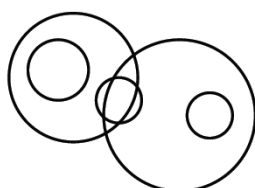


Операции над множествами. Формула включений-исключений.

1. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?
2. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.
3. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?
4. Члены Верховной Рады образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) – $\overline{A \cup B}$ тоже фракция (через \bar{C} обозначается множество всех членов Рады, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B , $A \cup B$ – также фракция.
5. Лесник считал сосны в лесу. Он обошёл 5 кругов, изображённых на рисунке, и внутри каждого круга насчитал ровно 3 сосны. Может ли быть, что лесник ни разу не ошибся?



6. (*) Внутри квадрата со стороной 2 расположено 7 многоугольников площадью не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее $1/7$.
7. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ – разложение числа n на простые множители. Используя формулу включений-исключений докажите равенство

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

8. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий – ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день – решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?
9. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
10. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?
11. Три цифры 1, 2 и 3 пишутся в каком попало порядке. Какова вероятность того, что по крайней мере одна из цифр окажется на надлежащем (в смысле нумерации) месте? А если цифр – четыре? n ?
12. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC ?
13. *Недоказанные тождества из лекций.*
14. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
15. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
16. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
17. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
18. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
19. Определим $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симметрическая разность. Доказать, что $A \Delta B = B \Delta A$.
20. Доказать, что $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.



Козы - очень прожорливые животные и съедают всё, до чего могут дотянуться. Поэтому коз приходится держать на привязи.

21. Нарисуйте участок луга, который выест коза, привязанная верёвкой к одиноко стоящему на лугу колышку.
22. Математик прогуливался по лугу, держа козу на поводке длины 1 м. Путь математика имел вид прямоугольника размером a м \times b м. Нарисуйте участок, который выела при этом коза, не обрывая поводка, если: а) $a=3$, $b=5$; б) $a=2$, $b=6$.
23. Привяжите козу с помощью веревок и колышков так, чтобы она могла съесть траву только внутри участка формы, указанной справа.
24. Какой участок съест коза, если ее привязать между двумя колышками? (Веревка привязана к двум колышкам и продернута сквозь ошейник козы.)
25. Натянем на лугу веревку между двумя колышками. У второй веревки привяжем один конец к ошейнику козы, а на втором сделаем петлю, свободно скользящую по веревке. Какой участок выест коза?
26. Как надо привязать козу, чтобы она выела участок в форме квадрата со стороной 2 м?
27. Как надо привязать козу, чтобы ограничить ее: а) произвольным прямоугольником; б) произвольным параллелограммом? в) произвольным выпуклым пятиугольником?
28. Как привязать козу, чтобы она съела все внутри прямоугольного треугольника со сторонами 3 м, 4 м, 5 м? Как быть для других треугольников?
29. Как заставить козу съесть все: а) внутри полукруга; б) внутри сектора?



Введем в действие еще один персонаж - собаку. Ее мы тоже будем привязывать, как и козу. Козы смертельно боятся собак, поэтому не могут есть там, куда дотягиваются собаки.

30. При помощи одной собаки удержите козу на участке такой формы (рис. справа).
31. Как одной собакой удержать козу в полукруге?
32. Как одной собакой удержать козу в кольце?
33. Удержите при помощи собак *непривязанную* козу внутри произвольного треугольника.
34. Подумайте, как действовать, чтобы ограничить *непривязанную* козу с помощью собак заданным четырехугольником (не обязательно выпуклым)?

