



Введение в математические методы компьютерной томографии.

Часть 1. Аналитические методы компьютерной томографии.

В настоящем пособии излагаются математические методы, которые используются в компьютерной томографии. Перед вами первая часть. Она знакомит с преобразованием Радона – математическим методом, лежащим в основании томографии.

Оглавление

1. Введение.....	2
2. Математическая постановка задачи компьютерной томографии	2
3. Прямое преобразование Радона.....	6
3.1 Определение преобразования Радона и его интерпретации.....	6
3.2 Примеры вычисления преобразования Радона	17
3.3 Свойства преобразования Радона	22
3.4 Дополнительные свойства.....	38
3.5 Примеры вычисления преобразования Радона	48
4. Преобразование Радона осесимметричных функций.....	59
4.1 Вычисление преобразования Радона.....	59
4.2 ПР осесимметричных функций как преобразование Абеля	63
4.3 Обращение осесимметричного преобразования Радона	72
5. Формулы обращения на основе интегральных преобразований.....	83
5.1 Формула обращения Радона.....	83
5.2 Метод Фурье синтеза	91
5.3 Метод двумерной фильтрации.....	107
5.4 Метод одномерной фильтрации	119
Приложение А. Таблица интегралов.....	126
Приложение В. Таблица преобразований Радона.....	127
Приложение С. Вычисление некоторых интегралов.....	130
Упражнения ..	135

Соглашение об обозначениях. В пределах одного параграфа ссылка на формулы дается одним номером, например, формула (4) отсылает к формуле 4 текущего параграфа. Ссылка на формулу 5 параграфа 3 текущей главы обозначается (3.5). Ссылка на формулу другой главы обозначается тремя числами, например, (2.1.3) отсылает читателя к формуле 3 первого параграфа второй главы. Аналогичные обозначения используются для нумерации примеров и рисунков.

1. Введение

В 1917 году австрийский математик И. Радон получил формулу обращения для отображения, сопоставляющего функции f на плоскости функцию R на множестве всех прямых на плоскости, равную интегралам от f вдоль всех прямых. Этот результат привел к большим последствиям, как в самой математике, так и в ее приложениях. Наиболее важным оказалось приложение преобразования Радона к томографии. Термин "томография" произошел от двух греческих слов: *тομος* (томос) – сечение и *γραφος* (графос) – пишу и означает послойное исследование структуры объектов. Существует несколько видов томографии: рентгеновская, электронно-лучевая, магнитно-резонансная, позитронно - эмиссионная, ультразвуковая, сейсмическая, оптическая томография и др. Но суть всех видов томографии едина: по набору «изображений» прошедшего сквозь тело излучения требуется восстановить внутреннюю структуру тела.

Метод компьютерной томографии в 1961 г. предложил американский нейрорентгенолог Вильям Ольдендорф, а в 1963 математик А. Кормак (США) провел лабораторные эксперименты по рентгеновской томографии и показал выполнимость реконструкции изображения. В 1973 инженер-исследователь Г. Хаунсфилд (Великобритания) разработал первую коммерческую систему – сканер головного мозга. В 1979 году Г. Хаунсфилду и А. Кормаку за выдающийся вклад в развитие компьютерной томографии была присуждена Нобелевская премия в области медицины.

2. Математическая постановка задачи компьютерной томографии

При исследовании внутренней структуры объекта его просвечивают излучением. Просвечивая тело с одного направления, получают плоское (двумерное) теневое изображение трехмерного тела. Просвечивая тело с другого направления, получают другое теневое изображение тела и дополнительную информацию о его внутренней структуре. Просвечивая тело еще с одного направления, получают новую информацию и т.д. Имея большое количество проекционных снимков с различных направлений, можно с достаточной степенью точности восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее функцию плотности поглощения излучения.

Задачей томографии является восстановление трехмерной функции $\mu(x, y, z)$ плотности поглощения излучения. В такой постановке задача весьма сложна и в классической томографии трехмерный объект представляют в виде набора тонких срезов. Внутри каждого среза плотность μ считают функцией только двух переменных. При исследовании систему источники-приемники устраивают таким образом, чтобы регистрировать только данные на лучах, лежащих в плоскости среза. Схема сканирования одного слоя представлена на следующем рисунке

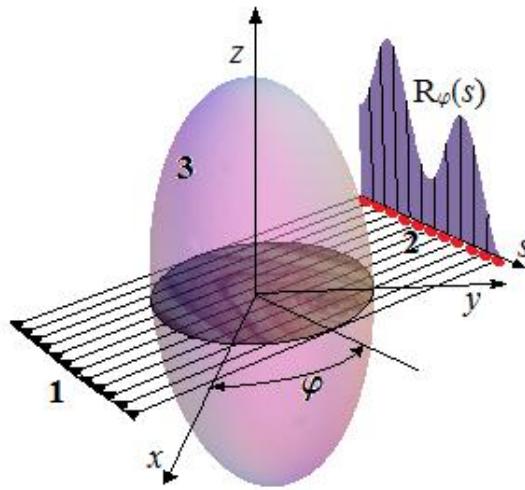


Рис.1 Зондирование трехмерного объекта (1 – источники; 2 – детекторы; 3 – объект)

Детекторы регистрируют данные и, полученная по ним функция R , зависит от одной переменной s (при фиксированном направлении зондирования, определяемом углом φ). Восстановить по одной проекции $R_\varphi(s)$ функцию двух переменных $\mu(x, y)$ невозможно. Для того, чтобы получить набор данных, достаточный для восстановления, применяют зондирование объекта с различных направлений, варьируя угол φ . Поворачивая систему «источники – детекторы», получают множество проекций $R(s, \varphi)$ слоя (параметр φ обозначает угол зондирования), по которым можно восстановить двумерную функцию $\mu(x, y)$. Схема сканирования слоя с различных направлений показана на следующем рисунке.

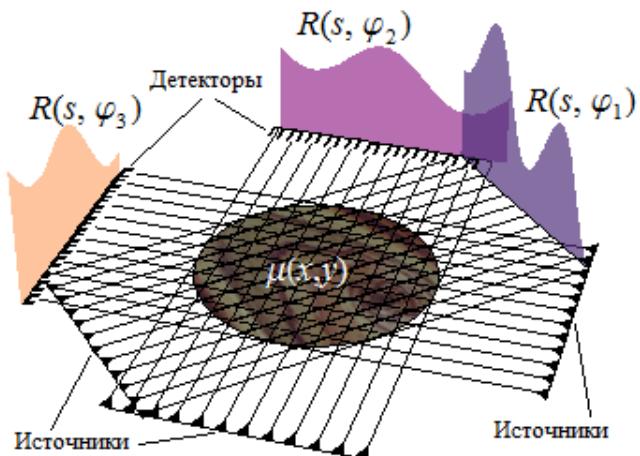


Рис.2 Схема получения проекций $R(s, \varphi)$ одного слоя.

Определив функцию $\mu(x, y)$ для одного слоя, систему «источники – детекторы» сдвигают в направлении оси z для получения информации о следующем близком слое и т.д. Затем, по двумерным функциям $\mu_{z_i}(x, y)$ в сечениях z_i , где z – координата перпендикулярная сечению, получают трехмерную функцию плотности поглощения $\mu(x, y, z)$. При этом основные трудности возникают при исследовании отдельного слоя, т.е. при восстановлении функции $\mu_z(x, y)$.

Подобный способ сбора данных составляет основу реконструктивной томографии. На исследуемое тело воздействует излучение, проникающее внутрь объекта. Оно взаимодействует с веществом, составляющим объект, и на выходе регистрируется излучение, прошедшее через тело. При обработке полученных данных используются следующие предположения: траектория луча считается прямолинейной и выполняется линейный закон поглощения излучения в веществе. Проанализируем этот закон.

Пусть тонкий пучок излучения падает на слой вещества. Можно считать, что поглощение в конкретной точке не зависит от направления излучения. Физический закон поглощения состоит в том, что приращение интенсивности излучения (поглощение) ΔI пропорционально интенсивности самого излучения I и длине отрезка Δt , пройденного излучением, т.е.

$$\Delta I = -\mu \cdot I \cdot \Delta t,$$

где μ – коэффициент поглощения, который зависит от точки (от вещества в окрестности точки). Мы также поставили знак минус, поскольку интенсивность излучения уменьшается, т.е. приращение интенсивности ΔI должно быть отрицательно.

Деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получаем закон поглощения в дифференциальной форме

$$\frac{dI}{dt} = -\mu \cdot I \quad (1)$$

Параметр μ называется коэффициентом поглощения или линейным коэффициентом ослабления. Он зависит от точки среды и не зависит от направления луча; его размерность $[\mu] = m^{-1}$.

Рассмотрим прямую L , нормаль к которой образует угол φ с положительным направлением оси X , и находящуюся на расстоянии s от начала координат (см. рис. 3).

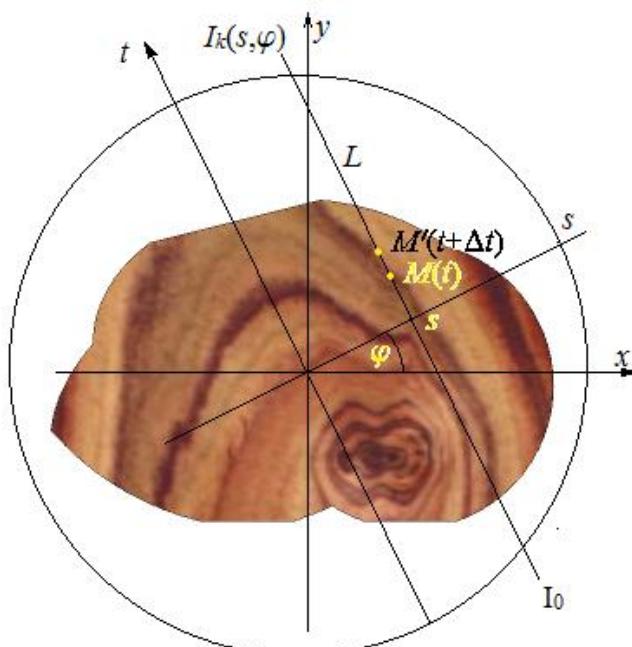


Рис. 3. К выводу закона поглощения излучения

Запишем закон поглощения (1) в точке М прямой L . Обозначим через I_0 значение интенсивности излучения на входе в точке t_0 прямой, а через I_k – значение интенсивности на выходе в точке t_k . Тогда из (1) получаем

$$\frac{dI}{I} = -\mu dt, \quad \int_{I_0}^{I_k} \frac{dI}{I} = -\int_{t_0}^{t_k} \mu dt, \quad \ln I \Big|_{I_0}^{I_k} = -\int_{t_0}^{t_k} \mu dt$$

или

$$-\ln \frac{I_k}{I_0} = \int_{t_0}^{t_k} \mu dt \quad (2)$$

Считая известной величину излучения на входе I_0 и выходе I_k , и учитывая, что результирующее значение $I_k = I_k(s, \varphi)$ определяется прямой L , т.е. зависит от ее расстояния s и ориентации (угла φ), мы слева в (2) имеем известную величину $-\ln \frac{I_k(s, \varphi)}{I_0} = \ln \frac{I_0}{I_k(s, \varphi)} = R(s, \varphi)$, которую обозначим через $R(s, \varphi)$. Параметры t_0 и t_k относятся к удаленным точкам прямой и их можно считать равными $-\infty$ и $+\infty$. Учитывая, что коэффициент поглощения μ зависит от точки, т.е. является функцией x и y , из (2) получаем

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, y) dt \quad (3)$$

Введем систему координат (s, t) (см. рис.3). Связь между исходной системой координат (x, y) и повернутой на угол φ системой координат (s, t) определяется соотношениями

$$x = s \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = s \sin \varphi + t \cos \varphi \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), окончательно получаем

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (5)$$

Функция $R(s, \varphi)$ считается заданной для направлений $0 \leq \varphi < \pi$, поскольку при изменении угла на π «просвечивание» ведется в обратном направлении. Интегрирование выполняется в области, где функция $\mu(x, y)$ отлична от нуля. На практике это означает, что величина s ограничивается физическими размерами объекта. Задача состоит в восстановлении функции $\mu(x, y)$. Насколько это удается сделать, показывают реальные томограммы.

Правая часть выражения (5) называется преобразованием Радона (ПР) функции $\mu(x, y)$. ПР определено для любой функции двух действительных переменных, которая достаточно быстро убывает на бесконечности так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. В приложениях, как правило, используются финитные функции, которые равны нулю вне некоторой ограниченной области; так, что предположение о сходимости несобственных интегралов выполняется.

Основное достижение И. Радона состоит в том, что он доказал возможность восстановления функции $\mu(x, y)$ по ее интегралам по всем прямым $R(s, \varphi)$ и вывел формулу обращения.

3. Прямое преобразование Радона

В основе математического аппарата томографии лежит преобразование Радона. Мы будем широко использовать свойства этого преобразования. В настоящем разделе рассматриваются определение, различные интерпретации и основные свойства преобразования Радона.

3.1 Определение преобразования Радона и его интерпретации

Пусть функция двух действительных переменных $f(x, y)$ определена на всей плоскости и достаточно быстро убывает на бесконечности так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Преобразованием Радона функции $f(x, y)$ называется функция

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (1)$$

Договоримся об обозначениях, которые будем использовать во всем пособии. Преобразование Радона (ПР) представляет собой пример оператора; когда такой оператор действует на какую – то функцию, то он создает другую функцию. Для обозначения оператора Радона используем прописную букву R. Оператор R действует на функцию $f(\dots)$ – это будем обозначать через $R[f]$ или $R[f(x, y)]$. Функция, которая получается в результате, будет функцией двух переменных и ее значение для прямой, определяемой параметрами (s, φ) , будем обозначать через $R[f](s, \varphi)$. Эту функцию называют радоновским образом функции f . В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений вместо записи $R[f](s, \varphi)$ будем использовать обозначение $R(s, \varphi)$.

Геометрический смысл преобразования Радона $R(s, \varphi)$ состоит в том, что это интегралы от функции $f(x, y)$ вдоль прямых L , перпендикулярных вектору $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, проходящих на расстоянии s (измеренном вдоль вектора \vec{n} с соответствующим знаком) от начала координат. На следующем рисунке пояснены используемые обозначения.

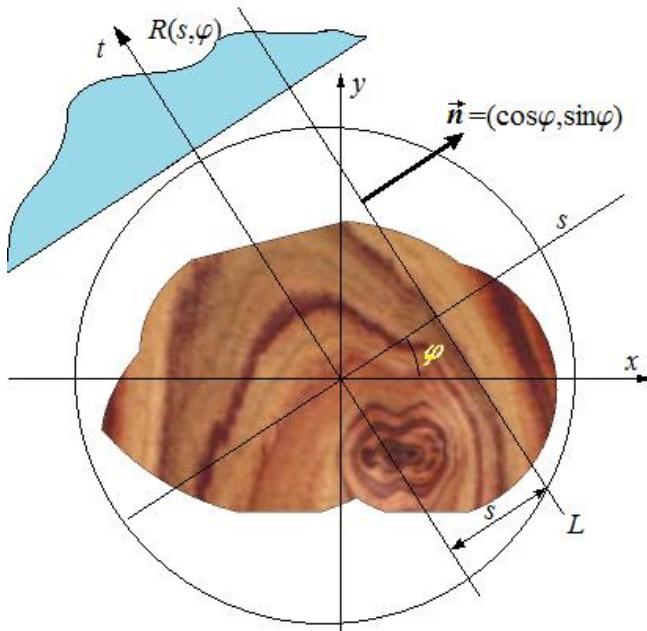


Рис. 1 К преобразованию Радона функции двух переменных.

Прямая L при фиксированных s и φ имеет уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0. \quad (2)$$

Для краткости параметры (s, φ) мы иногда будем называть радоновскими координатами прямой.

Связь между исходной системой координат (x, y) и повернутой на угол φ системой координат (s, t) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x &= s \cos \varphi - t \sin \varphi & s &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y &= s \sin \varphi + t \cos \varphi & \text{или} & t = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}, \quad (3)$$

и уравнение прямой L в системе координат (s, t) имеет вид $s = \text{Const.}$

Поскольку при изменении угла φ на π сканирование выполняется в обратном направлении, то для ПР выполняется равенство

$$R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi). \quad (4)$$

Это можно увидеть из определения (1). Действительно

$$\begin{aligned} R[f](-s, \varphi + \pi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f((-s) \cos(\varphi + \pi) - t \sin(\varphi + \pi), (-s) \sin(\varphi + \pi) + t \cos(\varphi + \pi)) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi + t \sin \varphi, s \sin \varphi - t \cos \varphi) dt = |t = -\tau| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \varphi - \tau \sin \varphi, s \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\tau = R[f](s, \varphi) \end{aligned}$$

По – другому. Замена угла $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ соответствует замене вектора нормали на противоположный $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$. Но вектор \mathbf{n} определяет направление оси s . Поэтому координаты $(-s, \varphi + \pi)$ и (s, φ) представляют одну и ту же прямую.

Очевидно, что ПР по параметру φ имеет период 2π . Действительно

$$R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi) = R(-(-s), (\varphi + \pi) + \pi) = R(s, \varphi + 2\pi).$$

Последнее следует также из определения (1), поскольку тригонометрические функции, используемые в (1), имеют период 2π .

Повторим еще раз. *Каждое значение радоновского образа $R(s, \varphi)$ есть интеграл от тех значений функции $f(x, y)$, которые она принимает вдоль прямой L , определяемой параметрами s и φ .*

Пример 1. Пусть дана функция $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$. Вычислим ее преобразование Радона. Имеем

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 - (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2 - t^2) dt = \\ &= e^{-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-s^2} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

т.е.

$$R[\exp(-x^2 - y^2)] = \sqrt{\pi} e^{-s^2} \quad (5)$$

□

Мы получили, что ПР функции $\exp(-x^2 - y^2)$ зависит только от параметра s .

Лемма 1. Преобразование Радона осесимметричной функции $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ не зависит от угла φ , т.е. $R[f(\sqrt{x^2 + y^2})](s, \varphi) = R(s)$.

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} R[f(\sqrt{x^2 + y^2})] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 + (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2}) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = R(s), \end{aligned}$$

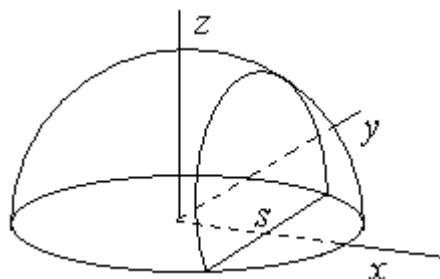
поскольку параметр φ не входит в выражение для вычисления интеграла.

□

Учитывая (4) и то, что для осесимметричной функции ПР не зависит от параметра φ , имеем $R(s) = R(-s)$, т.е. ПР осесимметричной функции четно.

Пример 2. Вычислим ПР полусферы, т.е. функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$



Поскольку функция осесимметричная, то достаточно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии s от начала координат, например, по прямой $x=s$, параллельной оси ОY. При $|s| < 1$ имеем

$$R(s) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1 - y^2 - s^2} dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1 - s^2 - y^2} dy =$$

$$= \left(y \sqrt{1 - s^2 - y^2} + (1 - s^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{1 - s^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2} (1 - s^2)$$

Здесь мы использовали табличный интеграл (A.1, приложения A)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (6)$$

В результате

$$R[f(x, y)](s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1 - s^2), & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

□

Рассмотрим трехмерное тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$, и снизу – плоскостью $z=0$. Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt$, стоящий в формуле (3) главы 2, представляет площадь сечения этого тела вертикальной плоскостью (параллельной оси z), проходящей через прямую L (см. рис. 2).

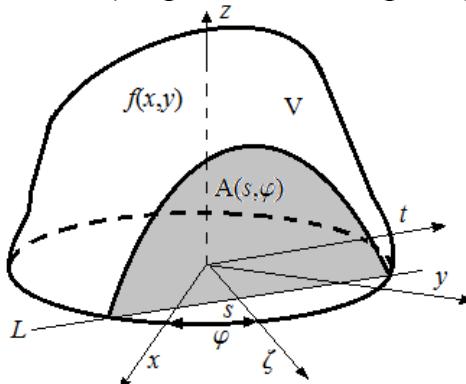


Рис. 2 Геометрический смысл преобразования Радона

Если определить площадь сечения A , как функцию расстояния s прямой до начала координат и угла вектора ее нормали φ , то мы, тем самым, определим ПР функции $f(x, y)$, т.е. $R(s, \varphi) \equiv A(s, \varphi)$.

Итак, значение радоновского образа $R(s, \varphi)$ есть площадь сечения поверхности $z = f(x, y)$ вертикальной плоскостью, проходящей через прямую L , определяемую параметрами s и φ .

Дадим еще одну интерпретацию ПР. Рассмотрим трехмерное тело V , представленное на предыдущем рисунке, и станем рассекать его плоскостями перпендикулярными к оси ζ (ось ζ образует угол φ с положительным направлением оси X). Допустим, что все сечения квадрируемы и пусть площадь сечения $A(\zeta, \varphi)$, отвечающего расстоянию ζ прямой L до начала координат, будет непрерывной функцией ζ . Тогда объем части тела V , отсекаемой плоскостью $\zeta = s$, может быть вычислен по формуле

$$V(s, \varphi) = \int_{-\infty}^s A(\zeta, \varphi) d\zeta$$

Дифференцируя последнее равенство по s , получаем

$$\frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s} = A(s, \varphi)$$

Но $A(s, \varphi) = R(s, \varphi)$, поэтому

$$R(s, \varphi) = \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s} \quad (7)$$

Итак, если функция $f(x, y)$ ограничивает сверху трехмерное тело V , то ее преобразование Радона $R(s, \varphi)$ может быть вычислено по формуле (7), где $V(s, \varphi)$ является объемом части тела V , отсекаемой плоскостью $\zeta = s$ перпендикулярной к прямой ζ , образующей угол φ с положительным направлением оси X .

Приведем еще физическую интерпретацию ПР. Пусть $f(x, y)$ – плотность распределения массы на плоскости. Обозначим через $M(s, \varphi)$ массу полуплоскости $x \cos \varphi + y \sin \varphi < s$, причем $x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0$ является уравнением прямой L (см. рис. 2). Введем повернутую на угол φ систему координат (ζ, t) , связанную с системой координат (x, y) соотношениями (3)

$$x = \zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi.$$

Тогда

$$M(s, \varphi) = \iint_{\substack{\text{По} \\ \text{полуплоскости}}} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^s \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \right) d\zeta$$

Дифференцируя по параметру s , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(s, \varphi)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^s \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \right) d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt = R[f(x, y)](s, \varphi) \end{aligned}$$

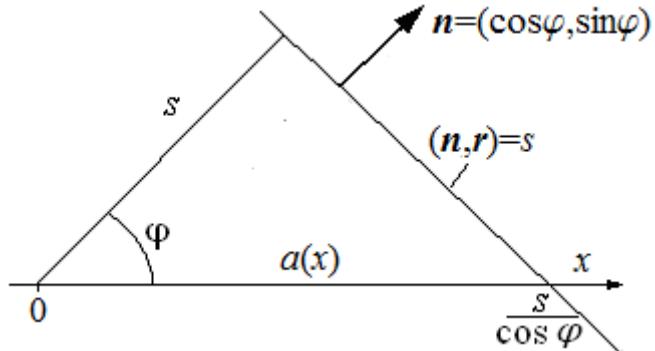
Итак, если функция $f(x, y)$ задает плотность распределения конечной массы на плоскости, то ее преобразование Радона $R(s, \varphi)$ может быть вычислено по формуле

$$R(s, \varphi) = \frac{\partial M(s, \varphi)}{\partial s} \quad (8)$$

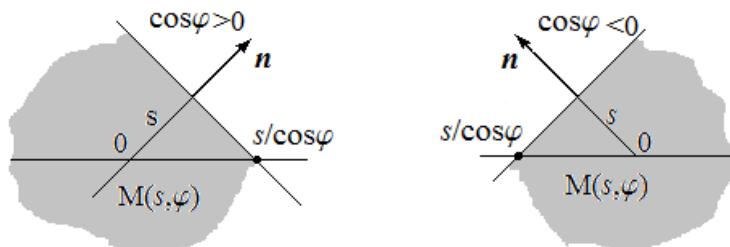
Заметим, что величины $M(s, \varphi)$ и $V(s, \varphi)$ вычисляются по одной и той же формуле $\iint_{\substack{\text{По} \\ \text{полуплоскости}}} f(x, y) dx dy$, поэтому формулы (7) и (8) эквивалентны.

Пример 3. Вычислим ПР функции, сосредоточенной на прямой $y = 0$. Пусть на оси x распределена конечная масса с плотностью $a(x)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)| dx < \infty$. Тем самым плотность распределения массы на плоскости задается обобщенной функцией $f(x, y) = a(x) \delta(y)$, где δ – дельта функция Дирака.

Найдем массу $M(s, \varphi)$ полуплоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) < s$, где $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $\mathbf{r} = (x, y)$, а круглые скобки в записи (\mathbf{n}, \mathbf{r}) обозначают скалярное произведение.



Прямая $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = s$ пересекает ось X в точке $x = s/\cos \varphi$. В зависимости от знака $\cos \varphi$ (см. следующий рисунок) мы должны выбирать левую или правую полуплоскость.



Тогда имеем

$$M(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{s/\cos \varphi} a(x) dx, \quad \cos \varphi > 0$$

$$M(s, \varphi) = \int_{s/\cos \varphi}^{\infty} a(x) dx, \quad \cos \varphi < 0$$

Отсюда находим, что

$$R[a(x)\delta(y)](s, \varphi) = \frac{\partial M(s, \varphi)}{\partial s} = \frac{1}{|\cos \varphi|} a\left(\frac{s}{\cos \varphi}\right).$$

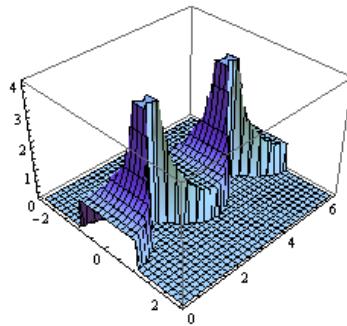
В частности ПР характеристической функции отрезка, лежащего на оси X (т.е функции $a(x)\delta(y)$, где $a(x) = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит точка x отрезку или нет), есть

$$R(s, \varphi) = \begin{cases} 1/|\cos \varphi|, & \text{прямая } (\mathbf{n}, \mathbf{r}) = s \text{ пересекает отрезок} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Для отрезка оси абсцисс $-b \leq x \leq b$ ($b > 0$) имеем

$$R(s, \varphi) = \begin{cases} 1/|\cos \varphi|, & |s| < b|\cos \varphi| \\ 0, & |s| > b|\cos \varphi| \end{cases}$$

Если аргументы s и φ рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то график этой функции при $b=1$ будет иметь вид, показанный на следующем рисунке.



Функция разрывная и имеет особенности, которые на графике представлены обрезанными сверху «пиками» (в действительности пики бесконечно высокие). \square

Выясним, каков геометрический смысл преобразования Радона характеристической функции ограниченной области.

Функция, равная единице в области D и равная нулю вне ее называется характеристической функцией области, то есть

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in D \\ 0, & \mathbf{r} \notin D \end{cases}, \mathbf{r} = (x, y)$$

Объем, ограниченный сверху такой функцией, показан на следующем рисунке. Поскольку функция $R(s, \varphi)$ равняется площади $A(s, \varphi)$ соответствующего сечения, которая равна длине отрезка $L(s, \varphi)$ прямой L , умноженного на единичную высоту, то ПР характеристической функции области D равняется длине отрезка $L(s, \varphi)$ прямой L , попавшего внутрь области D (или суммарной длине отрезков, если их несколько).

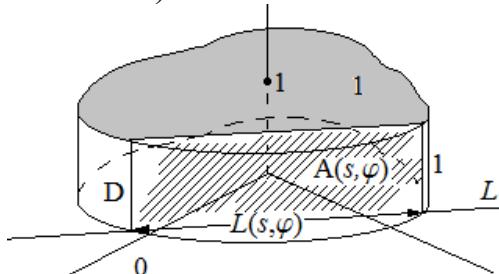
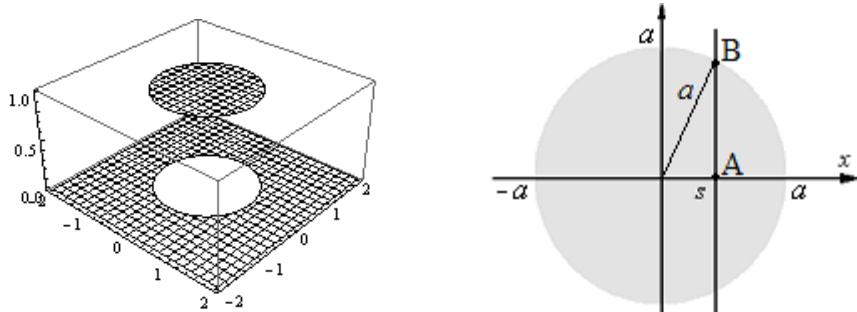


Рис. 3 Геометрический смысл ПР характеристической функции области.

Пример 4. Вычислить ПР характеристической функции χ круга.



Можно считать, что $\chi(\mathbf{r})$ задает единичную плотность вещества и масса равномерно распределено по кругу радиуса a с плотностью $\rho(x, y) = 1$.

Поскольку ПР не зависит от φ , то из (8) следует $R(s) = \frac{\partial M(s)}{\partial s}$ при любом φ и

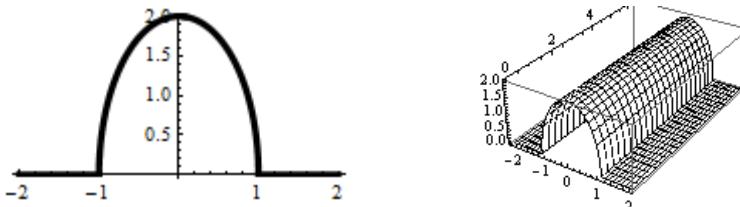
для отсчета расстояния s можно взять любое направление, например, x . Здесь $M(s)$ является массой полуплоскости $x < s$. Поскольку $M = \rho \cdot A$ и $\rho = 1$, то $R(s) = \frac{dA}{ds}$, где A – часть площади круга, ограниченная справа прямой $x = s$. Но

$A = 0$ при $s \leq -a$. При $-a < s < a$ имеем $A(s) = 2 \int_{-a}^s \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Поэтому $R(s) = \frac{dA}{ds} = 2 \sqrt{a^2 - s^2}$ ($-a < s < a$). При $s \geq a$ весь круг попадает в полуплоскость и $A = \pi a^2$, а $dA/ds = 0$. Окончательно

$$R(s) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - s^2}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}.$$

Используя интерпретацию ПР для характеристической функции области круга, результат получается быстрее. Поскольку длина отрезка АВ (см. предыдущий рисунок) равна $\sqrt{a^2 - s^2}$, то длина $L(s)$ отрезка прямой, попавшего в круг, равна $2\sqrt{a^2 - s^2}$ при $|s| < a$ и равна нулю при $|s| \geq a$.

График функции $R(s)$ при $a=1$ показан на следующем рисунке – слева как функция одной переменной s , справа – как функция двух переменных s, φ .



Рассмотрим теперь круг радиуса a , центр которого сдвинут в точку (x_0, y_0) .

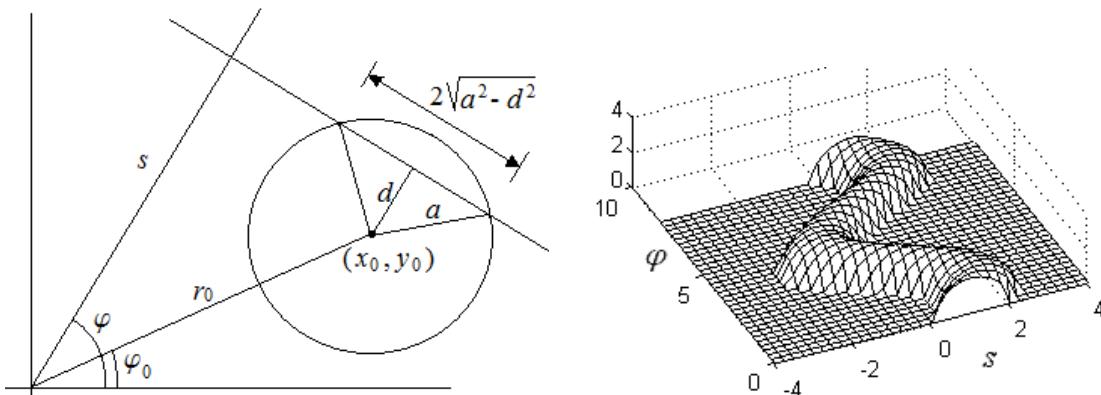


Рис. 4 К вычислению ПР характеристической функции сдвинутого круга.

Длина отрезка прямой, имеющей радионовские координаты s, φ , лежащего внутри круга, равна $2\sqrt{a^2 - d^2}$ (см. рис. 4 слева). Поскольку $x_0 = r_0 \cos \varphi_0$, $y_0 = r_0 \sin \varphi_0$, то

$$d = s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = s - (r_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 + r_0 \sin \varphi \sin \varphi_0) = s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi.$$

Поэтому при $|d| < a$ мы имеем

$$R_{(x_0, y_0)}(s, \varphi) = 2\sqrt{a^2 - d^2} = 2\sqrt{a^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2}.$$

Окончательно

$$R_{(x_0, y_0)}(s, \varphi) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2}, & |s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)| < a \\ 0, & |s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)| \geq a \end{cases}$$

Заметим, что ПР центрированного круга и сдвинутого радиусов a связаны соотношением $R_{(x_0, y_0)}(s, \varphi) = R(s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)$, и ПР сдвинутого круга уже зависит от угла φ .

График функции $R_{(x_0, y_0)}(s, \varphi)$ при $x_0 = 1, y_0 = 1, a = 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$ показан на рисунке 4 справа. □

Преобразование Радона часто определяют формулой, отличающейся от (1). Используем векторную запись прямой на плоскости $s = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус – вектор точки и $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ – единичный вектор нормали прямой, вдоль которого мы направим ось s ; (\mathbf{r}, \mathbf{n}) – скалярное произведение векторов. Тогда для выделенной прямой $s = (\mathbf{r}, \mathbf{n})$ интеграл по прямой, равный $R(s, \varphi) = R(s, \mathbf{n})$, может быть записан с использованием δ – функции Дирака

$$R(s, \mathbf{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{r})) d\mathbf{r}, \quad (9)$$

где под $d\mathbf{r}$ мы понимаем элемент площади $dxdy$, т.е.

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy \quad (10)$$

Для того, чтобы показать эквивалентность определений (1) и (10) выполним в (10) следующие преобразования

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(\sin \varphi \left(\frac{s}{\sin \varphi} - x \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - y\right)\right) dx dy = \\ &= \frac{1}{|\sin \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(\frac{s}{\sin \varphi} - x \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - y\right) dy \right) = \\ &= \frac{1}{|\sin \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{s}{\sin \varphi} - x \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right) dx \end{aligned}$$

Мы воспользовались определением δ -функции $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$, ее «четностью» и свойством $\delta(\alpha t) = \delta(t)/|\alpha|$. В последнем интеграле (s и φ фиксированы) делаем замену $x = s \cos \varphi - t \sin \varphi$. При $0 < \varphi < \pi$ имеем

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \frac{1}{\sin \varphi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s \cos \varphi - t \sin \varphi, \frac{s}{\sin \varphi} - (s \cos \varphi - t \sin \varphi) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right) (-\sin \varphi) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s \cos \varphi - t \sin \varphi, \frac{s(1 - \cos^2 \varphi)}{\sin \varphi} + t \cos \varphi\right) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt.$$

При $\pi < \varphi < 2\pi$ не нужно будет менять пределы интегрирования и, кроме того, $dx = (-\sin \varphi)dt = |\sin \varphi| dt$. В результате мы получим тот же результат. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ эквивалентность представлений (1) и (10) проверяется аналогично. \square

Пример 5. Используем формулу (10) для вычисления ПР функции, сосредоточенной на прямой $y = 0$ (см. пример 3), т.е. обобщенной функцией $f(x, y) = a(x)\delta(y)$, где δ – дельта функция Дирака. Имеем

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a(x)\delta(y)) \delta(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \delta(s - x \cos \varphi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \delta\left(\cos \varphi \cdot \left(x - \frac{s}{\cos \varphi}\right)\right) dx = \\ &= \frac{1}{|\cos \varphi|} \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \delta\left(x - \frac{s}{\cos \varphi}\right) dx = \frac{1}{|\cos \varphi|} a\left(\frac{s}{\cos \varphi}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы дважды воспользовались определением дельта функция Дирака, ее четностью и свойством $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t)$. \square

По-аналогии с (9) преобразование Радона определяется в многомерном случае. Например, пусть задана функция 3-х переменных $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$. Используем векторные обозначения: $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус – вектор точки, $s = (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = n_x x + n_y y + n_z z$ – уравнение плоскости, находящейся на расстоянии s от начала координат, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к этой плоскости. Преобразование Радона функции $f(\mathbf{r})$ определяется следующим образом

$$R(s, \mathbf{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(s - (\mathbf{r}, \mathbf{n})) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

где под $d\mathbf{r} = dx dy dz$ мы понимаем элемент объема и интеграл берется по всему пространству. Хотя выражение (11) по форме мало отличается от двумерного преобразования Радона (9), необходимо помнить, что в (11) интегрирование ведется по плоскостям, а не по прямым.

В многомерном случае преобразование Радона определяется аналогично. При этом для краткости изложения мы будем вместо многократного интеграла с бесконечными пределами писать один знак интеграла, подразумевая, что всюду число интегралов равняется размерности пространства и интеграл берется по всему пространству. Таким образом, для преобразования Радона в m – мерном случае мы будем писать

$$R(s, \mathbf{n}) = \int f(\mathbf{r}) \delta(s - (\mathbf{r}, \mathbf{n})) d\mathbf{r}, \quad (12)$$

где под $d\mathbf{r} = dx_1 \dots dx_m$ мы понимаем элемент m – мерного объема,

Геометрический смысл преобразования Радона в многомерном случае состоит в том, что оно является интегралом от функции по гиперплоскости с нормалью \mathbf{n} , находящейся на расстоянии s от начала координат (взятое со знаком минус, если перпендикуляр из начала координат на плоскость противоположно направлен с вектором \mathbf{n}).

Приведем интерпретацию функции $R(s, \mathbf{n})$ в 3-х мерном случае. Пусть $f(\mathbf{r})$ – плотность распределения конечной массы в пространстве. Обозначим через $M(s, \mathbf{n})$ массу полупространства $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) < s$. Тогда имеем

$$M(s, \mathbf{n}) = \int_{(\mathbf{n}, \mathbf{r}) < s} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) H(s - (\mathbf{n}, \mathbf{r})) d\mathbf{r}$$

где $H(s)$ – функция Хевисайда, $H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}$. Известно, что $H'(s) = \delta(s)$.

Тогда дифференцируя последнее равенство по s , получим

$$\frac{\partial M(s, \mathbf{n})}{\partial s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{r})) d\mathbf{r} = R(s, \mathbf{n})$$

Итак, если функция $f(\mathbf{r})$ задает плотность распределения конечной массы в пространстве, то преобразование Радона $R(s, \mathbf{n})$ может быть вычислено по формуле

$$R(s, \mathbf{n}) = \frac{\partial M(s, \mathbf{n})}{\partial s}, \quad (13)$$

где $M(s, \mathbf{n})$ – масса полупространства $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) < s$. Понятно, что последний результат не зависит от размерности пространства.

Выясним, каков геометрический смысл преобразования Радона характеристической функции ограниченного тела. Пусть V – ограниченное тело, $f(\mathbf{r})$ – его характеристическая функция, то есть $f(\mathbf{r}) = 1$, когда \mathbf{r} принадлежит V , и $f(\mathbf{r}) = 0$, когда \mathbf{r} не принадлежит V . Можно считать, что $f(\mathbf{r})$ задает единичную плотность вещества. Тогда $M = 1 \cdot V$. В соответствии с (13), преобразование Радона $R(s, \mathbf{n})$ функции $f(\mathbf{r})$ выражается формулой

$$R(s, \mathbf{n}) = \frac{\partial V(s, \mathbf{n})}{\partial s}, \quad (14)$$

где $V(s, \mathbf{n})$ – объем части тела V , лежащей в полупространстве $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) < s$. Но

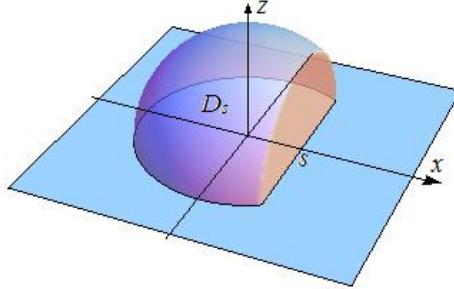
$\frac{\partial V(s, \mathbf{n})}{\partial s} = A(s, \mathbf{n})$ есть площадь сечения тела V гиперплоскостью $(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = s$.

Таким образом, преобразование Радона характеристической функции ограниченного тела V можно получать, вычисляя площади сечений этого тела гиперплоскостями.

Пример 6. Вычислим трехмерное ПР характеристической функции единичного шара. Очевидно, что ПР не зависит от ориентации секущей плоскости, т.е. ПР является функцией только расстояния плоскости до центра шара. Возьмем

плоскость перпендикулярную оси x . В соответствии с (14) имеем $R(s) = \frac{dV}{ds}$,

где V – часть объема шара, ограниченная справа плоскостью $x=s$, расположенная над и под плоской областью D_s (см. следующий рисунок, где изображена верхняя полвина шара, ограниченного справа плоскостью $x=s$).



Имеем

$$\begin{aligned} V(s) &= 2 \iint_{D_s} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_{-1}^s dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy = \\ &= 4 \int_{-1}^s dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy \end{aligned}$$

Используя табличный интеграл (А.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy &= \frac{y}{2} \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{1-x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1-x^2}{2} \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi(1-x^2)}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V(s) = \pi \int_{-1}^s (1-x^2) dx$$

и окончательно

$$R(s) = \frac{dV}{ds} = \pi(1-s^2), \quad |s| < 1 \quad \text{и} \quad R(s) = 0, \quad |s| \geq 1.$$

С другой стороны, как сказано выше, ПР характеристической функции ограниченного тела V можно получать, вычисляя площади сечений этого тела гиперплоскостями. В нашем случае сечение шара плоскостью $x=s$ является кругом радиуса $\sqrt{1-s^2}$ (при $|s| < 1$) и его площадь $A(s) = \pi(1-s^2)$.

□

3.2 Примеры вычисления преобразования Радона

Пример 1. Используя определение (1.1), вычислим ПР характеристической функции $\chi(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Параметрическое уравнение прямой L (см. рис. 1), пересекающей эллипс, находящейся на расстоянии s от начала координат, имеющей вектор нормали

$\mathbf{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ и направляющий вектор $\mathbf{l} = (l_x, l_y) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, имеет вид $x = x_0 + l_x \cdot t$, $y = y_0 + l_y \cdot t$, где $x_0 = s \cos\varphi$, $y_0 = s \sin\varphi$. Т.е.

$$x = s \cos\varphi - \sin\varphi \cdot t, \quad y = s \sin\varphi + \cos\varphi \cdot t. \quad (1)$$

Найдем точки пересечения этой прямой с контуром эллипса.

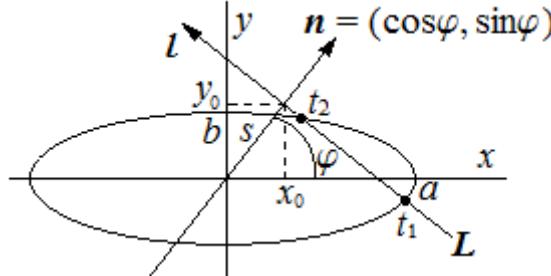


Рис. 1 К вычислению ПР ХФ эллипса

Подставляя (1) в уравнение эллипса, получаем

$$\frac{(s \cos\varphi - \sin\varphi \cdot t)^2}{a^2} + \frac{(s \sin\varphi + \cos\varphi \cdot t)^2}{b^2} = 1.$$

После преобразований получаем квадратное уравнение относительно t :
 $t^2(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) + t \cdot 2s(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi + s^2(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) - a^2 b^2 = 0$
или

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

где мы ввели обозначения $A = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$, $B = 2s(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi$, и $C = s^2(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) - a^2 b^2$. Корни уравнения равны

$$t_{1,2} = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

где t_1 и t_2 занумерованы в порядке возрастания в направлении вектора \mathbf{l} .

Вычисляя дискриминант $B^2 - 4AC$, после упрощений получаем

$$B^2 - 4AC = 4a^2 b^2 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - s^2)$$

Тогда, введя обозначение

$$\Delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad (2)$$

получаем

$$t_{1,2} = \frac{-s(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \mp |ab| \sqrt{\Delta^2 - s^2}}{\Delta^2} \quad (3)$$

Далее, учитывая (1), имеем $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1$, т.е. дифференциал длины дуги прямой равен $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = dt$. Это значит, что параметр t является натуральным параметром. Тогда, при условии $s^2 < \Delta^2$, из (1.1) получаем

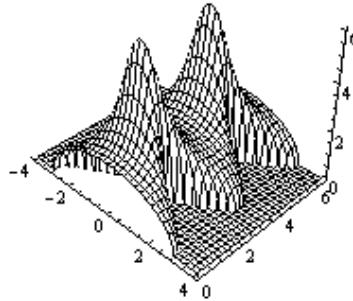
$$R[\chi](s, \varphi) = \int_L \chi(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1 = \frac{2|ab| \sqrt{\Delta^2 - s^2}}{\Delta^2}$$

Если $s^2 > \Delta^2$, то выражение, стоящее в (3) под корнем будет отрицательно. Это означает, что пересечения прямой L с эллипсом нет. Окончательно получаем

$$R[\chi](s, \varphi) = \begin{cases} \frac{2|ab|\sqrt{\Delta^2 - s^2}}{\Delta^2}, & |s| < \Delta \\ 0, & |s| \geq \Delta \end{cases}, \quad (4)$$

где $\Delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$ определяется выражением (2).

График функции $R[\chi](s, \varphi)$ при $a=3, b=1$ показан на следующем рисунке.



В случае, когда $a=b$, для ПР ХФ круга радиуса a имеем $\Delta = |a|$ и

$$R[\chi](s, \varphi) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - s^2}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}, \quad (5)$$

что совпадает с результатом примера (1.4)

□

Пример 2. Вычислим ПР функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

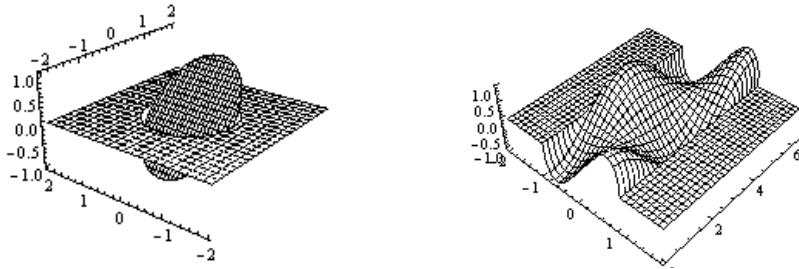
Уравнение прямой L , имеющей радоновские координаты (s, φ) , имеет вид (1). Она пересекает границу круга в точках $t_{1,2} = \mp\sqrt{1-s^2}$ (см. ф. (3) примера 1 при $a=b=1$). Тогда при $|s| < 1$

$$\begin{aligned} R[f](s, \varphi) &= \int_L x \, dl = \int_{t_1}^{t_2} (s \cos \varphi + \sin \varphi \cdot t) \, dt = s \cos \varphi \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} dt + \sin \varphi \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} t \, dt = \\ &= s \cos \varphi 2\sqrt{1-s^2} + \sin \varphi \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} = 2 \cos \varphi s \sqrt{1-s^2}. \end{aligned}$$

Или окончательно

$$R[f](s, \varphi) = \begin{cases} 2 \cos \varphi \cdot s \sqrt{1-s^2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

На следующем рисунке слева показана исходная функция, а справа – ее преобразование Радона.



Обратите внимание на соотношение $2\cos(\varphi + \pi)(-s)\sqrt{1-s^2} = 2\cos\varphi \cdot s\sqrt{1-s^2}$, которое означает, что выполняется равенство (1.4) $R[f](-s, \varphi + \pi) = R[f](s, \varphi)$.

□

Пример 3. Используя определение (1.1), вычислим ПР функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

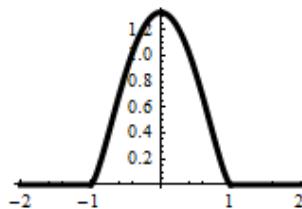
Уравнение прямой L с радоновскими координатами (s, φ) имеет вид (1). Прямая пересекает границу круга в точках $t_{1,2} = \mp\sqrt{1-s^2}$ (см. пример 2). Тогда при $|s| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} R[f](s, \varphi) &= \int_L (1 - x^2 - y^2) d\ell = \int_{t_1}^{t_2} (1 - s^2 - t^2) dt = (1 - s^2) \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} dt - \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} t^2 dt = \\ &= (1 - s^2) 2\sqrt{1 - s^2} - \frac{t^3}{3} \Big|_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} = 2(1 - s^2) \sqrt{1 - s^2} - \frac{2}{3}(1 - s^2) \sqrt{1 - s^2} = \frac{4}{3}(1 - s^2) \sqrt{1 - s^2} \end{aligned}$$

Или окончательно

$$R[f](s, \varphi) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1 - s^2) \sqrt{1 - s^2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

Поскольку здесь нет зависимости от параметра φ , то для представления полученного ПР достаточно построить график кривой $R[f](s)$.



□

Пример 4. Используя определение (1.1), вычислить ПР функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{b}{a} (a - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 < a^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq a^2 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

График этой функции над кругом радиуса a имеет форму конуса высотой b , а вне него – ноль (см. следующий рисунок слева).

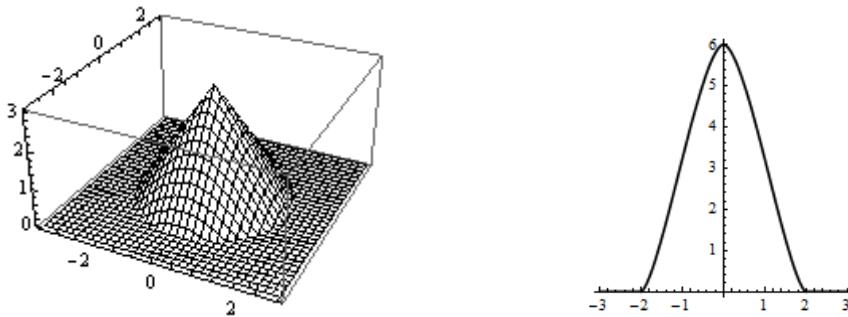
Уравнение прямой L с радоновскими координатами (s, φ) имеет вид (1). Прямая L пересекается с границей круга в точках $t_{1,2} = \mp\sqrt{a^2 - s^2}$. Тогда при $|s| < a$ имеем

$$\begin{aligned}
 R[f](s, \varphi) &= \int_L \frac{b}{a} \left(a - \sqrt{x^2 + y^2} \right) d\ell = \frac{b}{a} \int_{t_1}^{t_2} \left(a - \sqrt{s^2 + t^2} \right) dt = \\
 &= b \cdot (t_2 - t_1) - \frac{b}{2a} \left(t \sqrt{s^2 + t^2} + s^2 \ln(t + \sqrt{s^2 + t^2}) \right) \Big|_{-\sqrt{a^2 - s^2}}^{\sqrt{a^2 - s^2}} = 2b\sqrt{a^2 - s^2} - \\
 &- \frac{b}{2a} \left(\left(a\sqrt{a^2 - s^2} + s^2 \ln(\sqrt{a^2 - s^2} + a) \right) - \left(-a\sqrt{a^2 - s^2} + s^2 \ln(-\sqrt{a^2 - s^2} + a) \right) \right) = \\
 &= b\sqrt{a^2 - s^2} - \frac{bs^2}{2a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - s^2}}{a - \sqrt{a^2 - s^2}} = b\sqrt{a^2 - s^2} - \frac{b}{a} s^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - s^2}}{|s|}
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались табличным интегралом (A.2). Окончательно

$$R[f](s, \varphi) = \begin{cases} b\sqrt{a^2 - s^2} - \frac{b}{a} s^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - s^2}}{|s|}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases} \quad (6)$$

На следующем рисунке слева показана исходная функция при $a = 2, b = 3$, а справа – ее преобразование Радона $R[f](s, \varphi)$.



□

Из соображений, приведенных в примерах 1 – 4, следует

Лемма 1. Для произвольно заданной функции $f(x, y)$ внутри единичного круга, и равной нулю снаружи него, ПР вычисляется по формуле

$$R[f](s, \varphi) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, s \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) dt, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}.$$

□

Из соображений, приведенных в примере 1, следует

Лемма 2. Пусть дано неявное уравнение границы выпуклой области $F(x, y) = 0$.

Заменим в неявном уравнении x и y их представлением (1) и найдем значения $t_{1,2}(s, \varphi)$, являющиеся корнями уравнения

$$F(s \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, s \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) = 0$$

Тогда ПР ХФ такой области будет вычисляться по формуле

$$R[\chi](s, \varphi) = t_2(s, \varphi) - t_1(s, \varphi).$$

Действительно, любая прямая пересекает выпуклую область только в двух точках, поэтому будет только два корня. Преобразование Радона характеристической функции этой области будет вычисляться по формуле (1.1)

$$R[\chi](s, \varphi) = \int_L \chi(x, y) d\ell = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1 = t_2(s, \varphi) - t_1(s, \varphi)$$

□

Также из предыдущего ясно, что если функция $f(x, y)$ финитная, например, отлична от нуля в области D , целиком содержащейся в некотором «центрированном» круге радиуса M , то функция $R[f](s, \varphi)$ будет отлична от нуля только в полосе $|s| < M$. Действительно, любая прямая на плоскости x, y с радоновской координатой $|s| > M$ не пересекается с областью D и, следовательно, интеграл по отрезку ее пересечения с D будет равен нулю.

3.3 Свойства преобразования Радона

1. Преобразование Радона линейно. Это значит, что если есть две функции f_1 и f_2 и константы a_1 и a_2 , то

$$R[a_1 f_1 + a_2 f_2](s, \varphi) = a_1 R[f_1](s, \varphi) + a_2 R[f_2](s, \varphi)$$

Это следует из линейности операции интегрирования в определении (1.1).

2. Имеет место *формула подобия*

$$R[f(ax, ay)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x, y)](as, \varphi). \quad (1)$$

Действительно

$$\begin{aligned} R[f(ax, ay)](s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a(s \cos \varphi - \tau \sin \varphi), a(s \sin \varphi + \tau \cos \varphi)) d\tau = \\ &= |as = \zeta, a\tau = t| = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta \cos \varphi - t \sin \varphi, \zeta \sin \varphi + t \cos \varphi) \frac{dt}{|a|} = \\ &= \frac{1}{|a|} R[f(x, y)](\zeta, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x, y)](as, \varphi) \end{aligned}$$

Заметим, что формула (1) связывает преобразование Радона двух разных функций $f(x, y)$ и $g(x, y) = f(ax, ay)$. В то время как формула (1.4) $R[f(x, y)](s, \varphi) = R[f(x, y)](-s, \varphi + \pi)$ связывает ПР одной и той же функции.

□

3. *Формула поворота.* Преобразование Радона функции $g(x, y)$, полученной поворотом на угол α из функции $f(x, y)$, вычисляется по формуле

$$R[g(x, y)](s, \varphi) = R[f(x, y)](s, \varphi - \alpha).$$

Доказательство. Действительно $g(x, y) = f(x', y')$, где $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ (см. обозначения на Рис.1).

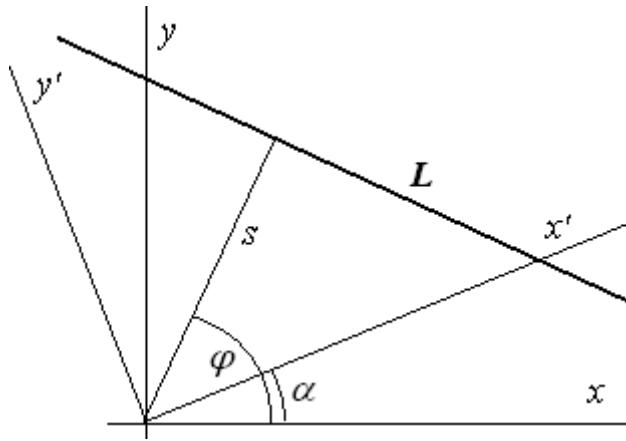


Рис. 1 К выводу формулы поворота.

Расстояние s прямой L до начала координат одинаковое в обеих системах координат (x, y) и (x', y') , а вектор нормали к прямой в системе (x', y') образует угол с осью x' равный $\varphi - \alpha$. Тогда из (1.3) имеем

$$x' = s \cos(\varphi - \alpha) - t \sin(\varphi - \alpha) \text{ и } y' = s \sin(\varphi - \alpha) + t \cos(\varphi - \alpha).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} R[f(x', y')](s, \varphi) &= \int_L f(x', y') dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos(\varphi - \alpha) - t \sin(\varphi - \alpha), s \sin(\varphi - \alpha) + t \cos(\varphi - \alpha)) dt = \\ &= R[f(x, y)](s, \varphi - \alpha) \end{aligned}$$

Т.е. для матрицы $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ поворота на угол α имеем

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = R[f(\mathbf{x})](s, \varphi - \alpha) \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x, y)$.

□

4. *Формула сдвига.* Пусть для функции $f(x, y)$ ПР известно, т.е. функция $R[f](s, \varphi)$ задана. Функция $f(x - x_0, y - y_0)$ получается из $f(x, y)$ сдвигом на вектор $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$. Введем координаты (x', y') , связанные с (x, y) соотношениями $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ (см. рис. 2).

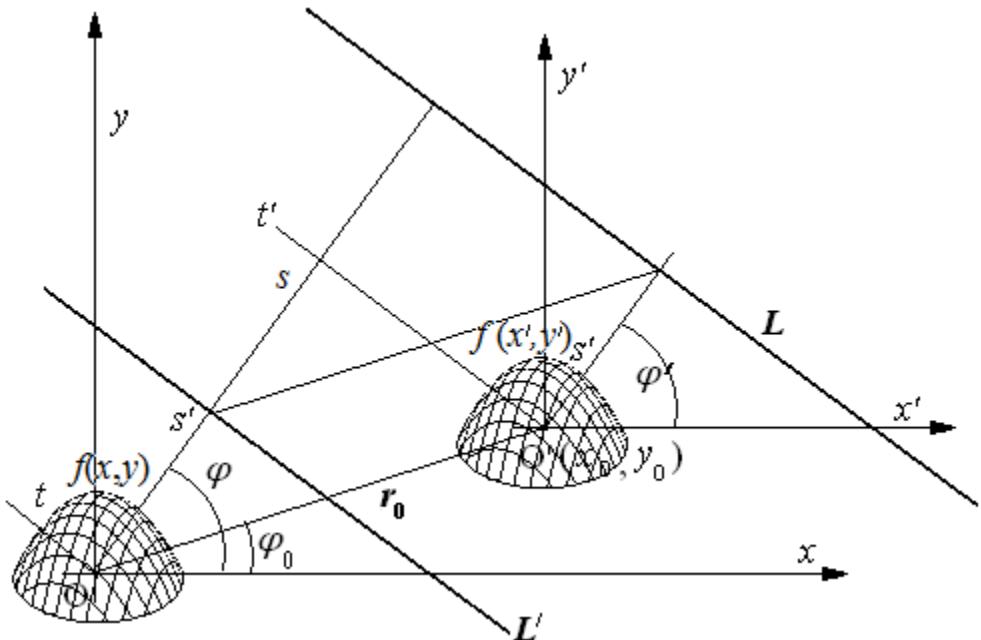


Рис. 2 К выводу формулы сдвига.

Поскольку $f(x - x_0, y - y_0) = f(x', y')$ и $s' = s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, то мы получаем

$$\begin{aligned}
 R[f(x - x_0, y - y_0)](s, \varphi) &= \int_L f(x', y') d t = \int_{-\infty}^{\infty} f(s' \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, s' \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) d t = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f((s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos \varphi - \sin \varphi \cdot t, (s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin \varphi + \cos \varphi \cdot t) d t = \\
 &= R[f(x, y)](s - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \varphi)
 \end{aligned}$$

Но $r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = r_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi + r_0 \sin \varphi_0 \sin \varphi = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi$. Поэтому

$$R[f(x - x_0, y - y_0)](s, \varphi) = R[f(x, y)](s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi) \quad (3)$$

Последнюю формулу можно записать в виде $R[f(x - x_0, y - y_0)](s, \varphi) = R[f(x, y)](s - s_0, \varphi)$, где $s_0 = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi$. Это означает, что смещение функции в пространственной области приводит к сдвигу «проекции» вдоль направления s на величину $s_0(\varphi)$, зависящую от угла.

Аналогичное свойство имеет место в m – мерном случае. Пусть дана функция $f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)$. Ее преобразованием Радона будет

$$\begin{aligned}
 R[f(\mathbf{x} - \mathbf{a})](s, \mathbf{n}) &= \int f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{x} = | \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a} | = \\
 &= \int f(\mathbf{y}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{a}) - (\mathbf{n}, \mathbf{y})) d \mathbf{y} = R[f](s - (\mathbf{n}, \mathbf{a}), \mathbf{n})
 \end{aligned} \quad (4)$$

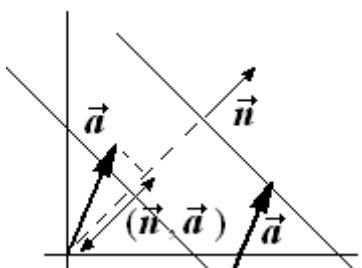


Рис. 3

Из рис. 3 видно, что сдвигка (n, a) равна проекции вектора сдвига a на направление единичного вектора n нормали к гиперплоскости/прямой. Для функций двух переменных формула (4) совпадает с (3).

Замечание. Пусть функция $F(x, y)$ получена сдвигом из некоторой осесимметричной функции $f(\sqrt{x^2 + y^2})$, т.е. $F(x, y) = f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$. Тогда

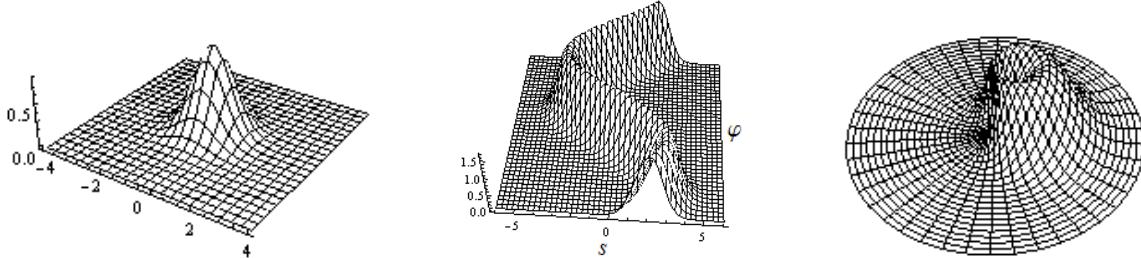
$$\begin{aligned} R[F(x, y)](s, \varphi) &= R[f(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})](s, \varphi) = \\ &= R[f(\sqrt{x^2 + y^2})](s - a \cos \varphi - b \sin \varphi) = \Theta(s - a \cos \varphi - b \sin \varphi) \end{aligned}$$

Т.о., если ПР некоторой функции $F(x, y)$ представляется выражением вида $\Theta(s - a \cos \varphi - b \sin \varphi)$, то это значит, что она получена сдвигом на вектор $\vec{a} = (a, b)$ из некоторой осесимметричной функции $\tilde{f}(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, ПР которой имело вид $\Theta(s)$, т.е. имело место $R[\tilde{f}](s) = \Theta(s)$.

Пример 1. Вычислим ПР функции $f(x, y) = \exp(-(x-a)^2 - (y-b)^2)$. ПР функции $\exp(-x^2 - y^2)$ было вычислено нами в примере 1.1. Оно равнялось $R[\exp(-x^2 - y^2)] = \sqrt{\pi} e^{-s^2}$ (см. формулу (1.5)). Тогда из (3) получаем

$$R[\exp(-(x-a)^2 - (y-b)^2)](s, \varphi) = \sqrt{\pi} \exp(-(s - a \cos \varphi - b \sin \varphi)^2)$$

На следующем рисунке слева показан график функции $\exp(-x^2 - y^2)$. Если аргументы s и φ рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то радоновский образ $f(x, y)$ при $a=1, b=1$ будет иметь вид, показанный на следующем рисунке в середине. Если аргументы s и φ рассматривать как полярные координаты на плоскости, то радоновский образ $f(x, y)$ будет иметь вид, показанный справа.



Последний график построен с использованием того же выражения $R(s, \varphi)$, которое рассматривается как функция $z = R(s, \varphi)$ в цилиндрической системе координат (s, φ, z) . □

5. Пусть для переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ дано некоторое линейное преобразование $A \mathbf{x} = \mathbf{y}$ или $y_k = \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $\det(A) \neq 0$. В определении ПР (1.11) сделаем замену $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{y}$ и $d\mathbf{x} = d\mathbf{y} / |\det(A)|$. Тогда

$$\begin{aligned}
R[f(A \mathbf{x})](s, \mathbf{n}) &= \int f(A \mathbf{x}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{x} = \frac{1}{|\det(A)|} \int f(\mathbf{y}) \delta(s - (\mathbf{n}, A^{-1} \mathbf{y})) d \mathbf{y} = \\
&= \frac{1}{|\det(A)|} \int f(\mathbf{y}) \delta(s - ((A^{-1})^T \mathbf{n}, \mathbf{y})) d \mathbf{y},
\end{aligned}$$

где индекс T обозначает транспонирование матрицы и мы учли, что для вещественной матрицы A сопряженная матрица A^* , обладающая свойством $(\mathbf{y}, A \mathbf{x}) = (A^* \mathbf{y}, \mathbf{x})$, совпадает с транспонированной $A^* = A^T$.

Обозначим через $n = |\mathbf{n}'| = |(A^{-1})^T \mathbf{n}|$ длину неединичного вектора $\mathbf{n}' = (A^{-1})^T \mathbf{n}$. Нам нужно его нормировать; обозначим единичный вектор $\mathbf{n}'' = (A^{-1})^T \mathbf{n} / n$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
R[f(A \mathbf{x})](s, \mathbf{n}) &= \frac{1}{|\det A|} \int f(\mathbf{y}) \delta\left(n \cdot \frac{s}{n} - (\mathbf{n}'', \mathbf{y})\right) d \mathbf{y} = \\
&= \frac{1}{n |\det A|} \int f(\mathbf{y}) \delta\left(\frac{s}{n} - (\mathbf{n}'', \mathbf{y})\right) d \mathbf{y}
\end{aligned}$$

или

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \mathbf{n}) = \frac{1}{n \cdot |\det A|} R[f(\mathbf{x})]\left(\frac{s}{n}, \mathbf{n}''\right), \quad (5)$$

где $n = |(A^{-1})^T \mathbf{n}|$, $\mathbf{n}'' = \frac{(A^{-1})^T \mathbf{n}}{n}$ и $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$.

В двумерном случае можно перейти к «угловой» форме $R(s, \varphi)$ записи преобразования Радона. Имеем

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \\
(A^{-1})^T \mathbf{n} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi \\ -a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi \end{pmatrix} \\
n &= \frac{1}{|\det A|} D, \text{ где } D = \sqrt{(a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi)^2 + (-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi)^2}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Далее

$$\mathbf{n}'' = \frac{(A^{-1})^T \mathbf{n}}{n} = \frac{1}{n \det A} \begin{pmatrix} a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi \\ -a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm D} \begin{pmatrix} a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi \\ -a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

где мы выбираем + (плюс), если $\det A > 0$ и минус в противном случае. Учитывая, что $\mathbf{n}'' = (\cos \varphi', \sin \varphi')$, получаем

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})]\left(\frac{s \cdot |\det A|}{D}, \varphi'\right) \quad (7)$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}$ угол, определяемый из значений своего косинуса и синуса (без знака \pm)

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{1}{D} (a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi) \quad \text{и} \quad \sin \tilde{\varphi} = \frac{1}{D} (-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi) \quad (8)$$

Тогда $\cos \varphi' = \text{sign}(\det A) \cdot \cos \tilde{\varphi}$ и $\sin \varphi' = \text{sign}(\det A) \cdot \sin \tilde{\varphi}$. При $\det A > 0$ можно считать, что $\varphi' = \tilde{\varphi}$, а при $\det A < 0$, что $\varphi' = \pi + \tilde{\varphi}$. В первом случае (7) можно записать в виде

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(\frac{s \cdot \det A}{D}, \tilde{\varphi} \right) \quad (9)$$

Во втором случае, когда $\det A < 0$, правая часть (7), с учетом (1.4), принимает вид

$$\frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(\frac{s \cdot |\det A|}{D}, \pi + \tilde{\varphi} \right) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(-\frac{s \cdot |\det A|}{D}, \tilde{\varphi} \right) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(\frac{s \cdot \det A}{D}, \tilde{\varphi} \right)$$

и мы снова приходим к виду (9).

Таким образом, ПР функции $R[f(A \mathbf{x})]$ вычисляется через ПР $R[f(\mathbf{x})]$ по формуле (9), где D определяется из (6), а $\tilde{\varphi}$ – из соотношений (8).

В векторной форме (9) имеет вид

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \mathbf{n}) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(\frac{s \cdot \det A}{D}, \tilde{\mathbf{n}} \right), \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{n}} = (\cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\varphi})$.

Преобразуем (9), используя представление (8) для $\tilde{\varphi}$. Пусть мы имеем

$$\cos \tilde{\varphi} = \alpha \quad \text{и} \quad \sin \tilde{\varphi} = \beta \quad (11)$$

Рассмотрим все возможные значения знаков косинуса и синуса угла $\tilde{\varphi}$.

В случае $\alpha > 0, \beta > 0$ из (11) следует $0 < \tilde{\varphi} < \pi/2$ и поэтому $\tilde{\varphi} = \text{Arcctg}(\alpha/\beta)$, т.к. главное значение функции арккотангенс находится в диапазоне $[0, \pi]$.

В случае $\alpha < 0, \beta > 0$ следует, что $\pi/2 < \tilde{\varphi} < \pi$ и из (11) также следует $\tilde{\varphi} = \text{Arcctg}(\alpha/\beta)$.

В случае $\alpha < 0, \beta < 0$ из (11) следует $\pi < \tilde{\varphi} < 3\pi/2$ и, следовательно, $\tilde{\varphi} = \pi + \text{Arcctg}(\alpha/\beta)$.

В случае $\alpha > 0, \beta < 0$ из (11) следует $3\pi/2 < \tilde{\varphi} < 2\pi$ и также получаем $\tilde{\varphi} = \pi + \text{Arcctg}(\alpha/\beta)$.

В первых двух случаях в (9) угол $\tilde{\varphi}$ мы можем заменить на $\text{Arcctg}(\alpha/\beta)$, где Arcctg обозначает главное значение функции арккотангенс с интервалом значений из диапазона $[0, \pi]$. В третьем и четвертом случае ($\beta < 0$) в правой части (9) мы должны положить $R[f] \left(\frac{s \cdot \det A}{D}, \pi + \text{Arcctg}(\alpha/\beta) \right)$. Но из (1.4) следует $R(s, \varphi + \pi) = R(-s, \varphi)$. Поэтому правую часть (9) можно представить в виде $R[f] \left(-\frac{s \cdot \det A}{D}, \text{Arcctg}(\alpha/\beta) \right)$. Все случаи можно представить одной формулой

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(\mathbf{x})] \left(\operatorname{sign}(\beta) \frac{s \cdot \det A}{D}, \operatorname{Arcctg}(\alpha / \beta) \right)$$

или

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = \frac{1}{D} \times \\ \times R[f(\mathbf{x})] \left(\operatorname{sign}(-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi) \frac{s \cdot \det A}{D}, \operatorname{Arcctg} \left(\frac{a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi}{-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi} \right) \right) \quad (12)$$

Отметим, что функцию арккотангенс мы выбрали потому, что ее главное значение лежит в интервале от 0 до π , что соответствует диапазону угла «сканирования» в компьютерной томографии. Такой же диапазон главного значения имеет функция арккосинус. Ниже мы рассмотрим ее использование в частном случае, когда матрица A диагональная.

Замечание. В некоторых источниках значение функции арккотангенс выбирают в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, например, так принято в пакете *Mathematica*. В таком случае последняя формула требует изменения. Однако, для использования (12) можно создать функцию арккотангенс пользователя, которая будет возвращать значение в требуемом (12) диапазоне.

Рассмотрим частные случаи формулы (9).

1⁰. *Преобразование поворота.* Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

поворота на угол α . Тогда

$$\begin{aligned} a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi &= \cos \alpha \cos \varphi - (-\sin \alpha) \sin \varphi = \cos(\varphi - \alpha) \\ -a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi &= -\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi = \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned}$$

и $\det A = 1$, $D = 1$. Тогда формулы (8) дают

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\varphi} &= \frac{1}{D} (a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi) = \cos(\varphi - \alpha), \\ \sin \tilde{\varphi} &= \frac{1}{D} (-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi) = \sin(\varphi - \alpha) \end{aligned}$$

т.е. $\tilde{\varphi} = \varphi - \alpha$. Окончательно (9) приводит к (2)

$$R[f(A \mathbf{x})](s, \varphi) = R[f(\mathbf{x})](s, \varphi - \alpha).$$

2⁰. *Преобразование подобия.* Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ матрица растяжения/сжатия.

Тогда $\det A = a^2$ и $a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi = a \cos \varphi$, $-a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi = a \sin \varphi$.

Отсюда $D = |a|$ и формулы (8) дают

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{a}{|a|} \cos \varphi, \quad \sin \tilde{\varphi} = \frac{a}{|a|} \sin \varphi.$$

Тогда из (9) получаем

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x)]\left(\frac{s \cdot a^2}{|a|}, \tilde{\varphi}\right) = \frac{1}{|a|} R[f(x)](s \cdot |a|, \tilde{\varphi})$$

Но при $a > 0$ имеем $\tilde{\varphi} = \varphi$, а при $a < 0$ имеем $\tilde{\varphi} = \pi + \varphi$. В случае $a > 0$ мы сразу получаем

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x)](as, \varphi)$$

Во втором случае при $a < 0$, учитывая (1.4), получаем

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x)](s \cdot |a|, \pi + \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x)](-s \cdot |a|, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x)](as, \varphi)$$

Т.о. в обоих случаях приходим к (1)

$$R[f(ax, ay)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x, y)](as, \varphi)$$

З⁰. Пусть дана диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Тогда $\det(A) = ab$. Далее

$$a_{22} \cos \varphi - a_{21} \sin \varphi = b \cos \varphi, \quad -a_{12} \cos \varphi + a_{11} \sin \varphi = a \sin \varphi$$

и, следовательно, $D = \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}$. Тогда формулы (8) дают

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{b}{D} \cos \varphi, \quad \sin \tilde{\varphi} = \frac{a}{D} \sin \varphi.$$

Обозначим $\hat{\varphi} = \arccos\left(\frac{b}{D} \cos \varphi\right)$. Поскольку $0 \leq \varphi < \pi$, то при $a > 0$ будет

$\sin \tilde{\varphi} > 0$ и можно считать, что $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}$. При $a < 0$ будет $\sin \tilde{\varphi} < 0$ и мы должны положить $\tilde{\varphi} = 2\pi - \hat{\varphi}$. Далее, из (9) имеем

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\frac{ab}{D} s, \tilde{\varphi}\right)$$

При $a < 0$ эта формула дает

$$\begin{aligned} R[f(Ax)](s, \varphi) &= \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\frac{ab}{D} s, 2\pi - \hat{\varphi}\right) = \\ &= \frac{1}{D} R[f(x)]\left(-\frac{ab}{D} s, \pi - \hat{\varphi}\right) = \frac{1}{D} R[f(x)]\left(-\frac{ab}{D} s, \arccos\left(-\frac{b}{D} \cos \varphi\right)\right) = \\ &= \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\frac{|a|b}{D} s, \arccos\left(\operatorname{sign}(a) \frac{b}{D} \cos \varphi\right)\right) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тождество $R(s, \varphi + \pi) = R(-s, \varphi)$, которое является другой формой записи свойства (1.4), и тождество $\pi - \arccos \gamma = \arccos(-\gamma)$.

При $a > 0$ мы имеем

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\frac{ab}{D} s, \arccos\left(\frac{b}{D} \cos \varphi\right)\right).$$

В обоих случаях мы можем записать

$$R[f(ax, by)](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x, y)]\left(\frac{|a|b}{D}s, \arccos\left(\operatorname{sign}(a)\frac{b}{D}\cos\varphi\right)\right), \quad (13)$$

где $D = \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}$.

Формула (12) в нашем случае принимает вид

$$R[f(Ax)](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\operatorname{sign}(a \sin \varphi)\frac{s \cdot a}{D}, \operatorname{Arcctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi\right)\right),$$

Учитывая, что $0 \leq \varphi < \pi$, получаем

$$\begin{aligned} R[f(Ax)](s, \varphi) &= \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\operatorname{sign}(a)\frac{s \cdot a}{D}, \operatorname{Arcctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi\right)\right) = \\ &= \frac{1}{D} R[f(x)]\left(\frac{s \cdot |a|b}{D}, \operatorname{Arcctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi\right)\right) \end{aligned} \quad (14)$$

В действительности формулы (13) и (14) представляют одно и то же решение,

поскольку из тождества $\arccos x = \operatorname{Arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ можно вывести равенство

$$\arccos\left(\operatorname{sign}(a)\frac{b}{D}\cos\varphi\right) = \operatorname{Arcctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi\right)$$

Действительно, если положить $x = \operatorname{sign}(a)\frac{b}{D}\cos\varphi$, то

$$1 - x^2 = 1 - \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{D^2} = \frac{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) - b^2 \cos^2 \varphi}{D^2} = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{D^2}$$

Далее, учитывая $0 \leq \varphi < \pi$, имеем

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sign}(a)\frac{b}{D}\cos\varphi}{\frac{|a|\sin\varphi}{D}} = \frac{\operatorname{sign}(a)b\cos\varphi}{|a|\sin\varphi} = \frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$$

и мы получаем требуемое равенство.

В частности, при $a = b$ имеем $D = |a|$ и (13) дает

$$R[f(ax, ay)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R(a s, \arccos(\cos\varphi)) = \frac{1}{|a|} R(a s, \varphi),$$

поскольку при $0 \leq \varphi < \pi$ имеет место равенство $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$. И мы снова приходим к (1).

При растяжении функции в α раз по горизонтальной оси и в β раз по вертикальной нужно рассматривать преобразование $f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right)$. В этом случае в

формуле (13) мы должны выполнить замену $a = \frac{1}{\alpha}$, $b = \frac{1}{\beta}$. Тогда

$$D = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\beta^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\alpha^2}} = \frac{1}{|\alpha\beta|} \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\Delta}{|\alpha\beta|}$$

и

$$R\left[f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right)\right](s, \varphi) = \frac{|\alpha \beta|}{\Delta} R[f(x, y)]\left(\frac{\operatorname{sign}(\beta)}{\Delta} s, \arccos\left(\operatorname{sign}(\beta) \frac{\alpha}{\Delta} \cos \varphi\right)\right), \quad (15)$$

где $\Delta = \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}$.

Аналогично, (14) дает

$$R\left[f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right)\right](s, \varphi) = \frac{|\alpha \beta|}{\Delta} R[f(x, y)]\left(\frac{\operatorname{sign}(\beta)}{\Delta} s, \operatorname{Arcctg}\left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{ctg} \varphi\right)\right) \quad (16)$$

В частном случае, когда функция $f(x, y)$ осесимметричная, т.е. имеет вид $f(x, y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$, ее ПР не зависит от второго аргумента и четно по первому (не зависит от знака первого аргумента). Поэтому (15) примет вид

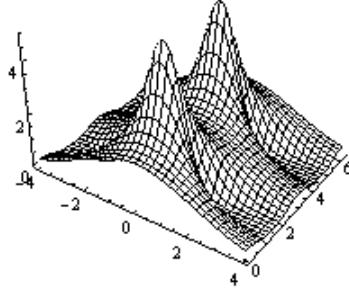
$$R\left[f\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right)\right](s, \varphi) = \frac{|\alpha \beta|}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}} R[f(x, y)]\left(\frac{|s|}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}}\right) \quad (17)$$

Пример 2. Вычислим преобразование Радона функции $g(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$. Исходной функцией является $f(x, y) = f(x) = e^{-x^2 - y^2}$,

для которой $R[e^{-x^2 - y^2}] = \sqrt{\pi} e^{-s^2}$ (см. ф. (1.5)). Из (17) сразу получаем

$$R\left[\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right](s, \varphi) = \frac{|ab|\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \exp\left(-\frac{s^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\right)$$

График этой функции показан на следующем рисунке



Пример 3. Вычислим преобразование Радона характеристической функции (ХФ) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Она получается вытягиванием в a и b раз вдоль осей ПР характеристической функции $\chi(r)$ единичного круга

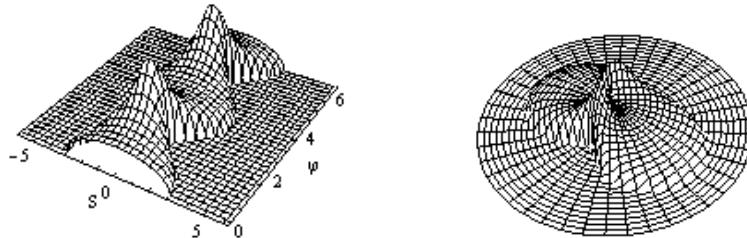
$$R[\chi](s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-s^2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

полученное нами в примере (1.4). Тогда, в соответствии с (17) получим

$$R(s, \varphi) = \frac{|a b|}{\Delta} R[\chi] \left(\frac{|s|}{\Delta} \right) = \begin{cases} \frac{2|a b|}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{s^2}{\Delta^2}}, & \frac{|s|}{\Delta} < 1 \\ 0, & \frac{|s|}{\Delta} \geq 1 \end{cases}$$

где $\Delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. Это полностью соответствует результату (2.4) примера 2.1 предыдущего параграфа.

Если аргументы s и φ рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то радоновский образ $R(s, \varphi)$ при $a=3, b=1$ будет иметь вид, показанный на следующем рисунке слева. Если аргументы s и φ рассматривать как полярные координаты на плоскости, то саму функцию $R(s, \varphi)$ следует рассматривать заданной в цилиндрической системе координат и ее график будет иметь вид, показанный справа.



Пример 4. Найдем преобразование Радона функции

$$g(x, y) = \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b^2} \right\}.$$

Для функции $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ ПР определяется по ф. (1.5) $R[f] = \sqrt{\pi} e^{-s^2}$. Но $g(x, y) = f\left(\frac{x - x_0}{b}, \frac{y - y_0}{b}\right)$. Тогда, используя последовательно свойства (1) и (3), получаем

$$\begin{aligned} R[g](s, \varphi) &= |b| R[f(x - x_0, y - y_0)] \left(\frac{s}{b}, \varphi \right) = |b| R[f(x, y)] \left(\frac{s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi}{b} \right) = \\ &= |b| \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2}{b^2} \right]. \end{aligned}$$

□

6. Вычислим ПР частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функции $f(x, y)$. Имеем

$$R \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] (s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(s, t) dt,$$

где $\tilde{f}(s, t) = f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi)$ некоторая функция двух переменных (s, t) . Но $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(s, t)$ является производной по направлению оси x .

Напомним, что производная по направлению вектора $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ определяется следующим образом

$$\frac{d f(s, t)}{d \lambda} = \frac{d}{d \lambda} f(s + \lambda \cos \alpha, t + \lambda \sin \alpha) \Big|_{\lambda=0} = f'_s \cos \alpha + f'_t \sin \alpha$$

Направленный вдоль оси x единичный вектор \mathbf{n}_x , в системе координат (s, t) равен $\mathbf{n}_x = (\cos \varphi, -\sin \varphi)$ (см. рис. 4).

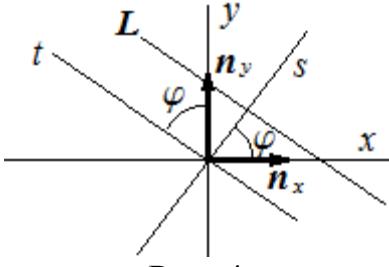


Рис. 4

Поэтому $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(s, t) = \tilde{f}'_s \cos \varphi - \tilde{f}'_t \sin \varphi$. То же получается, если применить

формулу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(s, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \begin{cases} s = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ t = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \cdot \sin \varphi$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} R\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right](s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(s, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}'_s \cos \varphi - \tilde{f}'_t \sin \varphi) dt = \\ &= \cos \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'_s dt - \sin \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'_t dt = \cos \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}(s, t) dt, \end{aligned}$$

поскольку второй интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'_t dt = \tilde{f}(+\infty) - \tilde{f}(-\infty) = 0$ равен нулю. Далее

имеем

$$\begin{aligned} R\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right](s, \varphi) &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s, t) dt = \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} R[f](s, \varphi) \end{aligned}$$

Точно также получаем

$$R\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right](s, \varphi) = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial s} R[f](s, \varphi)$$

ПР частных производных функции m переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$ выражаются аналогично. Действительно

$$\begin{aligned} R\left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right](s, \mathbf{n}) &= \int \frac{\partial f}{\partial x_k} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{x} = - \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{x} = \\ &= -(-n_k) \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial s} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{x} = \end{aligned}$$

$$= n_k \frac{\partial}{\partial s} \int f(\mathbf{x}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d\mathbf{x} = n_k \frac{\partial}{\partial s} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) \quad (18)$$

Здесь мы использовали свойство производных δ – функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - a) d\mathbf{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f(x) \delta^{(n-1)}(x - a) d\mathbf{x}$$

которое при $n=1$ имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - a) d\mathbf{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \delta(x - a) d\mathbf{x}.$$

В общем случае (18) можно переписать в виде

$$R \left[\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right] (s, \mathbf{n}) = (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial s} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) \quad (19)$$

Аналогично (18) имеем

$$R \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right] (s, \mathbf{n}) = n_i n_k \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) \quad (20)$$

Действительно,

$$R \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right] = R \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right] = n_i \frac{\partial}{\partial s} R \left[\frac{\partial f}{\partial x_k} \right] = n_i \frac{\partial}{\partial s} \left(n_k \frac{\partial}{\partial s} R[f] \right) = n_i n_k \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f].$$

В более общем случае аналогом (20) является следующая формула

$$R \left[P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(\mathbf{x}) \right] (s, \mathbf{n}) = P(\mathbf{n}) \frac{\partial^k}{\partial s^k} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}), \quad (21)$$

где $P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2, \dots)$ – однородный многочлен степени k с постоянными коэффициентами.

Замечание 1. Поскольку $R[f'_x] = n_1 R'_s[f]$, $R[f'_y] = n_2 R'_s[f]$ и $n_1^2 + n_2^2 = 1$, то имеем

$$(R[f'_x])^2 + (R[f'_y])^2 = (n_1 R'_s[f])^2 + (n_2 R'_s[f])^2 = (n_1^2 + n_2^2) (R'_s[f])^2 = (R'_s[f])^2.$$

Аналогично

$$R[f''_{xx} + f''_{yy}] = R[f''_{xx}] + R[f''_{yy}] = n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] + n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] = \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f]$$

Пример 5. Найдем преобразование Радона функции $x e^{-x^2-y^2}$. Обозначим

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ и $f_1(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = -2x e^{-x^2-y^2}$. Из (18) и, используя (1.5), имеем

$$R[f_1] = R \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] = n_1 \frac{\partial}{\partial s} R[f] = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} (\sqrt{\pi} e^{-s^2}) = \sqrt{\pi} \cos \varphi (-2s) e^{-s^2}$$

В силу линейности преобразования Радона, получаем

$$R[x e^{-x^2-y^2}] = \sqrt{\pi} \cos \varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$$

Аналогично имеем

$$R[y e^{-x^2-y^2}] = \sqrt{\pi} \sin \varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$$

Пример 6. Найдем ПР функции $g(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$. Обозначим $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Поскольку $g(x, y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, то из (19) имеем

$$\begin{aligned} R[g] &= -\frac{1}{2} \cdot R\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right] = -\frac{1}{2} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial s} R[f] = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi) \sqrt{\pi} (-2s) e^{-s^2} = \sqrt{\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) s \cdot e^{-s^2} \end{aligned}$$

Заметим, что в силу линейности ПР можно было сложить две результирующие формулы предыдущего примера.

Пример 7. Найдем преобразование Радона функции $g(x, y) = xy e^{-x^2-y^2}$.

Обозначим $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Поскольку $g(x, y) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, то из (20) имеем

$$\begin{aligned} R[g] &= \frac{1}{4} \cdot R\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right] = \frac{1}{4} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] = \frac{1}{4} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\sqrt{\pi} e^{-s^2}) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi (4s^2 - 2) e^{-s^2} = \sqrt{\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \left(s^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-s^2} \end{aligned}$$

Пример 8. Требуется найти преобразование Радона функции $(x^2 + y^2) e^{-a^2(x^2+y^2)}$.

Вначале вычислим преобразование Радона функции $g(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-x^2-y^2}$.

Обозначим $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Поскольку $g(x, y) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + f(x, y)$, то из

(21) имеем

$$\begin{aligned} R[g] &= \frac{1}{4} \cdot (R[f_{xx}] + R[f_{yy}]) + R[f] = \frac{1}{4} \cdot \left(n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] + n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] \right) + R[f] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (n_1^2 + n_2^2) \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] + R[f] = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[f] + R[f] = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\sqrt{\pi} e^{-s^2}) + (\sqrt{\pi} e^{-s^2}) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (-2 + 4s^2) e^{-s^2} + (\sqrt{\pi} e^{-s^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2s^2) e^{-s^2} \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (1), имеем

$$R[a^2(x^2 + y^2) e^{-a^2(x^2+y^2)}] = R[g(ax, ay)] = \frac{1}{|a|} R[g(x, y)](as) = \frac{1}{|a|} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2a^2 s^2) e^{-a^2 s^2}$$

Тогда

$$R[(x^2 + y^2) e^{-a^2(x^2+y^2)}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a^3|} (1 + 2a^2 s^2) e^{-a^2 s^2}.$$

7. Производную преобразования Радона $R(s, \mathbf{n})$ по одной из компонент n_k можно представить в виде

$$\frac{\partial R(s, \mathbf{n})}{\partial n_k} = \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_k} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

Используя равенство $\frac{\partial}{\partial n_k} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) = -x_k \frac{\partial}{\partial s} \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x}))$, последний интеграл

можно записать в виде

$$\frac{\partial R(s, \mathbf{n})}{\partial n_k} = -\frac{\partial}{\partial s} \int x_k f(\mathbf{x}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial n_k} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) = -\frac{\partial}{\partial s} R[x_k f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) \quad (22)$$

Для вторых производных имеет место аналогичное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial n_i \partial n_k} &= \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial R}{\partial n_k} \right) = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(-\frac{\partial}{\partial s} R[x_k f] \right) = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial n_i} R[x_k f] \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial}{\partial s} R[x_i x_k f] \right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} R[x_i x_k f] \end{aligned}$$

В общем случае аналогом (22) является утверждение: преобразование Радона $R_1(s, \mathbf{n})$ функции

$$f_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) f(\mathbf{x})$$

связано с преобразованием Радона $R(s, \mathbf{n})$ функции $f(\mathbf{x})$ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s} R_1(s, \mathbf{n}) = -\left(\mathbf{a}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \right) R(s, \mathbf{n}) \quad (23)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s} R \left[\left(\sum_{k=1}^m a_k x_k \right) f(\mathbf{x}) \right] (s, \mathbf{n}) = -\sum_k a_k \frac{\partial}{\partial n_k} R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) \quad (24)$$

В частности для двумерного ПР имеем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} R[f](s, \mathbf{n}) = \frac{\partial R[f]}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial R[f]}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial R[f]}{\partial n_1} (-\sin \varphi) + \frac{\partial R[f]}{\partial n_2} (\cos \varphi)$$

Учитывая (22) $\frac{\partial R[f]}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial s} R[x f(x, y)]$, $\frac{\partial R[f]}{\partial n_2} = -\frac{\partial}{\partial s} R[y f(x, y)]$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} R[f](s, \varphi) = \frac{\partial R[x f]}{\partial s} \sin \varphi - \frac{\partial R[y f]}{\partial s} \cos \varphi \quad (25)$$

Но из (18) следует

$$R \left[\frac{\partial}{\partial y} (x f(x, y)) \right] = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial s} R[x f(x, y)] \text{ и } R \left[\frac{\partial}{\partial x} (y f(x, y)) \right] = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s} R[y f(x, y)]$$

Подстановка в (25) дает

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} R[f](s, \varphi) = R[x f'_y](s, \varphi) - R[y f'_x](s, \varphi) \quad (26)$$

В частности, для осесимметричной функции $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$ имеем

$$f'_x = f'_r \cdot r'_x = f'_r \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f'_r \cdot \frac{x}{r} \text{ и } f'_y = f'_r \cdot r'_y = f'_r \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f'_r \cdot \frac{y}{r}$$

Подстановка этих выражений в (26) дает

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} R[f](s, \varphi) = R\left[x f'_r \cdot \frac{y}{r}\right] - R\left[y f'_r \cdot \frac{x}{r}\right] = 0,$$

что соответствует тому факту, что ПР осесимметричной функции не зависит от аргумента φ .

8. Преобразование Радона свертки.

Сверткой $f_1 * f_2$ функций двух переменных f_1 и f_2 называется интеграл

$$f(x, y) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x', y') f_2(x - x', y - y') d x' d y'$$

В векторных обозначениях это записывается так

$$f(\mathbf{x}) = f_1 * f_2 = \int f_1(\mathbf{y}) f_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d \mathbf{y}.$$

Лемма. Преобразование Радона $R[f_1 * f_2]$ свертки функций $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ есть свертка их преобразований Радона $R[f_1 * f_2] = R[f_1] * R[f_2]$, т.е

$$R[f_1 * f_2](s, \mathbf{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(t, \mathbf{n}) R_2(s - t, \mathbf{n}) d t, \quad (27)$$

где $R_1(s, \mathbf{n})$ и $R_2(s, \mathbf{n})$ – преобразования Радона функций $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$.

Действительно, преобразование Радона свертки по определению есть

$$R[f_1 * f_2](s, \mathbf{n}) = \int f_1(\mathbf{y}) f_2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{x})) d \mathbf{y} d \mathbf{x}$$

Изменим порядок интегрирования и сделаем замену переменных $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Получим

$$\begin{aligned} R[f_1 * f_2](s, \mathbf{n}) &= \int f_1(\mathbf{y}) f_2(\mathbf{z}) \delta(s - (\mathbf{n}, \mathbf{z}) - (\mathbf{n}, \mathbf{y})) d \mathbf{z} d \mathbf{y} = \\ &= \int f_1(\mathbf{y}) R_2(s - (\mathbf{n}, \mathbf{y}), \mathbf{n}) d \mathbf{y} \end{aligned}$$

Сведем интегрирование по \mathbf{y} к интегрированию по гиперплоскости $(\mathbf{n}, \mathbf{y}) = t$ и к интегрированию по t при фиксированном \mathbf{n} . Интегрирование $f_1(\mathbf{y})$ по гиперплоскости при фиксированном t дает $R_1(t, \mathbf{n})$, второй множитель принимает вид $R_2(s - t, \mathbf{n})$ и остается только интегрирование по t . В результате приходим к (27).

3.4 Дополнительные свойства

1⁰. Пусть дана функция $f(x,y)$ для которой ПР существует. И пусть она «обрезается» в области D_1 (т.е. дана $f_1(x,y)$, которая вне области равна нулю, а внутри совпадает с $f(x,y)$). Пусть дана другая область D_2 , для которой из $f(x,y)$ также построена «обрезанная» функция $f_2(x,y)$. Предположим, что мы вычислили ПР $R[f_1] = R_{D_1}[f](s, \varphi)$, $R[f_2] = R_{D_2}[f](s, \varphi)$ функций $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, а также ПР $R_{D_1 \cap D_2}[f](s, \varphi)$ функции f , «усеченной» по области пересечения областей D_1 и D_2 . Тогда имеют место равенства

$$R_{D_1 \cup D_2}[f](s, \varphi) = R_{D_1}[f](s, \varphi) + R_{D_2}[f](s, \varphi) - R_{D_1 \cap D_2}[f](s, \varphi) \quad (1)$$

$$R_{D_1 \setminus D_2}[f](s, \varphi) = R_{D_1}[f](s, \varphi) - R_{D_1 \cap D_2}[f](s, \varphi) \quad (2)$$

$$R_{D_2 \setminus D_1}[f](s, \varphi) = R_{D_2}[f](s, \varphi) + R_{D_1 \setminus D_2}[f](s, \varphi) \quad (3)$$

Для доказательства достаточно вспомнить, что ПР при фиксированных s и φ является интегралом по прямой для соответствующей функции.

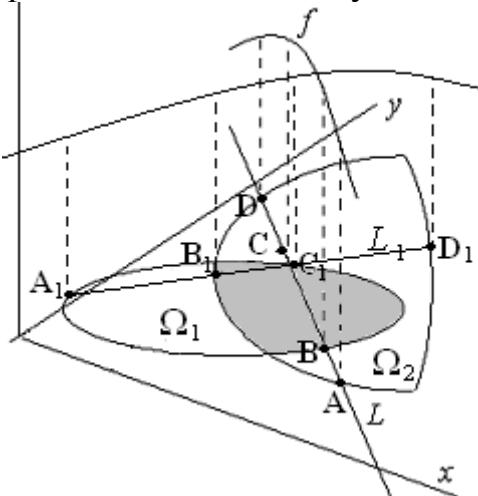


Рис.1 К вычислению преобразования Радона $R_{\Omega_1 \cup \Omega_2}[f](s, \varphi)$.

Например, $R_{\Omega_1}[f](s, \varphi)$ для прямой L_1 (при фиксированных s и φ) равен интегралу $\int_{A_1 C_1} f(x, y) d l$ (интеграл по отрезку $A_1 C_1$ функции $f(x, y)$) и $R_{\Omega_2}[f](s, \varphi)$ при тех же s и φ равен $\int_{B_1 D_1} f(x, y) d l$. Тогда ясно, что при тех же значениях s и φ имеем

$$\begin{aligned} R_{\Omega_1 \cup \Omega_2}[f](s, \varphi) &= \int_{A_1 D_1} f(x, y) d l = \int_{A_1 C_1} f(x, y) d l + \int_{C_1 D_1} f(x, y) d l = \\ &= \int_{A_1 C_1} f(x, y) d l + \int_{B_1 D_1} f(x, y) d l - \int_{B_1 C_1} f(x, y) d l = \\ &= R_{\Omega_1}[f](s, \varphi) + R_{\Omega_2}[f](s, \varphi) - R_{\Omega_1 \cap \Omega_2}[f](s, \varphi) \end{aligned}$$

Аналогично проверяются соотношения (1) – (3) для любого возможного расположения областей и прямых.

В частности, если пересечение областей пусто, т.е. $R_{D_1 \cap D_2}[f](s, \varphi) = 0$, то

$$R_{D_1 \cup D_2}[f](s, \varphi) = R_{D_1}[f](s, \varphi) + R_{D_2}[f](s, \varphi), \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset \quad (4)$$



Рис. 2 К вычислению преобразования Радона при $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

В формулах (1) – (4) следует следить за прямолинейными участками границ прилегающих областей. Если параметры s и φ будут соответствовать прямой с радоновскими координатами s_1, φ_1 , проходящей вдоль такого участка, то функция $R(s, \varphi)$ может удвоить свое значение для этих параметров (фактически пересечение областей происходит по отрезку, оно не пусто). Это значит, что значение функции в точке $R(s_1, \varphi_1)$ будет иметь скачок.

Формулы (1) – (4) дают возможность построить ПР функции над сложными областями. Например, если для некоторой функции $f(x, y)$ над каждым прямоугольником D_1 и D_2 по отдельности можно построить ПР, то можно построить ПР той же функции над следующими составными областями.

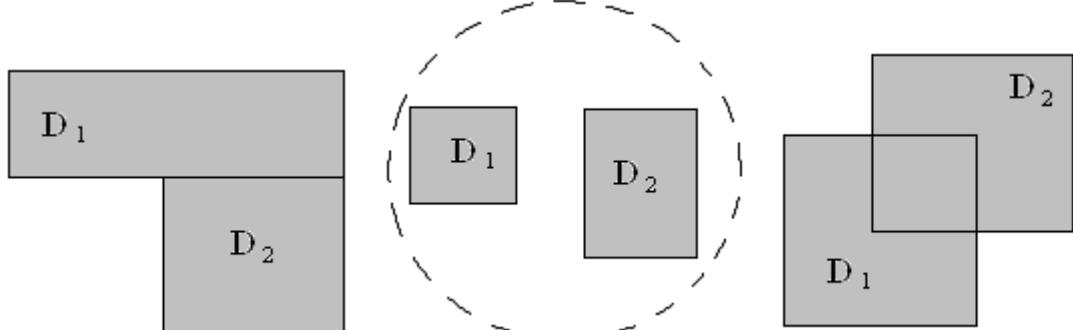


Рис. 3 Составные области

Для области $D_1 \cup D_2$, показанной на левом рисунке, нужно применить формулу (1), поскольку пересечение прямоугольников D_1 и D_2 не пусто (общей частью является отрезок). Значением $R_{D_1 \cap D_2}[f](s, \varphi)$ будет ПР функции по отрезку. Для области $D_1 \cup D_2$, показанной на среднем рисунке, можно применить формулу (4), поскольку пересечение прямоугольников D_1 и D_2 пусто. Для области, показанной на правом рисунке, нужно вычислять ПР функции над областями трех прямоугольников D_1, D_2 и $D_1 \cap D_2$.

Замечание. При численной реализации формул (1) – (3) следует помнить, что ПР функции на линии может не обратиться в ноль и, например, для объединения прямоугольников, показанного на предыдущем рисунке слева, сложение ПР характеристических функций может удвоить значение $R(s_0, \pi/2)$ для s_0 соответствующего общему отрезку на границе между прямоугольниками. В некоторых случаях надо считать, что у прямоугольников D_1 и D_2 есть пересечение по отрезку их общей границы, вычислять значение ПР для s соответствующего этому отрезку, и использовать формулу (1), считая что пересечением областей является отрезок.

Аналогично предыдущему можно построить ПР функции, заданной над набором областей (клеток) показанных на следующем рисунке, если ПР этой функции над каждым прямоугольником известно.

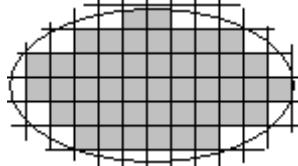


Рис. 4 К вычислению ПР кусочно – постоянной функции

2⁰. Пусть у функции 2-х переменных есть ось симметрии ОС (см. рис. 5 слева), которая образует угол α с осью X и проходит через начало координат. Тогда, если прямая АС определяется расстоянием s и углом φ , то положение симметричной относительно ОС прямой будет определяться расстоянием s и углом $2\alpha - \varphi$ и будет иметь место равенство

$$R[f](s, \varphi) = R[f](s, 2\alpha - \varphi) \quad (5)$$

Это легко понять из рисунка – значение функции $f(x, y)$ в симметричных точках прямых АС и ВС одинаковы и, следовательно, будут одинаковыми и интегралы вдоль этих прямых от функции $f(x, y)$, но это и означает выполнение соотношения (5).

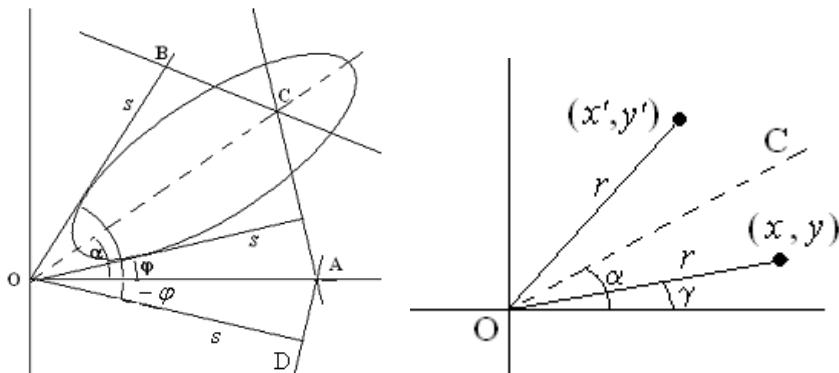


Рис. 5 К вычислению ПР функции $f(x, y)$, имеющей ось симметрии.

Формулу (5) можно вывести из формулы (3.5) следующим образом. Симметрия функции f относительно прямой ОС (см. рис. 5 справа) означает, что $f(x, y) = f(x', y')$, где $x = r \cos \gamma$, $y = r \sin \gamma$ и $x' = r \cos(2\alpha - \gamma)$, $y' = r \sin(2\alpha - \gamma)$.

Но это значит

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \gamma \cos 2\alpha + r \sin \gamma \sin 2\alpha = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y' &= r \cos \gamma \sin 2\alpha - r \sin \gamma \cos 2\alpha = x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha \end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Т.о. симметрия функции относительно оси означает выполнение равенства $f(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$. Для матрицы A имеем $\det A = -1$, $(A^{-1})^T = A^{-1} = A$,

$$(A^{-1})^T \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - \varphi) \\ \sin(2\alpha - \varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда $n = |(A^{-1})^T \mathbf{n}| = 1$ и

$$\mathbf{n}'' = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - \varphi) \\ \sin(2\alpha - \varphi) \end{pmatrix}$$

Подставляя это в формулу (3.5), получаем $R[f(A\mathbf{x})](s, \mathbf{n}) = R[f(\mathbf{x})](s, \mathbf{n}'')$ или

$$R[f(A\mathbf{x})](s, \varphi) = R[f(\mathbf{x})](s, 2\alpha - \varphi).$$

В силу условия $f(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x})$ приходим к равенству (5).

В частности, если ось симметрии совпадает с осью X , то $\alpha = 0$ и (5) принимает вид $R[f](s, \varphi) = R[f](s, -\varphi)$, т.е. ПР такой функции четно по аргументу φ .

Если ось симметрии совпадает с осью Y , то $\alpha = \pi/2$ и (5) принимает вид $R[f](s, \varphi) = R[f](s, \pi - \varphi)$. Если обозначить $\varphi = \pi/2 - \theta$, то это соотношение примет вид $R[f](s, \pi/2 - \theta) = R[f](s, \pi/2 + \theta)$, которое означает симметрию («четность») функции $R(s, \theta)$ относительно значения $\pi/2$.

Для осесимметричной функции угол α может быть любым. Это означает, что функция $R[f(\mathbf{x})](s, \varphi)$ при фиксированном s равна сама себе при любом значении второго аргумента, т.е. не зависит от φ .

Лемма 1. Четная функция одной переменной, симметричная относительно точки $x = L$ имеет период $2L$. Т.е., если функция удовлетворяет условиям

$$f(x) = f(-x), \quad f(L - x) = f(L + x),$$

то она удовлетворяет условию

$$f(x + 2L) = f(x).$$

Доказательство. Имеем следующую цепочку равенств

$$f(x + 2L) = f(L + (x + L)) = f(L - (x + L)) = f(-x) = f(x)$$

□

Лемма 2. Если функция 2-х переменных $f(x, y)$ имеет две оси симметрии: ось OX и прямую, проходящую через начало координат и образующую угол α с осью OX , то ее преобразование Радона $R[f(x, y)](s, \varphi)$ будет четной периодической по аргументу φ функцией с периодом 2α .

Доказательство. Пусть ОС – ось симметрии функции $f(x, y)$ (см. рис. 5 слева). Значение функции $f(x, y)$ в симметричных точках симметричных прямых АС и ВС одинаковы и, следовательно, будут одинаковыми и интегралы вдоль этих прямых от функции $f(x, y)$. Интегралы по симметричным относительно оси ОХ прямым АД и АС будут также равны. Но это означает, что для любого φ имеют место равенства

$$R[f](s, \varphi) = R[f](s, -\varphi) \quad (\text{симметрия относительно оси } X)$$

$$R[f](s, \varphi) = R[f](s, 2\alpha - \varphi) = R[f](s, \alpha + (\alpha - \varphi))$$

Обозначим $\alpha - \varphi = \theta$, тогда последнее равенство примет вид

$$R[f](s, \alpha - \theta) = R[f](s, \alpha + \theta).$$

При фиксированном s функция $R_s(\varphi) = R[f](s, \varphi)$, как функция одной переменной удовлетворяет двум условиям $R_s(\varphi) = R_s(-\varphi)$, $R_s(\alpha - \varphi) = R_s(\alpha + \varphi)$ и по лемме 1 имеет период 2α .

□

Замечание. Если функция $f(x, y)$ не осесимметричная и удовлетворяет условиям леммы 2, то угол α не может быть произвольным. Поскольку по определению ПР по второму аргументу всегда имеет период 2π , то в случае наличия у функции $f(x, y)$ двух осей симметрии, из которых одна является осью ОХ, должно выполняться условие $2\pi = n2\alpha$ (периоды должны быть кратными). Поэтому $\alpha = \pi/n$, где n – некоторое целое число, а ПР такой функции $R(s, \varphi)$ по второму аргументу будет иметь период $T = 2\alpha = 2\pi/n$.

Лемма 3. Для функции двух переменных, четной по каждой переменной в отдельности, т.е. удовлетворяющей условиям

$$f(-x, y) = f(x, y), \quad f(x, -y) = f(x, y)$$

преобразование Радона $R[f(x, y)](s, \varphi)$ является функцией четной по каждому из аргументов s и φ и периодической по второму аргументу с периодом π .

Доказательство. Функция, удовлетворяющая условиям четности по каждой переменной, имеет своими осями симметрии оси ОХ и ОY, которые ортогональны. По предыдущей лемме ее преобразование Радона $R[f(x, y)](s, \varphi)$ является четной периодической по второму аргументу функцией с периодом π .

Далее имеем следующую цепочку равенств

$$R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi) = R(-s, (\varphi + \pi) + \pi) = R(-s, \varphi)$$

Здесь первое равенство представляет тождество (1.4), второе – выражает периодичность с периодом π , третье – выражает периодичность с периодом 2π . Т.о. функция $R(s, \varphi)$ четна и по первому аргументу.

□

Поясним результат предыдущей леммы по-другому. Если функция $f(x, y)$ имеет координатные оси своими осями симметрии, то значение функции в симметричных точках одинаковое, например, в парах симметричных точек A_1, A_2 и B_1, B_2 . (см. рис. 6).

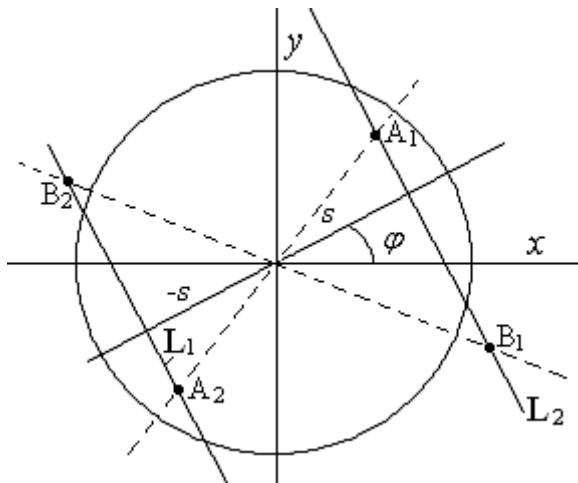


Рис. 6 К доказательству леммы 3.

Но тогда, очевидно, и интегралы по параллельным прямым L_1 и L_2 , расположенным по разные стороны на одинаковом расстоянии от начала координат, будут равны.. Это значит, что для таких функций имеет место равенство $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi)$. Поскольку всегда выполняется условие $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$, то $R(-s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$ или, в силу произвольности s , $R(s, \varphi) = R(s, \varphi + \pi)$.

Замечание 1. Лемму 3 можно доказать, используя формулу (3.13), если заметить, что условиям симметрии относительно осей

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y)$$

соответствуют равенства

$$f(x) = f(A_1 x) = f(A_2 x) = f(A_3 x)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда из (3.13), с учетом равенства $\arccos(-\cos\varphi) = \pi - \varphi$ справедливого при $0 \leq \varphi \leq \pi$, получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} R[f(x, -y)](s, \varphi) &= R[f(A_1 x)](s, \varphi) = R[f(x, y)](-s, \pi - \varphi) \\ R[f(-x, y)](s, \varphi) &= R[f(A_2 x)](s, \varphi) = R[f(x, y)](s, \pi - \varphi) \\ R[f(-x, -y)](s, \varphi) &= R[f(A_3 x)](s, \varphi) = R[f(x, y)](-s, \varphi) \end{aligned}$$

Т.о. мы получаем равенства

$$R(s, \varphi) = R(-s, \pi - \varphi) = R(s, \pi - \varphi) = R(-s, \varphi)$$

Отсюда с учетом (1.4) следуют утверждения леммы 3.

Замечание 2. ПР осесимметричной функции не зависит от угла φ , т.е. для функции $f(x, y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$ имеем $R[f(x, y)](s, \varphi) = R(s)$. Поскольку функции вида $\tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$ являются четными по обоим аргументам, то их ПР по лемме 3 будет четной по s функцией, т.е. $R(s) = R(-s)$.

Замечание 3. Функция двух переменных $f(x, y)$, удовлетворяющая условиям леммы 3, может быть построена из любой функции $h(x, y)$, определенной в первом квадранте, по формуле $f(x, y) = h(|x|, |y|)$.

3^0 . *Формулы продолжения.* Мы знаем, что ПР функции 2-х переменных общего вида удовлетворяет тождеству (1.4) $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$ и по второму аргументу имеет период 2π .

Лемма 4. Пусть в полосе $0 \leq \varphi < \pi$ плоскости (s, φ) функция $\bar{R}(s, \varphi)$ известна. Тогда на всю плоскость ее можно продолжить по формуле

$$R(s, \varphi) = \bar{R}((-1)^{[\varphi/\pi]} s, \text{Mod}(\varphi, \pi)), \quad (6)$$

где функция $[x]$ (квадратные скобки) означает взятие наибольшего целого не превосходящего x , а функция $\text{Mod}(x, L)$, вычисляющая остаток от деления первого аргумента на второй, определяется формулой

$$\text{Mod}(x, L) = x - L \left[\frac{x}{L} \right]$$

Доказательство. Очевидно, что $R(s, \varphi) = \bar{R}(s, \varphi)$ при $0 \leq \varphi < \pi$. Для этого диапазона углов $0 \leq \varphi < \pi$ из (6), с учетом периодичности функции $\text{Mod}(\varphi, \pi)$ с периодом π , имеем

$$\begin{aligned} R(-s, \varphi + \pi) &= \bar{R} \left((-1)^{\left[\frac{\varphi+\pi}{\pi} \right]} (-s), \text{Mod}(\varphi + \pi, \pi) \right) = \bar{R} \left((-1)^{[\varphi/\pi]} (-1)(-s), \text{Mod}(\varphi, \pi) \right) = \\ &= \bar{R} \left((-1)^{[\varphi/\pi]} s, \text{Mod}(\varphi, \pi) \right) = R(s, \varphi). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} R(s, \varphi + 2\pi) &= \bar{R} \left((-1)^{\left[\frac{\varphi+2\pi}{\pi} \right]} s, \text{Mod}(\varphi + 2\pi, \pi) \right) = \bar{R} \left((-1)^{[\varphi/\pi]} (-1)^2 s, \text{Mod}(\varphi, \pi) \right) = \\ &= \bar{R} \left((-1)^{[\varphi/\pi]} s, \text{Mod}(\varphi, \pi) \right) = R(s, \varphi) \end{aligned}$$

Т.о. функция $R(s, \varphi)$, определяемая равенством (6), в полосе $0 \leq \varphi < \pi$ совпадает с $\bar{R}(s, \varphi)$, является периодической по φ с периодом 2π и удовлетворяет равенству (1.4) $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$, а значит удовлетворяет ему при всех φ . \square

Рассмотрим некоторую точку A в полосе $0 \leq \varphi < \pi$ с фиксированными координатами s и φ . Тогда функция $R(s, \varphi)$, построенная по ф. (6), принимает одинаковые значения в точках A, B, C, D, E, \dots (см. рис. 7), равные значению исходной функции $\tilde{R}(s, \varphi)$ в точке A . Т.е. $R(s, \varphi)$ определяется своими значениями в полосе $0 \leq \varphi < \pi, -\infty < s < \infty$.

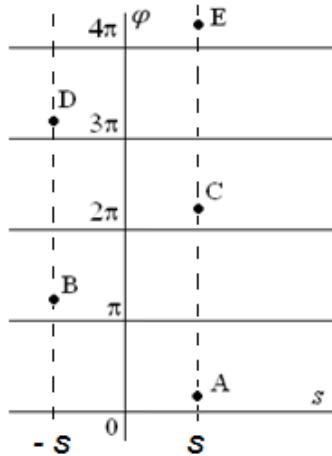


Рис. 7 К выводу формулы продолжения.

В практических приложениях томографии проекции (преобразование Радона) определяются только для углов $0 \leq \varphi < \pi$. Однако, для наглядной интерпретации ПР формула (6) будет нам полезна.

Рассмотрим функцию 2-х переменных $f(x, y)$, которая имеет две оси симметрии – ось ОХ и прямую, проходящую через начало координат и образующую угол α с осью ОХ. Как мы знаем (лемма 2), ее преобразование Радона $R[f](s, \varphi)$ по аргументу φ будет четной периодической функцией с периодом 2α , где $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Но тогда функцию $\tilde{R}(s, \varphi)$ можно определять только в полосе $0 \leq \varphi < \alpha$, а на всю плоскость (s, φ) ее можно продолжить. При этом, сперва функцию $\tilde{R}(s, \varphi)$ нужно продолжить на полосу $0 \leq \varphi < \pi$, используя условия четности и периодичности с периодом 2α по φ . Продолженную на полосу $0 \leq \varphi < \pi$ функцию обозначим $\bar{R}(s, \varphi)$. Она может быть построена по формуле

$$\bar{R}(s, \varphi) = \tilde{R}(s, stc(\varphi, 2\alpha)), \quad (7)$$

где

$$stc(x, T) = \frac{T}{2\pi} \arccos \left(\cos \left(\frac{2\pi x}{T} \right) \right) \equiv \left| x - T \left[\frac{x}{T} + \frac{1}{2} \right] \right|, \quad T > 0 \quad (8)$$

Функция $stc(\varphi, 2\alpha)$ представляет непрерывную четную кусочно-линейную периодическую по переменной φ функцию с периодом 2α . На отрезках $2k\alpha \leq \varphi \leq (2k+1)\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ она равна $stc(\varphi, 2\alpha) = \varphi - 2k\alpha$, а на отрезках $(2k+1)\alpha \leq \varphi \leq 2(k+1)\alpha$ равна $stc(\varphi, 2\alpha) = 2(k+1)\alpha - \varphi$ (см. рис. 8).

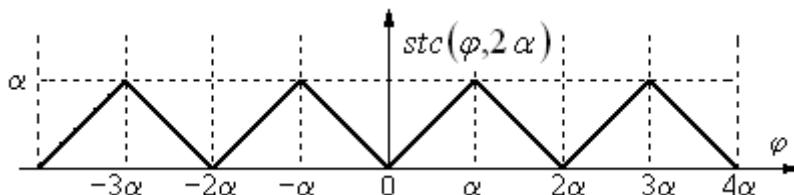


Рис. 8 График функции $stc(\varphi, 2\alpha)$.

Формула (7) опирается на утверждение, что для функции $h(x)$ одной переменной, заданной на отрезке $[0, L]$ ($L > 0$), продолженной четно на отрезок $[-L, 0]$ и затем периодически на всю ось с периодом $2L$, формула продолжения имеет вид

$$H_e(x) = h(stc(x, 2L)).$$

Доказательство последней формулы выполняется проверкой того факта, что функция $H_e(x)$ имеет период $2L$, на отрезке $[0, L]$ она совпадает с функцией $h(x)$ и на отрезке $[-L, 0]$ совпадает с $h(|x|)$. При этом, если функция $h(x)$ непрерывна на отрезке $[0, L]$, то ее четное периодическое продолжение $H_e(x)$ будет непрерывной функцией на всей оси.

При фиксированном s , правая часть (7) является четным периодическим продолжением функции $\tilde{R}_s(\varphi) = \tilde{R}(s, \varphi)$ одной переменной φ на все значения $-\infty < \varphi < \infty$, а значит, дает требуемое продолжение функции 2-х переменных $\bar{R}(s, \varphi)$ и на полосу $0 \leq \varphi < \pi$.

Используя функцию $\bar{R}(s, \varphi)$, по формуле (6) можно выполнить дальнейшее продолжение на всю плоскость. Подставляя в (6) вместо $\bar{R}(s, \varphi)$ его представление (7), получаем

$$R(s, \varphi) = \bar{R}((-1)^{\lceil \varphi/\pi \rceil} s, Mod(\varphi, \pi)) = \tilde{R}((-1)^{\lceil stc(\varphi, 2\alpha)/\pi \rceil} s, Mod(stc(\varphi, 2\alpha), \pi))$$

Но $0 \leq stc(\varphi, 2\alpha) \leq \alpha < \pi$ (см. рис. 8). Поэтому $\left[\frac{stc(\varphi, 2\alpha)}{\pi} \right] = 0$ и $(-1)^{\lceil stc(\varphi, 2\alpha)/\pi \rceil} = 1$.

Поскольку $Mod(x, y) = x$ при $x < y$ ($y > 0$), то $Mod(stc(\varphi, 2\alpha), \pi) = stc(\varphi, 2\alpha)$. В результате получаем, что

$$R(s, \varphi) = \tilde{R}(s, stc(\varphi, 2\alpha)). \quad (9)$$

Это означает, что формулу (7) можно применять не только в полосе $0 \leq \varphi < \pi$, но и для всех значений $-\infty < \varphi < \infty$. Таким образом, нами доказана

Лемма 5. Пусть дана функция $f(x, y)$, имеющая две оси симметрии – ось ОХ и прямую, проходящую через начало координат и образующую угол α с осью ОХ. Пусть ее ПР $\tilde{R}[f](s, \varphi)$ известно для всех s при $0 \leq \varphi \leq \alpha$. Тогда ее ПР во всей плоскости (s, φ) может быть определено по формуле (9).

Замечание. Мы знаем, что всегда $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Но если n четное, т.е.

полупериод $\alpha = \frac{\pi}{2k}$ ($k = 1, 2, \dots$), то имеем

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= R(-s, \varphi + \pi) = \tilde{R}(-s, stc(\varphi + \pi, 2\alpha)) = \tilde{R}\left(-s, stc\left(\varphi + \pi, \frac{\pi}{k}\right)\right) = \\ &= \tilde{R}\left(-s, stc\left(\varphi, \frac{\pi}{k}\right)\right) = \tilde{R}(-s, stc(\varphi, 2\alpha)) = R(-s, \varphi) \end{aligned}$$

Т.е $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi)$ является четной по s функцией.

Формулу продолжения (6) можно применять всегда, поскольку она опирается на соотношение (1.4), справедливое для ПР любой функции $f(x, y)$.

Формулу продолжения (9) можно применять для ПР функций $f(x, y)$, имеющих оси симметрии, пересекающиеся в начале координат, одной из которых является ось X.

Если функция $f(x, y)$ имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом α в точке (x_0, y_0) , одна из которых параллельна оси OX, то функция $g(x, y) = f(x + x_0, y + y_0)$ уже будет такой, для которой формула продолжения (9) справедлива. Тогда, учитывая (3.3), имеем

$$\begin{aligned} R[f(x, y)](s, \varphi) &= R[g(x - x_0, y - y_0)](s, \varphi) = \\ &= R[g(x, y)](s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

Продолжение функции $R[f(x, y)](s, \varphi)$ на всю плоскость (s, φ) выполняется построением функции $\tilde{R}[g(x, y)](s, \varphi)$ в полосе $0 < \varphi < \alpha$, четным периодическим продолжение этой функции на всю плоскость (s, φ) по формуле (9), и затем заменой аргумента s на выражение $s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi$. В правой части формулы (10) должна стоять уже продолженная на всю плоскость (s, φ) функция $R[g(x, y)](s, \varphi)$. Если использовать выражение для $\tilde{R}(s, \varphi)$, то (10) следует переписать в виде

$$R[f(x, y)](s, \varphi) = \tilde{R}[g(x, y)](s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \text{stc}(\varphi, 2\alpha)) \quad (11)$$

4⁰. *Комбинирование преобразований.* Иногда нужно выполнить ПР функции, полученной линейным преобразованием координат и сдвигом. Возможны два варианта комбинирования: $R[f(Ax - x_0)]$ и $R[f(A(x - x_0))]$. Обозначим $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Тогда, используя вначале (3.4), а потом (3.10), получаем

$$R[f(Ax - x_0)](s, \varphi) = R[f(Ax)](s - (x_0, \mathbf{n}), \mathbf{n}) = \frac{1}{D} R[f(x)] \left(\frac{(s - (x_0, \mathbf{n})) \det A}{D}, \tilde{\mathbf{n}} \right)$$

где D и $\tilde{\varphi}$ определяются формулами (3.6) и (3.8), а $\tilde{\mathbf{n}} = (\cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\varphi})$.

Используя (3.10), а потом (3.4), получаем

$$\begin{aligned} R[f(A(x - x_0))](s, \mathbf{n}) &= \frac{1}{D} R[f(x - x_0)] \left(\frac{s \cdot \det A}{D}, \tilde{\mathbf{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{D} R[f(x)] \left(\frac{s \cdot \det A}{D} - (x_0, \tilde{\mathbf{n}}), \tilde{\mathbf{n}} \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{n}} = (\cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\varphi})$, а D и $\tilde{\varphi}$ определяются формулами (3.6) и (3.8). Т.о. для суперпозиции линейного преобразования и сдвига имеем две формулы

$$R[f(A(x - x_0))](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x)] \left(\frac{s \cdot \det A}{D} - (x_0, \tilde{\mathbf{n}}), \tilde{\varphi} \right) \quad (12)$$

$$R[f(Ax - x_0)](s, \varphi) = \frac{1}{D} R[f(x)] \left(\frac{(s - (x_0, \mathbf{n})) \cdot \det A}{D}, \tilde{\varphi} \right) \quad (13)$$

Если при этом функция $f(x)$ обладала осями симметрии такими, что для ее ПР применимо продолжение (9), то в правую часть (12) и (13) должна входить уже продолженная на все значения угла φ функция $R[f(x)](s, \varphi)$. Тогда левые части (12) и (13) дадут ПР $R[f(A(x - x_0))]$ и $R[f(Ax - x_0)]$ справедливые для всех значений углов φ .

3.5 Примеры вычисления преобразования Радона

Пример 1. Вычислим радоновский образ суммы гауссовских импульсов

$$f(x, y) = \sum_i \exp \left\{ -\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{b_i^2} \right\} \quad (1)$$

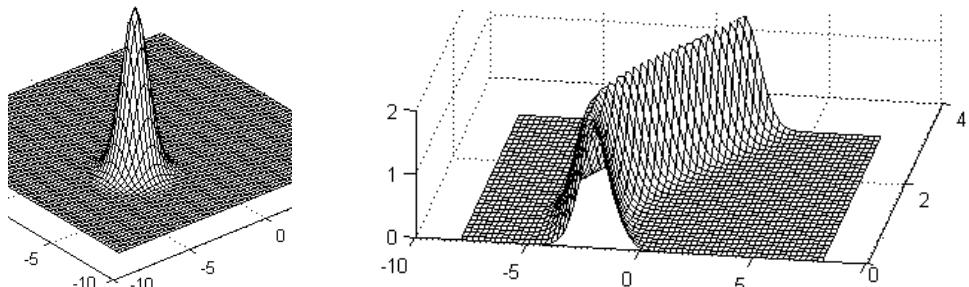
В примере 3.4 мы вычислили радоновский образ одного гауссовского импульса

$$R \left[\exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b^2} \right\} \right] (s, \varphi) = |b| \sqrt{\pi} \exp \left[-\frac{(s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2}{b^2} \right]$$

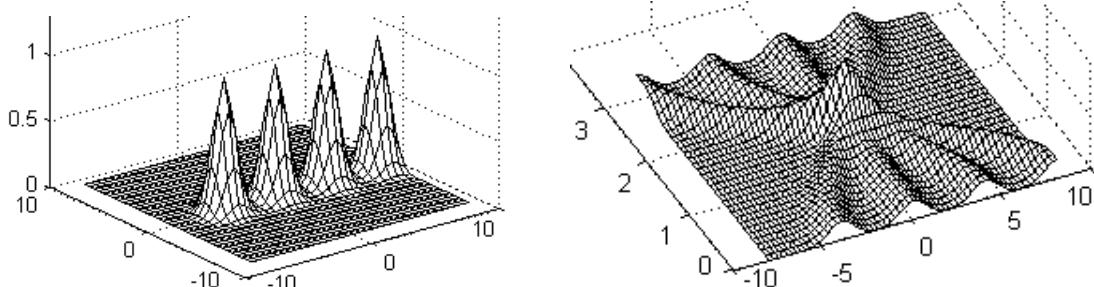
В силу линейности ПР имеем

$$R(s, \varphi) = \sqrt{\pi} \sum_i |b_i| \exp \left\{ -\frac{(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - s)^2}{b_i^2} \right\}.$$

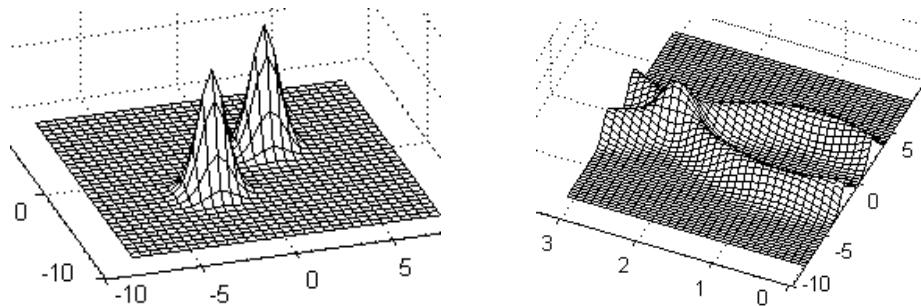
Ниже приведено несколько графиков радоновских образов (везде $b_i = 1$). На следующем рисунке показан один гауссовский импульс при $x_0 = -2, y_0 = -2$ и его радоновский образ для $0 \leq \varphi < \pi$.



На следующем рисунке слева показана сумма четырех гауссовских импульсов, расположенных на одной прямой, и справа представлен ее радоновский образ. Вершины импульсов расположены в точках $((-4, 0), (0, 0), (4, 0), (8, 0))$ и $0 \leq \varphi < \pi$



На следующем рисунке справа представлен радоновский образ двух гауссовских импульсов (рисунок слева), расположенных в точках $(-2, -2)$ и $(2, 2)$.



Пример 2. Вычислим радоновский образ характеристической функции круга радиуса a с центром в начале координат, в котором имеются два небольших круговых отверстия радиусов a_0 и a_1 (см. рис. 2 слева). Т.е. вычислить ПР следующей функции

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq a_0^2 \wedge (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \geq a_1^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > a^2 \vee (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a_0^2 \vee (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 < a_1^2 \end{cases}$$

Мы знаем, что ПР функции

$$\chi_a(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > a^2 \end{cases}$$

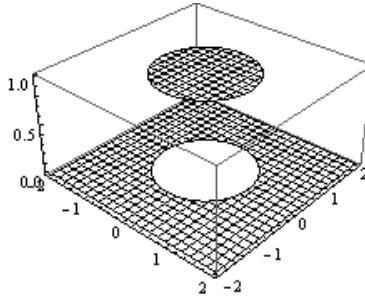


Рис.1 Функция $\chi_a(x, y)$ при $a=1$

имеет вид (см. пример 1.4)

$$R[\chi_a](s) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - s^2}, & |s| \leq a \\ 0, & |s| > a \end{cases}. \quad (2)$$

Поскольку $\chi_a(x, y)$ осесимметричная функция, то ее преобразование Радона не зависит от параметра φ . Кусочную функцию (2) можно записать одним выражением

$$R[\chi_a](s) = \sqrt{2} \sqrt{(a^2 - s^2) + |a^2 - s^2|}. \quad (3)$$

Вычислим теперь радоновский образ характеристической функции $\chi_{(x_0, y_0)}^a(x, y)$ круга радиуса a , центр которого сдвинут в точку (x_0, y_0) .

$$\chi_{(x_0, y_0)}^a(x, y) = \begin{cases} 1, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 \\ 0, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > a^2 \end{cases}$$

Для этого используем формулу (3.3). В качестве основной, возьмем функцию $\chi_a(x, y)$, для которой ПР известно (см. ф. (3)). Имеем

$$\begin{aligned} R[\chi_{(x_0, y_0)}^a](s, \varphi) &= R[\chi_a](s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi) = \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(a^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2) + |a^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2|}. \end{aligned}$$

График этой функции нами приводился ранее (см. рис. 1.4).

Учитывая линейность ПР, имеем

$$R[\chi] = R[\chi_a] - R[\chi_{(x_0, y_0)}^{a_0}] - R[\chi_{(x_1, y_1)}^{a_1}]$$

где $R[\chi_a]$ – ПР характеристической функции круга радиуса a с центром в начале координат, $R[\chi_{(x_0, y_0)}^{a_0}]$ и $R[\chi_{(x_1, y_1)}^{a_1}]$ – ПР характеристических функций сдвинутых кругов радиусов a_0 и a_1 . Центры сдвинутых кругов находятся в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Т.о. имеем

$$R[\chi_a] = \sqrt{2} \sqrt{(a^2 - s^2) + |a^2 - s^2|}$$

$$R[\chi_{(x_0, y_0)}^{a_0}] = \sqrt{2} \sqrt{(a_0^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2) + |a_0^2 - (s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2|}$$

$$R[\chi_{(x_1, y_1)}^{a_1}] = \sqrt{2} \sqrt{(a_1^2 - (s - x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2) + |a_1^2 - (s - x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2|}$$

График функции $R[\chi]$ при $a = 1, x_0 = 0.5, y_0 = 0.5, a_0 = 0.2, x_1 = -0.7, y_1 = 0.0, a_1 = 0.1$ показан на рис. 2 справа.

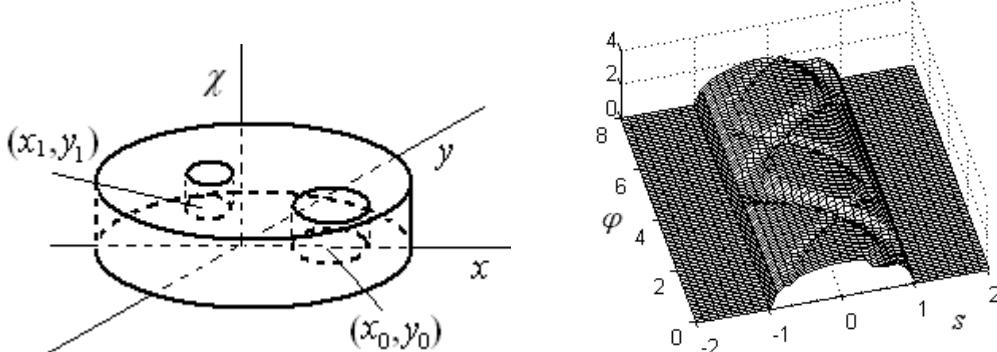
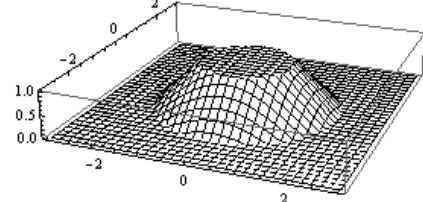


Рис.2 Функция $\chi = \chi_a - \chi_{a_0} - \chi_{a_1}$ слева и ее радоновский образ $R[\chi]$ справа.

□

Пример 3. Вычислим радоновский образ функции «усеченного конуса» вида

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & , x^2 + y^2 < 1 \\ 2 - \sqrt{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 < 4 \\ 0 & , x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$



Если ввести функцию «конуса» вида

$$f_{a,b}(x, y) = \begin{cases} \frac{b}{a} \left(a - \sqrt{x^2 + y^2} \right), & x^2 + y^2 < a^2 \\ 0 & , x^2 + y^2 \geq a^2 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0),$$

то легко видеть, что функция «усеченного конуса» может быть представлена в виде (см. следующий рисунок слева)

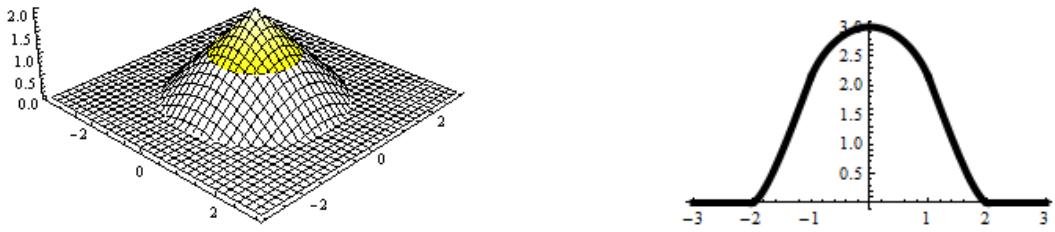
$$f(x, y) = f_{2,2}(x, y) - f_{1,1}(x, y)$$

Тогда, в силу линейности ПР, получаем

$$R[f(x, y)] = R[f_{2,2}(x, y)] - R[f_{1,1}(x, y)] \quad (4)$$

Но функция $R[f_{a,b}(x, y)](s)$ получена нами в примере 2.4 формула (2.6).

Результат вычисления по ф. (4) с учетом (2.6) представлен на следующем рисунке справа ($f(x, y)$ осесимметричная функция и ее ПР не зависит от φ).



□

Пример 4. Вычислим радоновский образ характеристической функции «единичного» квадрата

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq x \leq 0.5 \wedge -0.5 \leq y \leq 0.5 \\ 0, & \text{при остальных } x, y \end{cases}$$

Из соображений симметрии ясно, что «проекции» можно рассмотреть в области изменения углов $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, затем при $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$ они четно относительно прямой $y = x$ (ось симметрии с углом наклона $\pi/4$) повторяют свои значения. При $\varphi > \pi/2$ функция $R[\chi](s, \varphi)$ повторяется периодически.

Вычисляя длины отрезков прямых внутри квадрата, получим значения преобразования Радона характеристической функции. При фиксированном $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ построим прямые L_1, L_2, L_3 и L_4 с наклоном φ , проходящие через вершины квадрата (см. рис. 3). Для прямых, имеющих наклон φ , можно выделить две различные области определения проекций – полосу L_2L_3 (между прямыми L_2 и L_3) и две полосы L_1L_2 и L_3L_4 .

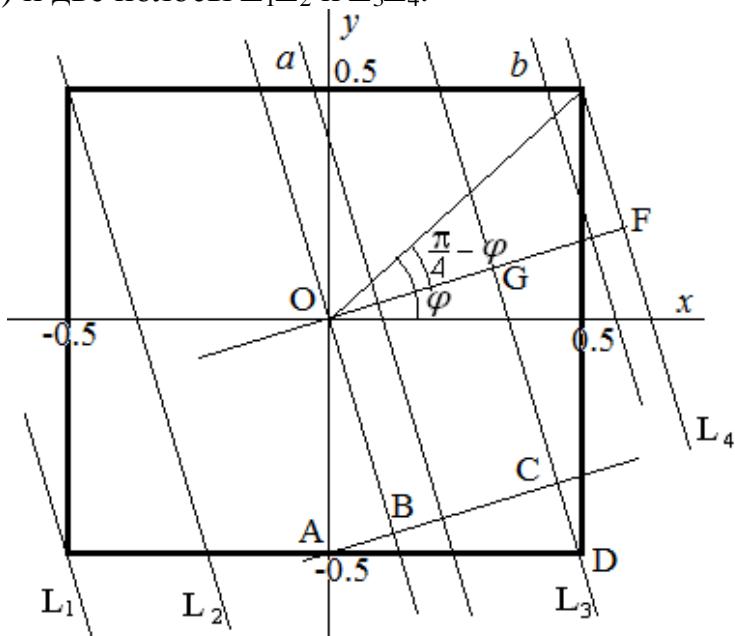


Рис.3 К вычислению преобразования Радона характеристической функции квадрата

Для прямой a , имеющей наклон φ , расположенной внутри полосы L_2L_3 , имеем

$$|s| \leq s_{\max}^1 = |OG| = |BC| \text{ и}$$

$$|BC| = |AC| - |AB| = |AD| \cos \varphi - |OA| \sin \varphi = \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi \right),$$

т.е. в полосе L_2L_3 имеем $|s| < \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$. Легко видеть, что длина прямой a , расположенной в этой полосе, равна $L_a = 1/\cos\varphi$.

Для прямой b , имеющей наклон φ , расположенной между прямыми L_3L_4 , имеем

$$s < |OF| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$$

Длину ее отрезка, попавшего внутрь квадрата, будем находить через координаты точек пересечения этой прямой, имеющей радоновские координаты s, φ , со сторонами квадрата – верхней и правой. Уравнение прямой интегрирования имеет вид (2.1): $x = s \cos\varphi - \sin\varphi \cdot t$, $y = s \sin\varphi + \cos\varphi \cdot t$. Для верхней точки пересечения имеем $0.5 = s \sin\varphi + \cos\varphi \cdot t_2$ или $t_2 = \frac{0.5 - s \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Для нижней/правой точки пересечения имеем $0.5 = s \cos\varphi - \sin\varphi \cdot t_1$ или $t_1 = \frac{s \cdot \cos\varphi - 0.5}{\sin\varphi}$. Тогда

$$L_b = t_2 - t_1 = \frac{0.5 - s \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{s \cdot \cos\varphi - 0.5}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi - 2s}{2 \cos\varphi \sin\varphi}.$$

В полосе L_1L_2 параметр s в условиях надо заменить на $|s|$. Таким образом для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ПР имеет вид

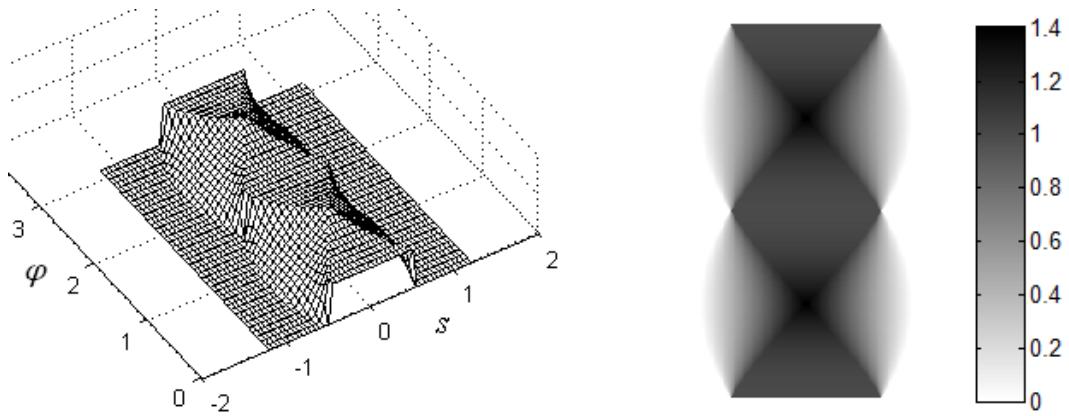
$$\tilde{R}(s, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\cos\varphi}, & |s| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \\ \frac{\sin\varphi + \cos\varphi - 2|s|}{2 \sin\varphi \cos\varphi}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) < |s| < \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \\ 0, & |s| > \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \end{cases} \quad (5)$$

После четного периодического продолжения с периодом $\pi/2$ (см. ф. (4.9)) преобразование Радона единичного квадрата будет иметь вид

$$R[\chi(x, y)](s, \varphi) = \tilde{R}\left(s, stc\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad (6)$$

где функция $stc(x, T)$ определяется по (4.8).

На следующем рисунке слева показан график поверхности функции $R[\chi](s, \varphi)$, а справа – ее полутонаовый образ.



На левом рисунке ясно видно, что функция в отдельных точках имеет разрывы (скачки), например, при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$, $s=\pm 0.5$. Их наличие понятно из смысла ПР, когда направление проецирования параллельно стороне квадрата, а расстояние s как раз таково, что проектирующий луч (прямая интегрирования) проходит через сторону квадрата.

Пример 5. Вычислим радоновский образ характеристической функции единичного квадрата, сдвинутого вправо и вверх так, что его вершина совпадает с началом координат, т.е. функции

$$\chi_g(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{при остальных } x, y \end{cases} = \chi\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$$

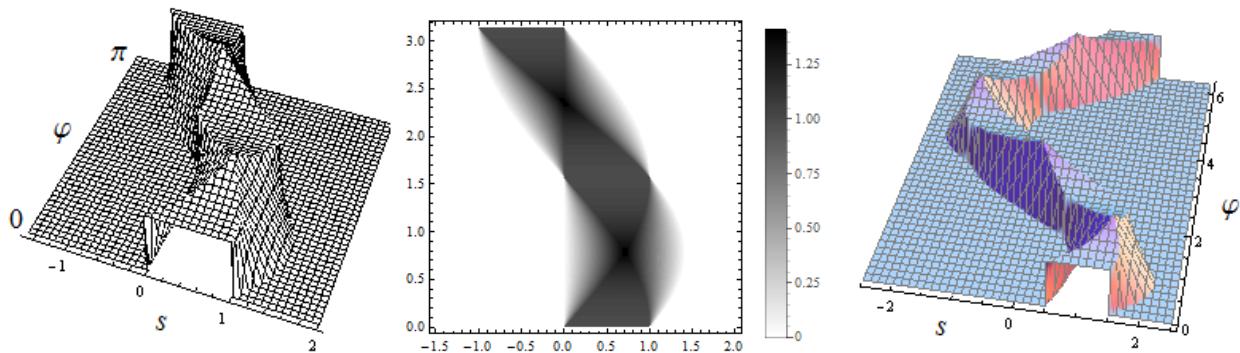
где $\chi(x, y)$ - характеристическая функция единичного квадрата из примера 4.

Для решения задачи можно, как в предыдущем примере, вычислять длины отрезков прямых с радоновскими координатами s, φ в различных диапазонах изменения этих параметров. Однако утомительных преобразований можно избежать, если использовать формулу четного периодического продолжения (4.9). Фактически, для ПР функции $\chi(x, y)$ мы должны воспользоваться формулой (6), а затем в ней, в соответствии с (3.3), выполнить замену $s \rightarrow s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} R[\chi_g(x, y)](s, \varphi) &= R[\chi(x - x_0, y - y_0)](s, \varphi) = R[\chi(x, y)](s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \varphi) = \\ &= \tilde{R}\left(s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, \text{stc}\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{R}(s, \varphi)$ определена формулой (5). Заметим, что вначале мы строим продолжение функции $\tilde{R}(s, \varphi)$ по формуле (4.9), а затем делаем замену первого аргумента s на $s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi$ и этот порядок существенен.

На следующем рисунке слева приведен график функции $R[\chi_g(x, y)](s, \varphi)$ при $x_0 = 1/2$, $y_0 = 1/2$, а в центре – ее полутоновый образ.



Формулу (7) можно использовать при любых значениях параметров x_0, y_0 и она пригодна для любого диапазона изменения угла φ . На предыдущем рисунке справа приведен график функции $R[\chi(x-1, y-1)](s, \varphi)$ в диапазоне $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Пример 6. Преобразование Радона характеристической функции области, составленной из двух «единичных» квадратов – одного «центрированного», другого сдвинутого в точку $x_0 = 1.5, y_0 = 1.5$ получается суммированием двух функций (6) и (7). На рис. 4 слева показана исходная функция $f(x, y) = \chi(x, y) + \chi(x - 1.5, y - 1.5)$, а справа – ее преобразование Радона.

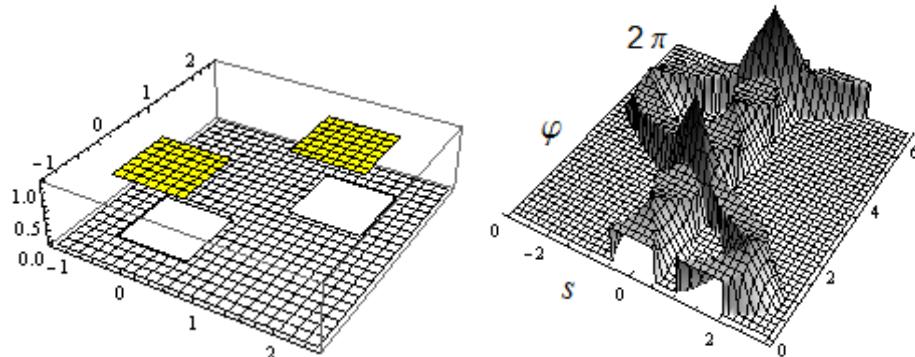


Рис. 4 К вычислению ПР характеристической функции области объединения двух квадратов.

Пример 7. Преобразование Радона характеристической функции «квадратного кольца», показанного на рис. 5 слева, получается как разность ПР ХФ двух квадратов $R(s, \varphi) = R_1(s, \varphi) - R_2(s, \varphi)$, где $R_1(s, \varphi)$ определяется формулой (6), а $R_2(s, \varphi)$ – ПР характеристической функции сжатого в 2 раза «центрированного» квадрата. Из (3.1) имеем

$$R_2(s, \varphi) = \frac{1}{a} \tilde{R}\left(a s, stc\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

где $\tilde{R}(s, \varphi)$ определяется формулой (5) и $a = 2$. На рис. 5 справа показан график функции $R(s, \varphi)$.

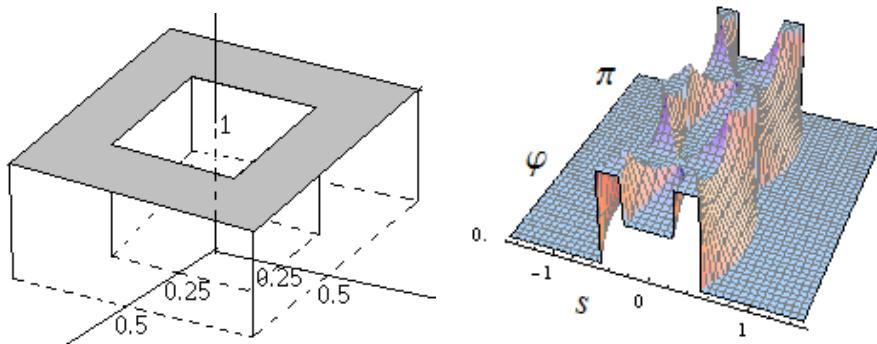


Рис. 5 К вычислению ПР характеристической функции «квадратного кольца»

Пример 8. Рассмотрим характеристическую функцию $\chi_{ab}(x, y)$ «центрированного» прямоугольника, полученного из ХФ единичного квадрата примера 4, растянутого в $a > 0$ раз по горизонтали и $b > 0$ раз по вертикали. Ее ПР получается из (3.13) или (3.15), где в качестве $f(x, y)$ нужно использовать характеристическую функцию $\chi(x, y)$ «единичного центрированного» квадрата. При этом функция $R[\chi]$ квадрата уже должна быть продолжена на всю плоскость, т.е. она равна функции (6), где $\tilde{R}(s, \varphi)$ определяется формулой (5). Т.о. имеем

$$R[\chi_{ab}(x, y)](s, \varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \times \tilde{R}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \operatorname{stc}\left(\arccos \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (8)$$

Рассмотрим характеристические функции двух прямоугольников, полученных вытягиванием в 3 раза «единичного центрированного» квадрата вдоль оси X и вдоль оси Y.

$$\chi_{rx}(x, y) = \begin{cases} 1, & -1.5 \leq x \leq 1.5, -0.5 \leq y \leq 0.5 \\ 0, & \text{при остальных } x, y \end{cases}$$

$$\chi_{ry}(x, y) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq x \leq 0.5, -1.5 \leq y \leq 1.5 \\ 0, & \text{при остальных } x, y \end{cases}$$

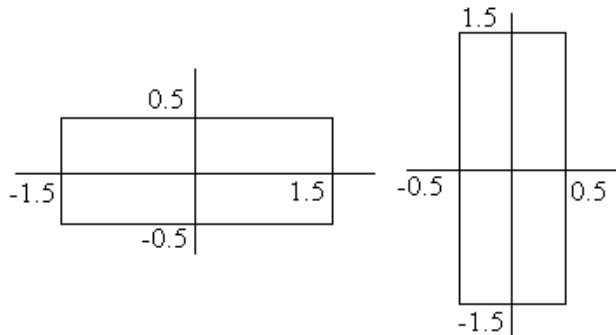
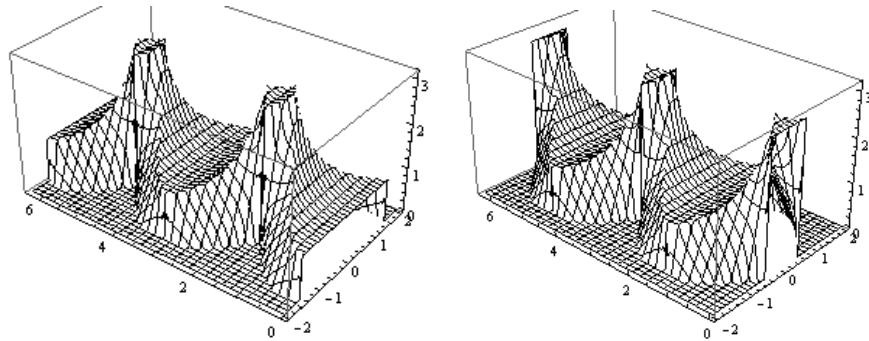


Рис. 6 Области, полученные растяжением «единичного» квадрата.

Для вычисления их преобразований Радона нужно воспользоваться формулой (8), положив в первом случае $a = 3, b = 1$, во втором – $a = 1, b = 3$. На

следующем рисунке показаны ПР характеристических функций этих прямоугольников.



Обратите внимание на то, что графики функций $R[\chi_{rx}(x, y)]$ и $R[\chi_{ry}(x, y)]$ похожи. Действительно, функции $\chi_{rx}(x, y)$ и $\chi_{ry}(x, y)$ могут быть получены одна из другой поворотом на угол $\pi/2$. Тогда, в соответствии с (3.2), $R[\chi_{ry}](s, \varphi) = R[\chi_{rx}]\left(s, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$. Если рассматривать s, φ , как декартовы координаты плоскости, то графики функций $R[\chi_{rx}(x, y)]$ и $R[\chi_{ry}(x, y)]$ получаются один из другого сдвигом на $\pi/2$ вдоль направления оси φ , что мы и наблюдаем на рисунках.

Пример 9. Вычислим радоновский образ характеристической функции $\chi_c(x, y)$ области «креста» (см. рис. 7 слева). Имеем

$$\chi_c(x, y) = \chi_{rx}(x, y) + \chi_{ry}(x, y) - \chi(x, y),$$

где $\chi_{rx}(x, y), \chi_{ry}(x, y)$ – характеристические функции прямоугольников, введенные в предыдущем примере, а $\chi(x, y)$ – характеристическая функция «единичного» квадрата из примера 4. В силу линейности ПР получаем

$$R[\chi_c(x, y)] = R[\chi_{rx}(x, y)] + R[\chi_{ry}(x, y)] - R[\chi(x, y)],$$

где функция $R[\chi(x, y)]$ вычислена нами в примере 4 формула (6), а функции $R[\chi_{rx}(x, y)], R[\chi_{ry}(x, y)]$ получаются из (8) при $a = 3, b = 1$ и $a = 1, b = 3$. Их графики построены в предыдущем примере.

На рис. 7 справа показан полутонаовый образ получаемой поверхности $R[\chi_c](s, \varphi)$.

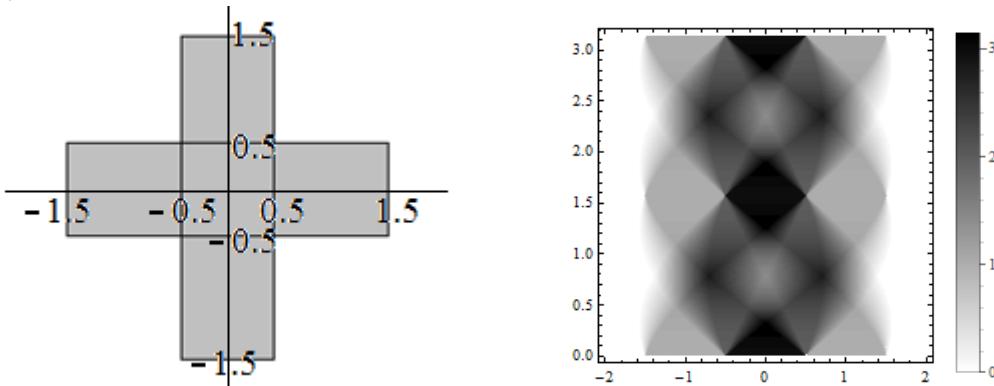


Рис. 7 К вычислению ПР ХФ «креста»

Пример 10. Вычислим радоновский образ характеристической функции прямоугольника, показанного на рис. 8 слева.

$$\chi_r(x, y) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq x \leq 0.5 \wedge -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{при остальных } x, y \end{cases}$$

$R[\chi_r]$ можно вычислить, используя формулу (3.15), которую применить к выражению (6) – ПР «центрированного единичного» квадрата, который растягивается в два раза вдоль оси Y. Но $R[\chi_r]$ можно получить сложением ПР ХФ двух сдвинутых «единичных» квадратов – одного вниз на 0.5, второго – вверх на 0.5. Для ПР сдвига мы используем формулу (3.3), а для ПР ХФ объединения областей можно попробовать использовать формулу (4.3), которая в нашем случае примет вид

$$R[\chi_r](s, \varphi) = R[\chi(x, y)](s + 0.5 \sin \varphi, \varphi) + R[\chi(x, y)](s - 0.5 \sin \varphi, \varphi)$$

График поверхности $R[\chi_r](s, \varphi)$ показан на рис. 8 справа. Вычисления $R[\chi_r](s, \varphi)$ по приведенной формуле правильные, за исключением точки $s = 0, \varphi = \pi/2$. Для нее имеем $R[\chi_r](0, \pi/2) = 2$ – результат неверный, поскольку это должна быть единица – длина отрезка оси OX, лежащего внутри прямоугольника. Чтобы избежать подобной проблемы нужно использовать формулу (4.4) и считать, что два сдвинутых квадрата пересекаются по отрезку $\{y = 0, -0.5 \leq x \leq 0.5\}$, для которого ПР характеристической функции $\chi_{[-0.5, 0.5]}$ его «области» равно

$$R[\chi_{[-0.5, 0.5]}](s, \varphi) = \begin{cases} 1, & s = 0 \wedge \varphi = \pi/2 \pm k\pi \quad (k = 0, 1, \dots) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда, в соответствии с (4.4), получаем

$$R[\chi_r](s, \varphi) = R[\chi(x, y)](s + 0.5 \sin \varphi, \varphi) + \\ + R[\chi(x, y)](s - 0.5 \sin \varphi, \varphi) - R[\chi_{[-0.5, 0.5]}](s, \varphi)$$

График поверхности $R[\chi_r](s, \varphi)$, построенный по последней формуле, не изменится. Он приведен на рис. 8 справа.

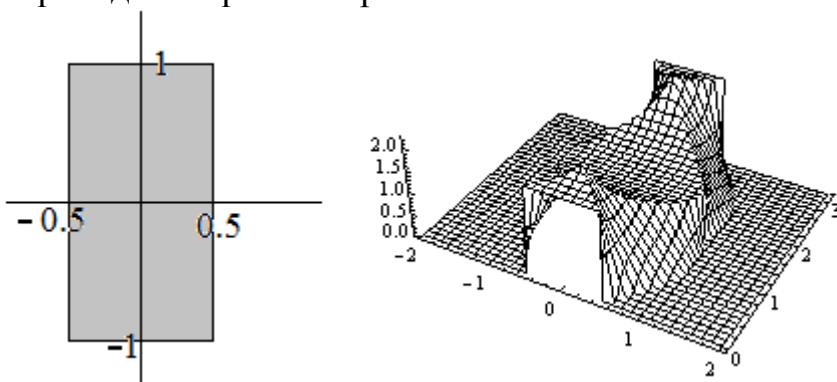


Рис. 8 К вычислению ПР ХФ прямоугольника

В данном примере проще было бы воспользоваться формулой «растяжения» (3.15), которую применить к «центрированному» квадрату. Однако бывают случаи, когда приходится применять изложенный здесь подход. Например, когда функции постоянны в своих квадратах, но их значения не равны.

Например, для вычисления ПР ХФ χ_Γ области, показанной на рис. 9 слева, также можно применить подход с использованием формул (4.3) или (4.4). Если обозначить χ_s – ХФ сдвинутого вправо вверх «единичного» квадрата, то, используя (4.3), получаем $R[\chi_\Gamma] = R[\chi_r] + R[\chi_s]$. График функции $R[\chi_\Gamma](s, \varphi)$ показан на рис. 9 в центре. Полутоновый образ этой поверхности приведен справа. При этом следует помнить о «погрешности» вычисления в точке $s = 0.5, \varphi = 0$. Функция $R[\chi_\Gamma](s, 0)$ как функция одного аргумента при $s = 0.5$ имеет разрыв.

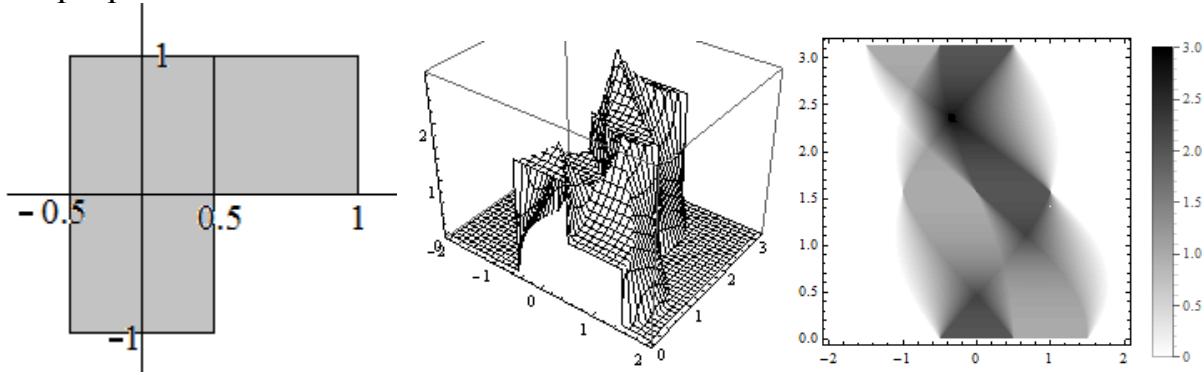


Рис. 9

Заметим, что разные компьютерные системы по – разному могут изображать скачек функции двух переменных $R(s, \varphi)$ в точке. Предыдущие графики мы строили в системе *Mathematica*.

Для ХФ области из трех квадратов, показанной на рис. 10 слева, построение ПР суммированием ПР ХФ трех квадратов без вычитания ПР ХФ отрезков, в системе *MatLab* дает график, показанный на рис. 10 справа. На нем наблюдаются острые «пики», соответствующие удвоению значения функции R в точках $s = \pm 0.5, \varphi = \pm k \pi$ ($k = 0, 1, \dots$). Этих пиков быть не должно, они появились вследствие того, что мы не вычли ПР ХФ отрезков общих границ квадратов. График поверхности, построенный по тем же формулам (без вычитания ПР ХФ отрезков) в системе *Mathematica*, не имеет этих пиков.

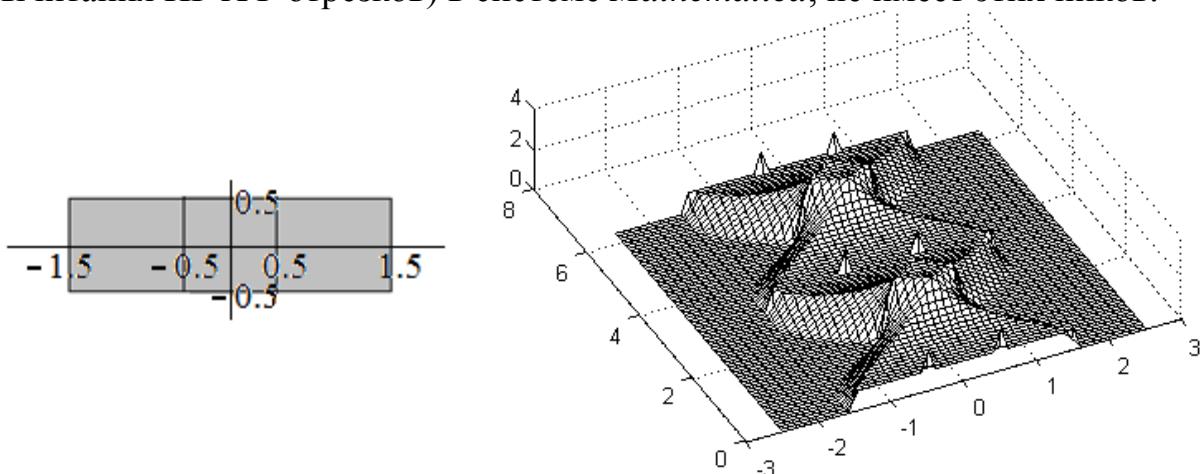


Рис.10

4. Преобразование Радона осесимметричных функций

Преобразование Радона $R(s, \varphi)$ осесимметричных функций не зависит от угла сканирования φ и, как оказывается, является хорошо известным задолго до Радона преобразованием Абеля.

4.1 Вычисление преобразования Радона

Известно, что любая осесимметричная функция может быть представлена в виде $z(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Лемма 1. Преобразование Радона осесимметричной функции $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ может быть вычислено по формулам

$$R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) dx \quad (1)$$

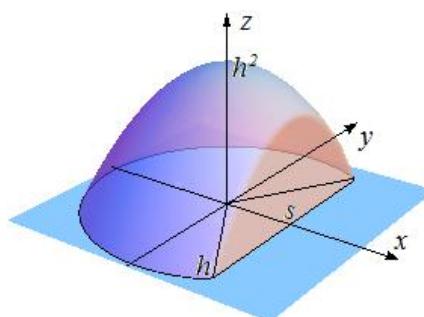
Доказательство. По лемме 3.1.1 ПР осесимметричной функции не зависит от угла φ . Поэтому можно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии s от начала координат, например, по прямой $x=s$, параллельной оси ОY. Подстановка в (3.1.1) значения $\varphi=0$ дает $R(s) = R(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$. Учитывая, что для осесимметричной функции выполняется равенство $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(y, x)$ получаем также $R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) dt$ и имя переменной интегрирования не имеет значения.

□

Заметим, что если выбрать прямую $y=s$, при $\varphi=\pi/2$ формула (3.1.1) дает $R(s) = R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t, s) dt$ и замена $-t=x$ приводит к тому же результату $R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, s) dx$.

Пример 1. Вычислим ПР функции «шапочка».

$$f(x, y) = \begin{cases} h^2 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 < h^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq h^2 \end{cases}$$



«Шапочкой» является часть параболоида вращения. Поскольку функция осесимметричная, то можно использовать формулы (1). Например, будем вычислять интеграл по прямой $x=s$, параллельной оси Оу. При $|s| < h$ имеем

$$R(s) = \int_{-\sqrt{h^2-s^2}}^{\sqrt{h^2-s^2}} (h^2 - s^2 - y^2) dy = 2 \int_0^{\sqrt{h^2-s^2}} (h^2 - s^2 - y^2) dy =$$

$$= 2(h^2 - s^2)y \Big|_0^{\sqrt{h^2 - s^2}} - 2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{h^2 - s^2}} = 2(h^2 - s^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(h^2 - s^2)^{3/2} = \frac{4}{3}(h^2 - s^2)^{3/2}$$

В результате получаем

$$R(s) = \begin{cases} \frac{4}{3}(h^2 - s^2)^{3/2}, & |s| < h \\ 0, & |s| \geq h \end{cases}$$

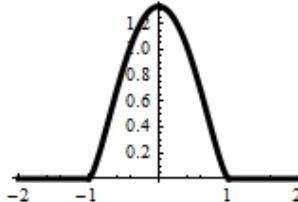


График функции $R(s)$ при $h=1$ показан на предыдущем рисунке.

Используя этот результат, вычислим ПР функции $r^2 \chi(r)$, где $\chi(r)$ – характеристическая функция единичного круга и $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Имеем

$$r^2 \chi(r) = \chi(r) - (1 - r^2) \chi(r)$$

Тогда в силу линейности ПР

$$R[r^2 \chi(r)] = R[\chi(r)] - R[(1 - r^2) \chi(r)].$$

Но мы знаем, что $R[\chi(r)] = 2\sqrt{1 - s^2} \chi(s)$ (см. пример 3.2.4). Тогда при $|s| < 1$ получаем

$$R[r^2 \chi(r)] = 2\sqrt{1 - s^2} - \frac{4}{3}\sqrt{1 - s^2}(1 - s^2) = \sqrt{1 - s^2} \left(2 - \frac{4}{3}(1 - s^2) \right) = \frac{2}{3}\sqrt{1 - s^2}(1 + 2s^2).$$

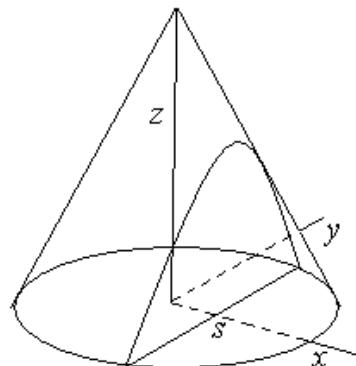
Т.е.

$$R[(x^2 + y^2) \chi(r)] = \frac{2}{3}\sqrt{1 - s^2}(1 + 2s^2) \cdot \chi(s)$$

□

Пример 2. Вычислим ПР конуса, т.е. функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$



Поскольку функция осесимметрична, то достаточно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии s от начала координат, например, по прямой $x=s$, параллельной оси Оу. При $|s| < 1$ имеем

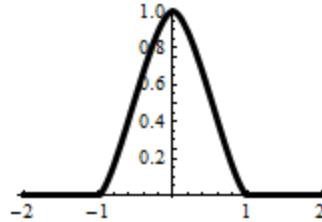
$$\begin{aligned} R(s) &= \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left(1 - \sqrt{y^2 + s^2} \right) dy = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \left(1 - \sqrt{y^2 + s^2} \right) dy = \\ &= 2\sqrt{1-s^2} - 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{s^2 + y^2} dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{1-s^2} - \left(y\sqrt{s^2+y^2} + s^2 \ln \left| y + \sqrt{y^2+s^2} \right| \right) \Big|_0^{\sqrt{1-s^2}} = \\
&= 2\sqrt{1-s^2} - \left(\sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \left| 1 + \sqrt{1-s^2} \right| - s^2 \ln |s| \right) = \\
&= \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \left| \frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}} \right|
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали табличный интеграл А.2. В результате получаем

$$R(s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \left| \frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}} \right|, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

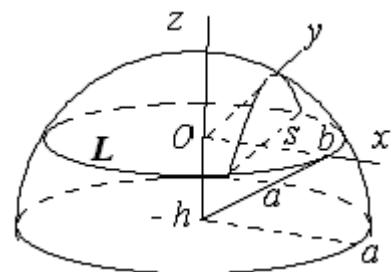
График функции $R(s)$ показан на следующем рисунке.



□

Пример 3. Вычислим ПР сферического сегмента. Пусть радиус сферы равен a и на расстоянии $h < a$ от центра проведена плоскость, которая отсекает от сферы сегмент. Расположим в этой плоскости начало координат так, как показано на следующем рисунке. Радиус окружности L равен $b = \sqrt{a^2 - h^2}$. Вычислим ПР функции, совпадающей с поверхностью сегмента внутри окружности L и равной нулю вне ее.

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - h, & x^2 + y^2 < a^2 - h^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq a^2 - h^2 \end{cases}$$



При $|s| \leq b$ имеем

$$R(s) = \int_{-\sqrt{b^2-s^2}}^{\sqrt{b^2-s^2}} \left(\sqrt{a^2 - s^2 - y^2} - h \right) dy = 2 \int_0^{\sqrt{b^2-s^2}} \left(\sqrt{a^2 - s^2 - y^2} - h \right) dy$$

Используя табличный интеграл А.1, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{b^2-s^2}} \sqrt{a^2 - s^2 - y^2} dy &= \frac{1}{2} \left(y \sqrt{a^2 - s^2 - y^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - s^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{b^2-s^2}} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 - s^2} \sqrt{a^2 - b^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(h \sqrt{b^2 - s^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \right)$$

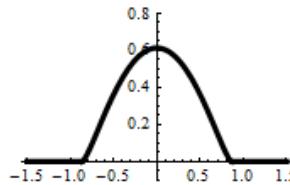
Тогда

$$\begin{aligned} R(s) &= h \sqrt{b^2 - s^2} + (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} - 2h \sqrt{b^2 - s^2} = \\ &= (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}} - h \sqrt{b^2 - s^2} \end{aligned}$$

Или окончательно

$$R(s) = \begin{cases} (a^2 - s^2) \arcsin \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2 - s^2}} - h \sqrt{a^2 - h^2 - s^2}, & |s| < \sqrt{a^2 - h^2} \\ 0, & |s| \geq \sqrt{a^2 - h^2} \end{cases}$$

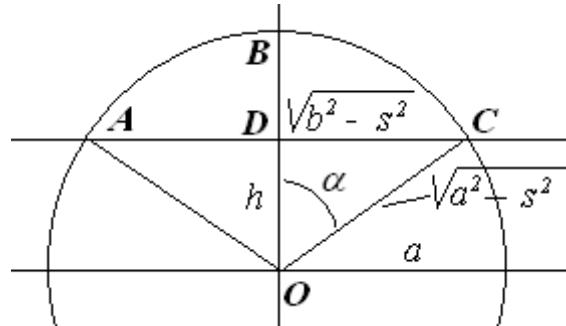
График функции $R(s)$ при $a = 1, h = 1/2, b = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ показан на следующем рисунке.



Если выражение для $R(s)$ записать в виде, использующем параметр b ,

$$R(s) = \begin{cases} (a^2 - s^2) \arcsin \sqrt{\frac{b^2 - s^2}{a^2 - s^2}} - \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - s^2)}, & |s| < b \\ 0, & |s| \geq b \end{cases}$$

то его можно пояснить по-другому. Изобразим сечение сферы плоскостью $x = s$ ($|s| < b$). Обозначения и длины отрезков DC и OC показаны на следующем рисунке.



Преобразование Радона равно площади сегмента $ABCD$, которая равняется площади сектора $OABC$ минус площадь треугольника OAC . Но

$$S_{OABC} = |OC|^2 \cdot \alpha = (a^2 - s^2) \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{a^2 - s^2}}$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |OD| = h \sqrt{b^2 - s^2}$$

Вычитая из первого значения второе, приходим к тому же результату, что и выше. При $h = 0$ и, следовательно, $a = b$, имеем

$$R(s) = \begin{cases} (a^2 - s^2)\pi/2, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}$$

что совпадает при $a=1$ с результатом примера 3.1.2.

4.2 ПР осесимметричных функций как преобразование Абеля

Запишем преобразование Радона для осесимметричной функции $f(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$. Напомним определение (1.3.1)

$$R[f](s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt$$

Для осесимметричной функции имеем

$$\begin{aligned} R[f(\sqrt{x^2 + y^2})](s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{(s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 + (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2}\right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = 2 \int_0^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = R(s), \end{aligned}$$

и ПР осесимметричной функции не зависит от параметра φ . Сделаем замену

$r = \sqrt{s^2 + t^2}$, где $|s| \leq r < \infty$ и $t = \sqrt{r^2 - s^2}$, $dt = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}$. Тогда

$$R(s) = 2 \int_0^{\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2}) dt = 2 \int_{|s|}^{\infty} f(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

Таким образом, преобразование Радона осесимметричной $f(r)$ функции выражается интегралом

$$R(s) = 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr \quad (1)$$

Если ввести обозначения $x = s^2$, $R(s) = R(\sqrt{x}) = q(x)$, $r^2 = \tau$, $f(r) = f(\sqrt{\tau}) = g(\tau)$ то получим

$$q(x) = \int_x^{\infty} \frac{g(\tau)}{(\tau - x)^{1/2}} d\tau \quad (2)$$

В настоящее время преобразованием Абеля функции $g(\tau)$ принято называть интеграл вида

$$q(x) = \int_a^x \frac{g(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha}} d\tau \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1$ и $a > 0$. Если в (3) известна функция $q(x)$, а $g(x)$ – неизвестная, то (3) называют уравнением Абеля. Другая его форма, которую называют «внешним» преобразованием Абеля, задается интегралом

$$q(x) = \int_x^{\infty} \frac{g(\tau)}{(\tau - x)^{\alpha}} d\tau \quad (4)$$

В нашем случае преобразование Радона осесимметричной функции в форме (2) совпало с внешним преобразованием Абеля (4) при $\alpha=1/2$.

Лемма 1. Рассмотрим некоторое выражение $\tilde{f}(r) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2})$. Используя его, построим финитную осесимметричную функцию $f(r) = \begin{cases} \tilde{f}(r), & |r| < a \\ 0, & |r| \geq a \end{cases}$. Тогда преобразование Радона функции $f(r)$ имеет вид

$$R[f](s) = 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = \begin{cases} 2 \int_{|s|}^a \frac{r \tilde{f}(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}.$$

Действительно, если $|s| \geq a$, то под интегралом $I = \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr$ будет стоять нулевая «ветвь» функции $f(r)$. Если же $|s| < a$, то для интеграла I мы будем иметь $\int_{|s|}^{\infty} = \int_{|s|}^a + \int_a^{\infty} = \int_{|s|}^a$, поскольку второй интеграл \int_a^{∞} равен нулю.

□

Пример 1. Рассмотрим осесимметричную функцию

$$f(r) = \begin{cases} f_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases},$$

При $|s| > a$ функция $f(r)$ равна нулю и формула (1) дает ноль. При $|s| < a$ имеем

$$R(s) = 2 \int_{|s|}^a \frac{r f_0}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 f_0 \int_{|s|}^a \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 f_0 \sqrt{r^2 - s^2} \Big|_{|s|}^a = 2 f_0 \sqrt{a^2 - s^2}$$

В результате получаем

$$R[f](s) = \begin{cases} 2 f_0 \sqrt{a^2 - s^2}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases} \quad (5)$$

Пример 2. Вычислить ПР полусферы, т.е. осесимметричной функции вида

$$f(r) = f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1 - r^2}, & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$$

Из (1) при $|s| < 1$ имеем

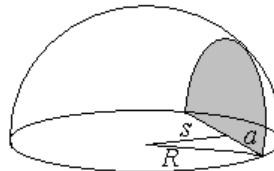
$$\begin{aligned} R[f](s) &= 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{|s|}^1 \frac{r \sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{|s|}^1 \sqrt{1 - r^2} d\sqrt{r^2 - s^2} = \\ &= 2 \left(\sqrt{1 - r^2} \sqrt{r^2 - s^2} \Big|_{|s|}^1 - \int_{|s|}^1 \sqrt{r^2 - s^2} d\sqrt{1 - r^2} \right) = -2 \int_{|s|}^1 \sqrt{r^2 - s^2} d\sqrt{1 - r^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1 - r^2} \\ r = \sqrt{1 - t^2} \end{array} \right| = -2 \int_{\sqrt{1-s^2}}^0 \sqrt{1 - s^2 - t^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1 - s^2 - t^2} dt = \left| \text{cm. A.1} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ \frac{1}{2} t \sqrt{1-s^2-t^2} + \frac{1}{2} (1-s^2) \arcsin \frac{t}{\sqrt{1-s^2}} \right\}_{t=0}^{\sqrt{1-s^2}} = \\
&= (1-s^2) \cdot \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} (1-s^2)
\end{aligned}$$

В результате

$$R[f](s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1-s^2), & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

Замечание. ПР полусферы можно вычислить геометрическим способом путем вычисления площади сечения полушара плоскостью, проходящей на расстоянии s от центра полусферы. Действительно, при $|s| < R$ сечение полушара вертикальной плоскостью будет полукруг (см. следующий рисунок).



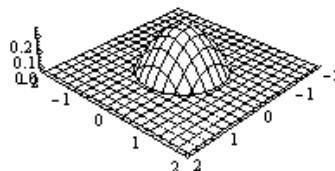
Его радиус a равен $a = \sqrt{R^2 - s^2}$. И площадь полукруга $S = \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{\pi}{2} (R^2 - s^2)$ при $|s| < R$. Площадь сечения равна нулю при $|s| \geq R$.

□

Пример 3. Вычислить ПР функции

$$f(r) = f(x, y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{3 + x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2 - \sqrt{3 + r^2}, & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$$

График функции $f(x, y)$ показан на следующем рисунке.



Здесь функция $z = 2 - \sqrt{3 + x^2 + y^2}$ представляет одну полость двуполостного гиперболоида вращения: $-x^2 - y^2 + (z - 2)^2 = 3$.

Из (1) при $|s| < 1$ имеем

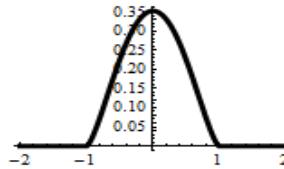
$$\begin{aligned}
R[f](s) &= 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{|s|}^1 \frac{r (2 - \sqrt{3 + r^2})}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{r=|s|}^1 (2 - \sqrt{3 + r^2}) d\sqrt{r^2 - s^2} = \\
&= \begin{cases} t = \sqrt{r^2 - s^2} \\ r = \sqrt{s^2 + t^2} \end{cases} = 2 \int_{t=0}^{\sqrt{1-s^2}} (2 - \sqrt{3 + s^2 + t^2}) dt = 4\sqrt{1-s^2} - 2 \int_{t=0}^{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{3 + s^2 + t^2} dt = \\
&= 4\sqrt{1-s^2} - \left(t \sqrt{3 + s^2 + t^2} + (3 + s^2) \ln \left(t + \sqrt{3 + s^2 + t^2} \right) \right)_{t=0}^{\sqrt{1-s^2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{1-s^2} - 2\sqrt{1-s^2} - (3+s^2) \ln(\sqrt{1-s^2} + 2) + (3+s^2) \ln \sqrt{3+s^2} = \\
&= 2\sqrt{1-s^2} + (3+s^2) \ln \frac{\sqrt{3+s^2}}{2+\sqrt{1-s^2}},
\end{aligned}$$

или окончательно

$$R[f](s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-s^2} + (3+s^2) \ln \frac{\sqrt{3+s^2}}{2+\sqrt{1-s^2}}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

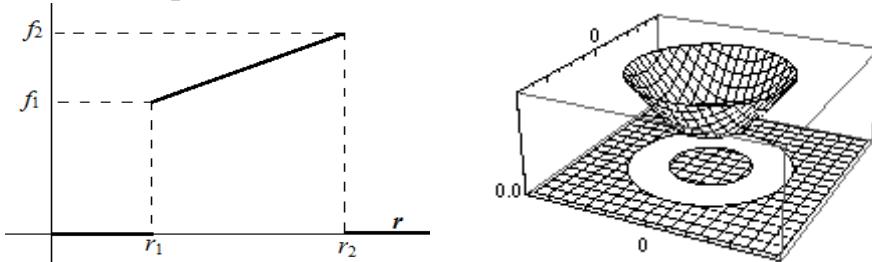
На следующем рисунке показан график функции $R[f](s)$.



Пример 4. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$ вида

$$f(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_1 \\ f_1 + \frac{f_2 - f_1}{r_2 - r_1}(r - r_1), & r_1 < r < r_2 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < r_1 < r_2) \\ 0, & r \geq r_2 \end{cases} \quad (6)$$

График функции $f(r)$ как функции одной переменной показан на следующем рисунке слева, а как осесимметричной функции $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ двух переменных показан справа



Обозначим $k = \frac{f_2 - f_1}{r_2 - r_1}$. Если $|s| \leq r_1$, то из (1) имеем

$$\begin{aligned}
R(s) &= 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r(f_1 + k(r - r_1))}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{r=r_1}^{r_2} (f_1 + k(r - r_1)) d\sqrt{r^2 - s^2} = \\
&= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{r^2 - s^2} \\ r = \sqrt{s^2 + t^2} \end{array} \right| = 2(f_1 - k r_1) t \Big|_{r=r_1}^{r_2} + 2k \int_{r=r_1}^{r_2} \sqrt{s^2 + t^2} dt = \left| \text{cm. A.2} \right| = \\
&= 2(f_1 - k r_1) t \Big|_{t=\sqrt{r_1^2 - s^2}}^{\sqrt{r_2^2 - s^2}} + k \left(t \sqrt{s^2 + t^2} + s^2 \ln \left(t + \sqrt{s^2 + t^2} \right) \right) \Big|_{t=\sqrt{r_1^2 - s^2}}^{\sqrt{r_2^2 - s^2}}
\end{aligned}$$

Введем функцию

$$F(t, s) = 2(f_1 - k r_1) t + k t \sqrt{t^2 + s^2} + k s^2 \ln(\sqrt{t^2 + s^2} + t) \quad (7)$$

Тогда при $|s| \leq r_1$ получаем

$$R(s) = F\left(\sqrt{r_2^2 - s^2}, s\right) - F\left(\sqrt{r_1^2 - s^2}, s\right)$$

Если $r_1 < |s| < r_2$, то

$$\begin{aligned} R(s) &= 2 \int_{|s|}^{r_2} \frac{r(f_1 + k(r - r_1))}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = 2 \int_{|s|}^{r_2} (f_1 + k(r - r_1)) d\sqrt{r^2 - s^2} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{r^2 - s^2} \\ r = \sqrt{s^2 + t^2} \end{array} \right| = 2(f_1 - k r_1) t \Big|_{r=|s|}^{r_2} + 2k \int_{|s|}^{r_2} \sqrt{s^2 + t^2} dt = \\ &= 2(f_1 - k r_1) t \Big|_{t=0}^{\sqrt{r_2^2 - s^2}} + k \left(t \sqrt{s^2 + t^2} + s^2 \ln(t + \sqrt{s^2 + t^2}) \right) \Big|_{t=0}^{\sqrt{r_2^2 - s^2}} = \\ &= F\left(\sqrt{r_2^2 - s^2}, s\right) - F(0, s) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R(s) = R_1(s) = \begin{cases} F\left(\sqrt{r_2^2 - s^2}, s\right) - F\left(\sqrt{r_1^2 - s^2}, s\right), & |s| \leq r_1 \\ F\left(\sqrt{r_2^2 - s^2}, s\right) - F(0, s), & r_1 < |s| < r_2 \\ 0, & |s| \geq r_2 \end{cases} \quad (8)$$

Если $r_1 = 0$, то участка интегрирования $|s| \leq r_1$ не будет и мы получим

$$R(s) = R_0(s) = \begin{cases} F\left(\sqrt{r_2^2 - s^2}, s\right) - F(0, s), & 0 \leq |s| < r_2 \\ 0, & |s| \geq r_2 \end{cases} \quad (9)$$

Рассмотрим частные случаи функции (6).

Пример 5. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} 1 - r, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

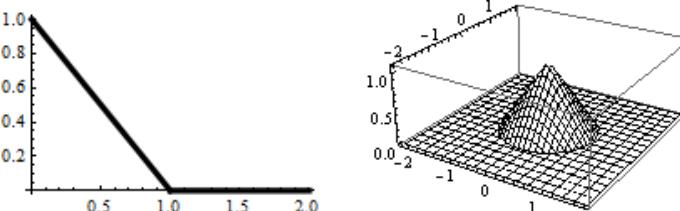


График функции $f(r)$ как функции одной переменной показан на предыдущем рисунке слева, а как осесимметричной функции $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ двух переменных показан справа. Функция $f(r)$ получается из (6) при $f_1 = 1, r_1 = 0, f_2 = 0, r_2 = 1$.

В этом случае ПР нужно вычислять по формуле (9). Тогда

$$k = \frac{f_2 - f_1}{r_2 - r_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1 \quad \text{и} \quad F(t, s) = 2t - t \sqrt{t^2 + s^2} - s^2 \ln(\sqrt{t^2 + s^2} + t)$$

При $|s| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{1-s^2}, s\right) - F(0, s) &= \left(2\sqrt{1-s^2} - \sqrt{1-s^2} - s^2 \ln(1 + \sqrt{1-s^2}) \right) + s^2 \ln|s| = \\ &= \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{1 + \sqrt{1-s^2}}, \end{aligned}$$

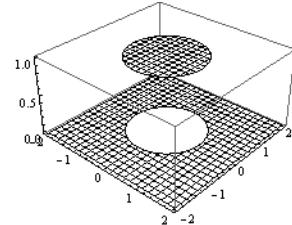
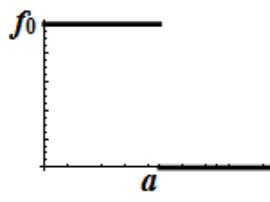
или окончательно

$$R[f](s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

График функции $R[f](s)$ приведен нами в примере 1.2. □

Пример 6. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} f_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$



Функция $f(r)$ получается из (6) при $f_1 = f_0, r_1 = 0, f_2 = f_0, r_2 = a$. В этом случае ПР нужно вычислять по формуле (9). При этом $k = 0$ и $F(t, s) = 2 f_0 t$. Если $|s| < a$, то

$$F(\sqrt{a^2 - s^2}, s) - F(0, s) = 2 f_0 \sqrt{a^2 - s^2},$$

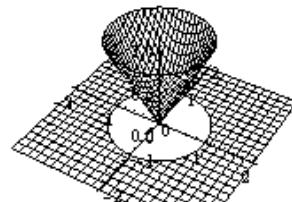
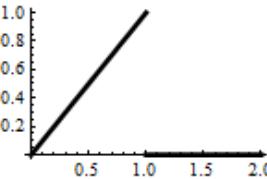
или окончательно

$$R[f](s) = \begin{cases} 2 f_0 \sqrt{a^2 - s^2}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases} \quad (11)$$

Тот же результат получен нами в примере 1, формула (5). □

Пример 7. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} r, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$



Функция $f(r)$ получается из (6) при $f_1 = 0, r_1 = 0, f_2 = 1, r_2 = 1$. В этом случае ПР нужно вычислять по ф. (9). Здесь $k = 1$ и

$$F(t, s) = t \sqrt{t^2 + s^2} + s^2 \ln(\sqrt{t^2 + s^2} + t)$$

При $|s| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} F(\sqrt{1-s^2}, s) - F(0, s) &= \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln(1 + \sqrt{1-s^2}) - s^2 \ln |s| = \\ &= \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{|s|}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$R[f](s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{|s|}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

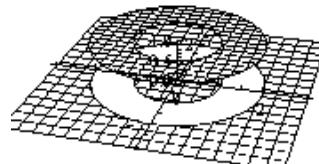
На следующем рисунке слева показан график функции $R[f](s)$ как функции одной переменной, а справа – как функции двух переменных $R[f](s, \varphi)$.



□

Пример 8. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq a \\ 1, & a < r < b \\ 0, & r \geq b \end{cases}$$



Функция $f(r)$ получается из (6) при $f_1 = 1, r_1 = a, f_2 = 1, r_2 = b$ ($0 < a < b$).

Фактически нам требуется вычислить ПР ХФ кольца. В этом случае ПР нужно вычислять по ф. (8). Здесь имеем $k = 0$ и $F(t, s) = 2t$. При $|s| \leq a$ получаем

$$F(\sqrt{b^2 - s^2}, s) - F(\sqrt{a^2 - s^2}, s) = 2(\sqrt{b^2 - s^2} - \sqrt{a^2 - s^2}).$$

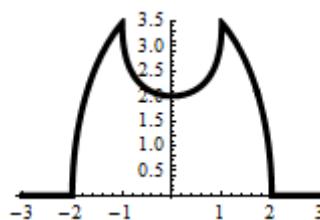
При $a < |s| < b$

$$F(\sqrt{b^2 - s^2}, s) - F(0, s) = 2\sqrt{b^2 - s^2},$$

или окончательно

$$R[f](s) = \begin{cases} 2(\sqrt{b^2 - s^2} - \sqrt{a^2 - s^2}), & |s| \leq a \\ 2\sqrt{b^2 - s^2}, & a \leq |s| \leq b \\ 0, & |s| \geq b \end{cases} \quad (13)$$

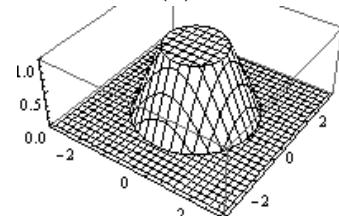
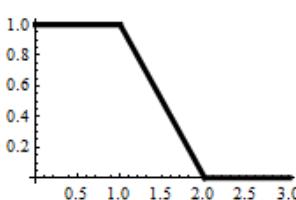
На следующем рисунке показан график функции $R[f](s)$ при $a = 1, b = 2$.



□

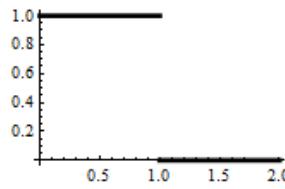
Пример 9. Вычислим ПР осесимметричной функции $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 2 - r, & 1 < r < 2 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$



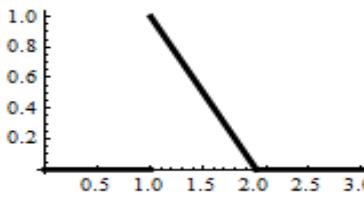
Определим две функции

$$f_1(r) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$



и

$$f_2(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 1 \\ 2-r, & 1 < r < 2 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$



Тогда $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$ и $R[f](s) = R[f_1](s) + R[f_2](s)$. Функция $R[f_1](s)$ получена в примере 6 ф. (11), которая в нашем случае имеет вид

$$R[f_1](s) = \begin{cases} 2\sqrt{1-s^2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| > 1 \end{cases}$$

Функция $f_2(r)$ получается из (6) при $f_1 = 1, r_1 = 1, f_2 = 0, r_2 = 2$. В этом случае $R[f_2](s)$ нужно вычислять по ф. (8). Здесь $k = -1$ и

$$F(t, s) = 4t - t\sqrt{t^2 + s^2} - s^2 \ln(\sqrt{t^2 + s^2} + t).$$

При $|s| \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & F(\sqrt{4-s^2}, s) - F(\sqrt{1-s^2}, s) = \\ & = (4\sqrt{4-s^2} - 2\sqrt{4-s^2} - s^2 \ln(2 + \sqrt{4-s^2})) - (4\sqrt{1-s^2} - \sqrt{1-s^2} - s^2 \ln(1 + \sqrt{1-s^2})) = \\ & = 2\sqrt{4-s^2} - s^2 \ln(2 + \sqrt{4-s^2}) - 3\sqrt{1-s^2} + s^2 \ln(1 + \sqrt{1-s^2}) = \\ & = 2\sqrt{4-s^2} - 3\sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{2 + \sqrt{4-s^2}}. \end{aligned}$$

При $1 < |s| < 2$ имеем

$$\begin{aligned} & F(\sqrt{4-s^2}, s) - F(0, s) = 2\sqrt{4-s^2} - s^2 \ln(2 + \sqrt{4-s^2}) + s^2 \ln|s| = \\ & = 2\sqrt{4-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{2 + \sqrt{4-s^2}}. \end{aligned}$$

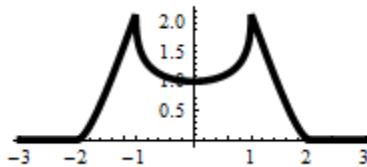
Таким образом,

$$R[f_2](s) = \begin{cases} 2\sqrt{4-s^2} - 3\sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-s^2}}{2 + \sqrt{4-s^2}}, & |s| \leq 1 \\ 2\sqrt{4-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{2 + \sqrt{4-s^2}}, & 1 < |s| < 2 \\ 0, & |s| \geq 2 \end{cases} \quad (14)$$

Складывая $R[f_1](s)$ и $R[f_2](s)$ получаем

$$R[f](s) = \begin{cases} 2 \sqrt{4-s^2} - \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-s^2}}{2+\sqrt{4-s^2}}, & |s| \leq 1 \\ 2 \sqrt{4-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{2+\sqrt{4-s^2}}, & 1 < |s| < 2 \\ 0, & |s| \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

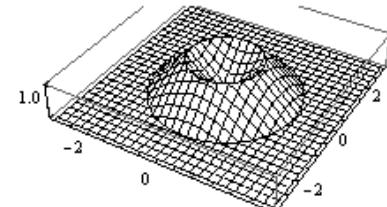
На следующем рисунке показан график функции $R[f](s)$.



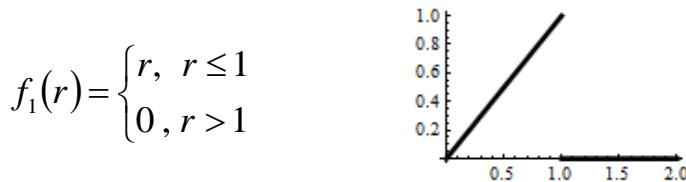
□

Пример 10. Вычислить ПР осесимметричной функции $f(r)$

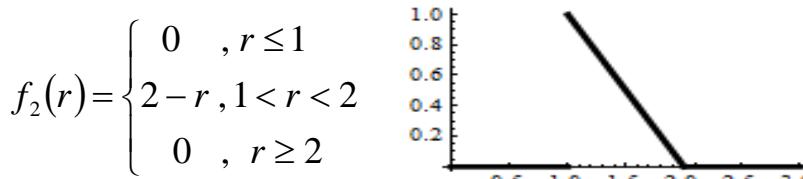
$$f(r) = \begin{cases} r, & r \leq 1 \\ 2-r, & 1 < r < 2 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$



Определим две функции



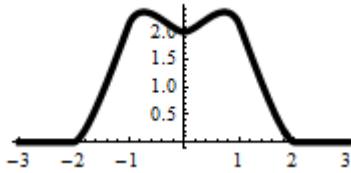
и



Тогда $f(r) = f_1(r) + f_2(r)$ и $R[f](s) = R[f_1](s) + R[f_2](s)$. Функция $R[f_1](s)$ нами получена в примере 7 ф. (12), а функция $R[f_2](s)$ получена в примере 9 ф. (14). Складывая $R[f_1](s)$ и $R[f_2](s)$ получаем

$$R[f](s) = \begin{cases} 2 \sqrt{4-s^2} - 2 \sqrt{1-s^2} + s^2 \left(\ln \frac{1+\sqrt{1-s^2}}{2+\sqrt{4-s^2}} + \ln \frac{1+\sqrt{1-s^2}}{|s|} \right), & |s| \leq 1 \\ 2 \sqrt{4-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{2+\sqrt{4-s^2}}, & 1 < |s| < 2 \\ 0, & |s| \geq 2 \end{cases}$$

На следующем рисунке показан график функции $R[f](s)$.



То же результат получается, если взять ПР «трапеции» из примера 9 ф. (15) и вычесть из него ПР «конуса» из пример 5 ф. (9).

□

Пример 11. Для преобразования Радона произвольной функции $f(x, y)$ имеет место формула (3.3.1).

$$R[f(ax, ay)](s, \varphi) = \frac{1}{|a|} R[f(x, y)](as, \varphi).$$

В осесимметричном случае имеем

$$f(ax, ay) = f\left(\operatorname{sign}(a)\sqrt{(ax)^2 + (ay)^2}\right) = f\left(\operatorname{sign}(a)|a|\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(ar).$$

И формула подобия в осесимметричном случае должна принять вид

$$R[f(ar)](s) = \frac{1}{|a|} R[f(r)](as), \quad (16)$$

Проверим ее, используя формулу (1). Считая $a > 0$, имеем

$$\begin{aligned} R[f(ar)](s) &= 2 \int_{|s|}^{\infty} \frac{r f(ar)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = \frac{2}{a} \int_{|s|}^{\infty} \frac{ar f(ar)}{\sqrt{a^2 r^2 - a^2 s^2}} d(ar) = \\ &= \frac{2}{a} \int_{|as|}^{\infty} \frac{t f(t)}{\sqrt{t^2 - a^2 s^2}} dt = \frac{1}{a} R[f(r)](as) \end{aligned}$$

Если же $a < 0$, то в интеграле из под корня, стоящего в знаменателе, выносится $|a|$ и поэтому

$$R[f(ar)] = \frac{2}{-a} \int_{|s|}^{\infty} \frac{ar f(ar)}{\sqrt{a^2 r^2 - a^2 s^2}} d(ar) = \frac{1}{-a} R[f(r)](as).$$

В обоих случаях мы получаем (16).

4.3 Обращение осесимметричного преобразования Радона

Как мы видели, осесимметричное преобразование Радона сводится к решению «внешнего» интегрального уравнения Абеля

$$\int_{|s|}^{\infty} \frac{2r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = R(s) \quad (1)$$

Для его решения используем методику, которую применял Абель. Будем считать, что правая часть непрерывно дифференцируема, а искомая подынтегральная функция такова, что несобственный интеграл сходится. Для этого на бесконечности она должна убывать быстрее, например, чем $1/r$.

Заметим, что функция $R(s)$ в осесимметричном случае является четной и может быть представлена в виде $R(|s|)$. Но тогда в (1) мы можем рассматривать только положительные значения s и модуль $|s|$ в нижнем пределе интеграла

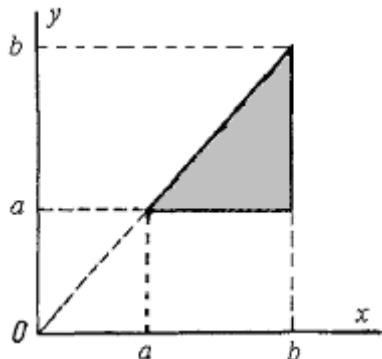
можно убрать. Умножим обе части (1) на $2s(s^2 - x^2)^{-1/2} ds$ и проинтегрируем по s в пределах от x до ∞ . Имеем

$$\int_x^\infty \frac{2s}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds \int_s^\infty \frac{2r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = \int_x^\infty \frac{2s R(s)}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds \quad (2)$$

Вспомним формулу Дирихле

$$\int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy.$$

Следующий рисунок ее поясняет, представляя область, по которой выполняется интегрирование



Формула Дирихле в случае бесконечных пределов имеет вид

$$\int_a^\infty dy \int_y^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty dx \int_a^x f(x, y) dy \quad (3)$$

если только все интегралы сходятся. Для повторного интеграла в левой части (2) формула (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_x^\infty ds \int_s^\infty \frac{2r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} \frac{2s}{\sqrt{s^2 - x^2}} dr &= \left| \begin{array}{l} x \rightarrow a \quad r \leftrightarrow x \\ y \leftrightarrow s \end{array} \right| = \int_x^\infty dr \int_x^r \frac{2r f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} \frac{2s}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds = \\ &= \int_x^\infty 2r f(r) dr \int_x^r \frac{2s ds}{\sqrt{r^2 - s^2} \sqrt{s^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Это приводит (2) к уравнению

$$\int_x^\infty 2r f(r) dr \int_x^r \frac{2s ds}{\sqrt{r^2 - s^2} \sqrt{s^2 - x^2}} = F(x) \quad (4)$$

где

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{2s R(s)}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds$$

Во внутреннем интеграле (4) сделаем подстановку $s^2 = r^2 - y(r^2 - x^2)$, тогда $ds^2 = -(r^2 - x^2) dy$, $s^2 - x^2 = (r^2 - x^2)(1 - y)$, $r^2 - s^2 = y(r^2 - x^2)$ и диапазоном изменения y будет 1 и 0. Поэтому

$$\int_x^r \frac{2s ds}{\sqrt{r^2 - s^2} \sqrt{s^2 - x^2}} = \int_x^{r^2} \frac{ds^2}{\sqrt{r^2 - s^2} \sqrt{s^2 - x^2}} =$$

$$= \int_1^0 \frac{-\left(r^2 - x^2\right) dy}{\sqrt{y(r^2 - x^2)} \sqrt{(1-y)(r^2 - x^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y} \sqrt{1-y}}$$

Пользуясь формулой (A.3)

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1-y)^{1-\alpha} y^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi},$$

которая при $\alpha=1/2$ принимает вид

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y} \sqrt{1-y}} = \pi,$$

из (4) получаем

$$\pi \int_x^\infty 2r f(r) dr = F(x).$$

Дифференцируя по x , имеем

$$-\pi 2x f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{2s R(s)}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds$$

или

$$f(x) = -\frac{1}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds$$

Возвращаясь к старым обозначениям, решение уравнения (1) получаем в виде

$$f(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \quad (5)$$

Получим другую форму записи формулы обращения. Для этого выполним в (5) интегрирование по частям и учтем условие регулярности на бесконечности $s \cdot R(s) \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty R(s) d\sqrt{s^2 - r^2} = \\ &= -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \left(\underbrace{R(s) \sqrt{s^2 - r^2}}_{=0} \Big|_r^\infty - \int_r^\infty \sqrt{s^2 - r^2} \frac{d}{ds} R(s) ds \right) = \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \left(\int_r^\infty \sqrt{s^2 - r^2} \frac{d R(s)}{ds} ds \right). \end{aligned}$$

Т.о.

$$f(r) = \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty R'(s) \sqrt{s^2 - r^2} ds \quad (6)$$

Если в (6) выполнить дифференцирование по r , то получим

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{\pi r} \left(\int_r^\infty \frac{d}{dr} \sqrt{s^2 - r^2} \frac{d R(s)}{ds} ds - \underbrace{\sqrt{s^2 - r^2} \frac{d R(s)}{ds}}_{=0} \Big|_{s=r} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi r} \left(\int_r^\infty \frac{-r}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{d R(s)}{ds} ds \right) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{d R(s)}{ds} ds. \end{aligned}$$

Таким образом

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \quad (7)$$

Есть еще одна формула обращения, которая принадлежит А. Кормаку.

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{r R(s)}{s \sqrt{s^2 - r^2}} ds \quad (8)$$

Она приводится к виду (7) после интегрирования по частям. Действительно, обозначим $u = r R(s)$ и $v = \frac{1}{r} \arccos \frac{r}{s}$. Отсюда $du = r R'_s(s) ds$ и

$$d v = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(\arccos \frac{r}{s} \right) ds = \frac{1}{r} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{s} \right)^2}} \left(-\frac{r}{s^2} \right) ds = \frac{ds}{s^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{s} \right)^2}} = \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - r^2}}$$

Тогда интеграл в (8) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \int_r^{+\infty} \frac{r R(s)}{s \sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \int_{s=r}^{\infty} u d v = u \cdot v \Big|_{s=r}^{\infty} - \int_{s=r}^{\infty} v du = R(s) \arccos \frac{r}{s} \Big|_{s=r}^{\infty} - \int_{s=r}^{\infty} \arccos \frac{r}{s} \cdot R'_s(s) ds = \\ &= \left| \begin{array}{l} R(\infty) = 0 \\ \arccos(1) = 0 \end{array} \right| = - \int_r^{\infty} R'_s(s) \arccos \frac{r}{s} ds. \end{aligned}$$

Полученное выражение дифференцируем по r .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(- \int_r^{\infty} R'_s(s) \arccos \frac{r}{s} ds \right) &= - \left(\int_r^{\infty} R'_s(s) \frac{d}{dr} \left(\arccos \frac{r}{s} \right) ds - R'_s(s) \arccos \frac{r}{s} \Big|_{s=r} \right) = \\ &= - \int_r^{\infty} R'_s(s) \frac{d}{dr} \left(\arccos \frac{r}{s} \right) ds = - \int_r^{\infty} R'_s(s) \frac{-1}{\sqrt{1 - (r/s)^2}} \frac{1}{s} ds = \int_r^{\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \end{aligned}$$

Т.о.

$$\frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{r R(s)}{s \sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_r^{\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds.$$

Учитывая множитель $-1/\pi$ мы приходим к (7).

Замечание. Определим следующий интеграл J

$$J(g(t), \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{t g(t)}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} dt,$$

где первый аргумент $g(t)$ является некоторой функцией одного аргумента. Формулы прямого (1) и обратного (5) преобразований Радона можно выразить через J следующим образом:

$$\begin{aligned} R[f](s) &= 2 J(f(r), |s|) \\ R^{-1}[R[f](s)] &= f(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} J(R[f](s), r) \end{aligned}$$

Если интеграл $J(h(t), \alpha)$ для некоторой функции $h(t)$ вычисляется символьно, то символьно будет вычисляться прямое $R[h(r)](s)$ и обратное $R^{-1}[h(s)](r)$ преобразования Радона.

Формулы (5) – (8) показывают, что в осесимметричном случае задача восстановления функции $f(r)$ по ее радоновскому образу $R(s)$ однозначно разрешима.

Пример 1. Определим радоновский прообраз функции $R(s) = e^{-s^2}$. Из (5) имеем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{s e^{-s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I$$

Здесь и в следующих примерах через I будем обозначать интеграл, стоящий в формуле обращения $I = \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$. Тогда

$$I = \int_r^\infty \frac{s e^{-s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = e^{-r^2} \int_{s=r}^\infty e^{-(s^2 - r^2)} d\sqrt{s^2 - r^2} = \left| t = \sqrt{s^2 - r^2} \right| = e^{-r^2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

Учитывая табличный интеграл (A.4) $\int_0^\infty e^{-q^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}$ ($q > 0$), имеем $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-r^2}$. В

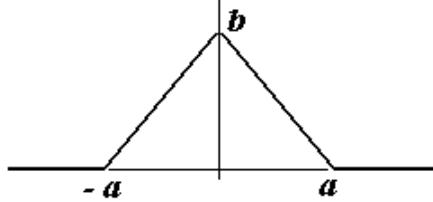
результате получаем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-r^2} \right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi r} (-2r e^{-r^2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x^2 + y^2)}$$

□

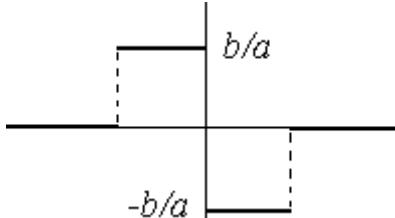
Пример 2. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} \frac{b}{a} (a - |s|), & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}$$



Легко видеть, что

$$\frac{dR}{ds} = \begin{cases} 0, & s < -a \\ b/a, & -a < s < 0 \\ -b/a, & 0 < s < a \\ 0, & s > a \end{cases}$$



Поскольку в формулах (5) – (8) интегрирование выполняется по положительному участку вещественной оси $0 \leq r \leq s < \infty$, то нам важно представление «проекции» $R(s)$ только для положительных значений s .

При $r > a$ имеем $\frac{dR}{ds} = 0$ и из (7) следует $f(r) = 0$. При $r < a$ из (7)

получаем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{dR}{ds} ds = \frac{b}{\pi a} \int_r^a \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds.$$

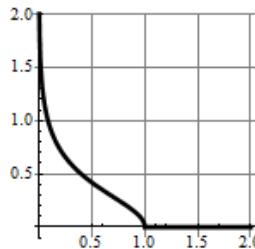
Учитывая табличный интеграл A.5 $\int \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \ln(s + \sqrt{s^2 - r^2})$, получаем

$$\int_r^a \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \ln(s + \sqrt{s^2 - r^2}) \Big|_{s=r}^a = \ln(a + \sqrt{a^2 - r^2}) - \ln r = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}.$$

Тогда

$$f(r) = \begin{cases} \frac{b}{\pi a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

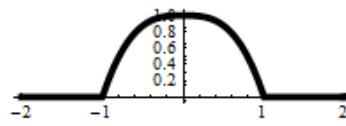
График этой функции показан на следующем рисунке для $a=1$, $b=1$. Из него видно, что $f(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$.



Замечание. Применение формулы (5) дает тот же результат, но с более длительными выкладками. □

Пример 3. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1 - s^2 |s|, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$



Модуль здесь выбран потому, что функция $R(s)$ должна быть четной.

Легко видеть, что

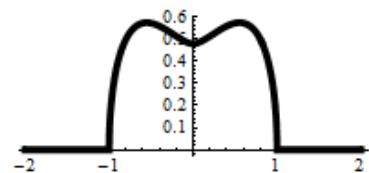
$$\frac{dR}{ds} = \begin{cases} -3s|s|, & s < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

Используем формулу обращения (7). При $r > 1$ будет $\frac{dR}{ds} = 0$ и (7) дает $f(r) = 0$. При $0 \leq r < 1$ из (7) получаем

$$\begin{aligned} f(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{dR}{ds} ds = \frac{3}{\pi} \int_r^1 \frac{s|s|}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{3}{\pi} \int_r^1 \frac{s^2}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \\ &= \frac{3}{2\pi} \left(\sqrt{1-r^2} + r^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r} \right). \end{aligned}$$

Тогда

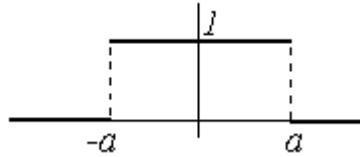
$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi} \left(\sqrt{1-r^2} + r^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{|r|} \right), & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$$



□

Пример 4. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}$$



Вычислим интеграл $I = \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$, стоящий в формуле (5). При $r > a$ этот интеграл равен нулю. При $r < a$ имеем

$$I = \int_r^a \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_{s=r}^a d\sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{s^2 - r^2} \Big|_{s=r}^a = \sqrt{a^2 - r^2},$$

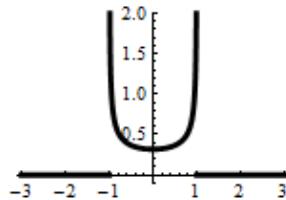
и

$$-\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I = -\frac{-2r}{\pi r 2\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Тогда

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}.$$

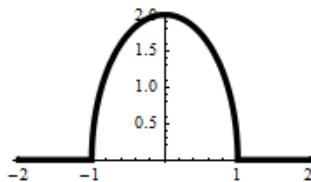
График этой функции при $a = 1$ показан на следующем рисунке.



□

Пример 5. Определим радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - s^2}, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}$$



Вычислим интеграл $I = \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$, стоящий в формуле (5). При $r \geq a$ он равен нулю $I = 0$. При $r < a$ имеем

$$I = \int_r^a \frac{s 2\sqrt{a^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = 2 \int_r^a \sqrt{a^2 - s^2} d\sqrt{s^2 - r^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{s^2 - r^2} = t \\ s = \sqrt{r^2 + t^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} \sqrt{a^2 - r^2 - t^2} dt = |cm. A.1| =$$

$$= \left(t \sqrt{a^2 - r^2 - t^2} + (a^2 - r^2) \arcsin \frac{t}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right)_{t=0}^{\sqrt{a^2 - r^2}} = (a^2 - r^2) \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2).$$

Тогда при $r < a$

$$\frac{dI}{dr} = -2r \frac{\pi}{2} = -\pi r \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I = -\frac{1}{\pi r} (-\pi r) = 1$$

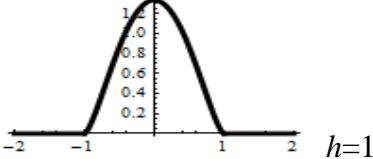
В результате

$$f(r) = \begin{cases} 1, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}.$$

□

Пример 6. Определим радоновский прообраз функции (см. пример 1.1)

$$R(s) = \begin{cases} \frac{4}{3}(h^2 - s^2)^{3/2}, & |s| < h \\ 0, & |s| \geq h \end{cases}$$



Вычислим интеграл $I = \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$, стоящий в формуле (5). При $r \geq h$ он равен нулю $I = 0$. При $r < h$ имеем

$$I = \frac{4}{3} \int_r^h \frac{s (h^2 - s^2)^{(3/2)}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{1}{4} \pi (h^2 - r^2)^2.$$

Тогда при $r < h$

$$\frac{dI}{dr} = -\pi r (h^2 - r^2) \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I = h^2 - r^2.$$

В результате

$$f(r) = \begin{cases} h^2 - r^2, & r < h \\ 0, & r \geq h \end{cases}.$$

График функции $f(r)$ приведен нами в примере 1.1.

□

Пример 7. Определим радоновский прообраз функции (см. пример 2.2)

$$R(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (a^2 - s^2), & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}.$$

Ее производная равна

$$R'_s(s) = \begin{cases} -\pi s, & |s| < a \\ 0, & |s| \geq a \end{cases}$$

Вычислим интеграл $I = \int_r^\infty \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$, стоящий в формуле (7). При $r \geq a$ он равен нулю $I = 0$. При $r < a$ имеем

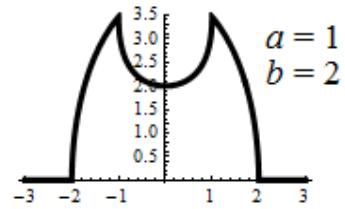
$$I = \int_r^a \frac{-\pi s}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\pi \int_{s=r}^a d \sqrt{s^2 - r^2} = -\pi \sqrt{a^2 - r^2}.$$

В результате, используя (7), получаем

$$f(r) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - r^2}, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}.$$

Пример 8. Определим радоновский прообраз функции (см. пример 2.8).

$$R[f](s) = \begin{cases} 2\left(\sqrt{b^2 - s^2} - \sqrt{a^2 - s^2}\right), & |s| \leq a \\ 2\sqrt{b^2 - s^2}, & a \leq |s| \leq b \\ 0, & |s| \geq b \end{cases}$$



Вычислим интеграл $I = \int_r^\infty \frac{s R(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$, стоящий в формуле (5). При $r \geq b$ он равен нулю $I = 0$. При $a < r < b$ имеем

$$I = \int_r^b \frac{s 2\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{\pi}{2} (b^2 - r^2).$$

При $r \leq a$ имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_r^a \frac{s 2\left(\sqrt{b^2 - s^2} - \sqrt{a^2 - s^2}\right)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \int_a^b \frac{s 2\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \\ &= \int_r^a \frac{s 2\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \int_a^b \frac{s 2\sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds - \int_r^a \frac{s 2\sqrt{a^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \\ &= 2 \int_r^b \frac{s \sqrt{b^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds - 2 \int_r^a \frac{s \sqrt{a^2 - s^2}}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{\pi}{2} (b^2 - r^2) - \frac{\pi}{2} (a^2 - r^2) = \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Тогда при $a < r < b$

$$\frac{dI}{dr} = -\pi r \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} I = 1,$$

а при $r \geq b$ или $r \leq a$ имеем $\frac{dI}{dr} = 0$. В результате, используя (5), получаем

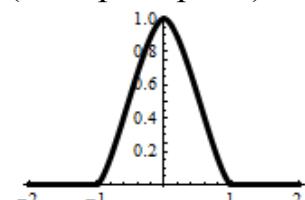
$$f(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ 1, & a < r < b \\ 0, & r \geq b \end{cases}$$

Мы получили характеристическую функцию кольца.

□

Пример 9. Определим радоновский прообраз функции (см. пример 2.5).

$$R[f](s) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$



Вычислим $\frac{dR}{ds}$ при $|s| < 1$. Имеем

$$R'_s(s) = \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} + 2s \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}} + s^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1+\sqrt{1-s^2}} \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}} \right) =$$

$$= -\frac{s}{\sqrt{1-s^2}} + 2s \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}} + s^2 \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}} = 2s \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}}$$

Теперь используем формулу обращения (7). При $r > 1$ будет $\frac{dR}{ds} = 0$ и (7) даст ноль $f(r) = 0$. При $0 \leq r < 1$ интеграл в (7) равен

$$I = \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = 2 \int_r^1 \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}} ds =$$

$$= 2 \int_{s=r}^1 \ln \frac{|s|}{1+\sqrt{1-s^2}} d\sqrt{s^2 - r^2} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{s^2 - r^2} \\ s = \sqrt{t^2 + r^2} \end{array} \right| = 2 \int_{t=0}^{\sqrt{1-r^2}} \ln \frac{\sqrt{t^2 + r^2}}{1+\sqrt{1-r^2-t^2}} dt$$

Далее имеем (попробуйте вычислить следующие интегралы, например, в системе *Mathematica* или *Maple*)

$$I_1 = \int_{t=0}^{\sqrt{1-r^2}} \ln \sqrt{t^2 + r^2} dt = -\sqrt{1-r^2} + r \arccos r$$

$$I_2 = \int_{t=0}^{\sqrt{1-r^2}} \ln \left(1 + \sqrt{1-r^2-t^2} \right) dt = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-r^2} - r \arcsin r$$

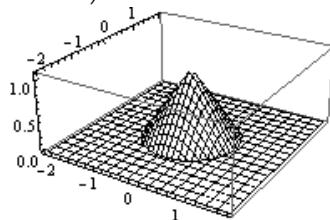
Тогда

$$I = 2(I_1 - I_2) = 2r(\arccos r + \arcsin r) - \pi = \pi(r-1),$$

поскольку справедливо тождество $\arccos r + \arcsin r = \pi/2$. Подставляя выражение для интеграла I в (7), окончательно получаем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} I, & 0 \leq r < 1 \\ 0, & |r| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-r, & 0 \leq r < 1 \\ 0, & |r| \geq 1 \end{cases}.$$

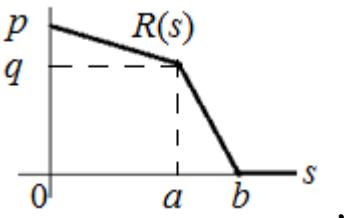
График функции $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ показан на следующем рисунке.



□

Пример 10. Определим радоновский прообраз функции

$$R[f](s) = \begin{cases} p + k_1 s, & |s| \leq a \\ q + k_2(s-a), & a < |s| < b \\ 0, & |s| \geq b \end{cases}$$



где $k_1 = \frac{q-p}{a}$ и $k_2 = -\frac{q}{b-a}$. Легко видеть, что

$$R'_s(s) = \begin{cases} k_1, & |s| < a \\ k_2, & a < |s| < b \\ 0, & |s| > b \end{cases}$$

Используем формулу обращения (7). При $r > b$ будет $\frac{dR}{ds} = 0$ и (7) даст ноль $f(r) = 0$. При $a < r < b$ интеграл в (7) равен (см. табличный интеграл А.5)

$$I_2 = \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_r^b \frac{k_2}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = k_2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - r^2}}{r}.$$

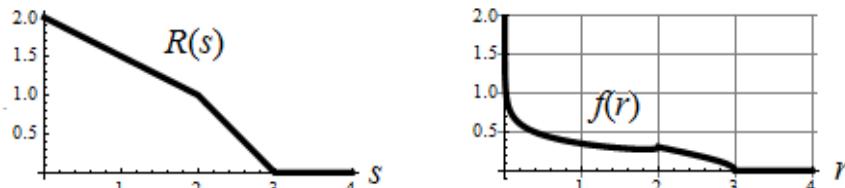
При $0 \leq r < a$ интеграл в (7) равен

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_r^a \frac{k_1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \int_a^b \frac{k_2}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \\ &= k_1 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} + k_2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - r^2}}{a + \sqrt{a^2 - r^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для интегралов I_1 и I_2 в (7), получаем

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\frac{1}{\pi} \begin{cases} I_1, & 0 \leq r < a \\ I_2, & a \leq r < b \\ 0, & |r| \geq b \end{cases}$$

График функции $R(s)$ при $p = 2, q = 1, a = 2, b = 3$ показан на следующем рисунке слева, а график ее прообраза $f(r)$ – показан справа.



Легко проверить, что функция $f(r)$ непрерывна при $r = a$. Действительно,

$$\left. \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} \right|_{r=a} = \ln 1 = 0. \text{ Тогда } I_1 = k_2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} = I_2.$$

Однако первая производная $f'(r)$ при $r = a$ не определена. Точнее левая производная при $r \rightarrow a$ стремится к бесконечности (плюс или минус, в зависимости от k_1 и k_2), а правая – равна конечному значению.

5. Формулы обращения на основе интегральных преобразований.

В этой главе мы познакомим Вас с аналитическими методами обращения двумерного преобразования Радона. А именно, будем решать следующую задачу: задана проекция $R(s, \varphi)$, требуется найти ее радоновский прообраз. При этом функция $R(s, \varphi)$ не может быть выбрана произвольно. Например, функция $R(s, \varphi)$ должна удовлетворять тождеству (3.1.4) $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$, а в осесимметричном случае проекция $R(s, \varphi) = R(s)$ должна быть четной функцией параметра s . Прежде, чем обращать преобразование Радона следует убедиться, что функция $R(s, \varphi)$ задана допустимой. В литературе имеются результаты, которые говорят о том, когда функция $R(s, \varphi)$ может рассматриваться как преобразованием Радона некоторой функции $f(x, y)$ (т.е. $R(s, \varphi) = R[f(x, y)]$). Заинтересованного читателя мы отправляем к книге Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: М.: Мир, 1990. В этой главе нашего пособия мы будем полагать, что используемые функции $R(s, \varphi)$ допустимы.

5.1 Формула обращения Радона.

Напомним определение преобразования Радона функции $f(x, y)$

$$R[f](s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (1)$$

Выполним преобразования в правой части (1).

$$s \cos \varphi - t \sin \varphi = \sqrt{s^2 + t^2} \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \cos \varphi - \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \sin \varphi \right)$$

Обозначим $\cos \alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$ и $\sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}$. Тогда

$$s \cos \varphi - t \sin \varphi = \sqrt{s^2 + t^2} (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = \cos(\varphi + \alpha)$$

Аналогично

$$s \sin \varphi + t \cos \varphi = \sqrt{s^2 + t^2} (\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi) = \sin(\varphi + \alpha)$$

и (1) можно записать в виде

$$R[f](s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)\right) dt$$

Вычислим интеграл от функции $R[f](s, \varphi)$ по φ , изменяющимся от 0 до 2π .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R[f](s, \varphi) d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)\right) dt \right) d\varphi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)\right) d\varphi dt. \end{aligned}$$

Мы изменили порядок интегрирования предполагая, что соответствующие интегралы сходятся. Но $\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)\right) d\varphi$ не

зависит от $\alpha = \alpha(s, t)$, поскольку это интеграл в плоскости s, t по окружности радиуса $\sqrt{s^2 + t^2}$ и добавка α к переменной интегрирования φ не влияет на значение интеграла по окружности. Поэтому можем положить $\alpha = 0$

$$\int_0^{2\pi} R[f](s, \varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos \varphi, \sqrt{s^2 + t^2} \sin \varphi\right) d\varphi dt. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь произвольную не осесимметричную функцию $f(x, y)$. Усредним ее по окружностям с центром в точке $(0,0)$. Получим функцию $F(r)$, зависящую только от расстояния r – радиуса окружности:

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \quad (3)$$

При этом $F(0) = f(0,0)$. Применим ПР к функции $F(r)$. Имеем

$$\begin{aligned} R[F(r)](s) &= \frac{1}{2\pi} R \left[\int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta\right) d\theta \right] (s) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{s^2 + t^2} \cos \theta, \sqrt{s^2 + t^2} \sin \theta\right) d\theta dt, \end{aligned} \quad (4)$$

поскольку $x^2 + y^2 = (s \cos \varphi - t \sin \varphi)^2 + (s \sin \varphi + t \cos \varphi)^2 = s^2 + t^2$. Заметим также, что из (4) следует, что функция $R[F](s)$ четная по s .

Сравнивая последнее выражение в (4) с (2), видим

$$R[F](s) = R \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right] (s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta \quad (5)$$

Правая часть (5) представляет среднее интегральное по прямым, находящимся на расстоянии s от рассматриваемой точки.

Нам известна формула (4.3.7) обращения осесимметричного ПР, которая для функции $R[F](s)$ принимает вид

$$F(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \quad (6)$$

В частности

$$F(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds, \quad (7)$$

Интеграл в (7) имеет особенность в нуле и его следует понимать как

$$F(0) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds$$

Поскольку преобразование Радона осесимметричной функции $R[F](s)$ четно по s , то $R'_s[F](s)$ – нечетно, а $\frac{R'_s[F](s)}{s}$ – четно по s . Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds = \frac{1}{2} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds.$$

При этом интеграл в правой части следует понимать в смысле главного значения. В нашем случае главное значение интеграла (обозначается v.p.), стоящего справа, определяется формулой

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds + \int_{\varepsilon}^A \frac{R'_s[F](s)}{s} ds \right].$$

Далее, учитывая (5) и то, что $F(0) = f(0,0)$ из (7) получаем

$$f(0,0) = -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds = -\frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta \right) ds. \quad (8)$$

Обратите внимание, что в выкладках используются две «функции – проекции» $R[F](s)$ и $R[f](s, \varphi)$ – преобразования Радона функций $F(r)$ и $f(x, y)$.

Переставляя в (8) пределы интегрирования, получаем

$$f(0,0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[f](s, \theta)}{s} ds d\theta \quad (9)$$

Внутренний интеграл имеет особенность в нуле и понимается в смысле главного значения. В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, мы будем опускать обозначение v.p. главного значения.

Значение функции $f(x, y)$ в произвольной точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ может быть получено непосредственно из (9). Для этого достаточно рассмотреть функцию $f_1(x, y) = f(x + x_0, y + y_0) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$. Применяя (9) к функции $f_1(x, y)$, а также вспоминая формулу сдвига (3.3.3)

$$R[f_1](s, \varphi) = R[f](s + x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi, \varphi) = R[f](s + (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0))$$

и, используя обозначения $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, получаем

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f_1(0,0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_\tau[f_1](\tau, \varphi)}{\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_\tau[f](\tau + (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0), \varphi)}{\tau} d\tau = |\tau + (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0) = s| = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0)} ds = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)} ds. \end{aligned}$$

Заменяя x_0, y_0 на x, y , получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} ds d\varphi. \quad (10)$$

Меняя обратно порядок интегрирования, имеем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_0^{2\pi} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi. \quad (11)$$

Пример 1. Пусть $R(s) = e^{-s^2}$. Тогда $R'_s(s) = -2s e^{-s^2}$. Из (11) имеем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_0^{2\pi} \frac{-2s e^{-s^2}}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} ds \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi \quad (12)$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \left(\frac{s}{r} - \frac{x}{r} \cos \varphi - \frac{y}{r} \sin \varphi \right)} d\varphi, \quad (13)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Обозначим $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$. Тогда

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \left(\frac{s}{r} - (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) \right)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - r \cos(\varphi - \alpha)} d\varphi$$

Справа стоит интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна длине периода. Сдвиг на α не влияет на значение интеграла. Поэтому

$$I_0 = v.p. \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - r \cos x} d x \quad (14)$$

При $|s| > r$ знаменатель подынтегральной функции не обращается в ноль и интеграл существует в обычном смысле. При $|s| < r$ знаменатель на отрезке интегрирования обращается в ноль в двух точках и интеграл существует только в смысле главного значения. В приложении C мы вычислили интеграл I_0 (см. формулу (C.13))

$$I_0(s) = \begin{cases} 0 & , |s| < r \\ \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{sign}(s), & |s| > r \end{cases} = \operatorname{sign}(s) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r), \quad (15)$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – знаковая функция, и $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Тогда из (12) для $f(x, y)$ получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(s) s e^{-s^2} ds = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign}(s) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) s e^{-s^2} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s|}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) e^{-s^2} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) e^{-s^2} ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} e^{-s^2} ds = \frac{2}{\pi} e^{-r^2} \int_{s=r}^{+\infty} e^{-(s^2 - r^2)} d\sqrt{s^2 - r^2} = \left| t = \sqrt{s^2 - r^2} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-r^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\pi} e^{-r^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2}. \end{aligned}$$

Здесь интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) e^{-s^2} ds$ мы заменили на $2 \int_0^{\infty} (\cdot) \) в силу четности подынтегральной функции, а также использовали табличный интеграл (A.4), который в нашем случае имеет вид $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Т.о. мы получили, что$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 - y^2}.$$

Это полностью совпадает с результатом примера (4.3.1). \square

Пример 2. Пусть $R[f](s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1 - s^2), & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$. Тогда $R'_s[f](s) = \begin{cases} -\pi s, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$ и

из (10) получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{-\pi s}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} ds d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 s ds \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi$$

Внутренний интеграл такой же как в (12) и для него мы уже вычислили значение в (15). Подставляя его, получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} I_0(s) s ds = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \text{sign}(s) \cdot s \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{|s|}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \int_0^1 \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) ds \end{aligned}$$

При $r \geq 1$ последний интеграл равен нулю, а при $r < 1$ имеем

$$\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) ds = \int_r^1 \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_r^1 d \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{s^2 - r^2} \Big|_{s=r}^1 = \sqrt{1 - r^2}.$$

Окончательно

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - r^2}, & r < 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Это полностью соответствует примеру (4.3.7). \square

Пример 3. В осесимметричном случае, когда $R[f](s, \varphi) = R(s)$, формула (11) принимает вид

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R'_s(s) ds \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi.$$

Внутренний интеграл такой же как в (12) и для него мы уже вычислили значение в (15). Подставляя его, получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(s) R'_s(s) ds = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R'_s(s) \text{sign}(s) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s(s) \text{sign}(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds. \end{aligned}$$

В осесимметричном случае функция $R(s)$ должна быть четной. Следовательно, $R'_s(s)$ – нечетная и $R'_s(s)\text{sign}(s)$ – четная по s функции. Тогда под интегралом стоит четная функция. Поэтому

$$f(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) d s = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} d s, \quad (16)$$

что совпадает с формулой (4.3.7).

Замечание. То, что мы пришли к формуле (16) не должно быть удивительным. Действительно, для осесимметричной функции $f(r)$ ф. (3) дает

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r) d\theta = f(r),$$

и, следовательно, $R[F](s) = R[f](s)$. Все преобразования мы начинали с формулы (6), которая в осесимметричном случае сразу совпадает с (16). \square

Пример 4. Пусть $R(s, \varphi) = \cos\varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$. Это не осесимметричная функция, но она удовлетворяет тождеству (3.1.4). Поэтому может рассматриваться как ПР некоторой функции $f(x, y)$. Поскольку $R'_s(s, \varphi) = \cos\varphi \cdot e^{-s^2} (1 - 2s^2)$, то из (11) получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (1 - 2s^2) d s \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{s - x\cos\varphi - y\sin\varphi} d\varphi \quad (17)$$

Для внутреннего интеграла I имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{s - x\cos\varphi - y\sin\varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\alpha = x/r, \sin\alpha = y/r \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{s - r\cos(\varphi - \alpha)} d\varphi = \\ &= |\varphi - \alpha = \theta| = \int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} \frac{\cos(\theta + \alpha)}{s - r\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta + \alpha)}{s - r\cos\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Здесь $\int_{-\alpha}^{2\pi - \alpha} = \int_{-\pi}^{\pi}$, поскольку это интегралы по отрезкам длиной, равной периоду подынтегральной функции. Далее имеем

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta \cos\alpha - \sin\theta \sin\alpha}{s - r\cos\theta} d\theta = \cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{s - r\cos\theta} d\theta - \sin\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{s - r\cos\theta} d\theta$$

Второй интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \cos\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{s - r\cos\theta} d\theta = -\frac{\cos\alpha}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s - r\cos\theta - s}{s - r\cos\theta} d\theta = \\ &= -\frac{\cos\alpha}{r} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{s - r\cos\theta}{s - r\cos\theta} d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s}{s - r\cos\theta} d\theta \right) = \\ &= -\frac{\cos\alpha}{r} \left(2\pi - s \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{s - r\cos\theta} d\theta \right) = \frac{\cos\alpha}{r} (s I_0(s) - 2\pi), \end{aligned}$$

поскольку интеграл, стоящий в последнем выражении приведен в ф. (15). Вернемся теперь к вычислению выражения (17). Имеем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\cos \alpha}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (1 - 2s^2) (s I_0(s) - 2\pi) ds.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (1 - 2s^2) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{ds} (s e^{-s^2}) ds = s \cdot e^{-s^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\cos \alpha}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (1 - 2s^2) s I_0(s) ds = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\cos \alpha}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} (1 - 2s^2) \operatorname{sign}(s) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos \alpha}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s| e^{-s^2} (1 - 2s^2)}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r} \int_r^{+\infty} \frac{s e^{-s^2} (1 - 2s^2)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали четность подынтегральной функции. Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_r^{+\infty} \frac{s e^{-s^2} (1 - 2s^2)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \int_r^{+\infty} e^{-s^2} (1 - 2s^2) d\sqrt{s^2 - r^2} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{s^2 - r^2} \\ s^2 = t^2 + r^2 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t^2 - r^2} (1 - 2r^2 - 2t^2) dt = e^{-r^2} \left[(1 - 2r^2) \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - 2 \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt \right] = \\ &= e^{-r^2} \left[(1 - 2r^2) \frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right] = -r^2 e^{-r^2} \sqrt{\pi} \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали табличные интегралы A.4 и A.6, которые в нашем случае имеют вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} s^2 e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Подставляя (19) в (18) и вспоминая, что $\cos \alpha = x/r$, получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{r^2} \int_r^{+\infty} \frac{s e^{-s^2} (1 - 2s^2)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\frac{1}{\pi} \frac{x}{r^2} (-r^2 e^{-r^2} \sqrt{\pi}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-r^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2 - y^2}.$$

Это полностью согласуется с результатом примера 3.3.5. □

Формулы (10) и (11) не всегда можно применить, поскольку «проекция» $R[f](s, \varphi)$ обычно известна только на интервале $0 \leq \varphi < \pi$, а для $\pi \leq \varphi < 2\pi$ она должна быть продолжена так, чтобы выполнялось тождество (3.1.4). В рассмотренных выше примерах исходные радоновские образы $R(s, \varphi)$ удовлетворяли условию (3.1.4) автоматически. Однако эта ситуация является редкой и, либо для функций $R(s, \varphi)$, заданных для углов $0 \leq \varphi < \pi$, нужно выполнить продолжение так, чтобы для всех φ выполнялось тождество (3.1.4), либо формулы (10) и (11) следует преобразовать так, чтобы в интеграле по φ пределы интегрирования изменялись от 0 до π . Тогда не нужно будет заботиться о продолжении.

Выполним такое преобразование. Вернемся к формуле (8) и рассмотрим ее внутренний интеграл. Имеем

$$\int_0^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta = \int_0^\pi R[f](s, \theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta.$$

Учитывая тождество (3.1.4), которое можно записать в виде $R(-s, \varphi) = R(s, \varphi + \pi)$, получаем

$$\int_\pi^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta = |\theta - \pi| = \int_0^\pi R(s, \psi + \pi) d\psi = \int_0^\pi R(-s, \psi) d\psi$$

Следовательно

$$\int_0^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta = \int_0^\pi (R[f](s, \theta) + R[f](-s, \theta)) d\theta$$

Тогда (8) дает

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\int_0^\pi (R[f](s, \theta) + R[f](-s, \theta)) d\theta \right) ds = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\int_0^\pi R[f](s, \theta) d\theta \right) ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\int_0^\pi R[f](-s, \theta) d\theta \right) ds \right) \end{aligned} \quad (20)$$

В первом слагаемом переставим пределы интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\int_0^\pi R[f](s, \theta) d\theta \right) ds = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s[f](s, \theta)}{s} ds.$$

Внутренний интеграл имеет особенность в нуле и понимается в смысле главного значения.

Второй повторный интеграл в (20) равен первому. Действительно

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(\int_0^\pi R[f](-s, \theta) d\theta \right) ds &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} R[f](-s, \theta) ds = |s = -\sigma| = \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{\sigma=+\infty}^{-\infty} \frac{1}{(-\sigma)} (-1) \frac{d}{d\sigma} R[f](\sigma, \theta) d(-\sigma) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} R[f](\sigma, \theta) d\sigma. \end{aligned}$$

При этом внутренний интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}$ должен пониматься в смысле главного значения. В результате из (20) получаем

$$f(0, 0) = -\frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s[f](s, \theta)}{s} ds \quad (21)$$

Значение функции $f(x, y)$ в произвольной точке $x_0 = (x_0, y_0)$ может быть получено также как и ранее мы получали (10) из (9). Для этого нужно рассмотреть функцию $f_1(x, y) = f(x + x_0, y + y_0) = f(x + x_0)$. Применяя (21) к функции $f_1(x, y)$, а также вспоминая формулу сдвига (3.3.3), получаем

$$f(x_0, y_0) = f_1(0, 0) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_\tau[f_1](\tau, \varphi)}{\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \frac{R'_\tau[f](\tau + (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0), \varphi)}{\tau} d\tau = |\tau + (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0)| = s \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - (\mathbf{n}, \mathbf{x}_0)} ds = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)} ds
\end{aligned}$$

Заменяя произвольные x_0, y_0 на x, y , окончательно получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} \frac{\partial R(s, \varphi)}{\partial s} ds \quad (22)$$

Это и есть формула обращения Радона.

5.2 Метод Фурье синтеза.

Интегральное преобразование Фурье (ПФ) широко применяется в прикладной математике. Если $f(x)$ есть функция (вещественная или комплекснозначная) вещественной переменной x , то ее преобразование Фурье, если оно существует, задается формулой

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1)$$

При некоторых условиях сходимости, которые следует уточнить, $f(x)$ может быть получена из $F(\omega)$ в результате обратного преобразования Фурье (ОПФ)

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (2)$$

Если дана функция $f(x, y)$ двух вещественных переменных x, y , то ее преобразованием Фурье принято называть интеграл вида

$$F(w_1, w_2) = \mathcal{F}_2[f](w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dx dy \quad (3)$$

который получается двукратным применением одномерного преобразования Фурье по каждой из переменных x и y . Параметры w_1, w_2 иногда называют координатами в частотной области или координатами в фурье – пространстве. Обратная к (3) формула имеет вид

$$f(x, y) = \mathcal{F}_2^{-1}[F(w_1, w_2)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2) e^{i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2 \quad (4)$$

Рассмотрим двумерное преобразование Фурье (3) функции $f(x, y)$. На мгновение зафиксируем параметры w_1, w_2 и рассмотрим в плоскости XY прямую $w_1 x + w_2 y = s$. Выражение $w_1 x + w_2 y$, стоящее в показателе степени экспоненты в (3), постоянно вдоль этой прямой и меняется быстрее всего если двигаться перпендикулярно прямой вдоль вектора (w_1, w_2) . Поэтому в (3) удобно перейти к новым координатам (s, t) , первая из которых направлена

перпендикулярно прямой, а вторая t – вдоль прямой. Связь между координатами определяется формулами (3.1.3)

$$\begin{aligned} x &= s \cos \varphi - t \sin \varphi & s &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y &= s \sin \varphi + t \cos \varphi & \text{или} & t = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{aligned}$$

где φ – угол, который образует вектор (w_1, w_2) с положительным направлением оси X. Якобиан замены переменных равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1$$

В частотной плоскости для вектора $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ используем полярные координаты

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) = \omega \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

с тем же углом φ , который использован при построении системы координат (s, t) . Это можно сделать потому, что вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ в частотной плоскости имеет тот же наклон, что и вектор (w_1, w_2) в плоскости XY. Тогда интеграл (3) примет вид

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) e^{-i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} ds dt$$

Но $x \cos \varphi + y \sin \varphi = s$, поэтому

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (5)$$

В соответствии с (3.1.1) внутренний интеграл в (5) является преобразованием Радона функции $f(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(w_1, w_2) &= F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = F(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi) e^{-i\omega s} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{R}(\omega, \varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi) e^{-i\omega s} ds$ – одномерное преобразование Фурье

радоновского образа $R[f](s, \varphi)$ по переменной s .

Введем в частотной области прямоугольную систему координат, у которой по вертикальной оси отложены значения $F(w_1, w_2)$, а по двум другим – значения w_1 и w_2 . Проведем плоскость, перпендикулярную плоскости (w_1, w_2) и проходящую через начало координат так, что линия ее пересечения с плоскостью (w_1, w_2) составляет с осью w_1 угол, равный φ . В сечении этой плоскости с поверхностью функции $F(w_1, w_2)$ (центральное сечение двумерного ПФ) получается некоторая одномерная функция, значение которой

зависит от положения точки на этой прямой, точнее, от расстояния точки до начала координат (рис. 1). Обозначим это расстояние через ω .

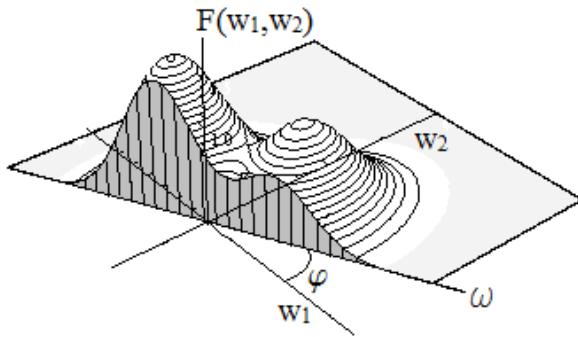


Рис. 1. Центральное сечение двумерного преобразования Фурье

Координаты точки этой прямой на плоскости (w_1, w_2) равны $w_1 = \omega \cos \varphi$, $w_2 = \omega \sin \varphi$ и функция $F(w_1, w_2)$ этой подстановкой превращается в $F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ и равенство (6) формулируется как

Теорема о центральном сечении. Пусть функция $f(x, y)$ и ее радоновский образ $R[f](s, \varphi)$ таковы, что существуют их преобразования Фурье. Тогда одномерное преобразование Фурье $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi)$ радоновского образа $R[f](s, \varphi)$ по переменной s с точностью до числового множителя совпадает с функцией $\mathcal{F}_2[f](\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$, описывающей центральное сечение двумерного преобразования Фурье $\mathcal{F}_2[f](w_1, w_2)$, для значения φ при котором вычисляется преобразование Фурье $\mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi)$, т.е.

$$\mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_2[f](\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \quad (7)$$

На рис. 2 пояснено построение центрального сечения $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ при некотором фиксированном φ .

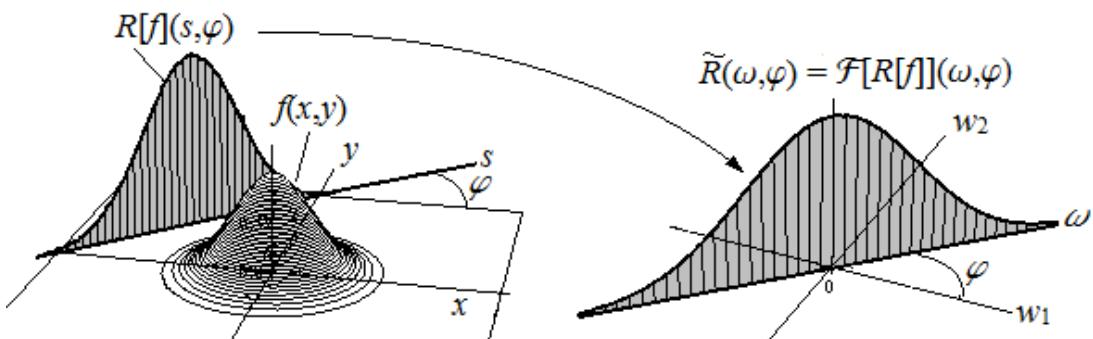


Рис. 2. Центральное сечение двумерного ПФ как одномерное ПФ радоновского образа.

Теорема утверждает, что одномерный Фурье образ $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ проекции $R(s, \varphi)$, полученной при повороте системы «источник – детектор» на угол φ , является сечением двумерного Фурье образа $F(w_1, w_2)$ по линии, повёрнутой на угол φ и проходящей через начало координат. Это значит, что из одномерных Фурье образов проекций $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ можно набрать (синтезировать) двумерный Фурье

образ $F(w_1, w_2)$ искомого изображения (рис. 3). Тогда само изображение $f(x, y)$ можно восстановить с помощью двумерного обратного преобразования Фурье.

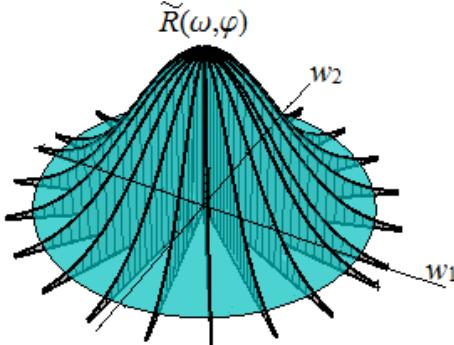


Рис. 3. Двумерное ПФ $\mathcal{F}_2[f](w_1, w_2)$ как множество одномерных ПФ $\mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi)$ радоновских образов.

Поскольку двумерное преобразование Фурье достаточно хорошей функции обратимо, то обратимо и преобразование Радона. В этом состоит идея метода Фурье синтеза в двумерном случае. В операторном виде его можно записать следующим образом

$$f = \mathcal{F}_2^{-1}[F(w_1, w_2)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_2^{-1}[\tilde{R}(\omega, \varphi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_2^{-1}[\mathcal{F}[R[f]]], \quad (8)$$

Важным моментом метода является то, что функция $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \mathcal{F}[R[f]](\omega, \varphi)$ выражает двумерное ПФ в полярных координатах частотной плоскости, а двумерное ОПФ $\mathcal{F}_2^{-1}[F(w_1, w_2)]$ «ожидает» функцию $F(w_1, w_2)$ в декартовых координатах. При численной реализации метода возникает необходимость интерполяции/пересчета функции $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ с полярной сетки ω, φ на декартову сетку w_1, w_2 частотной плоскости. При аналитическом счете этапа интерполяции нет, но требуется преобразование функций из одной системы координат в другую.

Схема алгоритма метода Фурье синтеза показана на следующем рисунке

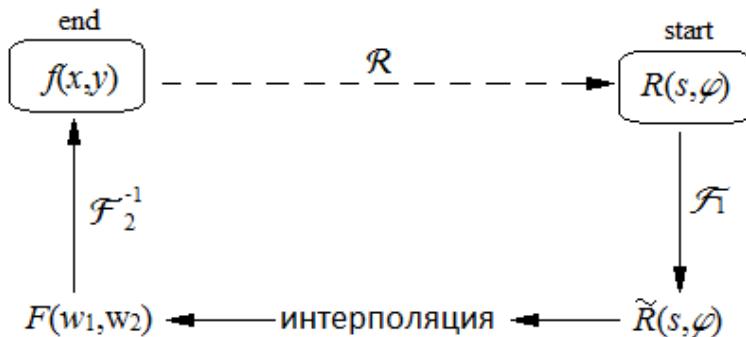


Рис. 4 Схема алгоритма метода Фурье синтеза

Пример 1. Рассмотрим «тестовую» проекцию $R(s) = e^{-s^2}$. Найдем ее радоновский прообраз методом Фурье. Вычисления выполним в системе *Mathematica*.

Находим одномерное ПФ функции $R(s) = e^{-s^2}$.

$$R[s_] = \text{Exp}[-s^2];$$

FR[w_] = FourierTransform[R[s], s, w]

$$\frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

Т.о. одномерное ПФ проекции имеет вид $\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}$. После этого создаем

двумерное ПФ по ф. (6), т.е. $F(w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{R}(\sqrt{w_1^2 + w_2^2})$, и вычисляем

двумерное обратное ПФ этой функции

$$\text{FT[w1_, w2_]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{FR}[\sqrt{\mathbf{w1}^2 + \mathbf{w2}^2}];$$

InverseFourierTransform[FT[w1, w2], {w1, w2}, {x, y}]

$$\frac{e^{-x^2-y^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Это полностью согласуется с примерами 1.1 и 4.3.1. □

Пример 2. Рассмотрим проекцию $R(s) = \cos\varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$. Найдем ее радоновский прообраз. Вычисления выполним в системе *Mathematica*. Они повторяют последовательность операций предыдущего примера.

$$R[s_, \varphi_] = \text{Cos}[\varphi] s \text{Exp}[-s^2];$$

$$\text{FR[w_, \varphi_]} = \text{FourierTransform}[R[s, \varphi], s, w]$$

$$\frac{i e^{-\frac{w^2}{4}} w \text{Cos}[\varphi]}{2\sqrt{2}}$$

Для перехода в частотной плоскости от полярной системы координат (ω, φ) к декартовой (w_1, w_2) делаем замены $\omega \rightarrow \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ и $\omega \cos\varphi \rightarrow w_1$.

$$\text{FT[w1_, w2_]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{FR}[\sqrt{\mathbf{w1}^2 + \mathbf{w2}^2}, \varphi] / \sqrt{\mathbf{w1}^2 + \mathbf{w2}^2} \text{Cos}[\varphi] \rightarrow \mathbf{w1}$$

$$\frac{i e^{\frac{1}{4}(-w1^2-w2^2)} w_1}{4\sqrt{\pi}}$$

Теперь вычисляем обратное двумерное ПФ

InverseFourierTransform[FT[w1, w2], {w1, w2}, {x, y}]

$$\frac{e^{-x^2-y^2} x}{\sqrt{\pi}}$$

Пример 3. Рассмотрим проекцию $R(s) = (\cos\varphi + \sin\varphi) s e^{-s^2}$. Найдем ее радоновский прообраз.

$$R[s_, \varphi_] = (\text{Cos}[\varphi] + \text{Sin}[\varphi]) s \text{Exp}[-s^2];$$

$$\text{FR[w_, \varphi_]} = \text{FourierTransform}[R[s, \varphi], s, w]$$

$$\frac{i e^{-\frac{w^2}{4}} w (\text{Cos}[\varphi] + \text{Sin}[\varphi])}{2\sqrt{2}}$$

При переходе в частотной плоскости от полярной системы координат (ω, φ) к декартовой (w_1, w_2) следует выполнить замены $\omega \cos \varphi \rightarrow w_1$, $\omega \sin \varphi \rightarrow w_2$ и $\omega \rightarrow \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$. Имеем

$$\text{FT}[w1, w2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Simplify}[\text{Expand}[\text{FR}[w, \varphi]]].$$

$$\{w \cos[\varphi] \rightarrow w1, w \sin[\varphi] \rightarrow w2\} / . w \rightarrow \sqrt{w1^2 + w2^2}$$

$$\frac{i e^{-\frac{w1^2}{4} - \frac{w2^2}{4}} (w1 + w2)}{4\sqrt{\pi}}$$

Теперь вычисляем обратное двумерное ПФ

$$\text{InverseFourierTransform}[\text{FT}[w1, w2], \{w1, w2\}, \{x, y\}]$$

$$\frac{e^{-x^2 - y^2} (x + y)}{\sqrt{\pi}}$$

□

Теорему о центральном сечении можно использовать для вычисления прямого преобразования Радона. Действительно из (7) имеем

$$R[f](s, \varphi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_2[f](\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)]$$

или

$$R[f](s, \varphi) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{R}(\omega, \varphi)] = \mathcal{F}^{-1}[\sqrt{2\pi} F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)]$$

Пример 4. Вычислим ПР функции $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2}$. Вычисления выполним в пакете *Mathematica*. Вначале находим двумерное ПФ заданной функции

$$f[x, y] = (x^2 + y^2) \text{Exp}[-x^2 - y^2];$$

$$\text{FT2}[u, v] = \text{FourierTransform}[f[x, y], \{x, y\}, \{u, v\}]$$

$$-\frac{1}{8} e^{-\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}} (-4 + u^2 + v^2)$$

Затем переходим к полярным координатам (w, φ) в частотной области

$$\text{PFT2}[w] = \text{Simplify}[\text{FT2}[w \cos[\varphi], w \sin[\varphi]]]$$

$$-\frac{1}{8} e^{-\frac{w^2}{4}} (-4 + w^2)$$

От полученного выражения, умноженного на коэффициент $\sqrt{2\pi}$, вычисляем обратное одномерное ПФ по полярному радиусу w .

$$\text{InverseFourierTransform}[\sqrt{2\pi} \text{PFT2}[w], w, s]$$

$$\frac{1}{2} e^{-s^2} \sqrt{\pi} (1 + 2s^2)$$

Таким образом,

$$R[(x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2s^2) e^{-s^2}$$

□

В методике, приведенной выше, мы выполняли переход от полярной системы координат ω, φ , в которой задана функция $\tilde{R}(\omega, \varphi)$, к декартовым координатам

w_1, w_2 частотной плоскости. Однако в (8) двумерное ОПФ можно выразить в координатах ω, φ . Поскольку $(w_1, w_2) = \omega(\cos\alpha, \sin\alpha)$, то после замены переменных в интеграле (4) и использовании (6), получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2) e^{i(w_1 x + w_2 y)} d w_1 d w_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} F(\omega \cos\varphi, \omega \sin\varphi) e^{i\omega(x \cos\varphi + y \sin\varphi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x \cos\varphi + y \sin\varphi)} d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R[f](s, \varphi) e^{-i\omega s} ds$ представляет одномерное преобразование

Фурье функции $R[f](s, \varphi)$ по переменной s .

Таким образом, когда известна функция $R[f](s, \varphi)$, надо вычислить ее преобразование Фурье $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ по переменной s , а затем полученную функцию подставить в (9). Формула (9) доказывает как существование, так и единственность обратного преобразования Радона.

Замечание. В разных источниках при определении одномерного и двумерного ПФ числовые коэффициенты, стоящие перед интегралами (1) – (4), могут выбираться по-разному. Существенно только то, что для одномерного ПФ произведение коэффициентов прямого и обратного ПФ должно равняться $1/(2\pi)$, а для двумерного $-1/(2\pi)^2$. В связи с этим в формулах типа (6) – (9) могут стоять другие числовые коэффициенты.

Формула (9) уже является формулой обращения, поскольку имея проекцию $R(s, \varphi)$ можно определить ее преобразование Фурье $\tilde{R}(\omega, \varphi)$, а затем по (9) найти искомую функцию $f(x, y)$. Неудобство (9) состоит в том, что в приложениях мы знаем функцию $R(s, \varphi)$ только для $0 \leq \varphi < \pi$ и, следовательно, функция $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ известна только для φ из этого диапазона. Преобразуем (9) к интервалу интегрирования по φ от 0 до π .

Заметим, что

$$\tilde{R}(\omega, \varphi) = \tilde{R}(-\omega, \varphi + \pi). \quad (10)$$

Действительно, используя равенство $R(s, \varphi) = R(-s, \varphi + \pi)$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\omega, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(-s, \varphi + \pi) e^{-i\omega s} d(-s) = | -s = z | = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} R(z, \varphi + \pi) e^{i\omega z} (-dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(z, \varphi + \pi) e^{-i(-\omega)z} dz = \tilde{R}(-\omega, \varphi + \pi) \end{aligned}$$

Теперь разобьем интеграл (9) на два

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x \cos\varphi + y \sin\varphi)} d\omega + \right.$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega \Bigg) \quad (11)$$

Принимая во внимание (10), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega = |\varphi = \psi + \pi| = \\ & = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} \omega \tilde{R}(\omega, \psi + \pi) e^{i\omega(-x\cos\psi - y\sin\psi)} d\omega = |\tilde{R}(\omega, \psi + \pi) = \tilde{R}(-\omega, \psi)| = \\ & = \int_0^{\pi} d\psi \int_{\omega=0}^{\infty} (-\omega) \tilde{R}(-\omega, \psi) e^{i(-\omega)(x\cos\psi + y\sin\psi)} d(-\omega) = |- \omega = w| = \\ & = \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{-\infty} w \tilde{R}(w, \psi) e^{iw(x\cos\psi + y\sin\psi)} dw = \int_0^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^0 (-w) \tilde{R}(w, \psi) e^{iw(x\cos\psi + y\sin\psi)} dw = \\ & = \int_0^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^0 |\omega| \tilde{R}(\omega, \psi) e^{i\omega(x\cos\psi + y\sin\psi)} d\omega \end{aligned}$$

Тогда из (11) получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\pi} d\psi \int_{-\infty}^0 |\omega| \tilde{R}(\omega, \psi) e^{i\omega(x\cos\psi + y\sin\psi)} d\omega \right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega \end{aligned}$$

Окончательное выражение для обращения преобразования Радона имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega \quad (12)$$

Таким образом, модифицированный алгоритм Фурье синтеза состоит в выполнении следующих шагов:

1. Для заданного Радоновского образа $R(s, \varphi)$ определяется его преобразование Фурье $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ по переменной s ;
2. Вычисляется обратное преобразование Фурье функции $|\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi)$, т.е. определяется функция

$$I(\sigma, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) \exp(i\omega\sigma) d\omega; \quad (13)$$

3. Аргумент σ функции $I(\sigma, \varphi)$ заменяется выражением $x\cos\varphi + y\sin\varphi$, затем выполняется интегрирование полученного выражения по углу φ ; в результате получаем искомую функцию $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi) d\varphi. \quad (14)$$

Сделаем несколько замечаний.

На шаге 2 вместо функции $I(\sigma, \varphi)$ иногда удобно сразу заменить σ выражением $x \cos \varphi + y \sin \varphi$ и определить функцию

$$J(x, y, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}| d\omega, \quad (15)$$

которая периодична по φ с периодом π , т.е

$$J(x, y, \varphi) = J(x, y, \varphi + \pi). \quad (16)$$

Докажем это. Вначале заметим, что из равенства $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \tilde{R}(-\omega, \varphi + \pi)$ следует $\tilde{R}(\omega, \varphi + \pi) = \tilde{R}(-\omega, \varphi)$ в силу периодичности функции $\tilde{R}(\omega, \varphi)$ по φ с периодом 2π . Далее имеем

$$\begin{aligned} J(x, y, \varphi + \pi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\tilde{R}(\omega, \varphi + \pi) e^{i\omega(x \cos(\varphi + \pi) + y \sin(\varphi + \pi))}| d\omega = \\ &= |\tilde{R}(\omega, \varphi + \pi) = \tilde{R}(-\omega, \varphi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\tilde{R}(-\omega, \varphi) e^{i\omega(-x \cos \varphi - y \sin \varphi)}| d\omega = |-\omega = w| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} -w |\tilde{R}(w, \varphi) e^{i w (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}| d(-w) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w |\tilde{R}(w, \varphi) e^{i w (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}| d w = J(x, y, \varphi). \end{aligned}$$

и мы приходим к (16). Учитывая это, можно доказать равенство

$$\int_0^{\pi} I(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} I(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (17)$$

Действительно, поскольку $I(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) = J(x, y, \varphi)$, то

$$\int_0^{2\pi} I(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} J(x, y, \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} J(x, y, \varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} J(x, y, \varphi) d\varphi$$

Но

$$\int_{\pi}^{2\pi} J(x, y, \varphi) d\varphi = |\varphi - \pi = \psi| = \int_0^{\pi} J(x, y, \psi + \pi) d\psi = \int_0^{\pi} J(x, y, \psi) d\psi$$

Здесь мы использовали условие периодичности (16). Подставляя последнее равенство в предыдущее, приходим к желаемому утверждению (17).

Из (14) и (17) следует, что функцию $f(x, y)$ можно вычислять из соотношения

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (18)$$

Если ввести $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то (18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I\left(r\left(\frac{x}{r} \cos \varphi + \frac{y}{r} \sin \varphi\right), \varphi\right) d\varphi = \left| \cos \alpha = \frac{x}{r}, \sin \alpha = \frac{y}{r} \right| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(r(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi), \varphi) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(r \cos(\varphi - \alpha), \varphi) d\varphi. \quad (19)$$

Из (17) и (19) также следует

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I(r \cos(\varphi - \alpha), \varphi) d\varphi \quad (20)$$

Рассмотрим частный случай, когда проекция $R(s, \varphi) = R(s)$ не зависит от φ и является четной функцией по s . Тогда $\tilde{R}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(s) e^{-i\omega s} ds$ не зависит от φ и четно по ω , поскольку $e^{-i\omega s} = \cos \omega s - i \sin \omega s$ и $\int_{-\infty}^{\infty} R(s) \sin \omega s ds = 0$ как интеграл от нечетной функции. Далее ясно, что правая часть формулы (13) не будет зависеть от φ . Значит функция $I(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\tilde{R}(\omega)| \exp(i\omega\sigma) d\omega$ не зависит от φ и четна по σ . Тогда из (18) получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi. \quad (21)$$

А из (19) имеем

$$f(x, y) = f(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(r \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} I(r \cos \varphi) d\varphi, \quad (22)$$

поскольку интеграл от периодической функции по отрезку длиной, равной длине ее периода, не зависит от начальной точки участка, и параметр α можно положить равным нулю. Интеграл в правой части (22) зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и мы получаем, что $f(x, y)$ является осесимметричной функцией.

Из (17) и (22) также следует, что в осесимметричном случае имеет место следующее соотношение

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I(r \cos \varphi) d\varphi \quad (23)$$

В (23) сделаем замену $\sigma = r \cos \varphi$. Тогда $\cos \varphi = \sigma / r$ и $\varphi = \arccos(\sigma / r)$. Поскольку в (23) $0 \leq \varphi < \pi$, то $0 \leq \arccos(\sigma / r) < \pi$ и $\arccos(\cdot)$ представляет главное значение. Далее

$$d\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2 / r^2}} \frac{1}{r} d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma.$$

При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ имеем $\sigma = r$ и $\sigma = r \cos \pi = -r$. Учитывая четность функции $I(\sigma)$, получаем

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma \quad (24)$$

Учитывая, что $I(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega) \exp(i\omega\sigma) d\omega$, получаем еще одну формулу обращения ПР в осесимметричном случае

$$f(r) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^r \frac{d\sigma}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega) \exp(i\omega\sigma) d\omega.$$

Пример 5. Найдем радоновский прообраз проекции $R(s) = s^2 e^{-s^2}$. Вычисления выполним в системе *Mathematica*.

Определяем ПФ $\tilde{R}(\omega)$ функции $R(s) = s^2 e^{-s^2}$.

$$R[s_] = s^2 \text{Exp}[-s^2];$$

$$\text{FR}[w_] = \text{FourierTransform}[R[s], s, w]$$

$$\frac{e^{-\frac{w^2}{4}} (-2 + w^2)}{4\sqrt{2}}$$

Теперь вычисляем $I(\sigma)$. Имеем

$$\text{FFR}[w_] = \text{Abs}[w] \text{FR}[w];$$

$$\text{IFR}[s_] = \text{InverseFourierTransform}[\text{FFR}[w], w, s]$$

$$-\frac{1 - 2s^2 + 4s(-1 + s^2) \text{DawsonF}[s]}{\sqrt{\pi}}$$

Функция $\text{DawsonF}[x]$ в системе *Mathematica* определяется следующим образом

$$\text{DawsonF}(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} d y$$

Далее вычисляем интеграл (21)

$$f[x_, y_] = \frac{1}{4\pi} \text{Integrate}[\text{IFR}[x \text{Cos}[\varphi] + y \text{Sin}[\varphi]], \{\varphi, 0, 2\pi\},$$

Assumptions $\rightarrow x \in \text{Reals} \quad \& \quad y \in \text{Reals} \quad \& \quad x^2 + y^2 > 0$

$$\frac{e^{-x^2 - y^2} (-1 + 2x^2 + 2y^2)}{2\sqrt{\pi}}$$

В результате получаем

$$f(x, y) = \frac{e^{-x^2 - y^2}}{\sqrt{\pi}} \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \right).$$

□

Пример 6. Найдем радоновский прообраз проекции

$$R(s) = \begin{cases} \sqrt{1 - s^2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| > 1 \end{cases}$$

Прямое и обратное преобразование Фурье вычислим в пакете *Mathematica*.

Определяем ПФ функции $R(s)$.

$$T[s_] = \text{HeavisideTheta}[s + 1] \text{HeavisideTheta}[1 - s];$$

$$R[s_] = \sqrt{1 - s^2} T[s];$$

$$\text{FR}[w_] = \text{FourierTransform}[R[s], s, w]$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{BesselJ}[1, \text{Abs}[w]]}{\text{Abs}[w]}$$

$$\Gamma[w] = \text{Abs}[w] \mathbf{FR}[w]$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{BesselJ}[1, \text{Abs}[w]]$$

Вычислим обратное одномерное ПФ функции $\Gamma(\omega)$

$$\text{Simplify}[\text{InverseFourierTransform}[\Gamma[w], w, \sigma]]$$

В результате получаем

$$I(\sigma) = \begin{cases} 1 & , |\sigma| < 1 \\ 1 - \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} & , |\sigma| > 1 \end{cases} \quad (25)$$

Для использования формулы (23) мы должны сделать замену $\sigma \rightarrow r \cos \varphi$.

$$I(r \cos \varphi) = \begin{cases} 1 & , |\cos \varphi| < 1/r \\ 1 - \frac{|r \cos \varphi|}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi - 1}} & , |\cos \varphi| > 1/r \end{cases}$$

При $r < 1$ второе условие никогда не реализуется и мы получаем $I(r \cos \varphi) = 1$

для всех значений φ . Соответственно $\int_0^\pi I(r \cos \varphi) d\varphi = \pi$.

Обозначим $\varphi_0 = \arccos(1/r)$ и $\sigma(\varphi) = \frac{|r \cos \varphi|}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi - 1}}$. Тогда при $r > 1$ имеем

$$I(r \cos \varphi) = \begin{cases} 1 & , \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \vee \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0 \\ 1 - \sigma(\varphi), & \text{иначе} \end{cases}$$

Для интеграла $\int_0^\pi I(r \cos \varphi) d\varphi$, стоящего в (23), имеем

$$\int_0^\pi I(\cdot) d\varphi = \int_0^{\varphi_0} (1 - \sigma(\varphi)) d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} 1 d\varphi + \int_{\pi - \varphi_0}^\pi (1 - \sigma(\varphi)) d\varphi = \pi - \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) d\varphi - \int_{\pi - \varphi_0}^\pi \sigma(\varphi) d\varphi$$

В последнем интеграле сделаем замену $\varphi = \pi - \psi$

$$\begin{aligned} \int_{\pi - \varphi_0}^\pi \sigma(\varphi) d\varphi &= \int_{\pi - \varphi_0}^\pi \frac{|r \cos \varphi|}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi - 1}} d\varphi = |\varphi = \pi - \psi| = \int_{\varphi_0}^0 \frac{|r \cos(\pi - \psi)|}{\sqrt{r^2 \cos^2(\pi - \psi) - 1}} (-d\psi) = \\ &= \int_0^{\varphi_0} \frac{r \cos \psi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \psi - 1}} d\psi. \end{aligned}$$

Здесь мы убрали модуль, поскольку при $r > 0$ имеем $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$ и $\cos \psi > 0$ на отрезке интегрирования $[0, \varphi_0]$. Т.о.

$$\int_{\pi - \varphi_0}^\pi \sigma(\varphi) d\varphi = \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) d\varphi \quad \text{и} \quad \int_0^\pi I(\cdot) d\varphi = \pi - 2 \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) d\varphi.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi - 1}} d\varphi &= \int \frac{d(r \sin \varphi)}{\sqrt{r^2 - 1 - r^2 \sin^2 \varphi}} = \left| \begin{array}{l} r \sin \varphi = x \\ r^2 - 1 = a^2 \end{array} \right| = \int \frac{d x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} = \\ &= \arcsin \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - 1}} = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - (1/r)^2}} = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}} = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi - 1}} d\varphi = \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \Big|_0^{\varphi_0} = \frac{\pi}{2}.$$

В результате при $r > 1$ имеем

$$\int_0^{\pi} I(r \cos \varphi) d\varphi = \pi - 2 \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) d\varphi = \pi - 2 \frac{\pi}{2} = 0.$$

Окончательно из (23) получаем

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I(r \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \pi, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \chi(r). \quad (26)$$

Покажем, как можно выполнить вычисления функции $f(r)$, используя формулу (24). Учитывая (25), при $r < 1$ имеем

$$\int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \arcsin \frac{\sigma}{r} \Big|_0^r = \frac{\pi}{2}$$

При $r > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma + \int_1^r \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}}\right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \\ &= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma - \int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \arcsin \frac{\sigma}{r} \Big|_0^r - \int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1} \sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma. \end{aligned}$$

В интеграле $\int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma$ делаем подстановку $\sigma^2 = r^2 - y(r^2 - 1)$.

Тогда $d\sigma^2 = -(r^2 - 1)dy$, $\sigma^2 - 1 = (r^2 - 1)(1 - y)$, $r^2 - \sigma^2 = y(r^2 - 1)$ и диапазон изменения y будет 1 и 0. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{-(r^2 - 1)dy}{\sqrt{(r^2 - 1)(1 - y)} \sqrt{y(r^2 - 1)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y)} \sqrt{y}} = \\ &= |\text{см. A.3}| = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

В результате при $r > 1$ получаем

$$\int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \int_1^r \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Мы снова пришли к (26). □

Пример 7. Найдем радоновский прообраз проекции

$$R(s) = \begin{cases} (1-s^2)^{3/2}, & |s| < 1 \\ 0, & |s| > 1 \end{cases}$$

Определяем ПФ $\tilde{R}(\omega)$ функции $R(s)$ и ОПФ функции $|\omega| \tilde{R}(\omega)$

$T[s_] = \text{HeavisideTheta}[s+1]\text{HeavisideTheta}[1-s];$

$R[s_] = (1-s^2)\sqrt{1-s^2}T[s];$

$\text{FR}[w_] = \text{FourierTransform}[R[s], s, w];$

$\Gamma[w_] = \text{Abs}[w]\text{FR}[w]$

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(w^2 \text{BesselJ}[1, \text{Abs}[w]] + \text{Abs}[w](-\text{BesselJ}[2, w] + w \text{BesselJ}[3, w]))}{w^2}$$

$\text{Simplify}[\text{InverseFourierTransform}[\Gamma[w], w, \sigma]]$

В результате получаем

$$I(\sigma) = \frac{3}{2} \begin{cases} 1-2\sigma^2, & |\sigma| < 1 \\ 1-2\sigma^2 + 2|\sigma|\sqrt{\sigma^2-1}, & |\sigma| > 1 \end{cases}$$

Для решения используем формулу (24). При $r < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= \frac{3}{2} \int_0^r \frac{1-2\sigma^2}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{3}{2} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma - 3 \int_0^r \frac{\sigma^2}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \\ &= \frac{3}{2} \left. \arcsin \frac{\sigma}{r} \right|_0^r - 3 \left(-\frac{1}{2} \sigma \sqrt{r^2 - \sigma^2} + \frac{r^2}{2} \right) \left. \arcsin \frac{\sigma}{r} \right|_0^r = \frac{3\pi}{4} - r^2 \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} (1 - r^2) \end{aligned}$$

При $r > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= \int_0^1 \frac{1-2\sigma^2}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma + \int_1^r \frac{1-2\sigma^2 + 2\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \\ &= \int_0^r \frac{1-2\sigma^2}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma + 2 \int_1^r \frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{\pi}{2} (1 - r^2) + 2 \int_1^r \frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma \end{aligned}$$

В интеграле $\int_1^r \frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma$ делаем подстановку $\sigma^2 = r^2 - y(r^2 - 1)$. Тогда $d\sigma^2 = -(r^2 - 1)dy$, $\sigma^2 - 1 = (r^2 - 1)(1 - y)$, $r^2 - \sigma^2 = y(r^2 - 1)$ и диапазон изменения y будет 1 и 0. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_1^r \frac{\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{\sqrt{(r^2-1)(1-y)}}{\sqrt{y(r^2-1)}} (r^2-1) dy = \frac{1}{2} (r^2-1) \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-y)}}{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{2} (r^2-1) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} (r^2-1) \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{2}{3} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{\pi}{2} (1 - r^2) + 2 \frac{\pi}{4} (r^2 - 1) = 0$$

Окончательно из (24) получаем

$$f(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{I(\sigma)}{\sqrt{r^2 - \sigma^2}} d\sigma = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{3}{4} \pi (1 - r^2), & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} = \frac{3}{4} \begin{cases} 1 - r^2, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} = \frac{3}{4} (1 - r^2) \chi(r).$$

□

Покажем, что алгоритм фурье синтеза приводит к той же функции, которая получается при использовании формулы обращения Радона. Для этого покажем, что формулы (1.22) и (12) представляют одну и ту же функцию $f(x, y)$. Для упрощения выкладок положим $x = 0, y = 0$, т.е. будем восстанавливать значение функции $f(x, y)$ в начале координат. Из (12) получаем

$$f(0,0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \omega \left| \left(\int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds \right) \right| d\omega$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds &= \int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) \frac{d e^{-i\omega s}}{-i\omega} = \\ &= \frac{i}{\omega} \left(R(s, \varphi) e^{-i\omega s} \Big|_{s=-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty R'_s(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds \right) = -\frac{i}{\omega} \int_{-\infty}^\infty R'_s(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds, \end{aligned}$$

поскольку, в силу регулярности $s R(s, \varphi) \xrightarrow[s \rightarrow \pm\infty]{} 0$, и внеинтегральный член исчезает. Тогда

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \frac{-i}{4\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \frac{|\omega|}{\omega} \left(\int_{-\infty}^\infty R'_s(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds \right) d\omega = \\ &= \frac{-i}{4\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \text{sign } \omega \left(\int_{-\infty}^\infty R'_s(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds \right) d\omega = \\ &= \frac{-i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^\pi R'_s(s, \varphi) d\varphi \right) \left(\int_{-\infty}^\infty \text{sign } \omega \cdot e^{-i\omega s} d\omega \right) ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Формально перестановка порядка интегрирования в (27) невозможна, поскольку интеграл $S(s) = \int_{-\infty}^\infty \text{sign } \omega \cdot e^{-i\omega s} d\omega$ не существует в классическом смысле. Но, поскольку интеграл $\int_{-\infty}^\infty F'(s) S(s) ds$, где $F(s) = \int_0^\pi R(s, \varphi) d\varphi$, конечен,

то $S(s)$ представляет обобщенную функцию. Определим ее.

Для ПФ известна **теорема**. Если функция $\varphi(x)$ и ее первая производная $\varphi'(x)$ исчезает при $x \rightarrow \pm\infty$, то преобразование Фурье функции $\varphi'(x)$ есть умноженное на $i\omega$ преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, т.е.

$$\mathcal{F} \left[\frac{d\varphi}{dx} \right] (\omega) = (i\omega) \mathcal{F}[\varphi](\omega) \quad (28)$$

При этом равенство распространяется и на обобщенные функции.

По – другому эту теорему можно сформулировать так: дифференцирование функции – оригинала $\varphi(x)$ приводит к умножению ее Фурье – образа на $i\omega$.

Попробуем «угадать» какой может быть функция $S(s)$. Формально имеем $\frac{d}{dx} \text{sign } x = 2\delta(x)$, где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака. Преобразованием Фурье

дельта функции есть единица $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = 1$ или $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (\text{sign } x) e^{-i\omega x} dx = 1$,

т.е. $\mathcal{F}\left[\frac{d(\text{sign } x)}{dx}\right] = 2$. Тогда из (28) получаем $(i\omega)\mathcal{F}[\text{sign } x] = 2$ или, меняя обозначение переменных, $(is)\mathcal{F}[\text{sign } x](s) = 2$. Т.е. обобщенная функция $S(s)$ равна

$$S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \omega \cdot e^{-i\omega s} d\omega = \frac{2}{is},$$

и $1/s$ следует понимать как обобщенную функцию $\mathcal{P}\frac{1}{s}$. По определению $\mathcal{P}\frac{1}{s}$,

когда под каким-нибудь интегралом $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \mathcal{P}\frac{1}{x} dx$ стоит такая обобщенная функция, то интеграл следует понимать в смысле главного значения $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$.

Приведем другой способ вычисления функции $S(s)$. В приложении С мы вычислили интеграл $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s}}{s} ds = i\pi \text{sign } \omega$ (формула С.14). Но этот интеграл с точностью до числового множителя представляет обратное преобразование Фурье обобщенной функции $\mathcal{P}\frac{1}{s}$. Действительно

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\frac{1}{s} \cdot e^{i\omega s} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega s}}{s} ds = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign } \omega.$$

Т.е. $\text{sign } \omega = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{s}\right]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \omega \cdot e^{-i\omega s} d\omega &= \mathcal{F}[\text{sign } \omega] = \mathcal{F}\left[-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{s}\right]\right] = \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{P}\frac{1}{s}\right]\right] = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{P}\frac{1}{s}, \end{aligned}$$

или

$$S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \omega \cdot e^{-i\omega s} d\omega = -2i \mathcal{P}\frac{1}{s}. \quad (29)$$

Возвращаясь к (27) и учитывая (29), получаем

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= \frac{-i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} R'_s(s, \varphi) d\varphi \right) \left(-2i \mathcal{P} \frac{1}{s} \right) d s = -\frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} d s \int_0^{\pi} R'_s(s, \varphi) d\varphi = \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} v.p. \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'_s(s, \varphi)}{s} d s,
\end{aligned}$$

что совпадает с формулой (1.21), в которой внутренний интеграл следует понимать в смысле главного значения. После использования формулы сдвига последнее выражение преобразуется к формуле Радона (1.22).

5.3 Метод двумерной фильтрации

Здесь мы рассмотрим способ обращения ПР, который получил название метода двумерной фильтрации (метода ρ – фильтрации, метода фильтрации суммарного изображения, метода фильтрации обратных проекций). Метод реализуется в два этапа. На первом этапе с помощью операции обратного проецирования (back projection) получают «грубую оценку» исходной функции, называемую суммарным изображением. На втором этапе суммарное изображение подвергается двумерной фильтрации, результатом которой является искомая функция.

Поясним суть операции обратного проецирования. Построим систему координат s, t , повернутую на угол φ относительно системы координат x, y . В плоскости, проходящей через ось s и перпендикулярной плоскости s, t , строим проекцию $R(s, \varphi)$, которая при фиксированном φ является одномерной функцией параметра s . Эта функция (кривая) растягивается на всю плоскость (x, y) в направлении t так, что из нее создается двумерная функция

$$B(x, y, \varphi) = B_\varphi(x, y) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi), \quad (1)$$

При этом значение функции $B_\varphi(x, y)$ остается постоянным вдоль любой прямой $x \cos \varphi + y \sin \varphi = s$. Такое построение называется обратным проецированием (см. рис. 1b). После этого выполняется сложение (усреднение) всех обратных проекций $B_\varphi(x, y)$ для $0 \leq \varphi < \pi$ (или интегрирование по φ от 0 до 2π). Результирующая функция, называемая суммарным изображением, используется в качестве оценки функции $f(x, y)$.

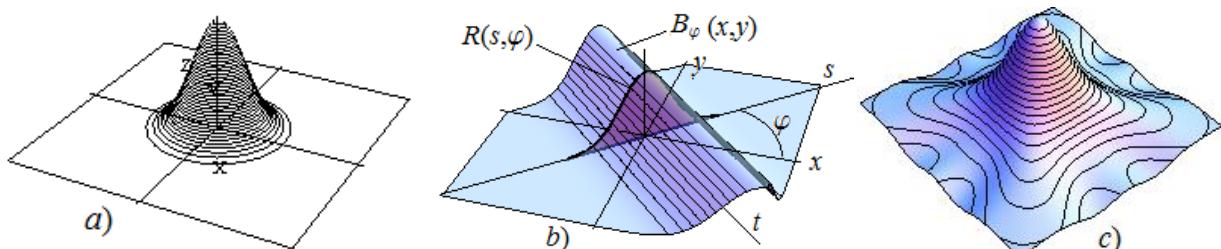


Рис. 1 a) исходная функция $e^{-x^2-y^2}$; b) обратная проекция $B_{\pi/4}(x, y)$ функции $R(s) = \sqrt{\pi} e^{-s^2}$; c) суммарное среднее обратных проекций (суммарное изображение).

На рис. 1а показана исходная функция $f(x, y)$, а на рис. 1с показан результат ее реконструкции по восьми проекциям $B_\varphi(x, y)$ при $\varphi = \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6\}$, т.е. суммарное изображение построено как сумма $\frac{1}{n} \sum_\varphi B_\varphi(x, y)$ для этих значений φ .

Замечание 1. Преобразование (1) называется обратным проецированием, так как оно в некотором смысле обратно операции получения проекций, т.е. операции прямого проецирования.

Замечание 2. Функция $B(x, y, \varphi)$ периодична по φ с периодом π . Действительно,

$$\begin{aligned} B(x, y, \varphi + \pi) &= R(x \cos(\varphi + \pi) + y \sin(\varphi + \pi), \varphi + \pi) = \\ &= R(-x \cos \varphi - y \sin \varphi, \varphi + \pi) = \text{из (3.1.4)} = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) = B(x, y, \varphi). \end{aligned}$$

Выполним аналогичное построение для трех ХФ единичных кругов, центры которых расположены в точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Соответствующая функция $f(x, y) = \chi_{(0,0)}(r) + \chi_{(3,3)}(r) + \chi_{(-3,0)}(r)$ показана на следующем рисунке (центры кругов находятся в точках $(0,0), (3,3), (-3,0)$). Здесь через $\chi_{(x_i, y_i)}(r)$ обозначена характеристическая функция единичного круга с центром в точке (x_i, y_i) .

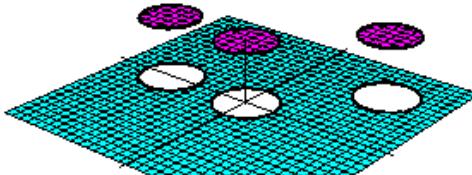


Рис. 2 Функция $f(x, y) = \chi_{(0,0)}(r) + \chi_{(3,3)}(r) + \chi_{(-3,0)}(r)$.

Преобразование Радона ХФ центрированного единичного круга нам известно $R[\chi_{(0,0)}(r)](s) = R_0(s) = 2\sqrt{1-s^2}\chi(s)$. Тогда ПР $R(s, \varphi)$ функции $f(x, y)$ будет

$$R(s, \varphi) = R_0(s) + R_0(s - x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) + R_0(s - x_2 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi)$$

На рис. 3а показана обратная проекция $P_{\pi/4}(x, y)$ этой функции. На рис. 3б и

рис. 3с показаны суммарные изображения $g_N(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_{\frac{\pi}{N}n}(x, y)$, полученные при $N=8$ и $N=32$.

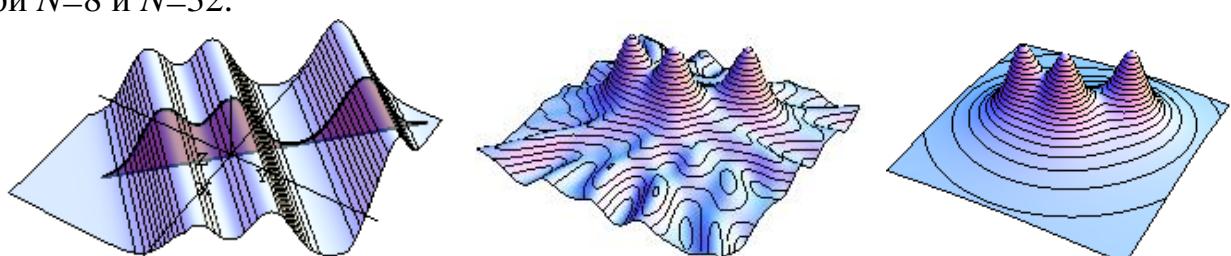


Рис.3. а) обратная проекция $P_{\pi/4}(x, y)$; б) суммарное изображение $g_8(x, y)$;
в) суммарное изображение $g_{32}(x, y)$.

Если построить монохромные контурные изображения исходной функции $f(x, y)$ и суммарного изображения $g_{32}(x, y)$, то они будут выглядеть так, как показано на рис. 4.

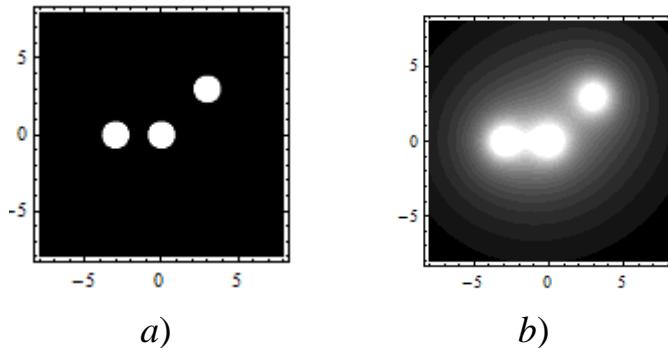


Рис. 4 . a) исходное изображение; b) суммарное изображение $g_{16}(x, y)$.

Сравнивая рисунки 1a и 1c или 2 и 3b, видим, что суммарное изображение $g_N(x, y)$ в основных чертах повторяет исходную функцию $f(x, y)$, например, максимумы обеих функций расположены в одинаковых точках. При увеличении числа проекций суммарное изображение будет больше походить на исходную функцию, однако оно с ней никогда не совпадет.

Для подтверждения слов о сходстве исходного изображения и суммарного приведем еще один пример. На следующем рисунке слева показана исходная функция, собранная из одиннадцати характеристических функций по – разному сдвинутых единичных кругов, в центре приведено ее тоновое изображение (три тона) и справа – суммарное изображение.

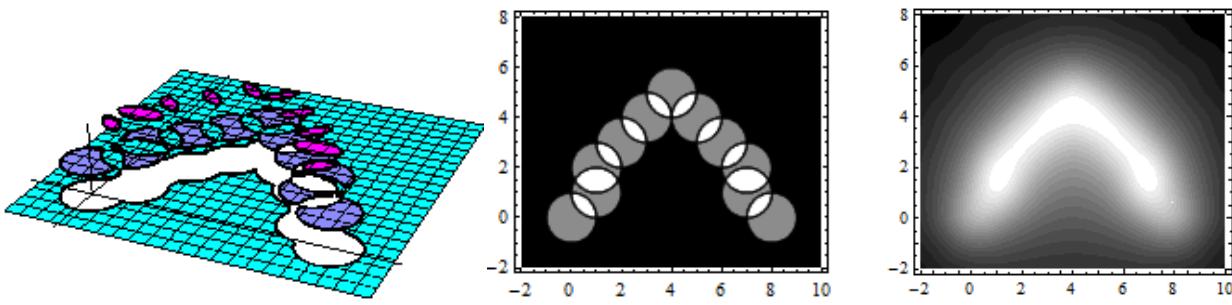


Рис. 5

Несмотря на искажения, суммарное изображение, восстановленное по нескольким обратным проекциям, имеет много общего с исходной функцией.

Когда восстановление функции $f(x, y)$ заканчивается на этапе построения суммарного изображения $\hat{f}(x, y)$, то описанную последовательность операций называют алгоритмом обратного проецирования. Вычислительные формулы сводятся к выражению

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i, \varphi_i),$$

где все $0 \leq \varphi_i < \pi$. При этом контрастность и четкость изображения $\hat{f}(x, y)$ остаются неудовлетворительными.

В методе двумерной фильтрации (Back-Projection filtering BPF – method) вычисления продолжают дальше.

Вначале суммарное изображение $g(x, y)$ вычисляется как среднее по углу (интегральное среднее) от исходного набора обратных проекций.

$$\mathcal{B}[R[f]] = g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(x, y, \varphi) d\varphi \quad (2)$$

Операция обратного проецирования (2) обладает фильтрующими свойствами по отношению к шумам аппаратуры, что приводит к последующему значительному улучшению восстановленного изображения. Вместо (2) мы также можем использовать выражения

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(x, y, \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} B(x, y, \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(x, y, \varphi) d\varphi, \quad (3)$$

поскольку интегралы по любым отрезкам длиной, равной периоду подынтегральной функции, совпадают (напомним, что функция $B(x, y, \varphi)$ периодична по φ с периодом π).

Учитывая, что

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = r \cos(\varphi - \alpha),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \alpha = x/r$, $\sin \alpha = y/r$, имеем

$$B(x, y, \varphi) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) = R(r \cos(\varphi - \alpha), \varphi) \quad (4)$$

и

$$g(x, y) = g(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r \cos(\varphi - \alpha), \varphi) d\varphi \quad (5)$$

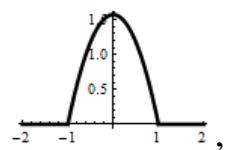
В осесимметричном случае проекция $R(s)$ не зависит от второго аргумента и (5) можно преобразовать к виду

$$g(x, y) = g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r \cos(\varphi - \alpha)) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(r \cos \varphi) d\varphi \quad (6)$$

поскольку интеграл от периодической функции по отрезку длиной равной ее периоду не зависит от начальной точки отрезка и мы можем положить $\alpha = 0$.

Пример 1. Вычислим суммарное изображение проекции

$$R(s) = \frac{\pi}{2} (1 - s^2) \chi(s) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 - s^2, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases},$$



где $\chi(r)$ является характеристической функцией единичного круга.

Имеем

$$R(r \cos \varphi) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} (1 - r^2 \cos^2 \varphi), & |r \cos \varphi| < 1 \\ 0, & |r \cos \varphi| \geq 1 \end{cases}$$

При $r < 1$ получаем $R(r \cos \varphi) = \frac{\pi}{2} (1 - r^2 \cos^2 \varphi)$ для всех φ . Тогда из (6) имеем

$$g(r) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \left(2\pi - r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{\pi}{4} (2 - r^2).$$

При $r > 1$ имеем $R(r \cos \varphi) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} (1 - r^2 \cos^2 \varphi), & |\cos \varphi| < 1/r \\ 0, & |\cos \varphi| \geq 1/r \end{cases}$. Если обозначить $\varphi_0 = \arccos(1/r)$, то

$$R(r \cos \varphi) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} (1 - r^2 \cos^2 \varphi), & \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \vee \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Поэтому из (6) получаем

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{4} \left(\int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} (1 - r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi + \int_{\pi + \varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} (1 - r^2 \cos^2 \varphi) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left((\pi - 2\varphi_0) - r^2 \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \cos^2 \varphi d\varphi + (\pi - 2\varphi_0) - r^2 \int_{\pi + \varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(2\pi - 4\varphi_0 - r^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right)_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} - r^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right)_{\pi + \varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (2\pi - 4\varphi_0 - r^2(\pi - 2\varphi_0) + r^2 \sin 2\varphi_0). \end{aligned}$$

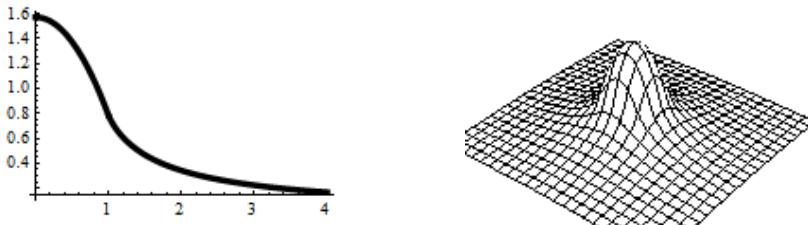
Но $\sin 2\varphi_0 = 2\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0} \cos \varphi_0 = \left| \varphi_0 = \arccos \frac{1}{r} \right| = 2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} \frac{1}{r} = 2\frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r^2}$. Тогда

$$g(r) = \frac{1}{4} \left((2 - r^2) \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{r} \right) + 2\sqrt{r^2 - 1} \right).$$

В результате

$$g(r) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} (2 - r^2) & , 0 \leq r < 1 \\ \frac{1}{4} \left((2 - r^2) \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{r} \right) + 2\sqrt{r^2 - 1} \right) & , r \geq 1 \end{cases}$$

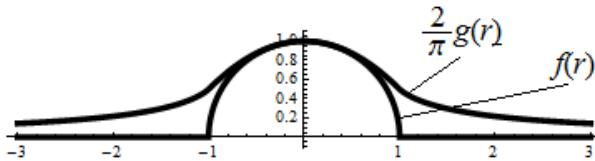
График функции $g(r)$ показан на следующем рисунке слева, а суммарное изображение $g(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ показано справа.



Мы знаем, что заданная проекция $R(s) = \frac{\pi}{2} (1 - s^2) \chi(s)$ является ПР функции $f(r) = \sqrt{1 - r^2} \chi(r)$. Суммарное изображение $g(r)$ отображает основные характерные черты исходного изображения – в нашем примере обе функции

имеют максимум в начале координат. Однако суммарное изображение «не соблюдает» масштаб. Чтобы как – то сравнить эти функции скорректируем $g(r)$ так, чтобы значения обеих функций совпадали в начале координат. На

следующем рисунке показаны графики функций $\frac{2}{\pi}g(r)$ и $f(r)$.



Как видим, общее между функциями $f(r)$ и $g(r)$, только то, что они имеет максимум в одной и той же точке. \square

Найдем связь между суммарным изображением $g(x, y)$ и искомой функцией $f(x, y)$. Для этого в (3) подставим определение обратной проекции (1). Имеем

$$g(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B(x, y, \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi$$

Теперь используем определение ПР (3.1.10).

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} f(\xi, \zeta) \delta \left(\underbrace{x \cos \varphi + y \sin \varphi - \xi \cos \varphi - \zeta \sin \varphi}_{s} \right) d\xi d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta((x - \xi) \cos \varphi + (y - \zeta) \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим внутренний интеграл в (7). Для этого используем формулу суперпозиции δ – функции с обычной функцией $\phi(x)$

$$\delta(\phi(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|\phi'(x_n)|}, \quad (8)$$

где x_n являются простыми нулями функции $\phi(x)$, лежащими в рассматриваемом интервале (предполагается, что кратных корней нет). В частности, если у функции $\phi(x)$ на отрезке интегрирования имеется только один простой корень x_0 , то (8) принимает вид

$$\delta(\phi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\phi'(x_0)|} \quad (9)$$

Для δ – функции, стоящей в (7), имеем $\delta((x - \xi) \cos \varphi + (y - \zeta) \sin \varphi) = \delta(\phi(\varphi))$, где $\phi(\varphi) = (x - \xi) \cos \varphi + (y - \zeta) \sin \varphi$. Найдем нули функции $\phi(\varphi)$. Имеем

$$(x - \xi) \cos \varphi + (y - \zeta) \sin \varphi = 0 \text{ или } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{x - \xi}{y - \zeta}.$$

Во внутреннем интеграле в (7) на отрезке интегрирования $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ имеется

только один корень $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{x - \xi}{y - \zeta} \right)$ функции $\phi(\varphi)$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\phi(\varphi)}{d\varphi} \right| &= \left| -(x-\xi)\sin\varphi + (y-\zeta)\cos\varphi \right| = \left| \cos\varphi \right| \left| -(x-\xi)\tan\varphi + (y-\zeta) \right| = \\ &= \frac{\left| -(x-\xi)\tan\varphi + (y-\zeta) \right|}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}. \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\phi(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{x-\xi}{y-\zeta}\right)^2}} \left| -(x-\xi)\left(-\frac{x-\xi}{y-\zeta}\right) + (y-\zeta) \right| = \\ &= \frac{|y-\zeta|}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}} \left| \frac{(x-\xi)^2}{y-\zeta} + (y-\zeta) \right| = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}. \end{aligned}$$

Тогда из (9) получаем

$$\delta((x-\xi)\cos\varphi + (y-\zeta)\sin\varphi) = \frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}}.$$

Подставляя это в (7), получаем

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (10)$$

Напомним, что двумерной сверткой функций двух переменных $f(x, y)$ и $h(x, y)$ называется следующий интеграл

$$q(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \zeta) h(x-\xi, y-\zeta) d\xi d\zeta$$

Т.о. (10) выражает тот факт, что суммарное изображение $g(x, y)$ является двумерной сверткой искомой функции $f(x, y)$ с ядром $h(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}$, т.е.

$$g(x, y) = f \otimes \otimes h, \quad (11)$$

где $\otimes \otimes$ знак двумерной свертки. Используя операторное обозначение $\mathcal{B}[R[f]]$ для суммы обратных проекций (2), последнее соотношение запишем в виде

$$\mathcal{B}[R[f]] = f \otimes \otimes h$$

Пример 2. Рассмотрим функцию точечного источника $f(x, y) = \delta(x, y)$. Подставляя эту обобщенную функцию в (10), получаем

$$g(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2}} d\xi d\zeta = \frac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (12)$$

т.е. интенсивность суммарного изображения δ – функции убывает как $1/r$. Само $g(x, y)$ суммарное изображение δ – функции совпадает с ядром $h(x, y)$.

□

Таким образом, суммарное изображение $g(x, y)$ связано с искомой функцией $f(x, y)$ через операцию двумерной свертки. Чтобы найти исходное изображение нужно решить уравнение свертки (11) с известным ядром $h(x, y)$ или, при численном решении, со скорректированным ядром $\tilde{h}(x, y)$. Эта операция, называемая двумерной фильтрацией, и дала название методу.

Для решения уравнения (11) используем теорему о двумерной свертке

$$\mathcal{F}_2[g(x, y)] = \mathcal{F}_2[f \otimes h] = 2\pi \mathcal{F}_2[f(x, y)] \cdot \mathcal{F}_2[h(x, y)], \quad (13)$$

где $\mathcal{F}_2[\cdot]$ – двумерное преобразование Фурье. Т.е. ПФ свертки функций f и h есть произведение ПФ этих функций (с точностью до множителя 2π).

Используя (13), получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_2^{-1} \left[\frac{\mathcal{F}_2[g(x, y)]}{\mathcal{F}_2[h(x, y)]} \right], \quad (14)$$

где $\mathcal{F}_2^{-1}[\cdot]$ – обратное двумерное преобразование Фурье.

В завершении вычислим фурье – образ $H(w_1, w_2) = \mathcal{F}_2[h(x, y)]$ функции

$$h(x, y) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\pi r}. \text{ Имеем}$$

$$H(w_1, w_2) = \mathcal{F}_2[h(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-i(w_1 x + w_2 y)} dx dy$$

Перейдем к полярным координатам в плоскости (x, y) и в частотной плоскости (w_1, w_2)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = \omega \cos \psi \\ w_2 = \omega \sin \psi \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} H(w_1, w_2) &= H(\omega, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h(r, \varphi) e^{-i\omega r(\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi)} r dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r \int_0^{2\pi} h(r) e^{-i\omega r \cos(\varphi - \psi)} d\varphi dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi r} e^{-i r \omega \cos(\varphi - \psi)} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-i r \omega \cos(\varphi - \psi)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J_0(r\omega) dr = \frac{1}{\pi\omega}. \end{aligned}$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. При этом мы воспользовались соотношением (C.17)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i r \omega \cos(\varphi - \psi)} d\varphi = J_0(r\omega)$$

и табличным интегралом (A.7) $\int_0^{\infty} J_{\nu}(bx) dx = 1/b$ ($\operatorname{Re} \nu > -1, b > 0$), который при $\nu = 0$ принимает вид $\int_0^{\infty} J_0(\omega x) dx = 1/\omega$.

Таким образом, для фурье – образа $H(\omega, \varphi) = H(\omega)$ ядра $h(x, y) = h(r)$ мы получили следующие выражения

$$H(\omega) = \frac{1}{\pi \omega} \quad \text{или} \quad H(w_1, w_2) = \frac{1}{\pi \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

Тогда из (14) получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_2^{-1} \left[\pi \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \mathcal{F}_2[g(x, y)] \right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}_2^{-1} \left[|\omega| \mathcal{F}_2[g(x, y)] \right] \quad (15)$$

или

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \mathcal{F}_2[g(x, y)] \exp(i(w_1 x + w_2 y)) d w_1 d w_2 \quad (16)$$

При численной реализации в формулу (14) вводят дополнительный множитель $A(w_1, w_2)$, который регуляризирует некорректную задачу решения уравнения свертки. Обычно вместо (14) используют решение в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_2^{-1} \left[\frac{\mathcal{F}_2[g(x, y)]}{\mathcal{F}_2[h(x, y)]} A(w_1, w_2) \right], \quad (17)$$

а функцию $A(w_1, w_2)$ выбирают эмпирически. Например, иногда ее выбирают следующей

$$A(w_1, w_2) = A(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}) = A(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

при некотором ω_0 .

Преобразуем (16) к полярным координатам. Вначале запишем $\mathcal{F}_2[g(x, y)]$

$$G(w_1, w_2) = \mathcal{F}_2[g(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(w_1 x + w_2 y)} d x d y$$

в полярных координатах плоскости (x, y) и частотной плоскости (w_1, w_2) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{и} \quad w_1 = \omega \cos \psi, \quad w_2 = \omega \sin \psi.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} G(w_1, w_2) &= G(\omega, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty g(r, \varphi) e^{-i\omega r(\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi)} r d r d \varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r d r \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) e^{-i\omega r \cos(\varphi - \psi)} d \varphi \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь запишем правую часть формулы (15) в этих координатах

$$\mathcal{F}_2^{-1} \left[|\omega| \mathcal{F}_2[g(x, y)] \right] = \mathcal{F}_2^{-1} \left[|\omega| G(\omega, \psi) \right] = \mathcal{F}_2^{-1} \left[\Gamma(\omega, \psi) \right],$$

где мы обозначили $\Gamma(\omega, \psi) = |\omega| G(\omega, \psi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{-1} \left[\Gamma(\omega, \psi) \right] (r, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d \omega \int_0^{2\pi} \Gamma(\omega, \psi) e^{i\omega r(\cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha)} d \psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d \omega \int_0^{2\pi} \Gamma(\omega, \psi) e^{i\omega r \cos(\psi - \alpha)} d \psi \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая, что интегрирование по ω выполняется от 0 до $+\infty$, мы можем заменить $|\omega|$ на ω . Тогда, заменяя в (19) $\Gamma(\omega, \psi)$ на $\omega G(\omega, \psi)$, получаем

$$f(r, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} G(\omega, \psi) e^{i\omega r \cos(\psi - \alpha)} d\psi.$$

Представление (18) удобно использовать в осесимметричном случае, когда $g(r, \varphi) = g(r)$. Тогда

$$G(\omega, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty g(r) r d\omega \int_0^{2\pi} e^{-i\omega r \cos(\varphi - \psi)} d\varphi = \int_0^\infty g(r) r J_0(r\omega) d\omega = G(\omega)$$

Здесь мы опять использовали значение интеграла С.17. Учитывая последнее соотношение, вычислим правую часть формулы (15):

$$\mathcal{F}_2^{-1}[\omega | \mathcal{F}_2[g(x, y)]] = \mathcal{F}_2^{-1}[\omega | G(\omega)] = \mathcal{F}_2^{-1}[\Gamma(\omega)],$$

где мы обозначили $\Gamma(\omega) = |\omega| G(\omega)$.

Теперь запишем формулу обратного ПФ в полярных координатах. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{-1}[\Gamma(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{2\pi} \Gamma(\omega) e^{i\omega r(\cos\psi \cos\alpha + \sin\psi \sin\alpha)} d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \Gamma(\omega) \omega d\omega \int_0^{2\pi} e^{i\omega r \cos(\psi - \alpha)} d\psi = \int_0^\infty \Gamma(\omega) \omega J_0(\omega r) d\omega = \sigma(r). \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(r) &= \frac{1}{2} \sigma(r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Gamma(\omega) \omega J_0(\omega r) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty |\omega| G(\omega) \omega J_0(\omega r) d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega^2 J_0(\omega r) d\omega \int_0^\infty g(\rho) \rho J_0(\rho\omega) d\rho \end{aligned}$$

Мы здесь заменили $|\omega|$ на ω потому, что интегрирование по ω выполняется от 0 до $+\infty$. Т.о. в осесимметричном случае получаем

$$f(r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \omega^2 J_0(\omega r) d\omega \int_0^\infty g(\rho) \rho J_0(\rho\omega) d\rho \quad (20)$$

Преобразованием Фурье – Бесселя (его также называют преобразованием Ханкеля) порядка n ($n > -1/2$) функции $f(r)$ называется интеграл вида

$$\mathcal{H}_n[f] = F_n(\omega) = \int_0^\infty f(r) r J_n(\omega r) d\omega,$$

где J_n – функция Бесселя n – го порядка.

Обратное преобразование Фурье – Бесселя (обратное преобразование Ханкеля) задается формулой

$$\mathcal{H}_n^{-1}[F_n] = f(r) = \int_0^\infty F_n(\omega) \omega J_n(r\omega) d\omega.$$

Т.о. из (20) следует, что в осесимметричном случае искомое изображение $f(r)$ можно получить с помощью прямого и обратного преобразований Фурье – Бесселя нулевого порядка

$$f(r) = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0^{-1}[\Gamma(\omega)] = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0^{-1}[\omega G(\omega)] = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0^{-1}[\omega \mathcal{H}_0[g(r)]] \quad (21)$$

Пример 3. Рассмотрим «тестовую» проекцию $R(s) = e^{-s^2}$ и найдем функцию $f(r)$ которая ей соответствует. Вычисления выполним в системе *Mathematica*.

Определяем суммарное изображение функции $R(s) = e^{-s^2}$ по ф. (6)

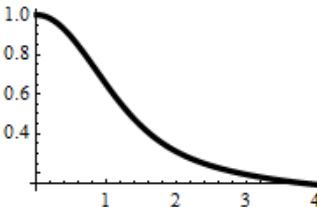
$$g[r] = \frac{1}{2\pi} \text{Integrate}[\text{Exp}[-r^2 \text{Cos}[\varphi]^2], \{\varphi, 0, 2\pi\}, \text{Assumptions} \rightarrow r > 0]$$

$$e^{-\frac{r^2}{2}} \text{BesselI}[0, \frac{r^2}{2}]$$

где через $\text{BesselI}[n, x]$ в *Mathematica* обозначаются цилиндрические функции $I_n(x)$ первого рода от чисто мнимого аргумента. Функции $I_n(x)$ вещественные и связаны с функциями Бесселя соотношением $J_n(ix) = i^n I_n(x)$.

Т.о. суммарное изображение проекции $R(s) = e^{-s^2}$ имеет вид $g(r) = e^{-r^2/2} I_0(r^2/2)$. Ее график показан на следующем рисунке

$$\text{Plot}[g[r], \{r, 0, 4\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01], \text{Black}\}]$$



Вычислим преобразований Фурье – Бесселя нулевого порядка функции $g(r)$.

$$G[w] = \text{Integrate}[g[r] r \text{BesselJ}[0, w r], \{r, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow w > 0]$$

$$\frac{1}{w \sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

Теперь вычисляем интеграл $\int_0^\infty \Gamma(\omega) \omega J_0(\omega r) d\omega$.

$$\Gamma[w] = w G[w];$$

$$\text{Integrate}[w \Gamma[w] \text{BesselJ}[0, w r], \{w, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow r > 0]$$

$$\frac{2 e^{-r^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Учитывая коэффициент $\frac{1}{2}$ в формуле (21), окончательно получаем

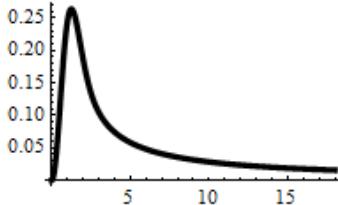
$$f(r) = e^{-r^2} / \sqrt{\pi}$$

□

Пример 4. Найдем радоновский прообраз проекции $R(s) = s^2 e^{-s^2}$. Вычисления выполним в системе *Mathematica*, повторяя схему предыдущего примера.

$$g[r] = \frac{1}{2\pi} \text{Integrate}[r^2 \text{Cos}[\varphi]^2 \text{Exp}[-r^2 \text{Cos}[\varphi]^2], \{\varphi, 0, 2\pi\}, \text{Assumptions} \rightarrow r > 0]$$

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 (\text{BesselJ}[0, \frac{r^2}{2}] - \text{BesselJ}[1, \frac{r^2}{2}])$$

$$\text{Plot}[g[r], \{r, 0, 18\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.02], \text{Black}\}]$$


$$G[w_] = \text{Integrate}[g[r] r \text{BesselJ}[0, w r], \{r, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow w > 0];$$

$$I[w_] = w G[w];$$

$$f[r_] = \frac{1}{2} \text{Integrate}[w I[w] \text{BesselJ}[0, wr], \{w, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow r > 0]$$

$$\frac{e^{-r^2} (-1 + 2r^2)}{2\sqrt{\pi}}$$

Это полностью соответствует результату примера 2.2. □

Пример 5. Найдем радоновский прообраз функции

$$R(s) = \frac{\pi}{2} (1 - s^2) \chi(s) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 - s^2, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases},$$

В примере 1 этого параграфа мы уже вычислили суммарное изображение этой проекции. Оно равно

$$g(r) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} (2 - r^2), & 0 \leq r < 1 \\ \frac{1}{4} \left((2 - r^2) \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{r} \right) + 2\sqrt{r^2 - 1} \right), & r \geq 1 \end{cases}$$

Вычисления выполним в системе *Mathematica*. Вначале находим $\mathcal{H}_0[g(r)]$.

$$\mathcal{H}_0[g(r)] = G(\omega) = \int_0^\infty g(r) r J_n(\omega r) d r = \int_0^1 \cdot + \int_1^\infty \cdot = I_1 + I_2 =$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{4} (2 - r^2) r J_n(\omega r) d r + \int_1^\infty \frac{1}{4} \left((2 - r^2) \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{r} \right) + 2\sqrt{r^2 - 1} \right) r J_n(\omega r) d r$$

Для $I_1 = \int_0^1 \frac{\pi}{4} (2 - r^2) r J_n(\omega r) d r$ имеем

$$g1[r_] = \frac{\pi}{4} (2 - r^2);$$

$$G1[w_] = \text{Integrate}[g1[r] r \text{BesselJ}[0, w r], \{r, 0, 1\}]$$

$$\frac{\pi}{4w^2} (w \text{BesselJ}[1, w] + 2 \text{BesselJ}[2, w])$$

Для $I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{4} \left((2 - r^2) \left(\pi - 2 \arccos \frac{1}{r} \right) + 2\sqrt{r^2 - 1} \right) r J_n(\omega r) d r$ имеем

$$g2[r_] = \frac{1}{4} ((2 - r^2) (\pi - 2 \text{ArcCos}[1/r]) + 2\sqrt{r^2 - 1});$$

$$\mathbf{G2[w_]} = \mathbf{Integrate[g2[r] r BesselJ[0, w r], \{r, 1, \infty\}, Assumptions \rightarrow w > 0]}$$

$$-w(\pi w (w BesselJ[1, w] + 2 BesselJ[2, w]) + 8 \text{Cos}[w]) + 8 \text{Sin}[w]$$

Для $\mathcal{H}_0[g(r)] = G(\omega) = I_1 + I_2$ имеем

$$G[w_] = \mathbf{Simplify[G1[w] + G2[w]]}$$

$$2 \frac{\text{Sin}[w] - w \text{Cos}[w]}{w^4}$$

Т.о. мы получили, что $\mathcal{H}_0[g(r)] = 2 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^4}$.

С вычислением интеграла $\int_0^\infty \Gamma(\omega) \omega J_0(\omega r) d\omega = \int_0^\infty G(\omega) \omega^2 J_0(\omega r) d\omega$ при

произвольном вещественном r или даже при $0 \leq r < 1$ *Mathematica* не справляется. Однако можно убедиться, что при $r > 1$ этот интеграл равен нулю.

$$G[w_] = w G[w];$$

$$\mathbf{Integrate[w \Gamma[w] BesselJ[0, w r], \{w, 0, \infty\}, Assumptions \rightarrow r > 1]}$$

0

А для $0 \leq r < 1$ мы можем проверить известный результат $f(r) = \sqrt{1 - r^2} \chi(r)$.

Для этого вычислим преобразование Фурье – Бесселя функции $f(r)$.

$$\mathbf{FullSimplify[Integrate[r \sqrt{1 - r^2} BesselJ[0, w r], \{r, 0, 1\}, Assumptions \rightarrow w > 0]]}$$

$$\frac{-w \text{Cos}[w] + \text{Sin}[w]}{w^3}$$

Мы получили, что $\mathcal{H}_0[f(r)] = \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3}$. Но это значит, что

$$\mathcal{H}_0[f(r)] = \frac{1}{2} \omega \mathcal{H}_0[g(r)]$$

или

$$f(r) = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0^{-1}[\omega \mathcal{H}_0[g(r)]]$$

5.4 Метод одномерной фильтрации

В методе двумерной фильтрации, рассмотренном в предыдущем параграфе, на первом этапе выполняется обратное проецирование, а полученное суммарное изображение подвергается двумерной фильтрации. В методе одномерной фильтрации (сверточный алгоритм, метод суммирования фильтрованных обратных проекций, filtered back-projection FBP method) наоборот, сначала выполняется фильтрация проекций $R(s, \varphi)$, а затем выполняется операция обратного проецирования, результатом которой является искомое изображение или, при численной реализации, его приближение.

Приведем алгоритм метода. Выпишем формулу (2.12)

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty \omega |\tilde{R}(\omega, \varphi)| e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega, \quad (1)$$

и рассмотрим внутренний интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \tilde{R}(\omega, \varphi) e^{i\omega s} d\omega = I(s, \varphi), \quad (2)$$

где $s = x\cos\varphi + y\sin\varphi$. Он представляет обратное одномерное преобразование Фурье произведения двух функций – оригиналов: $|\omega|$ и $\tilde{R}(\omega, \varphi)$

$$I(s, \varphi) = \mathcal{F}^{-1}[|\omega| \cdot \tilde{R}(\omega, \varphi)]. \quad (3)$$

Напомним теорему о свертке

$$\mathcal{F}[h \otimes f] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[h] \cdot \mathcal{F}[f],$$

где $\mathcal{F}[\cdot]$ – одномерное преобразование Фурье, а \otimes – свертка. Т.е. ПФ свертки функций f и h есть произведение (с точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$) ПФ этих функций. Тогда

$$h \otimes f = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h] \cdot \mathcal{F}[f]], \quad (4)$$

где $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ – одномерное обратное преобразование Фурье.

Если обозначить $|\omega| = \mathcal{F}[h(s)]$ и вспомнить, что $\tilde{R}(\omega, \varphi) = \mathcal{F}[R(s, \varphi)]$, то (3) принимает вид

$$I(s, \varphi) = \mathcal{F}^{-1}[|\omega| \cdot \tilde{R}(\omega, \varphi)] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h(s)] \cdot \mathcal{F}[R(s, \varphi)]]$$

Используя теорему о свертке в форме (4), можно записать

$$\begin{aligned} I(s, \varphi) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h(s)] \cdot \mathcal{F}[R(s, \varphi)]] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(s) \otimes R(s, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) R(s - \xi, \varphi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(s - \xi) R(\xi, \varphi) d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

где функция $h(s)$ определяется из соотношения $|\omega| = \mathcal{F}[h(s)]$, т.е.

$$\begin{aligned} h(s) &= \mathcal{F}^{-1}[|\omega|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega s} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cos(\omega s) d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \omega \cos(\omega s) d\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом из (1) получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

где

$$I(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi) = I(\sigma, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) R(\sigma - \xi, \varphi) d\xi \quad (8)$$

Операция, описываемая соотношением (7), является операцией обратного проецирования. Из (7) и (8) видно, что восстановление изображения $f(x, y)$ выполняется в два этапа. На первом этапе выполняется свертка по первой переменной проекции $R(s, \varphi)$ с обобщенной функцией $h(s)$, результатом

которой является функция $I(s, \varphi)$. На втором этапе осуществляется обратное проецирование функции $I(s, \varphi)$.

Поскольку интеграл, стоящий в (6), расходится, то функция $h(s)$ должна рассматриваться как обобщенная. Однако при численной реализации метода всегда требуется «подавление некорректности» задачи. Для этого удобны способы, «отсекающие» высокие частоты ω , т.е. вместо (6) используют выражения вида

$$\tilde{h}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \omega \cos(\omega s) d\omega, \quad (9)$$

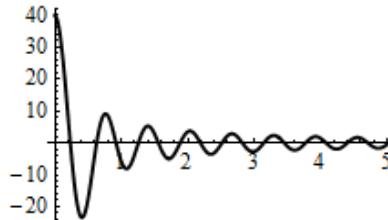
где $A(\omega)$ финитная или быстро убывающая по $|\omega|$ функция. Например, можно взять $A(\omega) = A_1(\omega) = \chi(|\omega/\omega_0|)$, где $\chi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, а ω_0 – некоторая фиксированная частота. Это значит, что верхний предел интегрирования в (6) ограничивается величиной $\omega \leq \omega_0$ и функция $\tilde{h}(s)$ принимает вид

$$h_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} A_1(\omega) \omega \cos(\omega s) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} \omega \cos(\omega s) d\omega,$$

превращаясь в «обычную» функцию. Для нее имеем

$$\begin{aligned} h_1(s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} \omega \cos(\omega s) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s \omega_0 \sin(\omega_0 s) + \cos(\omega_0 s) - 1}{s^2} = \\ &= \omega_0^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\text{sinc}(\omega_0 s) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 s}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$. График функции – фильтра $h_1(s)$ при $\omega_0 = 10$ показан на следующем рисунке.



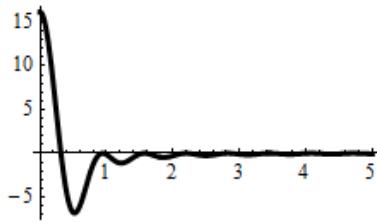
Иной фильтр получается, если взять

$$A(\omega) = A_2(\omega) = \text{sinc}(\pi \omega / \omega_0) \chi(|\omega / \omega_0|)$$

Тогда получаем другое приближение функции $h(s)$:

$$\begin{aligned} h_2(s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A_2(\omega) \omega \cos(\omega s) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\omega_0} \omega \text{sinc}(\pi \omega / \omega_0) \cos(\omega s) d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega_0^2 \frac{1 + \cos(\omega_0 s)}{\pi^2 - s^2 \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

График этого фильтра при $\omega_0 = 10$ показан на следующем рисунке.



Существует много способов выбора функции $A(\omega)$ и, соответственно, много разных фильтров. Наиболее аккуратное подавление высоких частот ω в выражении (6) выполняется с помощью метода регуляризации Тихонова. Он приводит к следующему фильтру (модифицированный фильтр Троицкого):

$$\tilde{h}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\omega}{1 + \alpha \omega^{2p}} \cos(\omega s) d\omega,$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, обычно выбираемый $\alpha \sim 10^{-3} \div 10^{-6}$, $p = 1, 2, \dots$ – порядок регуляризации.

Таким образом, метод одномерной фильтрации сводится к формуле

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(x \cos \varphi + y \sin \varphi - \xi, \varphi) d\xi d\varphi, \quad (12)$$

где фильтр $\tilde{h}(\xi)$ определяется из (9) выбором функции $A(\omega)$.

Запишем формулу (12) для осесимметричного случая. После перехода к полярным координатам r, α будем иметь $x \cos \varphi + y \sin \varphi = r \cos(\varphi - \alpha)$ и $R(x \cos \varphi + y \sin \varphi - \xi, \varphi) = R(r \cos(\varphi - \alpha) - \xi)$. Теперь покажем, что функция $I(r, \alpha, \varphi) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(r \cos(\varphi - \alpha) - \xi) d\xi$ по φ имеет период π . Действительно

$$\begin{aligned} I(r, \alpha, \varphi + \pi) &= \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(r \cos(\varphi + \pi - \alpha) - \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(-r \cos(\varphi - \alpha) - \xi) d\xi = |R(-s) = R(s)| = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(r \cos(\varphi - \alpha) + \xi) d\xi = |\xi = -\zeta| = \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} \tilde{h}(-\zeta) R(r \cos(\varphi - \alpha) - \zeta) (-d\zeta) = |\tilde{h}(-\zeta) = \tilde{h}(\zeta)| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(\zeta) R(r \cos(\varphi - \alpha) - \zeta) d\zeta = I(r, \alpha, \varphi) \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что из (9) следует четность функции $\tilde{h}(s)$. Далее из (12) имеем

$$\begin{aligned} f(r, \alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi I(r, \alpha, \varphi) d\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \tilde{h}(\xi) R(r \cos(\varphi - \alpha) - \xi) d\xi d\varphi = \\ &= |\varphi - \alpha = \psi| = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\alpha}^{\pi - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi) R(r \cos \psi - \xi) d\xi d\psi \end{aligned}$$

Поскольку интегрирование по φ выполняется по отрезку $[-\alpha, \pi - \alpha]$ длиной равной длине периода подынтегральной функции $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi) R(r \cos \psi - \xi) d\xi$, то можно положить $\alpha = 0$ и мы получаем

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\xi) R(r \cos \varphi - \xi) d\xi d\varphi \quad (13)$$

Пример 1. С помощью метода одномерной фильтрации восстановить (приближенно) радоновский прообраз $\tilde{f}(r)$ проекции $R(s) = e^{-s^2}$, используя фильтры (10) и (11).

Вычисления выполним в системе *Mathematica*. Вначале используем фильтр (10).

w0 = 3;

$$h[s_] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} w0^2 \left(\text{Sinc}[s w0] - \frac{1}{2} \text{Sinc}\left[\frac{s w0}{2}\right]^2 \right);$$

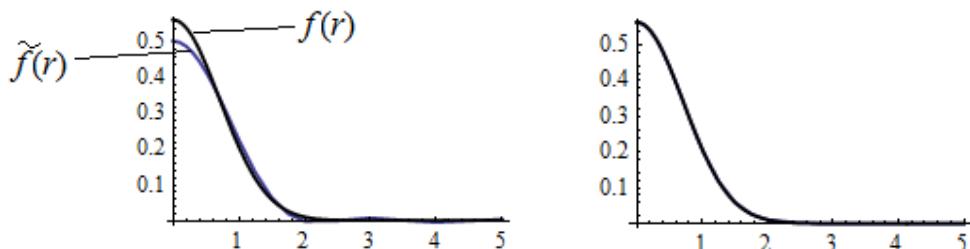
$$R[s_] = \text{Exp}[-s^2];$$

$$f[r_] := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{NIntegrate}[h[x] R[r \text{Cos}[\varphi] - x], \{\varphi, 0, \pi\}, \{x, -\infty, \infty\},$$

```

PrecisionGoal→5, AccuracyGoal→5,
WorkingPrecision → MachinePrecision]//Quiet;
rg = Join[Range[0, 1, 0.1], Range[1.25, 2, 0.25], Range[2.5, 5, 0.5]];
pt = Table[{r, f[r]}, {r, rg}]
p1 = ListPlot[pt, Joined → True, PlotStyle → Thickness[0.01]];
p2 = Plot[Exp[-r^2]/Sqrt[\pi], {r, 0, 5}];
Show[p1, p2, PlotRange → All] (* следующий график слева *)

```



Дадим пояснения к приведенному коду. В первых трех строках мы задаем значение максимальной частоты отсечения ω_0 , функцию фильтра $h(s)$ и проекцию $R(s)$. Следующая команда создает функцию $f(r)$, которая для заданного r численно определяет двойной интеграл (13). При этом для ускорения вычисления мы задаем небольшие относительную и абсолютную точности вычислений, а также с помощью функции `Quiet` подавляем вывод сообщений. Вычисления функции $f(r)$ выполняются относительно долго. Чтобы не делать вычислений функции в «лишних» точках мы создаем список `rg`, который содержит только желаемые значения r . Команда `pt=Table[{r, f[r] }, {r, rg}]` создает список пар $r_i, f(r_i)$, вычисляя

значения функции $f(r)$ в каждой точке r_i . Затем мы строим кривую $p1$, по точкам $p1$. Поскольку точное значение радоновского прообраза $f(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2}$

нам известно, то для сравнения мы строим его график $p2$. Функция `Show` отображает оба графика одновременно.

На предыдущем рисунке слева показан график функции $\tilde{f}(r)$, полученный при $\omega_0 = 3$. Уже при $\omega_0 = 5$ графики функций $f(r)$ и $\tilde{f}(r)$ практически сливаются (см. предыдущий рисунок справа). Чтобы построить второй график измените в коде первую строку на `w0=5`. При больших значениях ω_0 совпадение графиков еще большее.

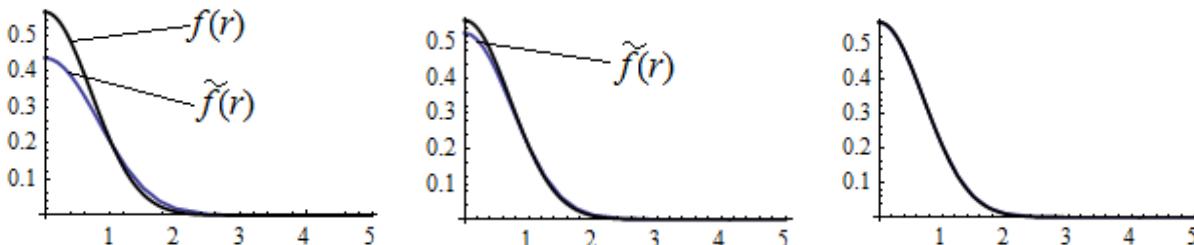
Теперь используем фильтр (11). Измените в предыдущем коде первые две строки следующим образом

w0 = 5;

$h[s_] = \sqrt{2/\pi} \text{Integrate}[w \text{Sinc}[\pi w/w0] \text{Cos}[ws], \{w, 0, w0\}]$

...

Графики функции $\tilde{f}(r)$ при $\omega_0 = 5$ и «точного» оригинала $f(r)$ показаны на следующем рисунке слева. На рисунке в центре показаны те же функции, но $\tilde{f}(r)$ построено при $\omega_0 = 10$. Справа приведен график функции $\tilde{f}(r)$ при $\omega_0 = 50$ и график «точного» оригинала $f(r)$. Они практически слились.



Мы видим, что восстановление гладкой функции $f(r)$ по гладкой радоновской проекции $R(s) = e^{-s^2}$ выполняется достаточно успешно обеими фильтрами. □

Пример 2. С помощью метода одномерной фильтрации восстановить (приближенно) радоновский прообраз $\tilde{f}(r)$ проекции $R(s) = \sqrt{1-s^2} \chi(|s|)$, используя фильтры (10) и (11).

Вычисления выполним в системе *Mathematica*. Вначале используем фильтр (10). Код *Mathematica*, реализующий вычисления, похож на код предыдущего примера. Отличие состоит в выражениях для функции $R(s)$ и «точного» оригинала $f(r) = \frac{1}{2} \chi(|r|)$, который мы рисуем для сравнения.

w0 = 5;

$h[s_] = \sqrt{2/\pi} w0^2 \left(\text{Sinc}[sw0] - \frac{1}{2} \text{Sinc}[\frac{sw0}{2}]^2 \right);$

$R[s_] = \text{Piecewise}[\{\{\sqrt{1-s^2}, \text{Abs}[s] \leq 1\}, 0\};$

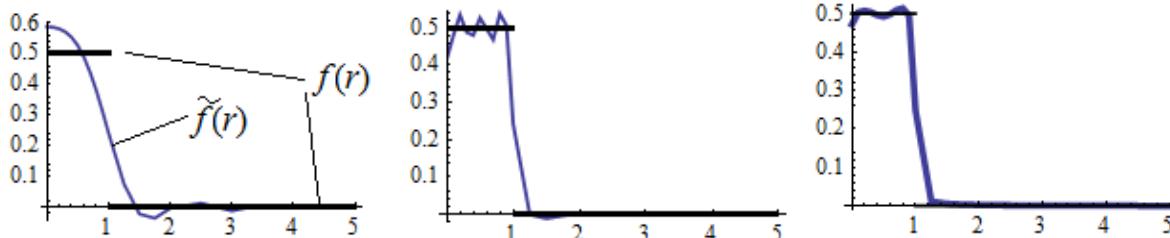
```


$$f[r_] := \frac{1}{(2\pi)^2} \text{NIntegrate}[h[x] R[r \text{Cos}[\varphi] - x], \{\varphi, 0, \pi\}, \{x, -\infty, \infty\},$$

PrecisionGoal -> 5, AccuracyGoal -> 5,
WorkingPrecision -> MachinePrecision] // Quiet;
rg = Join[Range[0, 1, 0.1], Range[1.25, 2, 0.25], Range[2.5, 5, 0.5]];
pt = Table[{r, f[r]}, {r, rg}];
p1 = ListPlot[pt, Joined -> True, PlotStyle -> Thickness[0.01]];
p2 = Plot[Piecewise[{{0.5, Abs[r] < 1}}, 0], \{r, 0, 5\}];
Show[p1, p2, PlotRange -> All] (* следующий рисунок слева *)

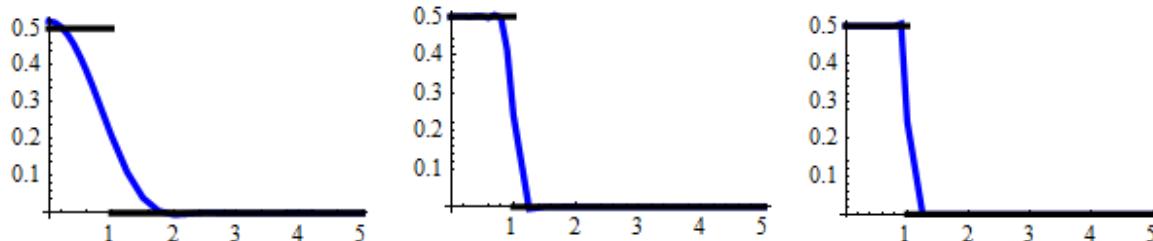
```

На следующем рисунке показаны график «точного» оригинала $f(r)$, который является ступенчатой функцией, и график приближенного радоновского прообраза $\tilde{f}(r)$, получаемого с помощью фильтра (10). Для построения левого графика $\tilde{f}(r)$ использовано $\omega_0 = 5$, для среднего – $\omega_0 = 20$, для правого – $\omega_0 = 50$.



Теперь используем фильтр (11). Измените в предыдущем коде первые две строки также, как и в примере 1.

На следующем рисунке показаны графики оригинала $f(r)$ и функции $\tilde{f}(r)$, построенной с использованием фильтра (11). Для левого графика использовано $\omega_0 = 5$, для среднего – $\omega_0 = 20$, для правого – $\omega_0 = 50$.



Как видим, фильтр (11) дает лучшее приближение $\tilde{f}(r)$, чем фильтр (10) при одинаковых значениях ω_0 . □

Одномерная фильтрация оказалась наиболее эффективной в вычислительном отношении, вследствие чего во многих коммерческих рентгеновских томографах используются варианты этого метода.

Приложение А. Таблица интегралов

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$
2. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right)$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-\alpha} x^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$
4. $\int_0^\infty e^{-q^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q}, q > 0$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)$
6. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-px^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2p)^n} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (p > 0)$
7. $\int_0^\infty J_\nu(bx) dx = \frac{1}{b} \quad (\operatorname{Re} \nu > -1, b > 0).$
8. $\int_0^\pi e^{i\beta \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi = i^n \pi J_n(\beta)$

Приложение В. Таблица преобразований Радона

	$f(x, y)$	$R[f](s, \varphi)$	Комментарий
1	$e^{-x^2-y^2}$	$\sqrt{\pi} e^{-s^2}$	
2	$x e^{-x^2-y^2}$	$\sqrt{\pi} \cos \varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$	
3	$y e^{-x^2-y^2}$	$\sqrt{\pi} \sin \varphi \cdot s \cdot e^{-s^2}$	
4	$(x + y) e^{-x^2-y^2}$	$\sqrt{\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) s \cdot e^{-s^2}$	
5	$\exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b^2}\right\}$	$ b \sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{(s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2}{b^2}\right]$	
6	$\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$	$\frac{ ab \sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \exp\left(-\frac{s^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\right)$	
7	$x y e^{-x^2-y^2}$	$\sqrt{\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \left(s^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-s^2}$	
8	$x^2 e^{-x^2-y^2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} (2s^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) e^{-s^2}$	
9	$y^2 e^{-x^2-y^2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} (2s^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) e^{-s^2}$	
10	$(x^2 + y^2) e^{-a^2(x^2+y^2)}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2 a^3 } (1 + 2a^2 s^2) e^{-a^2 s^2}$	
11	$x y^2 e^{-x^2-y^2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} (2s^3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi + s \cos \varphi (1 - 3 \sin^2 \varphi)) e^{-s^2}$	
12	$\chi(r/a)$ ($a > 0$)	$2\sqrt{a^2 - s^2} \cdot \chi(s/a)$	XФ круга
13	$\sqrt{1-r^2} \cdot \chi(r)$	$\frac{\pi}{2} (1 - s^2) \chi(s)$	Полусфера

14	$\sqrt{a^2 - r^2} \cdot \chi(r/a)$	$\frac{\pi}{2} (a^2 - s^2) \chi\left(\frac{s}{a}\right)$	Полусфера
15	$\chi\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$	$\frac{2 ab }{\Delta} \sqrt{1 - \frac{s^2}{\Delta^2}} \cdot \chi\left(\frac{ s }{\Delta}\right)$, где $\Delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$	ХФ эллипса
16	$\chi(\text{квадрата})$	см. ф. (5.5) и (5.6)	ХФ квадрата
17	$\begin{cases} x, x^2 + y^2 < 1 \\ 0, x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \cos \varphi \cdot s \sqrt{1 - s^2}, s < 1 \\ 0, s > 1 \end{cases}$	
18	$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 < 1 \\ 0, x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{4}{3} (1 - s^2) \sqrt{1 - s^2}, s < 1 \\ 0, s > 1 \end{cases}$	
19	$\begin{cases} \frac{b}{a} (a - \sqrt{x^2 + y^2}), x^2 + y^2 < a^2 \\ 0, x^2 + y^2 \geq a^2 \end{cases}$	$\begin{cases} b \sqrt{a^2 - s^2} - \frac{b}{a} s^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - s^2}}{ s }, s < s \\ 0, s \geq s \end{cases}$	ХФ конуса
20	$x^2 \chi(r)$	$\sqrt{1 - s^2} \left(2s^2 \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} (1 - s^2) \sin^2 \varphi \right) \cdot \chi(s)$	
21	$y^2 \chi(r)$	$\sqrt{1 - s^2} \left(2s^2 \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} (1 - s^2) \cos^2 \varphi \right) \cdot \chi(s)$	
22	$(x^2 + y^2) \chi(r)$	$\frac{2}{3} \sqrt{1 - s^2} (2s^2 + 1) \cdot \chi(s)$	
23	$\begin{cases} x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 1 \\ 0, x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} (1 + s^2) \sqrt{1 - s^2}, s < 1 \\ 0, s > 1 \end{cases}$	

24	$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{1-s^2} + \frac{s^2}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-s^2}}{1-\sqrt{1-s^2}}, & s < 1 \\ 0, & s \geq 1 \end{cases}$	
25	$x r^2 \chi(r)$	$\frac{2}{3} s \sqrt{1-s^2} (2s^2 + 1) \cos \varphi \cdot \chi(s)$	
26	$x r \chi(r)$	$s \cos \varphi \left(\sqrt{1-s^2} + s^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-s^2}}{ s } \right) \cdot \chi(s)$	
27	$\chi(\text{полукруга})$	$\begin{cases} \sqrt{1-s^2} + s \cdot \operatorname{tg} \varphi, & s < \cos \varphi \\ 2\sqrt{1-s^2}, & \cos \varphi \leq s < 1 \\ 0, & -1 < s < -\cos \varphi \vee s \geq 1 \end{cases}$	XФ полукруга

В таблице использованы следующие обозначения: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\chi(r) = \chi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1, & |r| < 1 \\ 0, & |r| \geq 1 \end{cases}$ – характеристическая функция единичного круга.

Приложение С. Вычисление некоторых интегралов.

1⁰. Вычисление интеграла

$$I_0 = v.p. \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - r \cos x} dx \quad (1)$$

и начнем с вычисления неопределенного интеграла $J = \int \frac{1}{s - r \cos x} dx$, в

котором сделаем замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$). Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Поэтому

$$J(x) = \int \frac{1}{s - r \cos x} dx = \int \frac{1}{s - r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \frac{2dt}{1 + t^2} = 2 \int \frac{dt}{s(1 + t^2) - r(1 - t^2)}. \quad (2)$$

При $|s| > r$ из (2) имеем

$$\begin{aligned} J(x) &= 2 \int \frac{dt}{(s - r) + (s + r)t^2} = 2 \int \frac{dt}{(s - r) \left(1 + \frac{s+r}{s-r} t^2\right)} = \left| \tau = \sqrt{\frac{s+r}{s-r}} t \right| = \\ &= 2 \int \frac{d\tau}{(s - r)(1 + \tau^2) \sqrt{\frac{s+r}{s-r}}} = \operatorname{sign}(s) \frac{2}{\sqrt{s^2 - r^2}} \int \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = \operatorname{sign}(s) \frac{2}{\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{arctg} \tau = \\ &= \frac{2 \operatorname{sign}(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{s+r}{s-r}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \operatorname{Const}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – знаковая функция.

В I_0 сдвинем отрезок интегрирования

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{s - r \cos x} dx, \quad (3)$$

оставив неизменной его длину. Это можно сделать, поскольку $1/(s - r \cos x)$ является периодической функцией с периодом 2π и интегрирование выполняется по отрезку, длина которого равна длине периода.

В случае $|s| > r \geq 0$, имеем

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{s - r \cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi+2\varepsilon}^{\pi-2\varepsilon} \frac{dx}{s - r \cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J(\pi - 2\varepsilon) - J(-\pi + 2\varepsilon))$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{s+r}{s-r}} \operatorname{tg} \frac{\pm \pi \mp 2\varepsilon}{2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{s+r}{s-r}} \operatorname{tg} \left(\pm \frac{\pi}{2} \mp \varepsilon \right) \right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

Поэтому

$$I_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J(\pi - 2\varepsilon) - J(-\pi + 2\varepsilon)) = \frac{2 \operatorname{sign}(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2\pi \operatorname{sign}(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}}. \quad (4)$$

В рассмотренном случае $|s| > r$ интеграл (1) можно также вычислить с помощью вычетов.

При $|s| < r$ из (2) имеем

$$\begin{aligned} J(x) &= 2 \int \frac{dt}{s(1+t^2) - r(1-t^2)} = 2 \int \frac{dt}{(s-r)\left(1 - \frac{r+s}{r-s}t^2\right)} = \left| \tau = \sqrt{\frac{r+s}{r-s}}t \right| = \\ &= 2 \int \frac{d\tau}{(s-r)(1-\tau^2)\sqrt{\frac{r+s}{r-s}}} = \frac{-2}{\sqrt{r^2-s^2}} \int \frac{d\tau}{1-\tau^2} = \frac{-2}{\sqrt{r^2-s^2}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\tau}{1-\tau} \right| = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \ln \left| \frac{1-\tau}{1+\tau} \right| \end{aligned}$$

Обозначим $a = \sqrt{\frac{r+s}{r-s}}$. Тогда

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \ln \left| \frac{1-a t}{1+a t} \right| = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \ln \left| \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+a \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \operatorname{Const}.$$

На отрезке $[-\pi, \pi]$ подынтегральная функция в (3) имеет две внутренние особые точки $\pm \arccos \frac{s}{r}$. Они же являются особыми точками функции J .

Обозначим $x_0 = \arccos \frac{s}{r}$ – главное значение арккосинуса, т.е. $0 \leq x_0 < \pi$.

Понимая интеграл I_0 в смысле главного значения, имеем

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{s - r \cos x} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{-\pi+2\varepsilon}^{-x_0-\delta} + \int_{-x_0+\delta}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\pi-2\varepsilon} \right) = A + B, \quad (5)$$

где

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J(\pi - 2\varepsilon) - J(-\pi + 2\varepsilon)). \quad (6)$$

$$B = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J(-x_0 - \delta) + J(x_0 - \delta) - J(-x_0 + \delta) - J(x_0 + \delta)). \quad (7)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) = \operatorname{ctg} \varepsilon$, имеем

$$J(\pm \pi \mp 2\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \ln \left| \frac{1-a \operatorname{tg} \left(\pm \frac{\pi}{2} \mp \varepsilon \right)}{1+a \operatorname{tg} \left(\pm \frac{\pi}{2} \mp \varepsilon \right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \ln \left| \frac{1-a (\pm \operatorname{ctg} \varepsilon)}{1+a (\pm \operatorname{ctg} \varepsilon)} \right|$$

Тогда из (6) имеем

$$A = \frac{1}{\sqrt{r^2-s^2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \frac{1-a \operatorname{ctg} \varepsilon}{1+a \operatorname{ctg} \varepsilon} \right| - \ln \left| \frac{1+a \operatorname{ctg} \varepsilon}{1-a \operatorname{ctg} \varepsilon} \right| \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{r^2 - s^2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{1-a \operatorname{ctg} \varepsilon}{1+a \operatorname{ctg} \varepsilon} \right| = 0$$

Далее имеем $B = B_1 + B_2$, где

$$B_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J(x_0 - \delta) - J(x_0 + \delta)). \quad (8)$$

$$B_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J(-x_0 - \delta) - J(-x_0 + \delta)). \quad (9)$$

Для выражения $J(x_0 - \delta) - J(x_0 + \delta)$ имеем

$$\begin{aligned} J(x_0 - \delta) - J(x_0 + \delta) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} \left(\ln \left| \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}}{1+a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}} \right| - \ln \left| \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}}{1+a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} \left(\ln \left| \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}}{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}} \right| + \ln \left| \frac{1+a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}}{1+a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}} \right| \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $0 \leq x_0 < \pi$, то угол $x_0/2$ расположен в первой четверти. Тогда в следующем выражении перед квадратным корнем стоит знак плюс

$$\operatorname{tg} \frac{x_0}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x_0}{1 + \cos x_0}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{arccos}(s/r)}{1 + \cos \operatorname{arccos}(s/r)}} = \sqrt{\frac{r-s}{r+s}} = \frac{1}{a}.$$

Поэтому выражения, стоящее в числителе и знаменателе второго логарифма в (10), при $\delta \rightarrow 0$ имеют конечные и одинаковые значения (равные 2), а само второе слагаемое в (10) в пределе стремится к нулю.

У дроби, стоящей под знаком модуля первого логарифма в (10), числитель и знаменатель при $\delta \rightarrow 0$ имеют нулевые предельные значения. Поэтому для вычисления предела можно применить правило Лопиталя. Дифференцируя по δ , получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}}{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-a \frac{1}{\cos^2 \frac{x_0 - \delta}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right)}{-a \frac{1}{\cos^2 \frac{x_0 + \delta}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2 \cos^2 \frac{x_0 - \delta}{2}}}{\frac{-a}{2 \cos^2 \frac{x_0 + \delta}{2}}}.$$

Учитывая, что при $0 \leq x_0 < \pi$, в следующей формуле перед квадратным корнем стоит знак плюс

$$\cos \frac{x_0}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x_0}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{arccos}(s/r)}{2}} = \sqrt{\frac{r+s}{2r}}, \quad (11)$$

и $\cos(x_0/2)$ имеет конечное значение. Это значит, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 - \delta}{2}}{1-a \operatorname{tg} \frac{x_0 + \delta}{2}} = -1.$$

В результате первое слагаемое в (10) и, следовательно, все выражение (10) стремятся к нулю, т.е.

$$B_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J(x_0 - \delta) - J(x_0 + \delta)) = 0.$$

Аналогично проверим, что $B_2 = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} J(-x_0 - \delta) - J(-x_0 + \delta) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} \left(\ln \left| \frac{1 - a \operatorname{tg} \frac{-x_0 - \delta}{2}}{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 - \delta}{2}} \right| - \ln \left| \frac{1 - a \operatorname{tg} \frac{-x_0 + \delta}{2}}{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 + \delta}{2}} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} \left(\ln \left| \frac{1 - a \operatorname{tg} \frac{-x_0 - \delta}{2}}{1 - a \operatorname{tg} \frac{-x_0 + \delta}{2}} \right| + \ln \left| \frac{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 + \delta}{2}}{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 - \delta}{2}} \right| \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $-\pi < -x_0 \leq 0$, то угол $-x_0/2$ расположен в четвертой четверти. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{-x_0}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x_0}{1 + \cos x_0}} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{arccos}(s/r)}{1 + \cos \operatorname{arccos}(s/r)}} = -\sqrt{\frac{r-s}{r+s}} = -\frac{1}{a}$$

Поэтому выражения, стоящее в числителе и знаменателе первого логарифма (12), при $\delta \rightarrow 0$ имеют конечные и одинаковые значения (равные 2), а сам первый логарифм в пределе стремится к нулю.

У дроби, стоящей под знаком модуля второго логарифма в (12), и числитель и знаменатель при $\delta \rightarrow 0$ имеют нулевые предельные значения. Поэтому для вычисления предела этого выражения можно применить правило Лопитала. Дифференцируя по δ , получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 - \delta}{2}}{1 + a \operatorname{tg} \frac{-x_0 + \delta}{2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{-a}{2 \cos^2 \frac{-x_0 - \delta}{2}}}{\frac{a}{2 \cos^2 \frac{-x_0 + \delta}{2}}} = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{x_0 - \delta}{2}}{\cos^2 \frac{x_0 + \delta}{2}} = -1.$$

Здесь мы снова учли (11), из которого следует, что $\cos(x_0/2)$ имеет конечное значение.

В результате второе слагаемое в (12) и, следовательно, все выражение (12) стремятся к нулю. Т.е.

$$B_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (J(-x_0 - \delta) - J(-x_0 + \delta)) = 0,$$

а значит $B = B_1 + B_2 = 0$ и $I_0 = 0$ (в рассмотренном случае $|s| < r$).

В результате получаем, что $I_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{sign}(s)$ при $|s| > r$, и $I_0 = 0$ при $|s| < r$, или

$$I_0(s) = \begin{cases} 0 & , |s| < r \\ \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} \operatorname{sign}(s), & |s| > r \end{cases} = \operatorname{sign}(s) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r), \quad (13)$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – знаковая функция, и $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

2⁰. Вычислим интеграл $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$. Имеем

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x + i \sin \alpha x}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx + i \cdot v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

поскольку первый интеграл от нечетной функции равен нулю.

Вычислим интеграл $I_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ (при $\alpha = 1$ его часто называют интегралом Дирихле) с помощью дифференцирования по параметру. Непосредственное дифференцирование по α приводит к расходящемуся интегралу $\int_0^{\infty} \cos(\alpha x) dx$, поэтому введем «множитель сходимости» e^{-kx} ($k > 0$) и станем искать значение интеграла $I = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. Для него дифференцирование по α под знаком интеграла допустимо, поскольку подынтегральная функция и ее производная по α непрерывны по x и α (считаем, что при $x=0$ подынтегральная функция равна единице – своему предельному значению), а интеграл $\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos \alpha x dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$, получаемый

дифференцированием по α , сходится равномерно по α , так как мажорируется интегралом $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$, не содержащим α . Т.о. $\frac{dI}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$. Интегрируя по α ,

находим $I = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k}$ и константа интегрирования равна нулю, поскольку оба выражения при $\alpha = 0$ обращаются в ноль.

Формула для интеграла I получена в предположении, что $k > 0$. Но при фиксированном α интеграл I является функцией непрерывной по k и при $k=0$. Это следует из равномерной сходимости интеграла I относительно k при $k \geq 0$.

Т.о. $I_0 = \lim_{k \rightarrow 0} I$. Если $\alpha > 0$, то $I_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$. Если $\alpha < 0$, то

$I_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. При $\alpha = 0$ имеем $I_0 = 0$. В результате

$$I_0 = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{sign} \alpha \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = 2i \cdot \operatorname{sign} \alpha \cdot \frac{\pi}{2} = i\pi \operatorname{sign} \alpha \quad (14)$$

3^0 . Вычислим интеграл $I = \int_0^{2\pi} e^{-ir\omega \cos(\varphi-\psi)} d\varphi$. Для этого используем табличный интеграл (A.8)

$$\int_0^\pi e^{i\beta \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi = i^n \pi J_n(\beta) \quad (15)$$

Под интегралом I стоит периодическая с периодом 2π функция. Значение интеграла по отрезку длиной равной длине периода подынтегральной функции не зависит от начальной точки отрезка и поэтому мы можем положить $\psi = 0$.

Тогда

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi = \int_0^\pi e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi + \int_\pi^{2\pi} e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi.$$

Но

$$\int_\pi^{2\pi} e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi = |\zeta = \varphi - \pi| = \int_0^\pi e^{-ir\omega \cos(\pi + \zeta)} d\zeta = \int_0^\pi e^{ir\omega \cos \zeta} d\zeta$$

В результате

$$I = \int_0^\pi e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi + \int_0^\pi e^{ir\omega \cos \varphi} d\varphi$$

Из (15) следует, что при $n=0$ и $\beta = -r\omega$ или $\beta = r\omega$ интегралы в предыдущем равенстве равны соответственно

$$\int_0^\pi e^{-ir\omega \cos x} dx = \pi J_0(-r\omega) \quad \text{и} \quad \int_0^\pi e^{ir\omega \cos x} dx = \pi J_0(r\omega).$$

Учитывая четность функции Бесселя нулевого порядка, получаем

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-ir\omega \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(r\omega) \quad (16)$$

Или

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ir\omega \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = J_0(r\omega) \quad (17)$$

Упражнения .

Упражнения к главе 3.

1. Вычислить ПР функции $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

2. Вычислить ПР верхней половины эллипсоида, т.е. функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ 0, & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \end{cases}$$

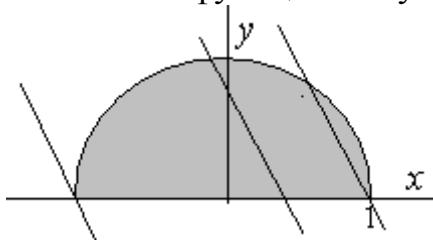
Указание. Использовать ПР полусферы.

3. Вычислить ПР эллиптического параболоида, т.е. функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ 0, & 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1 \end{cases}$$

Указание. Использовать ПР параболоида вращения.

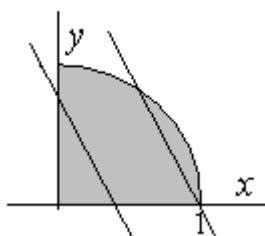
4. Вычислить ПР характеристической функции полукруга.



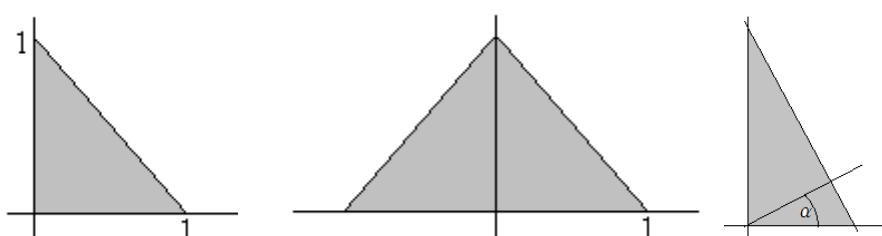
Ответ:

$$R(s, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{1 - s^2} + s \cdot \operatorname{tg} \varphi, & |s| < |\cos \varphi| \\ 2\sqrt{1 - s^2}, & \cos \varphi \leq s < 1 \\ 0, & -1 < s < -\cos \varphi \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

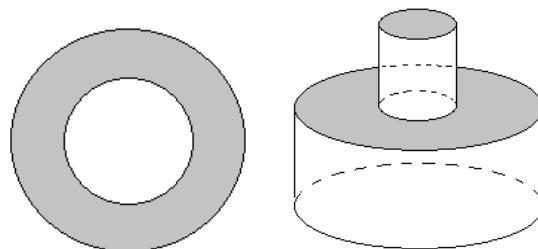
5. Вычислить ПР характеристической функции четверти круга.



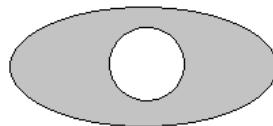
6. Вычислить ПР характеристической функции прямоугольных треугольников равнобедренных и общего вида.



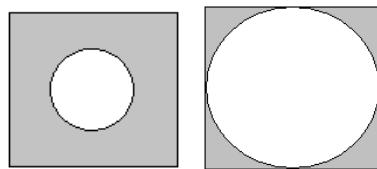
7. Вычислить ПР ХФ кругового кольца и сумму ХФ двух центрированных кругов разного радиуса



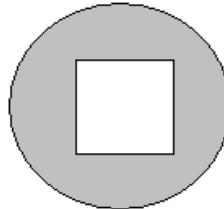
8. Вычислить ПР ХФ области эллипса с круговым отверстием



9. Вычислить ПР ХФ области квадрата с круговым отверстием



10. Вычислить ПР ХФ области круга с квадратным отверстием.



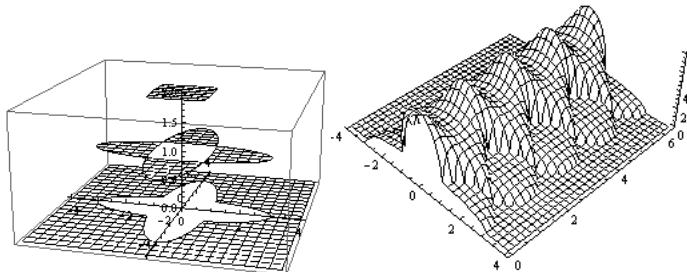
11. Вычислить ПР суммы ХФ двух центрированных квадратов разного размера

12. Вычислить ПР ХФ области повернутого на 45^0 квадрата.

13. Вычислить ПР суммы ХФ двух эллипсов $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} \leq 1$ и $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

Указание. Нужно сложить функции ПР двух эллипсов.

Исходная функция показана на следующем рисунке слева, а ее ПР показана справа.



14. Вычислить ПР суммы нескольких «полусфер» – центрированной и нескольких сдвинутых.

15. Вычислить ПР суммы нескольких «конусов» – центрированного и нескольких сдвинутых.

16. Вычислить ПР функции, заданной «аналитическим» выражением $f(x, y)$ в единичном круге, и равной нулю вне него. Рассмотреть следующие выражения

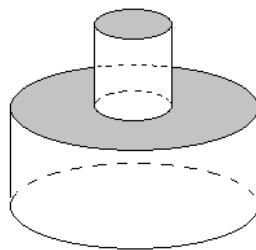
$$f = |x|, f = x \cdot y, f = |xy|, f = 1 - |x| - |y|, f = x^2 - y^2, f = x(1 - x^2 - y^2).$$

Например, вычислить $R[f] = \int_L |x| dt = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} |s \cos \varphi - t \sin \varphi| dt$.

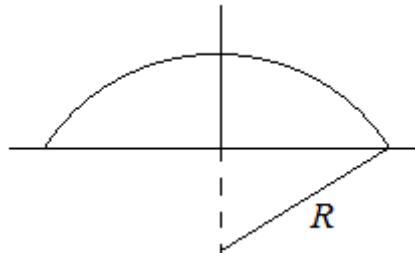
Упражнения к главе 4.

1. Вычислить ПР осесимметричной функции $f(r) = (h^2 - r^2)\chi(r/h)$, где $\chi(r)$ – характеристическая функция единичного круга.

2. Вычислить ПР суммы ХФ двух центрированных кругов разного радиуса



3. Вычислить ПР функции, совпадающей с поверхностью вращения дуги окружности, и равной нулю вне.

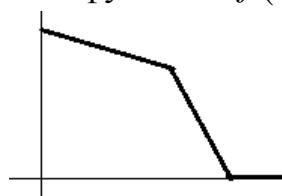


4. Вычислить ПР осесимметричной функции следующего вида

$$f(r) = b \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \cdot \chi(r/a)$$

(поверхность вращения половины эллипса).

5. Вычислить ПР осесимметричной функции $f(r)$ следующего вида



6. Вычислить ПР осесимметричной функции следующего вида

$$f(r) = \begin{cases} 1, & |r| < 1 \\ e^{-(r-1)^2}, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

7. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1 - s^4, & |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

8. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1 - (s - a)^2, & |s - a| < 1 \quad (a > 1) \\ 0, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

9. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1, & |s| < 1 \\ e^{-(s-1)^2}, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

10. Определить радоновский прообраз функции

$$R(s) = \begin{cases} 1, & |s| < 1 \\ 1/s^2, & |s| \geq 1 \end{cases}$$

11. Определить радоновский прообраз функций $R(s)$ следующего вида

