Афінні перетворення
Рухи

Власенко Дмитро Іванович

кафедра геометрії, ММФ

Харків, 2015

Зміст

Рухи на площині

Визначення.

Перетворення $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, називається рухом, якщо $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, де $d(x, y)$ позначає відстань між точками x і y, а $\mathbb{E}^2$ позначає евклидову площину.

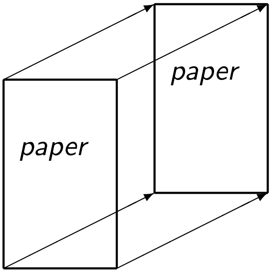
Рухи на площині:

- Паралельне перенесення
- Поворот
- Дзеркальна симетрія

Паралельне перенесення

Визначення.

Паралельний перенос це такий рух, при якому кожна точка об'єкту переміщається на однакову відстань.



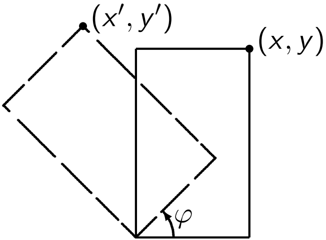
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Поворот

Визначення.

Рух, при якому тільки одна точка площині залишається нерухомою, називається поворотом.

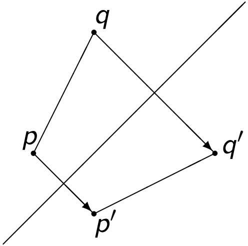
$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$



Дзеркальна симетрія

Визначення.

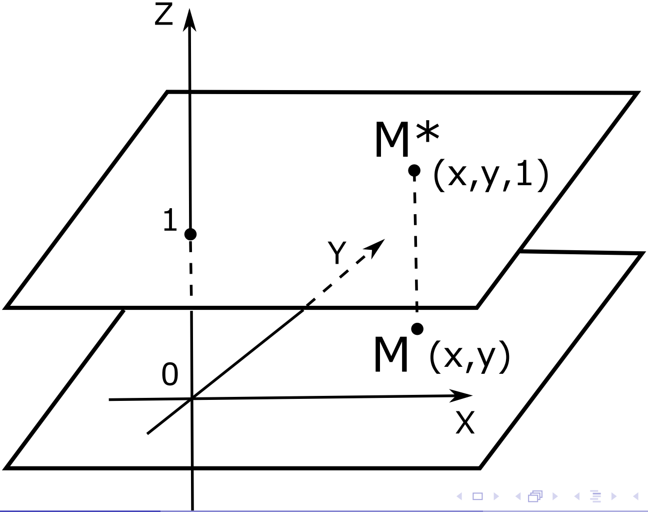
Дзеркальним відображенням називається рух, який залишає нерухомою одну пряму.



$$M' = M + \frac{\langle \vec{OM}, \vec{n} \rangle}{|\overrightarrow{OM}||\vec{n}|}\vec{n}$$

Однорідні координати

$$(x, y) \mapsto (x, y, 1) = (t * x, t * y, t), \;\; t \neq 0$$



Множення матриці на вектор

- Вектор ліворуч

$$(x'y'z') = (xy1)\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$$

- Вектор праворуч

$$(x'y'z') = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матриці руху на площині

Паралельне перенесення (Translation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот (Rotation)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриці руху на площині

Відображення (Reflection)

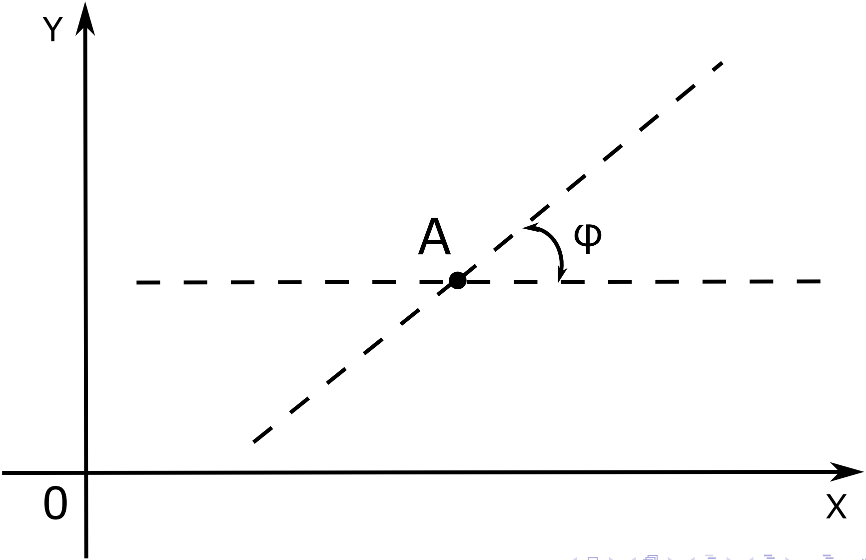
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розтягнення / Стискання (Dilatation)

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот навколо точки

Побудова повороту навколо т. A(a,b)



Поворот навколо точки

Побудова повороту навколо т. A(a,b)

$$[T_A][R_\alpha][T_{-A}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -a\cos\alpha + b\sin\alpha + a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -a\sin\alpha - b\cos\alpha + a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рух у просторі

Обертання.

$$\underline{R_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R_y} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R_z} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рух у просторі

Паралельне перенесення

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дзеркальна симетрія ($\det S = -1$)

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перетворення у просторі

Масштабування

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перспективне перетворення

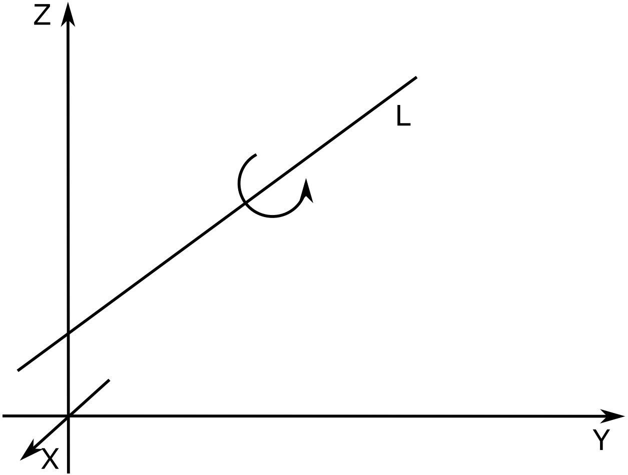
$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

Ортогональна проекція

$$\underline{P_{\mathrm{orth},z=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оберт навколо прямої

Оберт навколо прямої L, що проходить через точку $A(a, b, c)$ у напрямку (l, m, n) на кут φ



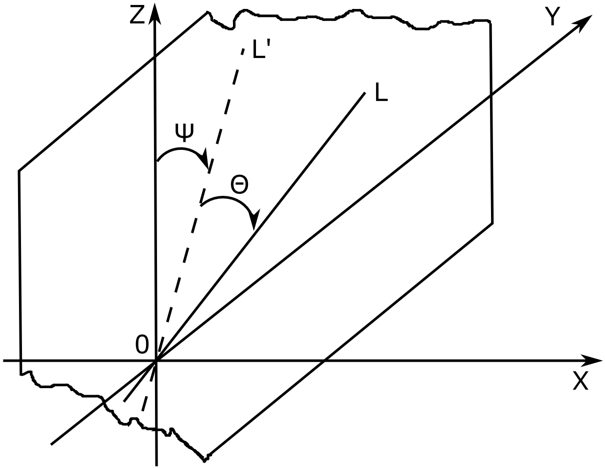
Оберт навколо прямої

Точку $A(a, b, c)$ переносимо у початок координат

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оберт навколо прямої

$$\cos\psi = \frac{n}{d} \quad \sin\psi = \frac{m}{d} \quad d = \sqrt{m^2 + n^2}$$



Оберт навколо прямої

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & -\frac{m}{d} & 0 \\ 0 & \frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_x](l, m, n, 1)^T = (l, 0, d, 1)^T$$

$$\cos\theta = l \quad \sin\theta = -d \quad d = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} l & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оберт навколо прямої

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]^{-1}[R_x]^{-1}[R_y]^{-1}[R_z][R_y][R_x][T]$$

$$[T]^{-1} \left(\begin{matrix} l^2 + \cos\varphi(1 - l^2) & l(1 - \cos\varphi)m - n\sin\varphi \\ l(1 - \cos\varphi)m + n\sin\varphi & m^2 + \cos\varphi(1 - m^2) \\ l(1 - \cos\varphi)n - m\sin\varphi & m(1 - \cos\varphi)n + l\sin\varphi \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} l(1 - \cos\varphi)n + m\sin\varphi & 0 \\ m(1 - \cos\varphi)n - l\sin\varphi & 0 \\ n^2 + \cos\varphi(1 - n^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) [T]$$