На паре - 05.11

1. Прочитайте утверждение и докажите:

$$(\forall p, q \in \mathbb{Q} \,:\, p < q)\ (\exists r \in \mathbb{Q} \,:\, p < r < q).$$

2. Прочитайте утверждение и докажите:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ (\,2 \,|\, (n^2 + n)\,).$$

3. Докажите, что для любого натурального числа n верно равенство $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

4. $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$

5. $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha, \alpha > -1, \alpha \neq 0, n > 1$

6. $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n, a + b > 0, a \neq b, n > 1$

7. Рассмотрим правильный шестиугольник на плоскости. Проведем в нем все диагонали и стороны (все точки соединим с остальными). Каждое ребро (сторону и диагональ) раскрасим в один из двух цветов– красный или зеленый. Возможна ли такая раскраска в два цвета, чтобы ни один треугольник, составленный из ребер, не был раскрашен в один цвет?

Домашнее задание

1. $1^3 + 2^3 = ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$

2. $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ (Возможно, будет полезно воспользоваться неравенством $(n!)^2 \geq n^n$)

3. Рассмотрим правильный пятиугольник на плоскости. Проведем в нем все диагонали и стороны (все точки соединим с остальными). Каждое ребро (сторону и диагональ) раскрасим в один из двух цветов– красный или зеленый. Возможна ли такая раскраска в два цвета, чтобы ни один треугольник, составленный из ребер, не был раскрашен в один цвет?