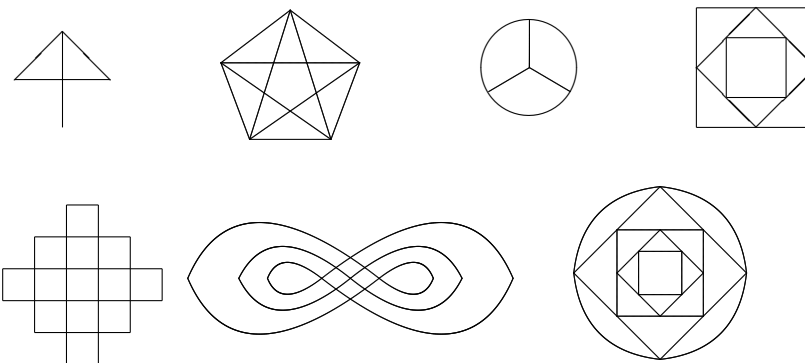


Графы

1. Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу и грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котёнка и ёжика, котёнка в грушу или яблоко, ёжика в грушу, а яблоко – только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Сможет ли он превратить его в принцессу?
2. Тридцать команд сыграли турнир: (а) в один круг – каждая сыграла с каждой ровно 1 раз; (б) по олимпийской системе – проигравший выбывает. Сколько всего было сыграно матчей?
3. Города Тридесятого государства соединены 99 дорогами, причём из каждого города выходит ровно 3 дороги. Сколько городов в государстве?
4. Студент сказал профессору: «У нас в группе 25 человек. И представьте, каждый из них дружит ровно с 11 одногруппниками...» «Не может этого быть», – сразу ответил профессор. Почему он так решил?
5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
6. В графе каждая вершина – синяя или зелёная. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелёными, а каждая зелёная – с 9 синими и 6 зелёными. Каких вершин больше – синих или зелёных?
7. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковёр-самолет. Из столицы выходит 21 ковровлиния, из города Дальний одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно добраться в Дальний (возможно, с пересадками).
8. Существуют ли графы с 5 вершинами, степени которых равны:
 - а) 0, 1, 2, 3, 4?
 - б) 2, 2, 3, 3, 3?
 - в) 2, 3, 3, 4, 4?
 - г) 2, 2, 3, 3, 4?
9. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
10. На конференции присутствуют 50 учёных, каждый из которых знаком по крайней мере с 25 участниками конференции. Докажите, что найдутся четверо из них, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со знакомыми ему людьми.

11. Можно ли нарисовать фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной и той же части линии более одного раза? Если можно, то как?



12. В графе 100 вершин, причём степень каждой из них не меньше 50. Докажите, что граф связан.

Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом.

13. (о деревьях) Докажите, что:
 - а) из каждого связного графа можно удалить несколько ребер так, чтобы осталось дерево;
 - б) в каждом дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро;
 - в) в каждом дереве не меньше двух висячих вершин;
 - г) в каждом связном графе из n вершин не меньше $n - 1$ ребра;
 - д) если в связном графе n вершин и $n - 1$ ребро, то он – дерево.
14. В некотором графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нём есть цикл.
15. В стране Древландия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом каждые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?
16. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
17. Докажите, что в любом связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным.