Лекція 7. Способи введення кривих в систему MAPLE. Обчислення кривини та скруту кривої

Кривá — лінія в евклідовому просторі або в многовиді.

Рівняння кривої можна задавати в параметричній формі:

$$x^i = x^i(t)$$

де x^i — координати точок кривої в деякій системі координат, заданій в Евклідовому просторі або многовиді, а t — скалярний параметр (його можна фізично уявляти моментом часу t=time, а саму криву як траєкторію руху точки)

Розглянемо рівняння кривої в Декартовій системі координат n-мірного Евклідового простору. Введемо позначення радіус-вектора точки кривої:

$$\mathbf{r} = \{x^1, x^2, \ldots x^n\}$$

Нагадаємо основны факти, пов'язані з поняттям кривої

Дотичний вектор

Похідну по параметру позначатимемо крапкою зверху:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

Вочевидь, що вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ (у фізичній інтерпретації швидкість точки) є дотичним до кривої.

Довжина кривої

Квадрат відстані між двома нескінченно близькими точками $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ дорівнює:

$$(1) \qquad ds^2 = (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) = \sum_i (dx^i)^2 = \sum_i (d\dot{x}^i)^2\,(dt)^2$$

Довжина відрізка кривої, коли параметр t пробігає значення від t_1 до t_2, дається інтегралом:

$$(2) \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i}\, dt$$

Якщо в інтегралі (2) розглядати верхню межу як змінний параметр, то маємо функцію $s = s(t)$, визначену з точністю до константи (точки відліку, або нижньої межі в інтегралі (2)). Ця величина s також параметризує точки нашої кривої; s називається **натуральним параметром кривої**.

Якщо вектор швидкості $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ ніде не перетворюється в нуль, то підінтегральна функція в (2) додатня, а отже функція $s = s(t)$ всюди монотонно зростає і має обернену функцію $t = t(s)$.

Кривина кривої

Із рівності $ds^2 = (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})$ слідує, що похідна радіус-вектора по натуральному параметру кривої:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

є дотичним вектором одиничної довжини.

$$(3) \qquad \boldsymbol{\tau}^2 = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 1$$

Диференціюючи (3) по натуральному параметру маємо:

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 2(\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}) = 0$$

Отже вектор $\mathbf{k} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ ортогональний до кривої. Цей вектор прийнято розкладати на добуток одиничного вектора $\mathbf{n}$ нормалі до кривої, та скаляра k який називається кривиною:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}$$

Геометричний зміст кривини

Покажемо (навіть двома способами), що кривина дорівнює оберненій величині до радіуса R дотичного кола:

$$(4) \qquad k = \frac{1}{R}$$

Перший спосіб: через кут між дотичними векторами одиничної довжини в сусідніх точках кривої. Нехай в точці з параметром s маємо дотичний вектор τ, а в точці з параметром $s' = s + \Delta s$ — дотичний вектор $\tau' = \tau + \Delta\tau$. Ці два вектора мають однакову довжину (одиницю), і якщо їхні початки звести в одну точку, утворять рівнобедрений трикутник. Якщо кут між векторами позначити $\Delta\alpha$, то довжина третьої сторони буде дорівнювати:

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \Delta\alpha$$

Оскільки для кола радіуса R маємо $\Delta s = R\Delta\alpha$, то маємо для кривини кривої:

$$k = |\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}| \approx \frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \frac{1}{R}$$

Другий спосіб: через рівняння кола. Для простоти формул, візьмемо початок координат евклідового простору в точці кривої, для якої ми будемо шукати найближче коло, а також будемо відраховувати натуральні параметри кривої і кола від цієї ж точки. З точністю до членів другого порядку малості маємо для точок кривої:

$$(5) \qquad \mathbf{r} \approx \frac{d\mathbf{r}}{ds}s + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}s^2 = \tau s + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}s^2$$

Коло радіуса R, дотичне до вектора τ, матиме центр в ортогональній до τ гіперплощині. Запишемо координати центра кола у вигляді $\mathbf{r}_c = R\mathbf{n}$, де $\mathbf{n}$ є довільним (поки що) одиничним вектором, що лежить у цій гіперплощині. Маємо ортогональність:

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0$$

Рівняння точки кола в параметричній формі (параметром є центральний кут):

$$(6) \qquad \mathbf{r}' = R\sin t\boldsymbol{\tau} + R(1 - \cos t)\mathbf{n}$$

Врахуємо, що довжина дуги кола дорівнює $s = Rt$, і розкладемо останнє рівняння в ряд з точністю до доданків другого порядку малості:

$$(7) \qquad \mathbf{r}' \approx Rt\boldsymbol{\tau} + \tfrac{1}{2}Rt^2\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}s + \frac{1}{2R}\mathbf{n}s^2$$

Порівнюючи рівності (5) і (7), маємо що коло буде збігатися з кривою з точністю до членів другого порядку ($\mathbf{r}' \approx \mathbf{r}$), якщо:

$$(8) \qquad \mathbf{k} = \frac{1}{R}\mathbf{n}$$

Скрут

Якщо евклідовий простір має розмірність $n \geq 3$, то можна поставити питання про зміну орієнтації дотичної площини (в якій лежать дотичний вектор τ та вектор нормалі $\mathbf{n}$) при русі вздовж кривої. Розглянемо бівектор (спеціальну антисиметричну матрицю, компоненти якої виражені через координати векторів τ і $\mathbf{n}$) $\sigma = \tau \wedge \mathbf{n}$:

$$\sigma_{ij} = \tau_i n_j - \tau_j n_i$$

Величина цього бівектора дорівнює одиниці (площі квадрата, побудованого на векторах τ і $\mathbf{n}$):

$$\sum_{i<j}(\sigma_{ij})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\tau_i n_j - \tau_j n_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\tau_i^2 n_j^2 + \tau_j^2 n_i^2 - 2(\tau_i n_i)(\tau_j n_j)) = (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) - (\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n})^2 = 1$$

Похідна бівектора по натуральному параметру дорівнює:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} \wedge \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \wedge \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \wedge \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau} \wedge \dot{\mathbf{n}}$$

Звідси робимо висновок, що дві площини $\boldsymbol{\sigma}$ і $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ перетинаються по прямій, дотичній до кривої (містять вектор $\boldsymbol{\tau}$):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \wedge \dot{\mathbf{n}}\Delta s = \boldsymbol{\tau} \wedge (\mathbf{n} + \dot{\mathbf{n}}\Delta s)$$

Отже дотична площина при русі вздовж кривої обертається «довкола» дотичної прямої. Поворот в тривимірному просторі має очевидний зміст, в просторах більшої розмірності поворот означає кут між нормалями до спільної прямої. Похідна кута повороту по натуральному параметру називається скрутом:

$$\varkappa = \frac{d\phi}{ds} = |\boldsymbol{\tau} \wedge \dot{\mathbf{n}}|$$

Способи завдання кривої в Maple

З курсу диференціальної геометрії вам відомо, що існують три способи завдання кривої. А саме, крива може бути задана параметричним рівнянням, явно або неявно. В Maple існує кілька способів зображення кривої.

Спосіб 1. Зображення кривої за допомогою оператора присвоюванння (**:=**). Якщо крива γ задана явно, $y = f(x)$, де $f(x)$ - фнкція однієї змінної, тоді функції $f(x)$ привласнюється ім'я y. Наприклад, зобразити в Maple криву $y = sin(x) + cos(x)$.

```
> y:=sin(x)+cos(x);
```

y:=sin(x)+cos(x)

Якщо задати конкретне значення змінної x, то ми отримаємо значення функції f. Таким чином ми очислимо координати точки, що належить кривій. Наприклад:

```
> x:=Pi/4;
```

$$x := \frac{\pi}{4}$$

```
> y;
```

$$\sqrt{2}$$

Після виконання цих команд змінна *x* має значення $\frac{\pi}{4}$, а координата точки кривої $\gamma : (\frac{\pi}{4}, < span > \sqrt{(2)})$.

Щоб не присвоювати змінній конкретного значення, зручніше використовувати команду підстановки **subs({x1=a1, x2=a2,…, },y),** где в фигурных скобках указываются переменные **xi** и их новые значения **ai** (*i*=1,2,…), которые следует подставить в функцию **f** . Например:

```
> f:=2exp(-x);
```

$$f := 2e^{x}$$

```
> subs({x=1},y);
```

$$2e^{(-1)}$$

Спосіб 2. Крива, що задана неявно, в Maple може бути зображена у вигляді рівняння:

```
>(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2;
```

$$(x^2+y^2-2x)^2=x^2+y^2;$$ завиток Паскаля.

Спосіб 3. Крива, що задана параметрично в Maple може бути зображена у вигляді системи рівнянь. Наприклад, зобразити параметричне рівняння трактриси $\gamma : r(t) = \begin{cases} x = sint, \\ y = cost + ln(tg\frac{t}{2}). \end{cases}$ в Maple.

```
> r:=[x=sin(t), y=cos t+ln(tg(t/2))];
```

r:=x=sin(t), y= cos(t)+ln(tg(t/2));

Аналогічно, якщо задана неявна крива у просторі $\gamma : \begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$, тоді в Maple вона зображується як система рівнянь.

Обчислення кривини та скруту кривої

Важливими поняттями диференціальної геометрії кривих є поняття ***кривини*** та ***скруту***. Для обчислення кривини та скруту в Maple можна піти наступним шляхом. Спочатку виконати всі необхідні попередні обчислення, а саме знайти похідні відповідних порядків від радіус-вектора кривої, потім користуючись формулами, обчислити скрут і кривину кривої. А можна створити процедури в Maple для обчислення необхідних нам величин.

Процедурой називають модуль програми, який має самостійне значення та виконує одну або декілька операцій, зазвичай достатньо складних та відмінних від операцій, що виконуються вбудованими операторами та функціями.

Процедури є важливим елементом структурного програмування. За допомогою процедур користувачи розширюють можливості системи Maple. Кожна процедура має своє унікальне ім'я та список параметрів (він може бути пустим). Процедура викликається так само, як і вбудована функція, для цього необхідно вказати її ім'я разом зі списком фактичних параметрів. При цьому процедури зазвичай не повертають ніяких значень після свого виконання, хоча можуть присвоювати значення змінним, які входять в процедури. Процедури-функції у відповідь на звертання до них повертають деяке значення. Вони є новими функціями, які задає користувач. Найпростіша форма завдання процедури наступна:

```
name := рrос(Параметри)

Тіло процедури

end;
```

Параметри процедури задаються переліком імен змінних, наприклад ***ркос(x)*** або ***proc(x,y,z).*** За допомогою знаку **::** після імені змінної можна визначити її тип. Наприклад в запису *prog(n::Integer)* об'являється, що змінна n является цілою. Викликається процедура за допомогою виразу

```
name(Фактичні_параметри)
```

Фактичні параметри підставляються на місце формальних. Невідповініcть фактичних параметрів типу заданих змінних викликає повідомлення про помилку та відмову від виконання процедури.

На малюнках нижче наведені приклади основних процедур по геометрії кривих:

Процедури для обчислення скалярного добубку, довжини вектора та вектороного добутку вектор-функцій.

Малюнок 7.1.

```
sc:= proc(X,Y) ;
  X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3];
end:
nrm := proc(X)
  sqrt(sc(X,X));
end:
vp := proc(X,Y)
  local a,b,c;
  a := X[2]*Y[3]-X[3]*Y[2];
  b := X[3]*Y[1]-X[1]*Y[3];
  c := X[1]*Y[2]-X[2]*Y[1];
  [a,b,c];
end:
```

Процедури для обчислення кривини та скруту кривої

Малюнок 7.2

```
curv:=proc(alpha)
  local  alphap,alphapp;
  alphap:=diff(alpha,t);
  alphapp:=diff(alphap,t);
  RETURN(k=simplify(nrm(vp(alphap,alphapp))/nrm(alphap)^3,symbolic));
end:
tor:= proc(alpha)
  local  alphap,alphapp,alphappp;
  alphap:=diff(alpha,t);
  alphapp:=diff(alphap,t);
  alphappp:=diff(alphapp,t);
  RETURN(kappa=simplify(sc(vp(alphap,alphapp),alphappp)/nrm(vp(alphap,alphapp))^2,symbolic));
end:
```

В наступному прикладі (малюнок 7.3) показано, як за допомогою процедур обчислується кривина та скрут просторової кривої.

Приклад 1. Обчислити кривини і скрут гвинтової лінії. Гвинтова лінія задана параметричним рівнянням: $\gamma : \begin{cases} x(t) = acos(t) \\ y(t) = asin(t) \\ z(t) = bt \end{cases}$

Малюнок 7.3

```
>
> hel:=[a*cos(t),a*sin(t),b*t];
```

$$hel := [a\cos(t), a\sin(t), b\,t]$$

```
> curv(hel);
```

$$k = \frac{a}{b^2 + a^2}$$

```
> tor(hel);
```

$$\kappa = \frac{b}{b^2 + a^2}$$

```
> hel1:=subs({a=4,b=2},hel);
```

$$hel1 := [4\cos(t), 4\sin(t), 2\,t]$$

```
> curv(hel1);
```

$$k = \frac{1}{5}$$

```
> tor(hel1);
```

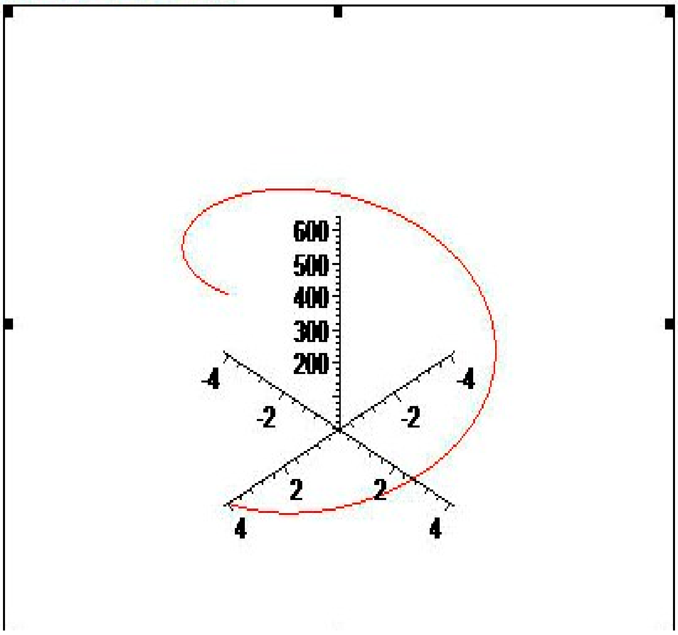
$$\kappa = \frac{1}{10}$$

В прикладі спочатку були зайдени символьні значення кривни та скруту, а потім числові при конкретних значеннях параметрах а та b.

Намалюємо гвинтову лінію.

Малюнок 7.4

```
spacecurve(hel1,t=0..100*Pi,scaling=constrained,thickness=1,color=red);
```



Для обчислення кривини плоских кривих необхідно лиже задати третю координату нулем, саму процедуру змінувати не треба.

Приклад 2. Знайти кривину плоскої кривої $\gamma : \begin{cases} x(t) = 2tg(t) \\ y(t) = 2t^2. \end{cases}$

Малюнок 7.5

```
> C:=[2*tan(t),2*(t)^2,0];
```

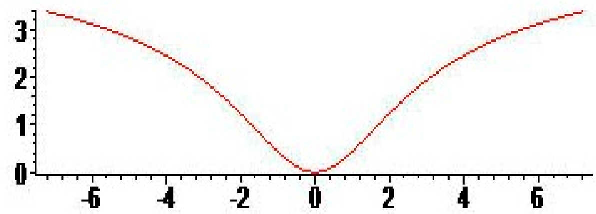
$$C := [2\tan(t), 2t^2, 0]$$

```
> curv(C);
```

$$\operatorname{curv}([2\tan(t), 2t^2, 0])$$

Для зображення плоских кривих скористуємось наступними параметрами команди plot

```
> plot([C[1],C[2],t=-1.3..1.3],scaling=constrained,axes=framed,color=red);
```



Остання зміна: субота, 20 грудень 2014 21:16