Рівняння кривої $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тоді рівняння стичної площини $\mathbf{R} = \mathbf{R}(X, Y, Z)$ буде:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0 \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Позначаемо $\tau = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ — одиничний вектор дотичної, головна нормаль $\nu = [\mathbf{r}',\ [\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'']]/\,|[\mathbf{r}',\ [\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'']]|$ — нормаль до кривої, розташована в стичній площині, бінормаль $\beta = [\tau, \nu]$ — нормаль до стичної площини. Нормальна площина $(\mathbf{R} - \mathbf{r}, \nu, \beta) = 0$.

7 Тригранник Френе

1. Написати рівняння стичної площини кривої

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = e^t$$

в точці $t = 0$.

2. Скласти рівняння стичної площини до кривої

$$x = t\cos t, \quad y = -t\sin t, \quad z = at$$

у початку координат.

3. Скласти рівняння стичної площини лінії перетину сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

і гіперболічного циліндра

$$x^2 - y^2 = 3$$

в точці $M(2, 1, 2)$.

4. Довести, що лінія

$$x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad z = 2t$$

розташована на поверхні

$$x^2 + y^2 - e^z = 0$$

і її стична площина збігається з дотичною площиною поверхні.

5. Довести, що якщо всі стичні площини кривої проходять через фіксовану точку, то ця лінія плоска.

6. Знайти стичні площини лінії

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

які проходять через точку $M(2, -\frac{1}{3}, -6)$.

7. Скласти рівняння головної нормалі та бинормалі наступних ліній в зазначених точках:

   (a) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$ при $t = 0$;

   (b) $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$ при $t = 1$;

   (c) $x = y^2, \quad x^2 = z$ в точці $M(1, 1, 1)$;

   (d) $xy = z^2, \quad x^2 + y^2 = z^2 + 1$ в точці $M(1, 1, 1)$;

8. Знайти точки на лінії

$$x = \frac{2}{t}, \quad y = \ln t, \quad z = -t^2,$$

в яких бінормаль паралельна площині $x - y + 8z + 2 = 0$.

9. Довести, що вектори $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ лінії

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

у точці $(0, 0, 0)$ збігаються з одиничними векторами координатних осей.

10. Скласти рівняння всіх ребер і граней тригранника Френе гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$. Довести, що головна нормаль перетинає вісь гвинтової лінії під прямим кутом, а бінормаль утворює з нею постійний кут. Знайти вектори репера Френе.

11. Скласти рівняння всіх ребер і граней тригранника Френе кривої

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 2, \quad 2x^2 + y^2 - 3 = 0$$

у точці $A(1, 1, 1)$.

8 Дотик кривих

Дві криві $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(s)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(s) \in C^{n+1}$ мають в спільній точці $\vec{r}(s_0)$ дотик порядку n, якщо у них збігаються похідні тільки до n-го порядку:

$$\vec{r}_1{}^{(i)}(s_0) = \vec{r}_2{}^{(i)}(s_0) \ (i = 0, \dots, n), \quad \vec{r}_1{}^{(n+1)}(s_0) \neq \vec{r}_2{}^{(n+1)}(s_0).$$

Якщо одну криву задано параметрично $\vec{r} = \{x(t), y(t)\}$, а другу неявно $F(x, y) = 0$, то вони мають дотик порядку n, якщо у них збігаються такі вирази:

$$F(x(t), y(t)) = 0, \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{(n)}F}{d^{(n)}t} = 0, \quad \frac{d^{(n+1)}F}{d^{(n+1)}t} \neq 0$$

Дотичним колом до кривої називається коло, яке є дотичною кривою не нижче 2-го порядку.

1. Величина R, зворотня до кривини, називається *радіусом кривини. Центром кривини* відносно точки M, називається точка відкладена від точки M на головній нормалі в додатному напрямку на відстані R. Доведіть, що центр дотичного кола до кривої $\gamma \in C^2$ в точці M збігається з її центром кривини, відповідним точці M, а радіус дорівнює радіусу кривини.

2. Знайдіть дотичне коло до кривої

   (a) $\vec{r} = \{a\cos t, a\sin t\}$
   (b) $y = x^2$, у точці $M(0, 0)$.
   (c) $\vec{r} = \{a\cos t, a\sin t, ht\}$, при $t = 0$.
   (d) $\vec{r} = \{t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t\}$, при $t = 0$.
   (e) $\vec{r} = \{2t, \ln t, t^2\}$, при $t = 1$.

   (a) Знайдіть порядок дотику кривих у початку координат:
   (b) $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.
   (c) $y = \sin x$, $y = x^3$.
   (d) $y = \sin x$, $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$.