



Аналитические методы геометрического моделирования

Глава 3. Параметрические уравнения поверхностей

Оглавление

3.1 Поверхности вращения	1
3.2 Поверхности подобных поперечных сечений	3
3.3 Параметрическое уравнение кусочно-линейной поверхности.....	4
Упражнения.	10

Для построения уравнений некоторых поверхностей достаточно знать уравнения базовых кривых их образующих. Например, для построения поверхности вращения достаточно знать уравнение кривой, вращением которой образуется поверхность. Для поверхности переноса и поверхности подобных поперечных сечений достаточно знать уравнения двух кривых. Выбирая в качестве этих кривых криволинейные ломаные с уравнениями вида (15) или (16), мы можем получать параметрические уравнения таких поверхностей.

3.1 Поверхности вращения

Если уравнение криволинейного отрезка L в плоскости XZ имеет вид $x_L = \varphi(u), z_L = \psi(u)$ ($u_0 \leq u \leq u_1$), то параметрическое уравнение поверхности образованной его вращением вокруг оси Z имеет вид $x = \varphi(u) \cos v, y = \varphi(u) \sin v, z = \psi(u)$, при $u_0 \leq u \leq u_1, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Пример 1. Написать параметрическое уравнение полусферы (с доньшком). Очевидно, что это поверхность вращения

Запишем параметрическое уравнение кривой L , составленной из прямолинейного отрезка $[0,1]$, лежащего на оси X , и четверти дуги окружности, лежащей в плоскости XZ . Оно имеет вид:

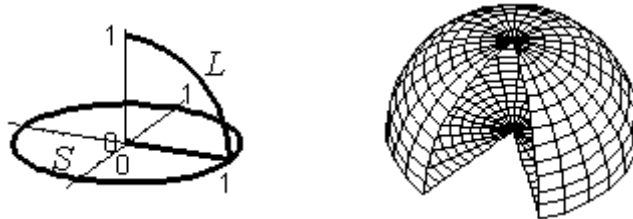
$$x_L(t) = P(t,0,1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} P(t,1,1)\right) - 1, \quad z_L(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} P(t,1,1)\right).$$

Поверхности вращения этого криволинейного отрезка вокруг оси Z дает полусферу с доньшком. Ее уравнение имеет вид

$$x(u, v) = \left(P(u, 0, 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} P(u, 1, 1)\right) - 1 \right) \cos v$$

$$y(u, v) = \left(P(u, 0, 1) + \cos\left(\frac{\pi}{2} P(u, 1, 1)\right) - 1 \right) \sin v$$

$$z(u, v) = \sin\left(\frac{\pi}{2} P(u, 1, 1)\right)$$



Чтобы было видно, что поверхность имеет доньшко, мы изобразили поверхность не всю, а только для $1 \leq v \leq 2\pi$.

Пример 2. Криволинейная ломаная, показанная на рис.2а, имеет высоту H (на рисунке $H=180$) и состоит из 7 участков. Первым является горизонтальный отрезок длиной s ($s=5$) к которому присоединяется сегмент эллипса с полуосями a и b ($a=50$, $b=100$). Следующим является горизонтальный отрезок длиной $w=5$, затем снова идет сегмента эллипса с полуосями a_1 , b_1 ($a_1=55$, $b_1=105$), затем идет вертикальный отрезок высотой $h=65$, затем наклонный отрезок с проекциями на оси $r=30$ и $l=10$ и снова горизонтальный отрезок длиной $d=35$ единиц. Узлам ломаной были назначены значения параметра $t_0=0, t_1=5, t_2=55, t_3=60, t_4=115, t_5=180, t_6=210, t_7=245$.

Параметрическое уравнение этой криволинейной ломаной имеет вид

$$x_c(t) = s \cdot P_N(t, t_0, t_1) + a \cdot \sin(\pi P_N(t, t_1, t_2)/2) + w \cdot P_N(t, t_2, t_3) +$$

$$+ a_1 \cos(\pi P_N(t, t_3, t_4)/2) - a_1 + r \cdot P_N(t, t_5, t_6) - d \cdot P_N(t, t_6, t_7)$$

$$z_c(t) = H - b \cdot \cos(\pi P_N(t, t_1, t_2)/2) - b_1 \sin(\pi P_N(t, t_3, t_4)/2) -$$

$$- h \cdot P_N(t, t_4, t_5) - l \cdot P_N(t, t_5, t_6)$$

Поверхность вращения вокруг оси Z имеет уравнение $x(u, v) = x_c(u) \cos v$, $y(u, v) = x_c(u) \sin v$, $z(u, v) = z_c(u)$. Она показана на рис. 2б.

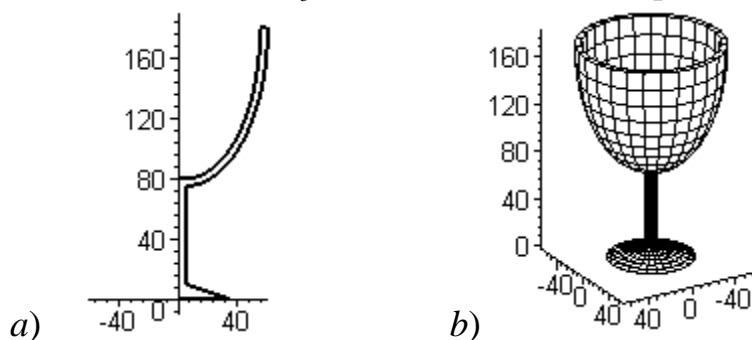


Рис.2 Поверхность вращения криволинейной ломаной вокруг оси Z

3.2 Поверхности подобных поперечных сечений

Пусть кривая L , задающая профиль, расположена в плоскости XZ и имеет параметрическое уравнение $x = \varphi(u), z = \psi(u)$ ($u_0 \leq u \leq u_1$), а кривая, задающая форму поперечного сечения S , расположена в плоскости XY и имеет уравнение $x = f(v), y = g(v)$ ($v_0 \leq v \leq v_1$). Пусть также кривая L пересекает S в точке со значением параметра $u = u^*$ ($u_0 \leq u^* \leq u_1$). Тогда параметрическое уравнение поверхности пропорциональных поперечных сечений имеет вид

$$x = \frac{\varphi(u)}{\varphi(u^*)} f(v), y = \frac{\varphi(u)}{\varphi(u^*)} g(v), z = \psi(u) \quad (u_0 \leq u \leq u_1, v_0 \leq v \leq v_1)$$

Пример 1. Написать параметрическое уравнение четырехугольной пирамиды с квадратным основанием (см. рисунок), рассматривая ее как поверхность подобных поперечных сечений.

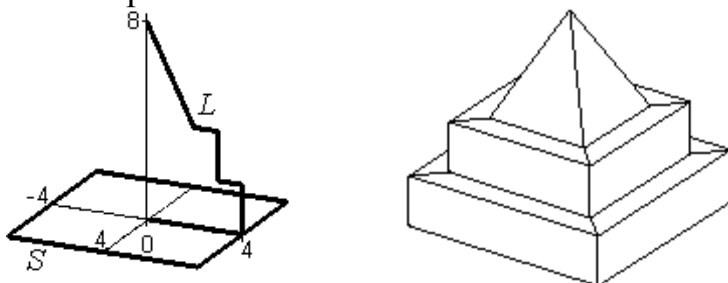


Рис.2 Поверхность подобных поперечных сечений

Путь ломаная L , расположенная в плоскости XZ , имеет узлы $(0,0), (4,0), (4,2), (3,2), (3,4), (2,4), (0,8)$, а кривая S , расположенная в плоскости XY , является квадратом с центром в начале координат. Назначим узлам ломаной L значение параметра $u = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Для L напомним уравнение

$$x_L(u) = 4P(u, 0, 1) - P(u, 2, 1) - P(u, 4, 1) - 2P(u, 5, 1)$$

$$z_L(u) = 2P(u, 1, 1) + 2P(u, 3, 1) + 4P(u, 5, 1)$$

Уравнение квадрата с вершинами в точках $(4,-4), (4,4), (-4,4), (-4,-4)$ можно записать в виде

$$x_S(v) = 4 - 8P(v, 1, 1) + 8P(v, 3, 1)$$

$$y_S(v) = -4 + 8P(v, 0, 1) - 8P(v, 2, 1)$$

В точке $(4,0)$ пересечения ломаных L и S имеем $u=1$ и $x_L(1) = 4$. Уравнение поверхности подобных поперечных сечений будет

$$x(u, v) = \frac{1}{4} x_L(u) \cdot x_S(v)$$

$$y(u, v) = \frac{1}{4} x_L(u) \cdot y_S(v)$$

$$z(u, v) = z_L(u)$$

Пример 2. Ломаные, задающие профиль и сечение, показаны на рис.3.а. Длины прямолинейных отрезков для ломаной профиля взяты равными $l_1 = l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = l_9 = 1, l_2 = 4, l_3 = 2, l_8 = 3$. Значения параметра u_k в узлах

взяты $u_0 = 0$, $u_k = \sum_{i=0}^k l_i$ ($k = 1, \dots, 9$). Тогда параметрическое уравнение этой ломаной имеет вид

$$x_c(u) = l_1 P_N(u, u_0, u_1) + l_3 P_N(u, u_2, u_3) - l_5 P_N(u, u_4, u_5) - l_7 P_N(u, u_6, u_7) - l_9 P_N(u, u_8, u_9)$$

$$z_c(u) = -l_2 + l_2 P_N(u, u_1, u_2) + l_4 P_N(u, u_3, u_4) + l_6 P_N(u, u_5, u_6) + l_8 P_N(u, u_7, u_8)$$

Все сечения имеют форму правильного восьмиугольника с радиусом описанной окружности $R=3$. Уравнение поверхности пропорциональных поперечных сечений имеет вид: $x(u, v) = x_c(u)x_8(v)/x_c(u_3)$, $y(u, v) = x_c(u)y_8(v)/x_c(u_3)$, $z(u, v) = z_c(u)$. Эта поверхность показана на рис. 3b.

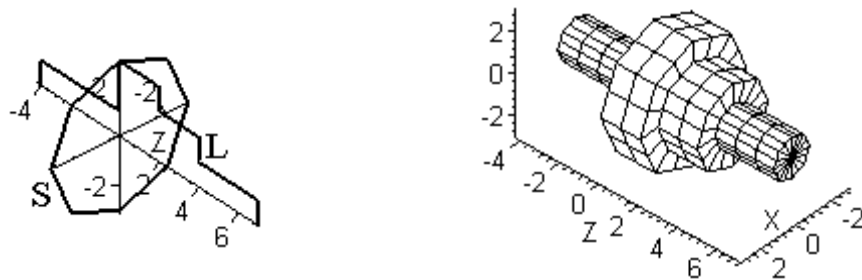
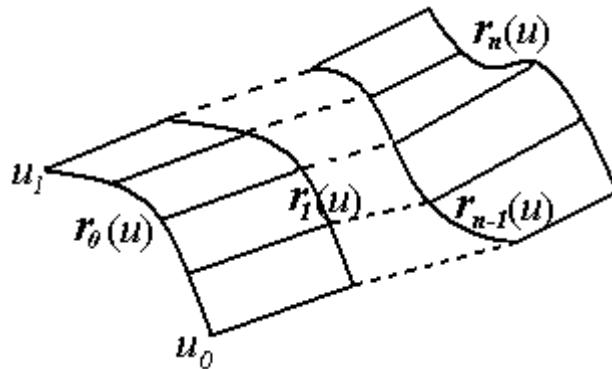


Рис.3 Поверхность подобных поперечных сечений

3.3 Параметрическое уравнение кусочно-линейной поверхности

Пусть дано семейство непересекающихся пространственных криволинейных отрезков с параметрическими уравнениями $\vec{r}_k(\tau)$, $\tau \in [\tau_0^k, \tau_1^k]$ ($k=0, 1, \dots, n$).



В каждом из уравнений сделаем замену переменных $\tau = \tau_0^k + \frac{\tau_1^k - \tau_0^k}{u_1 - u_0}(u - u_0)$.

Получим новые уравнения кривых $\vec{r}_k(u) = \vec{r}_k\left(\tau_0^k + \frac{\tau_1^k - \tau_0^k}{u_1 - u_0}(u - u_0)\right)$, в которых параметр u изменяется в одинаковом для всех криволинейных отрезков интервале $[u_0, u_1]$. Соединим прямолинейными отрезками точки соседних криволинейных k -го и $k+1$ -го отрезков, имеющие одинаковые значения параметра u . Фактически будем двигать прямолинейный отрезок между каждой парой криволинейных отрезков так, чтобы он все время соединял точки, имеющие одинаковые значения параметра u . Между каждой парой кривых получим линейчатую поверхность. Эти поверхности стыкуются друг

с другом по кривым исходного семейства, образуя некоторую непрерывную кусочно-линейную поверхность. Составим параметрическое уравнение этой поверхности.

Положим, что кривые исходного семейства являются координатными линиями $v=const$ образованной кусочно-линейчатой поверхности. Назначим каждой кривой значение параметра $v=v_k$ так, чтобы значения v_k образовывали монотонно-возрастающую последовательность. Тогда уравнение кусочно-линейной поверхности будет иметь следующий вид:

$$\bar{R}(u, v) = \bar{r}_0(u) + \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k(u) - \bar{r}_{k-1}(u)) P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1}), \quad (2)$$

при $u_0 \leq u \leq u_1$, $v_0 \leq v \leq v_n$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\bar{R}(u, v)$ на интервале $v_{p-1} \leq v \leq v_p$ при некотором фиксированном p ($1 \leq p \leq n$). В сумме (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ при $k < p$ будут равны единице, а при $k > p$ будут равны нулю. Поэтому (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{R}(u, v) &= \bar{r}_0(u) + \sum_{k=1}^{p-1} (\bar{r}_k(u) - \bar{r}_{k-1}(u)) + (\bar{r}_p(u) - \bar{r}_{p-1}(u)) P(v, v_{p-1}, v_p - v_{p-1}) = \\ &= \bar{r}_{p-1}(u) + (\bar{r}_p(u) - \bar{r}_{p-1}(u)) P(v, v_{p-1}, v_p - v_{p-1}) \end{aligned}$$

Учитывая (1) и то, что $v_{p-1} \leq v \leq v_p$, последнее выражение преобразуется к виду

$$\bar{R}(u, v) = \bar{r}_{p-1}(u) + (\bar{r}_p(u) - \bar{r}_{p-1}(u)) \frac{v - v_{p-1}}{v_p - v_{p-1}}$$

Это значит, что на любом отрезке $v_{p-1} \leq v \leq v_p$, функция $\bar{R}(u, v)$ представляет уравнение линейчатой поверхности, натянутой между кривыми $\bar{r}_{p-1}(u)$ при $v = v_{p-1}$ и $\bar{r}_p(u)$ при $v = v_p$. Если $v \leq v_0$, то в формуле (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ равны нулю, и мы получаем, что $\bar{R}(u, v) = \bar{r}_0(u)$. Если $v \geq v_n$, то в формуле (2) все функции $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ равны единице, и мы получаем, что $\bar{R}(u, v) = \bar{r}_0(u) + \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k(u) - \bar{r}_{k-1}(u)) = \bar{r}_n(u)$. Т.о., выражение (2) дает уравнение непрерывной кусочно-линейчатой поверхности, проходящей последовательно через пространственные кривые $\bar{r}_0(u), \bar{r}_1(u), \dots, \bar{r}_n(u)$ при $v = v_0, v_1, \dots, v_n$. Фактически кривые семейства $\{\bar{r}_k(u)\}$ являются ребрами образованной поверхности. □

Отметим, что с помощью формулы (2) строятся уравнения полной поверхности таких тел как куб, пирамида, конус, уравнение поверхности цилиндра вместе с верхним и нижним основанием и уравнения поверхностей многих многогранников. Например, поверхность куба можно представить как кусочно-линейчатую поверхность натянутую между 4 кривыми. Первой кривой семейства будет точка – центр верхнего основания. Второй – квадрат, образующий контур верхнего основания. Третьей – квадрат, являющийся

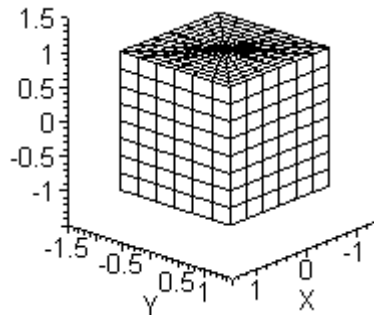
контуrom нижнего основания. Четвертой – точка, лежащая в центре нижнего основания. Для куба с вершинами в точках $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$ уравнение поверхности может иметь следующий вид

$$x(u, v) = \frac{1}{2}(1 - |u| + |u-1| + |u-2| - |u-3|) \cdot (|v| - |v-1| - |v-2| + |v-3|)$$

$$y(u, v) = \frac{1}{2}(1 - |u-1| + |u-2| + |u-3| - |u-4|) \cdot (|v| - |v-1| - |v-2| + |v-3|)$$

$$z(u, v) = -|v-1| + |v-2|,$$

при $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 3$. Эти уравнения построены по формуле (2) с последующей заменой функций $P(v, v_{k-1}, v_k - v_{k-1})$ их выражениями. Предварительно были составлены параметрические уравнения квадратов. Поверхность этого куба показана на следующем рисунке.



Получим уравнение кусочно-линейной поверхности по-другому. Пусть задан набор пространственных кривых с векторными уравнениями $\vec{R}_i(\tau)$ ($i=0,1,2,\dots,n$). Выберем на всех кривых отрезки с одинаковым интервалом изменения параметра $T_0 \leq \tau \leq T_1$. Фиксируем параметр τ . Тогда $\vec{R}_i(\tau)$ будут представлять радиус-вектора некоторых точек в пространстве, через которые можно провести ломаную. Назначим этим точкам последовательно возрастающие значения параметра t_0, t_1, \dots, t_n . Тогда уравнение ломаной, проходящей через эти точки, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{R}(t, \tau) = & \frac{1}{2} \left(R_0(\tau) + \left(\frac{\vec{R}_1(\tau) - \vec{R}_0(\tau)}{t_1 - t_0} \right) |t - t_0| - \left(\frac{\vec{R}_n(\tau) - \vec{R}_{n-1}(\tau)}{t_n - t_{n-1}} \right) |t - t_n| + \vec{R}_n(\tau) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\vec{R}_{k+1}(\tau) - \vec{R}_k(\tau)}{t_{k+1} - t_k} - \frac{\vec{R}_k(\tau) - \vec{R}_{k-1}(\tau)}{t_k - t_{k-1}} \right) |t - t_k| \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Если теперь в этих уравнениях параметр τ начать варьировать, то (3) будет представлять уравнение некоторой поверхности в пространстве. Эта поверхность будет непрерывной (если вектор - функции $\vec{R}_i(\tau)$ непрерывны) и будет проходить через кривые $\vec{R}_i(\tau)$ при значениях первого параметра $t=t_i$. Эти кривые будут ребрами образуемой поверхности или криволинейным каркасом. Между любыми двумя соседними кривыми каркаса поверхность

образуется прямолинейными отрезками, концы которых находятся в точках $\vec{R}_i(\tau)$ и $\vec{R}_{i+1}(\tau)$. Меняя значение параметра τ , мы смещаем концы отрезка так, что он описывает некоторую линейчатую поверхность.

При этом полная поверхность $\vec{R}(t, \tau)$ будет иметь края, если начальный и последний криволинейные отрезки $\vec{R}_0(\tau)$ и $\vec{R}_n(\tau)$ не совпадают, или может замыкаться по общему ребру, если они совпадают. Любая кривая $\vec{R}_i(\tau)$ каркаса может вырождаться в точку.

При построении формулы (3) мы предполагали, что отрезок изменения параметра $T_0 \leq \tau \leq T_1$ одинаковый для всех криволинейных отрезков каркаса. Если это условие не выполняется, то это надо сделать. Если для k -го криволинейного отрезка интервал изменения параметра $\tau_0^k \leq \tau \leq \tau_1^k$, то в уравнении $\vec{R}_k(\tau)$ надо сделать замену переменных $\tau = \tau_0^k + \frac{\tau_1^k - \tau_0^k}{v_1 - v_0}(v - v_0)$.

Тогда уравнение $\vec{r}_k(v) = \vec{R}_k\left(\tau_0^k + \frac{\tau_1^k - \tau_0^k}{v_1 - v_0}(v - v_0)\right)$ будет представлять тот же отрезок кривой, но интервал изменения параметра v будет $[v_0, v_1]$. Выполнив такую замену для каждого криволинейного отрезка, мы удовлетворим указанному требованию.

Таким образом, алгоритм составления уравнения кусочно-линейной поверхности состоит в следующем. Надо написать параметрические уравнения $\vec{R}_i(\tau)$ ребер каркаса; если надо, то скорректировать эти уравнения так, чтобы интервал изменения параметра стал одинаковым для всех криволинейных отрезков каркаса. Затем надо выбрать монотонно возрастающие значения параметра t_k , которые будут соответствовать ребрам поверхности. Подстановка полученных уравнений $\vec{R}_i(\tau)$ и значений t_i в формулу (3) даст параметрическое уравнение поверхности.

Пример. *Параметрическое уравнение конуса.* Пусть основание конуса расположено в плоскости xu и центр этого основания находится в начале координат. Ось конуса направим вдоль оси z . Пусть R – радиус основания и H – высота конуса. Каркас поверхности можно составить из трех кривых: первая вырождается в точку центра основания с уравнением $\vec{R}_0(\tau) = (0,0,0)$, вторая совпадает с окружностью основания с уравнением $\vec{R}_1(\tau) = (R \cos v, R \sin v, 0)$, третья представляет вершину конуса с уравнением $\vec{R}_2(\tau) = (0,0,H)$. Назначим им последовательные значения параметра $t_0=0, t_1=1, t_2=2$. Тогда формула (3) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
x(t, \tau) &= \frac{1}{2} R \cos \tau (|t-2| |t-1| + |t-2|) \\
y(t, \tau) &= \frac{1}{2} R \sin \tau (|t-2| |t-1| + |t-2|) \\
z(t, \tau) &= \frac{1}{2} H (1 + |t-1| - |t-2|)
\end{aligned}$$

Это параметрическое уравнение поверхности кругового конуса радиуса R и высотой H (боковая поверхность вместе с основанием) при $0 \leq t \leq 2, 0 \leq \tau \leq 2\pi$.

□

Аналогично можно построить параметрические уравнения цилиндра или усеченного конуса (боковая поверхность вместе с основаниями).

Пример. Параметрическое уравнение тетраэдра. Пусть центр треугольного основания тетраэдра расположен в начале координат, и плоскость основания находится в плоскости xy . Пусть вершина тетраэдра находится на оси z , и одна из вершин основания расположена на оси x . Длина стороны тетраэдра равна a . Каркас поверхности будет состоять из центра основания с уравнением $\vec{R}_0(\tau) = (0,0,0)$, правильного треугольника основания $\vec{R}_1(\tau)$ и вершины $\vec{R}_2(\tau) = \left(0,0,a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Уравнение треугольного основания

$\vec{R}_1(\tau) = (x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau))$ при $\tau_0 = 0, \Delta\tau = 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
x_1(\tau) &= \frac{a\sqrt{3}}{12} (4 - 3|\tau| + 3|\tau-1| + 3|\tau-2| - 3|\tau-3|) \\
y_1(\tau) &= \frac{a}{4} (|\tau| - 3|\tau-1| + 3|\tau-2| - |\tau-3|) \\
z_1(\tau) &= 0
\end{aligned}$$

В соответствии с формулой (3) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned}
x(t, \tau) &= \frac{a\sqrt{3}}{24} (4 - 3|\tau| + 3|\tau-1| + 3|\tau-2| - 3|\tau-3|) \cdot (|t-2| |t-1| + |t-2|) \\
y(t, \tau) &= \frac{a}{8} (|\tau| - 3|\tau-1| + 3|\tau-2| - |\tau-3|) \cdot (|t-2| |t-1| + |t-2|) \\
z(t, \tau) &= \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} (1 + |t-1| - |t-2|)
\end{aligned}$$

Это параметрическое уравнение поверхности тетраэдра со стороной a при $0 \leq t \leq 2, 0 \leq \tau \leq 3$. Аналогично можно построить параметрическое уравнение куба. Его каркас можно составить из двух точек - центров нижнего и верхнего оснований и двух квадратов - контуров нижнего и верхнего оснований. Параметрические уравнения поверхностей более сложных

многогранных тел будут содержать большее количество модулей в своих уравнениях.

□

Пример. *Один частный случай кусочно-линейной поверхности.* Пусть в плоскости XU задано уравнение p -й кривой каркаса в виде $\vec{R}_p(v) = (x_p(v), y_p(v), z_p(v))$, а любая i -я кривая каркаса ($i \neq p$) подобна ей (отличается только размером, но не формой) и смещена вдоль оси z на некоторую величину z_i , причем последовательность $z_0, \dots, z_p, \dots, z_n$ монотонно возрастающая. Т.е. $\vec{R}_i(v) = (r_i x_p(v), r_i y_p(v), z_i)$, где r_i некоторые неотрицательные числа ($r_p = 1$). Тогда

$$\vec{R}_{j+1}(v) - \vec{R}_j(v) = ((r_{j+1} - r_j)x_p(v), (r_{j+1} - r_j)y_p(v), z_{j+1} - z_j)$$

Если последовательности ребер каркаса назначить монотонно возрастающие значения параметра u_0, u_1, \dots, u_n , то формула (3) после некоторых преобразований примет следующий вид

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_p(v) r_e(u), \\ y(u, v) &= y_p(v) r_e(u), \\ z(u, v) &= z_e(u), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} r_e(u) &= \frac{1}{2} \left(r_0 + (r_1 - r_0) \frac{|u - u_0|}{u_1 - u_0} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{r_{j+1} - r_j}{u_{j+1} - u_j} - \frac{r_j - r_{j-1}}{u_j - u_{j-1}} \right) |u - u_j| + \right. \\ &\quad \left. - (r_n - r_{n-1}) \frac{|u - u_n|}{u_n - u_{n-1}} + r_n \right) \\ z_e(u) &= \frac{1}{2} \left(z_0 + (z_1 - z_0) \frac{|u - u_0|}{u_1 - u_0} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{z_{j+1} - z_j}{u_{j+1} - u_j} - \frac{z_j - z_{j-1}}{u_j - u_{j-1}} \right) |u - u_j| + \right. \\ &\quad \left. - (z_n - z_{n-1}) \frac{|u - u_n|}{u_n - u_{n-1}} + z_n \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Например, если базовая кривая каркаса является единичной окружностью, т.е. $x_p(v) = \cos v$, $y_p(v) = \sin v$, то формулы (4) представляют поверхность, образуемую вращением ломаной, заданной в плоскости xz уравнениями $x = r_e(u)$, $z = z_e(u)$, вокруг оси z . Очевидно, если начальная и конечная точки ломаной будут лежать на оси z , то результирующая поверхность будет замкнутой. Однако функции $(x_p(v), y_p(v))$ могут представлять линию любой формы.

Пример. Построим уравнение квадрата в плоскости XU с вершинами в точках $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$. Для этого в последовательность вершин мы

добавим еще одну, совпадающую с начальной. Выберем для вершин ломаной натуральные значения параметра $v=0,1,2,3,4$. Уравнение квадрата будет иметь вид

$$x_s(v) = 1 - |v| + |v-1| + |v-2| - |v-3|$$

$$y_s(v) = 1 - |v-1| + |v-2| + |v-3| - |v-4|$$

Построим уравнение другой ломаной расположенной в плоскости xz и имеющей вершины в точках $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$. Назначим этим вершинам значение параметра u равное $0,3,4,5,6,7,8,9$, которое равно длине дуги вдоль ломаной от начальной точки до текущей. Имеем

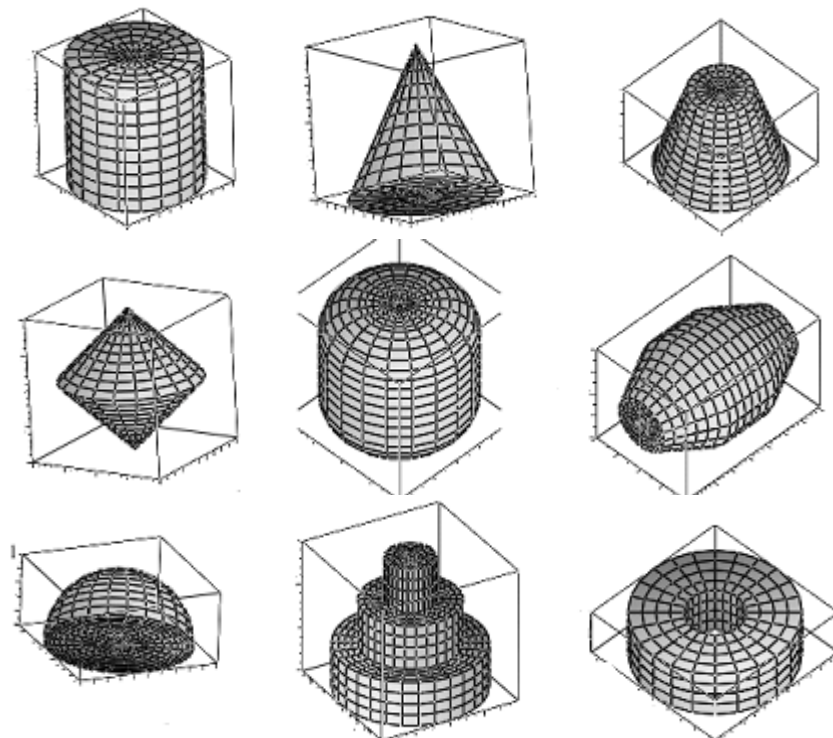
$$x_e(u) = \frac{1}{2} (|t| - |t-3| - |t-4| + |t-5| - |t-6| + |t-7| - |t-8| + |t-9|)$$

$$z_e(u) = \frac{1}{2} (3 + |t-3| - |t-4| + |t-5| - |t-6| + |t-7| - |t-8|)$$

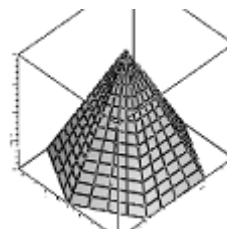
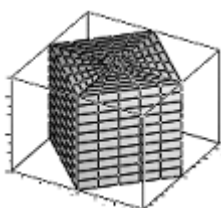
Тогда параметрическое уравнение $x(u, v) = x_s(v) x_e(u)$, $y(u, v) = y_s(v) x_e(u)$, $z(u, v) = z_e(u)$ при $0 \leq u \leq 9$, $0 \leq v \leq 4$ будут представлять уравнение трехэтажной четырехугольной пирамиды. А параметрическое уравнение $x(u, v) = \cos(v) x_e(u)$, $y(u, v) = \sin(v) x_e(u)$, $z(u, v) = z_e(u)$ при $0 \leq u \leq 9$, $0 \leq v \leq 2\pi$ будет представлять трехэтажную круговую пирамиду (или вал с тремя разными диаметрами).

Упражнения.

1. Написать параметрические уравнения следующих поверхностей вращения (размеры фигур подобрать самостоятельно)

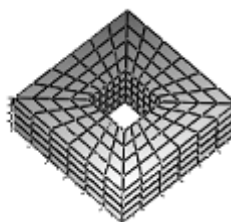
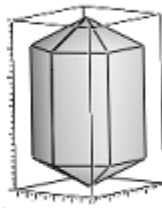
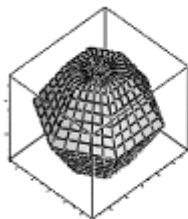
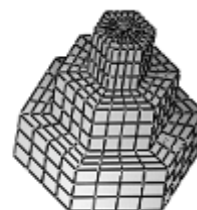
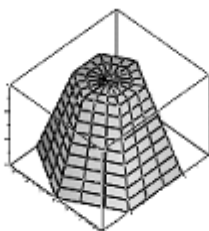
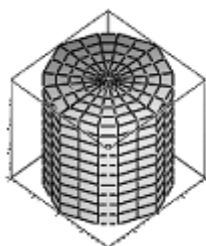


2. Написать параметрическое уравнение поверхности конуса с круговым отверстием глубиной h в середине доньшка.
 3. Написать параметрическое уравнение поверхности цилиндра с отверстиями глубиной h в его торцах.
 4. Написать параметрическое уравнение поверхности гантели.
 5. Написать параметрическое уравнение поверхности гриба.
6. Написать параметрические уравнения следующих поверхностей подобных поперечных сечений

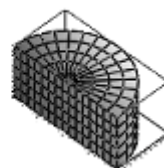
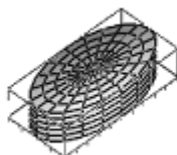
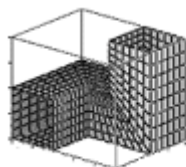


Написать параметрическое уравнение куба, рассматривая его как поверхность подобных поперечных сечений

Написать параметрическое уравнение пирамиды с правильным шестиугольным (треугольным, четырехугольным, восьмиугольным) основанием, рассматривая ее как поверхность подобных поперечных сечений.



7. Написать параметрические уравнения следующих кусочно-линейных поверхностей



8. Написать параметрические уравнения следующих поверхностей

