, если бы они пересекались, то это означало бы, что оба неподвижных симплекса есть $(m+1)$-мерные грани одного и того же симплекса τ^s большей размерности $s > m+1$ в $K_{(m+1)}$. Но $K_{(0)}$ — r-кратное ($r > 0$) барицентрическое подразделение комплекса K, а $K_{(m+1)}$ является результатом последовательных центральных подразбиений исходя из $K_{(0)}$, поэтому в симплексе τ^s может быть в каждой размерности не более одной грани, являющейся неподвижным симплексом, а именно той грани, которая лежит в грани изначального s-мерного симплекса из K, измельчением которого получен симплекс τ^s. Поэтому звезды двух неподвижных симплексов не пересекаются.

Осталось проверить выполнение неравенства

$$\rho(f_{(m)}(x), f_{(m+1)}(x)) < \frac{\varepsilon}{n+1}. \tag{18}$$

Действительно, $f_{(m)}$ и $f_{(m+1)}$ различаются лишь на звездах неподвижных относительно $f_{(m)}$ симплексов. Так как мелкость триангуляции $K_{(0)}$ была зафиксирована: $d < \varepsilon/2(n+1)$, диаметр любой звезды в $K_{(m)}$ не превосходит $\varepsilon/(n+1)$. Далее, поскольку образы точек неподвижного симплекса τ^m при отображениях $f_{(m)}$ и $f_{(m+1)}$ не выходят за пределы замыкания звезды образа $f_{(m)}(\tau^m)$, то указанное неравенство (18) справедливо для любого x из звезды симплекса τ^m, а следовательно, и для любого $x \in X = |K|$, что и требовалось.

Итак, исходя из подразбиения $K_{(m)}$ и симплициального отображения $f_{(m)}\colon K_{(m)} \to K$ мы построили следующее подразбиение $K_{(m+1)}$ и симплициальное отображение $f_{(m+1)}\colon K_{(m+1)} \to K$, удовлетворяющее требованиям леммы. Шаг индукции закончен.

Тем самым мы получим конечную последовательность симплициальных отображений $f_{(m)}\colon K_{(m)} \to K$, $m = 0, 1, \ldots, n$, имеющих неподвижные симплексы в размерностях не ниже m для $f_{(m)}$, следовательно, последнее из этих отображений, $f_{(n)}$, имеет только n-мерные неподвижные симплексы. Из неравенства (18) и выбора $f_{(0)}$ получаем, что

$$\rho(f(x), f_{(n)}(x)) \leqslant \rho(f(x), f_{(0)}(x)) + \rho(f_{(0))}(x)\ f_1(x)) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(f_{(n-1)}(x), f_{(n)}(x)) < (n+1)\cdot\frac{\varepsilon}{n+1},$$

т. е.

$$\rho(f(x), f_{(n)}(x)) < \varepsilon$$

для всех $x \in X = |K|$. Лемма 5 доказана.

Построенная в лемме 5 специальная симплициальная аппроксимация $f_{(n)}$, как будет показано, удобна для подсчета индексов неподвижных точек.

Лемма 6. *Пусть* $f_{(n)}\colon K_{(n)} \to K$ *— симплициальное отображение и симплекс* τ^n *неподвижен относительно* $f_{(n)}$, *т. е.* $\tau^n \subset \subset f_{(n)}(\tau^n) = T^n \in K$, $\tau^n \in K_{(n)}$. *Пусть на границе* τ^n *относительно несущей n-плоскости нет неподвижных точек отображения* $f_{(n)}$. *Тогда существует единственная в* τ^n *регулярная изолированная неподвижная точка* x^* *такая, что* $f_{(n)}(x^*) = x^*$ *и*

$$\operatorname{ind}(f_{(n)}, x^*) = \pm 1 = \operatorname{sign}(\det(1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1}_{h(x^*)})), \qquad (19)$$

где h *— отображение, описанное в определении 5, индекс* $h(x^*)$ *указывает точку, в окрестности которой рассматривается отображение.*

Доказательство. Так как $f_{(n)}$ — афинное отображение, сохраняющее размерность, то оно — гомеоморфизм и, следовательно, композиция $\overline{T}^n \xrightarrow{(f_{(n)})^{-1}} \overline{\tau}^n \subset \overline{T}^n$ есть отображение замкнутого симплекса в себя. Тогда по теореме Брауэра существует хотя бы одна неподвижная точка x^* этого отображения. Эта же точка является и неподвижной точкой отображения $f_{(n)}$. Покажем, что она единственна на τ^n. Действительно, предположим, что таких точек две: $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in \tau^n$. Тогда все точки прямой, проходящей через y_1, y_2, т. е. точки вида $y = ty_1 + (1-t)y_2$, $t \in \mathbb{R}$, тоже будут неподвижными. Но тогда есть неподвижные точки и на границе τ^n (при некоторых t), что противоречит условию. Отсюда вытекает, что x^* — регулярная изолированная неподвижная точка и что $(1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1})_{h(x^*)}$ — невырожденное линейное отображение. Остается заметить, что в силу результата упражнения 6° § 6 гл. V и определения индекса неподвижной точки имеем

$$\operatorname{ind}(f_{(n)}, x^*) = \operatorname{ind}(h(x^*), (1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1})_{h(x^*)}) =$$
$$= \operatorname{sign}(\det(1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1})_{h(x^*)}) = \pm 1.$$

Доказательство леммы 6 закончено.

Построенное в лемме 5 симплициальное отображение $f_{(n)}$ обладает замечательным свойством: ни один из неподвижных симплексов τ^n_i в подразбиении $K_{(n)}$ не имеет неподвижных точек на своей границе $\partial\tau^n_i$. В самом деле, в противном случае существовал бы неподвижный симплекс размерности меньшей, чем n, что противоречит построению $f_{(n)}$. Тогда в силу леммы 6 симплициальное отображение $f_{(n)}$ обладает еще более замечательным свойством: внутри каждого ее неподвижного симплекса τ_i^n, $i = 1, \ldots, N$, размерности n существует единственная (в этом симплексе) регулярная изолированная неподвижная относительно $f_{(m)}$ точка x_i, причем ее индекс равен

$$\text{ind}\,(f_{(n)}, x_i) = \text{sign}\left(\det(1_{\mathbb{R}^n} - h_i f_{(n)} h_i^{-1})_{h_i(x_i)}\right) = \pm 1,$$
$$i = 1, \ldots, N. \quad (20)$$

Выясним теперь, как связаны эти индексы с числом Лефшеца симплициального отображения $f_{(n)}$.

Лемма 7. *Для числа Лефшеца $\Lambda_{f_{(n)}}$ специальной симплициальной аппроксимации $f_{(n)}$, построенной в лемме 5, верна формула*

$$\Lambda_{f_{(n)}} = \sum_{i=1}^{N} \text{ind}\,(f_{(n)}, x_i), \qquad (21)$$

где $x_1, \ldots, x_N$ — неподвижные точки отображения $f_{(n)}$.

Доказательство. С учетом определения числа Лефшеца и равенства (15) равенство (21) превращается в равенство

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \text{Sp}\,(\Xi_p (f_{(n)})_p) = \sum_{i=1}^{N} \text{ind}\,(f_{(n)}, x_i), \qquad (22)$$

где $(f_{(n)})_p$: $C_p(K_{(n)}; \mathbb{R}) \to C_p(K; \mathbb{R})$ — гомоморфизм, индуцированный отображением $f_{(n)}$, а Ξ_p: $C_p(K; \mathbb{R}) \to C_p(K_{(n)}; \mathbb{R})$ — цепной гомоморфизм, сопоставляющий ориентированному p-мерному симплексу $\tau^p \in K$ сумму согласованно ориентированных p-мерных симплексов $s_i^p \in K_{(n)}$, на которые подразбит симплекс τ^p (здесь мы вправе рассматривать замкнутые симплексы). Согласование ориентаций вводится аналогично тому, как это сделано для барицентрического подразделения в п. 4 § 3 гл. V. Ясно, что $\text{Sp}\,(\Xi_p (f_{(n)})_p) = 0$ при $p < n$, поскольку при $p < n$ нет неподвижных симплексов у отображения $f_{(n)}$. Остается показать, что

$$(-1)^n\, \text{Sp}\,(\Xi_n (f_{(n)})_n) = \sum_{i=1}^{N} \text{ind}\,(f_{(n)}, x_i). \qquad (23)$$

След цепного гомоморфизма равен сумме коэффициентов a_{jj} при всех n-мерных симплексах τ_j^n (элементах базиса) в матрице этого цепного гомоморфизма, рассматриваемого как линейный оператор. Выясним, что представляют собой эти коэффициенты. Из построения гомоморфизмов Ξ_* и $(f_{(n)})_n$ видно, что коэффициент при τ_j^n отличен от 0 лишь тогда, когда τ_j^n — неподвижный симплекс отображения

$f_{(n)}$, т. е. $\tau_j^n \subset T^n = f_{(n)}(\tau_j^n)$. В этом случае коэффициент при неподвижном симплексе τ_i^n может быть равен лишь ± 1, в зависимости от того, согласуется или нет ориентация образа $f_{(n)}(\tau_i^n) = T^n$ с ориентацией симплекса T^n в комплексе K. Перейдем от аффинного отображения $f_{(n)}$ несущей n-плоскости симплекса τ_i^n к линейному отображению $h_i f_{(n)} h_i^{-1}$. Отождествляя n-плоскость с подпространством, а подпространство с $\mathbb{R}^n$, мы можем записать $h_i f_{(n)} h_i^{-1}$ в виде F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(y) = f_{(n)}(x_i + y) - x_i$. Тогда ясно, что искомый коэффициент при τ_i^n равен sign det F, поскольку именно знак определителя отвечает за сохранение ориентации базиса линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а значит, и за сохранение ориентации симплекса. Осталось показать, что

$$\operatorname{sign}\det F = (-1)^n \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i). \tag{24}$$

Заметим, что sign det F есть индекс изолированной особой точки x_i векторного поля $f_{(n)}(x) - x_i$, заданного на замыкании $\bar{\tau}_i^n$ симплекса τ_i^n. Построим гомотопию, соединяющую это векторное поле с полем $f_{(n)}(x) - x = (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)$ на $\bar{\tau}_i^n$ без нулей на $\partial\tau^n$.

Сначала «растянем» векторное поле $f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n}$, «оттянув» образы $f_{(n)}(x)$ от границы симплекса τ_i^n. Это делает гомотопия

$$\Phi_t(x) = \frac{f_{(n)}(x) - x}{\|f_{(n)}(x) - x\|}\left(\|f_{(n)}(x) - x\| + t \cdot d \cdot w(x)\right), \tag{25}$$

где t — параметр гомотопии, $0 \leqslant t \leqslant 1$, d — диаметр симплекса τ_i^n, $w(x)$ — непрерывная функция на $\bar{\tau}_i^n$ такая, что $w(x_i) = 0$ и $w(x) = 1$ при $x \in \partial\tau_i^n$. Заметим, что $\Phi_0(x) = f_{(n)}(x) - x$, $\Phi_1(x)$ — векторное поле на $\bar{\tau}_i^n$, у которого векторы на границе направлены вовне τ_i^n, т. е. их концы лежат вне τ_i^n. Поэтому можно провести следующие две линейные гомотопии. Первая из них,

$$G_s(x) = \Phi_1(x) + s(x - x_i), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

связывает поле $G_0(x) = \Phi_1(x)$ с полем

$$G_1(x) = \Phi_1(x) + x - x_i =$$
$$= (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x) + \frac{d \cdot w(x)}{\|(f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\|} \cdot (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x) + x - x_i.$$

Вторая гомотопия,

$$H_\gamma(x) = G_1(x) - \gamma\left[x - x_i + \frac{d \cdot w(x)}{\|f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\|}(f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\right], \; 0 \leqslant \gamma \leqslant 1,$$

связывает поле $H_0(x) = G_1(x)$ с полем $H_1(x) = f_{(n)}(x) - x_i$.

Таким образом, гомотопии Φ_t, G_s, H_γ, примененные последовательно, связывают векторное поле $f_{(n)}(x) - x = (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)$ с векторным полем $f_{(n)}(x) - x_i$.

Упражнение 15°. Проверьте, что все эти гомотопии проходят без нулей на границе $\partial\tau_i^n$ симплекса τ_i^n.

Получаем следующую цепочку равенств:

$$\operatorname{sign}\det F = \operatorname{ind}(x_i, f_{(n)}(x) - x_i) = \operatorname{ind}(x_i, f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n}) =$$
$$= (-1)^n \cdot \operatorname{ind}(x_i, 1_{\mathbb{R}^n} - f_{(n)}) = (-1)^n \cdot \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i),$$

дающую нам равенство (24). Первое из этих равенств объяснено выше, второе дают построенные гомотопии, третье вытекает из результатов упражнения, четвертое равенство следует из определения индекса неподвижной точки. Суммируя равенство (2) по всем неподвижным точкам x_i, получаем, что

$$\operatorname{Sp}(\Xi_n(f_{(n)})_n) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^n \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i), \tag{26}$$

откуда немедленно следуют равенства (23), (22), (21). Лемма 7 доказана.

Выясним теперь, насколько малым следует взять $\varepsilon > 0$ при построении аппроксимации $f_{(n)}$ отображения f, чтобы были равны не только числа Лефшеца Λ_f и $\Lambda_{f_{(n)}}$, но и суммы индексов их неподвижных точек.

Если отображение f имеет только регулярные изолированные неподвижные точки $y_1, \ldots, y_Q$, то исходную триангуляцию K полиэдра X можно выбрать с самого начала так, что каждая точка y_i находится внутри своего n-мерного симплекса τ_j^n, $j = 1, \ldots, Q$. Подразбиение $K_{(0)}$ выберем так, чтобы все точки y_j находились также внутри n-мерных симплексов $s_j^n \subset \tau_j^n$, настолько малых, что $f(s_j^n) \subset \tau_j^n$. Этого можно добиться малым «шевелением» достаточно мелкого барицентрического подразделения исходной триангуляции K. Положим теперь

$$\alpha_j = \min_{x \in \partial s_j^n} \rho(x, f(x)), \qquad \partial = \min_{x \in \overline{X} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{Q} s_j^n} \rho(x, f(x)).$$

Заметим, что $0 < \delta \leqslant \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_Q)$. Теперь возьмем $\varepsilon < \delta$ и построим, как в лемме 5, по ε аппроксимацию $f_{(n)}$. Поскольку $\varepsilon < \delta$, отображение $f_{(n)}$ не имеет неподвижных точек вне $\bigcup\limits_{j=1}^{Q} s_j^n$. Далее, поскольку $\varepsilon < \alpha_j$, характеристики векторных полей $(1_{\mathbb{R}^n} - h_j f h_j^{-1})$, $(1_{\mathbb{R}^n} - h_j f_{(n)} h_j)$ совпадают на границах ∂s_j^n симплексов s_j^n. Это следует из теоремы Руше, которую мы предлагаем вам доказать в качестве упражнения.

Упражнение 16°. Докажите следующее утверждение, известное как теорема Руше. Пусть векторные поля φ и ψ, заданные на множестве $B \subset \mathbb{R}^n$, таковы, что $\|\varphi(x)\| > 0$ и $\|\varphi(x) - \psi(x)\| < \|\varphi(x)\|$ при всех $x \in B$. Тогда векторные поля φ и ψ гомотопны без нулевых векторов на B.

В силу выбора s_j^n и построения $f_{(n)}$ получаем $\operatorname{ind}(f, y_1) = \operatorname{ind}(f, x_i)$ для $j = 1, \ldots, Q$ и

$$\sum_{j=1}^{Q} \operatorname{ind}(f, y_j) = \sum_{j=1}^{Q} \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i). \tag{27}$$

Как было указано выше (упражнение 5°), достаточно близкие отображения гомотопны, поэтому при достаточно малом ε все ε-аппроксимации гомотопны исходному отображению, так что $\Lambda_f = \Lambda_{f_{(n)}}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждение теоремы полностью доказано для полиэдра $|K|$ симплициального комплекса. На случай «криволинейного» полиэдра X, гомеоморфного $|K|$, доказательство переносится очевидным образом. Теорема Лефшеца—Хопфа доказана. ■

В заключение осталось заметить, что для произвольного непрерывного отображения f компактного полиэдра X в себя, не обязательно имеющего только регулярные изолированные неподвижные точки, также можно применять формулу (17), если под суммой индексов его неподвижных точек понимать сумму индексов регулярных изолированных неподвижных точек специальной симплициальной аппроксимации отображения f.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Современные монографии, дающие систематическое изложение теории гомологий и ее приложений: [22, 23, 42, 59, 63, 65, 78, 79].

По отдельным вопросам полезней будет также следующая литература.

Возникновение и развитие теории гомологий — [61].

Гомологии цепных комплексов — [41].

Симплициальная теория гомологий — [54].

Сингулярная теория гомологий — [34, 71, 74].

Аксиоматический подход к теории гомологий — [70].

Теория гомологий Александрова—Чеха — [71].

Число Лефшеца, степень отображения, характеристика векторного поля и индекс особой точки на основе симплициальной теории гомологий — [1, 54], см. также [22].

Клеточная теория гомологий — [74].

Триангуляция гладких многообразий — [45].

Сумма индексов особых точек векторного поля на многообразии — [44, 46].

Задачник по теории гомологий — [48, 52].

Комментарии к иллюстрациям

В трехмерной топологии известен следующий способ задания многообразий. Оказывается, любое компактное замкнутое трехмерное многообразие получается склейкой двух экземпляров трехмерных шаров с «ручками» по некоторому диффеоморфизму границ этих трехмерных тел. На переднем форзаце изображен один из простейших случаев такой склейки, когда многообразия являются результатом склейки двух полноторий (шаров с одной ручкой). Катящиеся диски на рисунке изображают такие полнотория.

Современная топология находит широкое применение в механике и математической физике. В частности, топологические методы широко используются в качественной теории движения твердого тела. На иллюстрации перед гл. I показан момент распада быстро вращающегося тяжелого несимметричного волчка. Топологические методы позволяют дать точное качественное описание таких эффектов.

На рисунке перед гл. II представлены множества различной топологической природы. Бесконечное дискретное множество (фигурки людей), симплициальные объекты (пирамиды, призмы и их склейки), гладкие многообразия. В специальных разделах топологии характеристики таких пространств изучаются различными методами (см. гл. III, IV, V). Общая топология изучает все эти объекты как топологические пространства, рассматривая их наиболее общие свойства, такие, как отделимость, компактность, связность.

В хитросплетении поверхностей на рисунке перед гл. III читатель может увидеть такие важные топологические объекты, как двумерные поверхности и их гомотопии, фундаментальные группы поверхностей, трансформации поверхностей уровня гладких функций на многообразии (см. склейки и перестройки торов в местах разветвлений «стволов деревьев» на рисунке).

Известно, что всякое гладкое многообразие локально может быть задано как совместная поверхность уровня нескольких гладких функций. Например, всякая гладкая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве локально может быть задана в виде графика подходящей гладкой функции. Это вы и видите на рисунке перед гл. IV, который показывает также различные типы критических точек функции, задающей поверхность (перевалы, долины, горные вершины).

На иллюстрации перед гл. V показаны разнообразные полиэдры и их симплициальные разбиения. В то же время здесь присутствует и клеточный комплекс, склеенный из «мягких» объектов (клеток), в отличие от «жестких» угловатых симплексов, из которых склеены симплициальные комплексы.

После прочтения настоящей книги читатель может смело приступать к изучению более специальных разделов топологии, в частности, алгебраической геометрии. На заднем форзаце показана поверхность уровня сложной алгебраической функции (см. центр рисунка) с заданной на ней системой криволинейных координат. Координатные квадраты измельчаются там, где кривизна поверхности растет. Разломы «льдин», показанные на рисунке, изображают сингулярности алгебраических функций.

Кроме математических объектов, как заметил читатель, на всех этих рисунках явно или неявно присутствует человек, его творческая созидающая мысль, стремящаяся к познанию великолепной гармонии окружающего мира, мира движущихся и взаимодействующих, изменяющихся и переплетающихся пространственно-временных форм. Авторы вместе с художником надеются, что представленные на иллюстрациях художественные образы помогут читателю в прямом смысле заглянуть в мир современной топологической науки, которая все больше проникает в самые различные области знания и все более емко и глубоко вписывается в человеческое мировоззрение.

Список литературы

1. **Александров П. С.** Комбинаторная топология.—М.—Л.: Гостехиздат, 1947.—660 с.
2. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию.—М.: Наука, 1977.—368 с.
3. **Александров П. С., Пасынков Б. А.** Введение в теорию размерности.—М.: Наука, 1973.—576 с.
4. **Александров П. С., Урысон П. С.** Мемуар о компактных топологических пространствах.—М.: Наука, 1971.—144 с.
5. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.** Общая топология.—М.: Высшая школа, 1979.—336 с.
6. **Аминов Ю. А.** Дифференциальная геометрия и топология кривых.—М.: Наука, 1987.—160 с.
7. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1979.—432 с.
8. **Арнольд В. И.** Теория катастроф.—М.: Изд-во МГУ, 1983.—80 с.
9. **Арнольд В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Наука, 1984.—272 с.
10. **Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.** Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.—М.: Наука, 1982.—304 с.
11. **Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.** Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов.—М.: Наука, 1984.—336 с.
12. **Архангельский А. В., Пономарев В. И.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.—424 с.
13. **Архангельский А. В., Федорчук В. В.** Основные понятия и конструкции топологии//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 17 (Итоги науки и техники).—М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987.—С. 3—110.
14. **Болтянский В. Г., Ефремович В. А.** Наглядная топология.—М.: Наука, 1983.—160 с.
15. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры.—М.: Наука, 1968.—272 с.
16. **Воловик Г. Е., Минеев В. П.** Физика и топология.—М.: Знание, 1980.—64 с.
17. **Гарднер М.** Математические досуги.—М.: Мир, 1972.—496 с.
18. **Гильберт Д., Кон-Фоссен С.** Наглядная геометрия.—М.: Наука, 1981.—344 с.
19. **Голубицкий М., Гийемин В.** Устойчивые отображения и их особенности.—М.: Мир, 1977.—290 с.
20. **Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р.** Полимеры и биополимеры: взгляд физиков-теоретиков//Будущее науки. Вып. 18.—М.: Знание, 1985.—С. 122—132.
21. **Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т.** Минимальные поверхности и проблема Плато.—М.: Наука, 1987.—312 с.
22. **Дольд А.** Лекции по алгебраической топологии. —М.:Мир, 1976.—464 с.
23. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. Методы теории гомологий.—М.: Наука, 1984.—344 с.

24. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. Методы и приложения.—М.: Наука, 1986.—760 с.
25. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. —М.: Мир, 1964.—430 с.
26. **Ефремович В. А.** Основные топологические понятия//Энциклопедия элементарной математики. Т. 5. Геометрия.—М.: Наука, 1966.—С. 476—556.
27. **Зейферт Г., Трельфалль В.** Топология. —М.—Л.: ГОНТИ, 1938.—400 с.
28. История отечественной математики.—Киев.: Наук. думка, 1968.—Т. III, гл. 9.
29. **Казаков Д. И.** Микромир за пределами воображения//Будущее науки. Вып. 20.—М.: Знание, 1987.—С. 70—87.
30. Квантовые жидкости и кристаллы.—М.: Мир, 1979.—С. 9—42.
31. **Келли Дж.** Общая топология.—М.: Наука, 1981.—432 с.
32. **Кокстер Г. С. М.** Введение в геометрию.—М.: Наука, 1966.—648 с.
33. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.—5-е изд.—М.: Наука, 1981.—544 с.
34. **Коснёвски Ч.** Начальный курс алгебраической топологии.—М.:Мир, 1983.—304 с.
35. **Красносельский М. А., Забрейко П. П.** Геометрические методы нелинейного анализа.—М.: Наука, 1975.—512 с.
36. **Кроуэлл Р., Фокс Р.** Введение в теорию узлов.—М.: Мир, 1967.—348 с.
37. **Кудрявцев Л. Д.** Математический анализ: В 2 т.—М.: Высш. шк., 1981, т. I.—687 с.; 1981, т. II.—584 с.
38. **Курант Р., Робинс Г.** Что такое математика?—М.: Просвещение, 1967.—558 с.
39. **Куратовский К.** Топология: В 2 т.—М.: Мир, 1966, т. I.—594 с.; 1969, т. II.—624 с.
40. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Краткий курс функционального анализа.—М.: Высш. шк., 1982.—272 с.
41. **Маклейн С.** Гомология.—М.: Мир, 1966.—544 с.
42. **Масси У.** Теория гомологий и когомологий.—М.: Мир, 1981.—388 с.
43. **Масси У., Столлингс Дж.** Алгебраическая топология. Введение.—М.: Мир, 1977.—278 с.
44. **Милнор Дж.** Теория Морса.—М.: Мир, 1965.—184 с.
45. **Милнор Дж., Сташеф Дж.** Характеристические классы.—М.: Мир, 1979.—372 с.
46. **Милнор Дж., Уоллес А.** Дифференциальная топология. Начальный курс.—М.: Мир, 1972.—278 с.
47. **Мищенко А. С.** Векторные расслоения и их применения. —М.: Наука, 1984.—208 с.
48. **Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т.** Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Изд-во МГУ, 1981.—184 с.
49. **Мищенко А. С., Фоменко А. Т.** Курс дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Изд-во МГУ, 1980.—440 с.
50. **Нарасимхан Р.** Анализ на действительных и комплексных многообразиях.—М.: Мир, 1971.—232 с.
51. **Новиков С. П.** Топология//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 12 (Итоги науки и техники).—М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986.—С. 5—252.
52. **Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П., Фоменко А. Т.** Задачи по геометрии. Дифференциальная геометрия и топология.—М.: Изд-во МГУ, 1978.—164 с.
53. **Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Элементы дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Наука, 1978.—432 с.
54. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии.—М.: Наука, 1976.—136 с.
55. **Понтрягин Л. С.** Непрерывные группы.—М.: Наука, 1984.—520 с.
56. **Понтрягин Л. С.** Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий.—М.: Наука, 1985.—174 с.
57. **Постников М. М.** Введение в теорию Морса.—М.: Наука, 1971.—568 с.
58. **Постников М. М.** Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий.—М.: Наука, 1984.—416 с.

59. **Постников М. М.** Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств.—М.: Наука, 1985.—336 с.
60. **Постников М. М.** Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.—М.: Наука, 1987.—480 с.
61. **Пуанкаре А.** Избранные труды: В 3 т.—М.: Наука, 1972; т. II.—998 с.; 1974; т. III.—772 с.
62. **Рохлин В. В., Фукс Д. Б.** Начальный курс топологии. Геометрические главы.—М.: Наука, 1977.—488 с.
63. **Свитцер Р. М.** Алгебраическая топология. Гомотопии и гомологии.—М.: Наука, 1985.—608 с.
64. **Синюков Н. С., Матвеенко Т. И.** Топология.—Киев: Вища школа, 1984.—264 с.
65. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. —М.: Мир, 1971.—680 с.
66. **Спрингер Дж.** Введение в теорию римановых поверхностей.—М.: ИЛ, 1960.—344 с.
67. **Стернберг С.** Лекции по дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1970.—412 с.
68. **Стинрод Н.** Топология косых произведений.—М.: ИЛ, 1953.—276 с.
69. **Стинрод Н., Чинн У.** Первые понятия топологии.—М.: Мир, 1967.—224 с.
70. **Стинрод Н., Эйленберг С.** Основания алгебраической топологии.—М.: ИЛ, 1958.—404 с.
71. **Телеман К.** Элементы топологии и дифференцируемые многообразия.—М.: Мир, 1967.—390 с.
72. **Уорнер Ф.** Основы теории гладких многообразий и групп Ли.—.М.: Мир, 1987.—304 с.
73. Физика за рубежом '83.—М.: Мир, 1983.—С. 21—44, 83—103.
74. **Фоменко А. Т.** Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. —М.: Изд-во МГУ, 1983.—216 с.
75. **Фоменко А. Т.** Топологические вариационные задачи.—М.: Изд-во МГУ, 1984.—216 с.
76. **Форстер О.** Римановы поверхности.—М.: Мир, 1980.—248 с.
77. **Фрид Д., Уленбек К.** Инстантоны и четырехмерные многообразия.—М.: Мир, 1988.—271 с.
78. **Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.** Гомотопическая топология.—М.: Изд-во МГУ, 1969.—460 с.
79. **Хилтон П., Уайли С.** Теория гомологий. —М.: Мир, 1966.--452 с.
80. **Хирш М.** Дифференциальная топология.—М.: Мир, 1979.—280 с.
81. **Ху Сы-цзян.** Теория гомотопий.—М.: Мир, 1964.—468 с.
82. **Хьюзмоллер Д.** Расслоенные пространства.—М.: Мир, 1970.—444 с.
83. **Чернавский А. В., Матвеев С. В.** Основы топологии многообразий.—Краснодар: Изд-во КГУ, 1974.—176 с.
84. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ.—М.: Наука, 1976.—320 с.
85. **Энгелькинг Р.** Общая топология.—М.: Мир, 1986.—752 с.
86. **Шварц А. С.** Квантовая теория поля и топология.—М.: Наука, 1989.—400 с.
87. **Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.** Введение в теорию многозначных отображений.—Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1989.—104 с.

YU. G. BORISOVICH, N. M. BLIZNYAKOV, YA. A. IZRAILEVICH, T. N. FOMENKO

INTRODUCTION TO TOPOLOGY

Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1995, 416 p.

ABOUT THE BOOK

«In my opinion, the book is excellent: the great number of facts combined with the brevity; the clarity of the proofs combined with the laconicism; very good choice of the materials etc... I'm sure that this book will play an outstanding role in propaganda of topology and will be translated into many languages.»

Prof. M. A. Krasnosel'skii (Moscow)

«There is no textbooks similar to this one. Besides the main purpose — to be a student textbook — it meets a much more important requirement: to give a consistent description of the entire topology (both general and algebraic ones). It would be useful not only for the students specializing in topology, but also for many mathematicians who use the topological language and facts in their investigations.»

Prof. A. V. Chernavskii (Moscow)

«The book has fixed one of the natural traditions of the teaching the topology for students in mathematics. This fact increases significantly the value of the textbook. The book is well-illustrated with the drawings simplifying the perception of the topological material, which is visual in its own nature. This is one of the undoubted advantages of the book.»

Prof. L. V. Sabinin (Moscow State University of People Friendship, Moscow)

«The book containes all basic topological concepts being used both in different branches of mathematics and in mathematical methods of natural sciences. The authors endeavored to set the material in the most clear and comprehensive manner. All new concepts are illustrated by examples from the different allied disciplines and supplied with exercises for the better perception of the material.»

Prof. A. S. Mischenko (Moscow State University, Moscow)

ABOUT THE DIFFERENCE BETWEEN THE FIRST AND THE SECOND EDITIONS OF THE BOOK

This new version of our book essentially differs from the first one. We have added much new material, especially in the parts IV, V, devoted to the differential and algebraic topology. Besides this, some new examples of the applications of the topological methods in physics are appeared in the part I. We also give now much more complete and updated bibliography. New illustrations are kindly presented for this version of the book by the well-known mathematician Prof. A. T. Fomenko. These illustrations are an integral part of the book, reflecting both the visual and the phylosophical aspects of the modern topology.

The authors

ABOUT THE AUTHORS

Yu. G. Borisovich, D. Sc. (Phys. and Math.) is a head of the Department of Algebra and Topological Methods in Analysis of Voronezh State University. His special interests are nonlinear functional analysis and fixed point theory. His publications include over one hundred scientific articles developing the ideas of J. Leray, J. Schauder, L. Lusternik and L. Schnirelman. Prof. Borisovich is the editor of a series entitied «New Ideas in Global Analisis», which has aroused the considerable interest in the USSR and abroad.

N. M. Bliznyakov, Cand. Sc. (Phys. and Math.), Voronezh State University. He has published more then twenty five scientific articles, containing some important results on the topological index calculation problem in the vector fields theory.

Ya. A. Izrailevich, Cand. Sc. (Phys. and Math.), the Department of Algebra and Topological Methods in Analysis at Voronezh State University. He has published more then thirty scientific articles, containing some essential results in the Smith theory and on some problems of nonlinear analysis and numerical analysis.

T. N. Fomenko, Cand. Sc. (Phys. and Math.), the Mathematical Department of Moscow Institute of Steel and Alloys. She has published more than twenty five scientific articles, including some important results on the Smith theory and some allied problems.

It was the kindness of Prof. A. T. Fomenko to give us his drawings as illustrations of our book.