Доля П.Г.
Харьковский Национальный Университет
механико – математический факультет
2013 г.

Аналитические методы геометрического моделирования

Глава 1. Уравнения кусочно-гладких непрерывных функций

Оглавление

Кусочно-непрерывные функции широко используются в прикладных науках. Они состоят из кусков разных функций и могут быть представлены различными выражениями на различных участках изменения аргумента. Можно работать с такими функциями, используя их кусочную природу, но во многих случаях удобнее работать с единым «аналитическим» выражением такой функции. Действительно, если строить график функции вручную, то кусочное представление в большинстве случаев более удобно. Однако, при компьютерном анализе функции, единое «аналитическое» выражение выглядит предпочтительнее.

В аналитической геометрии используют, как правило, непрерывные функции и здесь мы будем работать только с такими функциями. Если уравнение каждого куска является гладкой функцией, и составная функция является непрерывной, то такую функцию мы будем называть кусочно-гладкой непрерывной функцией (Piecewise Smooth Continuous function – PSC функция). В аналитической геометрии они используются для представления координатных функций в параметрических уравнениях ломаных и поверхностей с ребрами, а также в неявных уравнениях геометрических объектов.

Рассмотрим пример. Предположим, что мы составили параметрическое уравнение квадрата $\mathbf{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, показанного на следующем рисунке, такое, что параметр t линейно возрастает вдоль его контура.

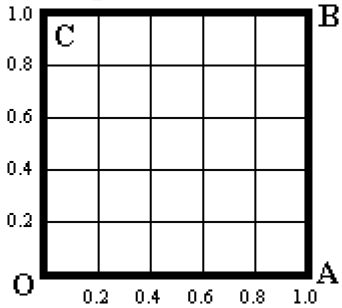


Рис. 1

Пусть на отрезке OA параметр t линейно возрастает от 0 до 1, на отрезке AB от 1 до 2, на отрезке BC от 2 до 3, на отрезке CO от 3 до 4. Тогда легко понять, что координатная функция $x(t)$ на участке $0 \le t \le 1$ будет линейно возрастать от 0 до 1, а координатная функция $y(t)$ будет равна 0. На участке $1 \le t \le 2$ функция $x(t)$ будет постоянной, а функция $y(t)$ будет линейно возрастать от 0 до 1. При $2 \le t \le 3$ функция $x(t)$ будет линейно убывать, а $y(t) = 1$. При $3 \le t \le 4$ функция $y(t)$ будет линейно убывать до 0, а $x(t) = 0$. Вне отрезка $0 \le t \le 4$ обе функции могут периодически повторяться, либо сохранять постоянные (в нашем примере нулевые) значения. Этот анализ показывает, что графики функций $x(t)$ и $y(t)$ могут иметь следующий вид

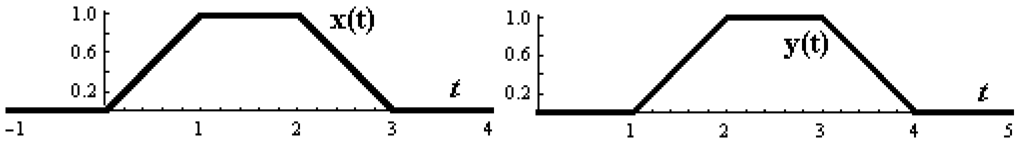


Рис. 2 Графики функций $x(t)$ (слева) и $y(t)$ (справа).

Они имеют одинаковую форму, но сдвинуты одна относительно другой на единицу. Ясно, что на каждом участке эти функции линейны и могут быть представлены через уравнения соответствующих прямых. Но такое представление неудобно для использования в параметрическом уравнении квадрата. Однако, если мы сможем составить единые «аналитические» выражения для уравнений этих кусочно-линейных функций, то сможем записать удобное параметрическое уравнение фигуры.

Координатные функции криволинейных ломаных имеют аналогичную форму, но каждый кусок таких составных функций является некоторой нелинейной функцией. Очень часто такими функциями являются полиномы. В настоящей главе мы покажем, как можно переходить от кусочного представления составных функций к единому аналитическому выражению. В частности будут отдельно рассмотрены кусочно-линейные функции (ломаные), кусочно-полиномиальные функции (сплайны), а также PSC функции, состоящие из кусков гладких функций, уравнения которых заданы.

1.1 Уравнение ломаной

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$P(x,a,w) \;=\; \frac{1}{2w}(w+|x-a|-|x-a-w|) \qquad (w \neq 0)\,. \tag{1}$$

Она является непрерывной по переменной *x*. При $x<a$ функция равна 0, при $x>a+w$ она равна 1, а внутри интервала $a \le x \le a+w$ совпадает с линейной функцией $(x-a)/w$. На следующем рисунке приведен график этой функции для случая $w>0$.

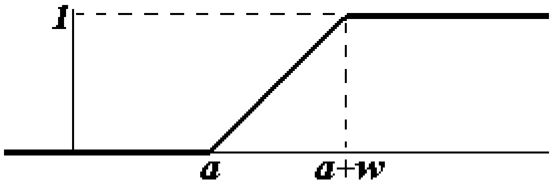


Рис. 3 График функции $P(x,a,w)$ при $w>0$.

Теорема 1. *Дана возрастающая последовательность чисел* $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ *и произвольная последовательность значений* $\{y_k\}_{k=0}^{n}$. *Уравнение непрерывной кусочно-линейной функции (ломаной), которая проходит через точки* $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{n}$, *равна* y_0 *при* $x \le x_0$ *и равна* y_n *при* $x \ge x_n$, *имеет следующий вид:*

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})P(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}) \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем некоторый номер p $(1 \le p \le n)$ и рассмотрим функцию $y_b(x)$ на интервале $x_{p-1} \le x \le x_p$. В соответствии с (1) функции $P(x,x_{k-1},x_k - x_{k-1})$ в выражении (2) при $k<p$ будут равны единице, а при $k>p$ будут равны нулю. Поэтому (2) принимает вид

$$y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{p-1}(y_k - y_{k-1}) + (y_p - y_{p-1})\cdot P(x,x_{p-1},x_p - x_{p-1}) =$$
$$= y_{p-1} + (y_p - y_{p-1})\cdot P(x,x_{p-1},x_p - x_{p-1})$$

Учитывая (1) и то, что $x_{p-1} \le x \le x_p$, последнее выражение преобразуется к виду

$$y_b(x) = y_{p-1} + \frac{y_p - y_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}\left(x - x_{p-1}\right),$$

т.е. на отрезке $x_{p-1} \le x \le x_p$, функция $y_b(x)$ линейная и изменяется от значения y_{p-1} в точке x_{p-1} до значения y_p в точке x_p. Если $x \le x_0$, то в формуле (2) все функции $P(x,x_{k-1},x_k - x_{k-1})$ равны нулю, и мы получаем, что $y_b(x) = y_0$. Если $x \ge x_n$, то в (2) все функции $P(x,x_{k-1},x_k - x_{k-1})$ равны единице, и мы получаем, что $y_b(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = y_n$. Т.о. выражение (2) дает представление непрерывной кусочно-линейной функции, проходящей последовательно через точки $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{n}$. Левее точки x_0

функция $y_b(x)$ сохраняет постоянное значение y_0. Правее точки x_n функция $y_b(x)$ равна y_n. ■

Поскольку функции $P(x,a,w)$ выражается через функцию абсолютного значения, то после подстановки (1) и некоторых преобразований мы можем записать уравнение ломаной (2) в виде

$$y_b(t) = \frac{1}{2}\Big(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}|x - x_0| + \\ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)|x - x_k| - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}|x - x_n| + y_n\Big) \tag{3}$$

Для добавления к ломаной наклонных лучей нам потребуются следующие функции

$$Q(x,a) = \frac{1}{2}(x - a + |x - a|) \quad \text{и} \quad Q_l(x,a) = \frac{1}{2}(x - a - |x - a|). \tag{4}$$

Обе функции непрерывны. Функция $Q(x,a)$ равна 0 при $x \le a$, и равна $x - a$ при $x \ge a$. Функция $Q_l(x,a)$ равна 0 при $x \ge a$ и равна x-a при $x \le a$. На следующем рисунке приведены графики функций $Q(x,1)$ и $Q_l(x,2)$.

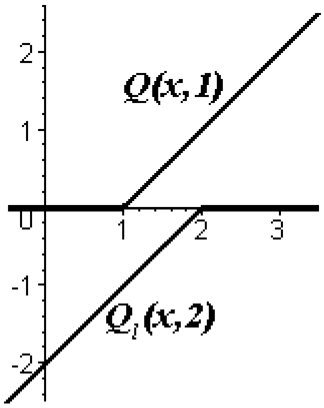


Рис. 4 Графики функций $Q(x,1)$ и $Q_l(x,2)$.

Предположим, что непрерывную ломаную, проходящую через точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, нужно продлить влево бесконечным лучом, выходящим из точки (x_0,y_0) под углом α к оси OX, и продлить вправо лучом, выходящим из точки (x_n, y_n) под углом β к оси OX. Следующий рисунок поясняет ситуацию.

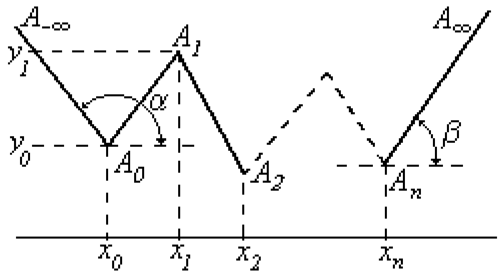


Рис. 5

Теорема 2. *Уравнение непрерывной кусочно-линейной функции (ломаной), проходящей через заданные точки и имеющей заданные наклонные прямолинейные лучи, имеет следующий вид:*

$$y(x) = Q_l(x, x_0)tg\alpha + y_b(x) + Q(x, x_n)tg\beta \qquad (5)$$

где функция $y_b(x)$ *определяется формулой* (2) *и* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Действительно, при $x<x_0$ функция $y_b(x) = y_0$, $Q(x, x_n) = 0$ и $Q_l(x, x_0) = x - x_0$. Т.е. (5) принимает вид $y(x) = y_0 + (x - x_0)tg\alpha$. При любом $x_0 \le x \le x_n$ функции $Q_l(x, x_0)$ и $Q(x, x_n)$ равны нулю и $y(x) = y_b(x)$. При $x > x_n$ функция $Q_l(x, x_0)$ равна нулю, $y_b(x) = y_n$, а $Q(x, x_n) = x - x_n$. Т.е. (5) принимает вид $y(x) = y_n + (x - x_n)tg\beta$. Т.о. функция *y(x)* при $x<x_0$ является линейной и ее график совпадает с прямолинейным лучом, образующим угол α с осью О*x*. В промежутке $x_0 \le x \le x_n$ функция *y(x)* является ломаной, проходящей через точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$. При $x > x_n$ график функции *y(x)* также имеет форму прямой, образующей угол β с осью Ох. ■

Пример 1. Написать уравнение ломаной, график которой приведен на следующем рисунке.

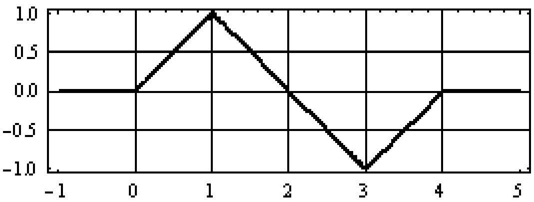


Рис. 6

Здесь мы имеем $\{x_i\}_{i=0}^{3} = \{0,1,3,4\}$, $\{y_i\}_{i=0}^{3} = \{0,1,-1,0\}$. Тогда из формулы (2) получаем $y_b(x) = P(x,0,1) - 2P(x,1,2) + P(x,3,1)$. Заменяя функцию $P(x, a, w)$ их выражениями (1), после некоторых преобразований получаем $y_b(x) = \frac{1}{2}(|x| - 2|x-1| + 2|x-3| - |x-4|)$. □

Пример 2. Написать уравнение ломаной, график которой приведен на следующем рисунке.

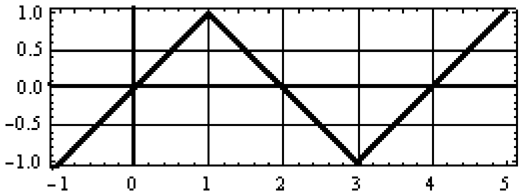


Рис. 7

Здесь мы имеем две точки излома $\{x_i\}_{i=0}^{1} = \{1,3\}$, $\{y_i\}_{i=0}^{1} = \{1,-1\}$ и $tg\alpha = 1$, $tg\beta = 1$. Из формулы (2) получаем $y_b(x) = 1 - 2P(x,1,2)$. Из формулы (5) получаем $y(x) = Q_l(x,1) + 1 - 2P(x,1,2) + Q(x,3)$. Заменяя функции $P(x,1,2)$,

$Q_l(x,1)$, $Q(x,3)$ их выражениями (1) и (4), после простых преобразований получаем $y(x) = -2 + x - |x-1| + |x-3|$. □

Пример 3. Написать параметрическое уравнение $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ квадрата изображенного на рисунке 1.

Графики координатных функций $x(t)$ и $y(t)$ приведены на рис. 2. В соответствии с формулами (2) и (1) получаем

$$x(t) = P(t,0,1) - P(t,2,1) = \frac{1}{2}\left(|t| - |t-1| - |t-2| + |t-3|\right),$$

$$y(t) = P(t,1,1) - P(t,3,1) = \frac{1}{2}\left(|t-1| - |t-2| - |t-3| + |t-4|\right).$$

Это и есть параметрическое уравнение квадрата. □

1.2 Представление кусочно-аналитических функций

Пусть на отрезке $[a,b]$ дана кусочная функция

$$f_\Delta(x) = \begin{cases} f_1(x), & x_0 \le x \le x_1 \\ f_2(x), & x_1 < x \le x_2 \\ \dots & \\ f_n(x), & x_{n-1} < x \le x_n \end{cases}, \tag{1}$$

где $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Имеет место следующее

Лемма 1. *Предположим, что функции* $f_i(x)$ *известны на всем отрезке* $[a,b]$ *и выполняются условия непрерывности* $f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$ $\left(i = 1,\ldots,n-1\right)$. *Тогда имеет место следующее равенство*

$$f_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(f_1(x) + f_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} sign(x - x_i)(f_{i+1}(x) - f_i(x))\right),\ x \in [a,b]. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим правую часть формулы (2) через $F_\Delta(x)$.

Пусть $x_0 \le x < x_1$. Тогда $sign(x - x_i) = -1$ для всех $i = 1,\ldots,n-1$, и мы имеем $F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(f_1(x) + f_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1}(f_{i+1}(x) - f_i(x))\right) = f_1(x)$.

Пусть $x_{t-1} < x < x_t$ $(t = 2,\ldots,n-1)$. Тогда $sign(x - x_i) = 1$ для $i = 1,\ldots,t-1$ и $sign(x - x_i) = -1$ для $i = t,\ldots,n-1$. Поэтому

$$F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(f_1(x) + f_n(x) + \sum_{i=1}^{t-1}(f_{i+1}(x) - f_i(x)) - \sum_{i=t}^{n-1}(f_{i+1}(x) - f_i(x))\right) = f_t(x).$$

Аналогично, для $x_{n-1} < x \le x_n$ мы получаем

$$F_\Delta(x) = \frac{1}{2}\left(f_1(x) + f_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1}(f_{i+1}(x) - f_i(x))\right) = f_n(x).$$

Предположим теперь, что x совпадает с одной из внутренних точек разбиения Δ, т.е. $x = x_t$ $(t = 1,\ldots,n-1)$. Тогда $sign(x - x_i) = 1$ для $i = 1,\ldots,t-1$, $sign(x - x_t) = 0$ и $sign(x - x_i) = -1$ для $i = t+1,\ldots,n-1$. Учитывая условия непрерывности $f_t(x_t) = f_{t+1}(x_t)$, мы получаем

$$F_\Delta(x_t) = \frac{1}{2}\Big(f_1(x_t) + f_n(x_t) + \sum\nolimits_{i=1}^{t-1}(f_{i+1}(x_t) - f_i(x_t)) - \sum\nolimits_{i=t+1}^{n-1}(f_{i+1}(x_t) - f_i(x_t))\Big) =$$

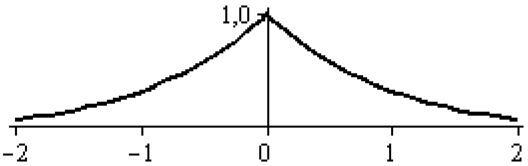
$$= \frac{1}{2}\big(f_t(x_t) + f_{t+1}(x_t)\big) = f_t(x_t)\,.$$

Т.о. для всех $x \in [a,b]$ правая часть $F_\Delta(x)$ выражения (2) совпадает с кусочной функцией $f_\Delta(x)$. Лемма доказана. ■

Для определенности мы положили, что все участки в (1) являются полуоткрытыми интервалами $x_{i-1} < x \le x_i$, но это не существенно. Мы также не исключаем случаев $a = -\infty$, $b = \infty$. Доказательство утверждения для этого случая выполняется аналогично.

Пример 1. Для кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} e^x &, x \le 0 \\ e^{-x} &, x > 0 \end{cases}$$



написать представление (2).

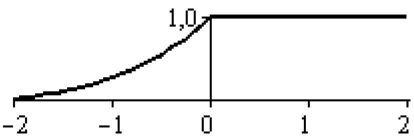
Функции e^x и e^{-x} заданы на всей вещественной оси. Поэтому

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2} sign\, x (e^{-x} - e^x) = ch\, x - sign\, x \cdot sh\, x = ch|x| - sh|x| = e^{-|x|}.$$

(нечетная функция $sh\, x$, умноженная на $sign\, x$, дает четную функцию $sh|x|$). □

Пример 2. Для кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} e^x, x \le 0 \\ 1 \;\;, x > 0 \end{cases}$$



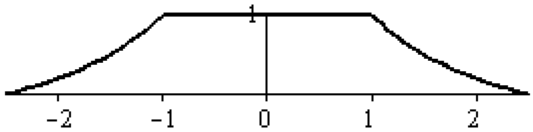
написать представление (2). Имеем

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1) + \frac{1}{2} sign\, x \cdot \left(1 - e^x\right) = e^{x/2}\left(ch\frac{x}{2} - sign\, x \cdot sh\frac{x}{2}\right) =$$

$$= e^{x/2}\left(ch\left|\frac{x}{2}\right| - sh\left|\frac{x}{2}\right|\right) = e^{x/2} e^{-|x/2|} = e^{\frac{x-|x|}{2}}\,. \qquad \square$$

Пример 3. Для кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} e^{1+x}, x \le -1 \\ 1 \quad, -1 < x \le 1 \\ e^{1-x}, x > 1 \end{cases}$$



написать представление (2).

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{1+x} + e^{1-x} + sign(x+1)\left(1 - e^{1+x}\right) + sign(x-1)\left(e^{1-x} - 1\right) =$$

$$= e \cdot ch\, x - sign(x+1) e^{\frac{1+x}{2}} sh\frac{1+x}{2} + sign(x-1) e^{\frac{1-x}{2}} sh\frac{1-x}{2}\,.$$

$$= e\cdot ch\,x - e^{\frac{1+x}{2}} sh\frac{|1+x|}{2} - e^{\frac{1-x}{2}} sh\frac{|1-x|}{2}. \qquad \square$$

Далее мы будем рассматривать только случай, когда функции $f_i(x)$ заданы некоторыми аналитическими выражениями. Функция $f_\Delta:[a,b]\to\mathbf{R}$ называется кусочно-аналитической, если она является аналитической на каждом участке $(x_{i-1},x_i]$. Имеет место следующая

Теорема 1. **(Доля П.Г.)** *Пусть дана вещественнозначная кусочно-аналитическая функция* (1). *Предположим, что функции* $f_i(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *функции* $f_i(x)$ *заданы на всем отрезке* $[a,b]$ *и являются аналитическими на нем;*

(ii) $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$ $(i=1,\ldots,n-1)$, *т.е. функция* $f_\Delta(x)$ *является непрерывной на* $[a,b]$.

(iii) *для каждой функции* $f_i(x)$ *ее ряды Тейлора в точках* x_{i-1} *и* x_i *сходятся для всех* $x\in[a,b]$;

Тогда $f_\Delta(x)$ *единственным образом может быть представлена в виде*

$$f_\Delta(x)=F(x)+\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}F_i(x)|x-x_i|, \tag{3}$$

где $F(x)$ *и* $F_i(x)$ *некоторые вещественные аналитические на отрезке* $[a,b]$ *функции. Функция* $F(x)$ *может вычисляться по формуле*

$$F(x)=\frac{1}{2}\big(f_1(x)+f_n(x)\big), \tag{4}$$

а функции $F_i(x)$ *представляются в виде*

$$F_i(x)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=1}^{\infty}\frac{f_{i+1}^{(q)}(x_i)-f_i^{(q)}(x_i)}{q!}(x-x_i)^{q-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим аналитическую функцию $D_i(x)=f_{i+1}(x)-f_i(x)$ $(i=1,\ldots,n-1)$. В силу условия (iii) она может быть представлена рядом Тейлора

$$f_{i+1}(x)-f_i(x)=\sum\nolimits_{q=1}^{\infty}d_{iq}(x-x_i)^q, \tag{6}$$

где $d_{iq}=\dfrac{f_{i+1}^{(q)}(x_i)-f_i^{(q)}(x_i)}{q!}$ и этот ряд сходится для всех $x\in[a,b]$. А в силу условия (ii) ряд (6) не содержит слагаемого с $q=0$. В силу утверждения 1, кусочно-аналитическую функцию $f_\Delta(x)$ можно представить в виде (2). Заменяя $f_{i+1}(x)-f_i(x)$ рядом (6), получаем

$$f_\Delta(x)=\frac{1}{2}\Big(f_1(x)+f_n(x)+\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}sign(x-x_i)(x-x_i)\sum\nolimits_{q=1}^{\infty}d_{iq}(x-x_i)^{q-1}\Big)=$$

$$=F(x)+\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}F_i(x)|x-x_i|$$

где

$$F(x)=\frac{1}{2}\big(f_1(x)+f_n(x)\big)$$

некоторая аналитическая функция, и

$$F_i(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}d_{iq}(x-x_i)^{q-1}=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{f_{i+1}^{(q)}(x_i)-f_i^{(q)}(x_i)}{q!}(x-x_i)^{q-1}.$$

Радиус сходимости ряда Тейлора функции $D_i(x)=\sum_{q=1}^{\infty}d_{iq}(x-x_i)^q$ равен радиусу сходимости ряда его производной $\frac{dD_i(x)}{dx}=\sum_{q=1}^{\infty}qd_{iq}(x-x_i)^{q-1}$. Поскольку $|d_{iq}(x-x_i)^{q-1}|\le|qd_{iq}(x-x_i)^{q-1}|$, то из теоремы сравнения следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{q=1}^{\infty}d_{iq}(x-x_i)^{q-1}$ для всех $x\in[a,b]$. Поэтому функции $F_i(x)$ аналитические на отрезке $[a,b]$.

Осталось показать, что если $F(x)$ и $F_i(x)$ $(k=1,\dots,n-1)$ являются некоторыми вещественными аналитическими функциями на отрезке $[a,b]$, то представление (3) единственно.

Пусть для кусочно аналитической функции $f_\Delta(x)$ представление (3) построено. Допустим, что в (3) есть слагаемое вида $F_s(x)|x-x_s|$, где $x_s\in[a,b]\wedge x_s\notin\Delta$ и функция $F_s(x)$ аналитическая на $[a,b]$. Функция $f_\Delta(x)$ аналитическая во всех точках отрезка $[a,b]$ кроме точек $x_i\in\Delta$. Поэтому она будет аналитической в некоторой окрестности точки x_s. Для слагаемых $F_i(x)|x-x_i|$, $x_i\in\Delta$ в окрестности точки x_s модули раскрываются, и мы имеем обычные аналитические функции. Но тогда на некотором интервале, содержащем точку x_s, аналитической функцией должно быть слагаемое $F_s(x)|x-x_s|$. Выражение $F_s(x)|x-x_s|$ в точке x_s может иметь непрерывную производную *n*-го порядка, только если функция $F_s(x)$ имеет в этой точке ноль того же порядка или выше. Поэтому, чтобы выражение $F_s(x)|x-x_s|$ имело производные любого порядка, аналитическая функция $F_s(x)$ должна иметь в точке x_s ноль любого сколь угодно большого порядка. Это значит, что $F_s(x)\equiv 0$. Т.о. суммирование в (3) выполняется только по точкам x_i входящими в разбиение $\Delta=\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Если в (3) окажется слагаемое с $i=0$ (или $i=n$), то для всех точек $x\in[a,b]$ модули $|x-x_0|$ (или $|x-x_n|$) можно раскрыть и соответствующие им слагаемые включить в состав функции *F(x)*.

Допустим теперь, что существует два разных представления кусочно аналитической функции $f_\Delta(x)$

$$f_\Delta^r(x)=F^r(x)+\sum_{k=1}^{n-1}F_k^r(x)|x-x_k| \ (r=1,2),$$

где $F^r(x)$ и $F_k^r(x)$ некоторые аналитические на отрезке $[a,b]$ функции. Вычитая одно представление из другого, получаем

$$s(x)=f_\Delta^2(x)-f_\Delta^1(x)=F^2(x)-F^1(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\big(F_k^2(x)-F_k^1(x)\big)|x-x_k| \quad (7)$$

Но $s(x)$ представляет кусочно аналитическую функцию, которая тождественно равна нулю на $[a,b]$. В частности $s(x)=0$ для $x_{n-1}<x\le x_n$. В этом случае можно раскрыть все модули в выражении (7) и записать его в виде

$$F^2(x)-F^1(x)+\sum_{k=1}^{n-2}\left(F_k^2(x)-F_k^1(x)\right)(x-x_k)+\left(F_{n-1}^2(x)-F_{n-1}^1(x)\right)(x-x_{n-1})=0$$

Левая часть этого равенства является некоторой аналитической функцией, которая равна нулю для $x_{n-1}<x\le x_n$. Но тогда, она равна нулю для всех $x\in[a,b]$.

Также $s(x)=0$ для $x_{n-2}<x\le x_{n-1}$. Раскрывая модули для этого случая, получаем

$$F^2(x)-F^1(x)+\sum_{k=1}^{n-2}\left(F_k^2(x)-F_k^1(x)\right)(x-x_k)-\left(F_{n-1}^2(x)-F_{n-1}^1(x)\right)(x-x_{n-1})=0$$

Это равенство также является тождеством. Из двух последних тождеств следует $F_{n-1}^2(x)\equiv F_{n-1}^1(x)$. Т.о. в выражении (7) суммирование выполняется до номера *n-2*. Рассматривая (7) на участках $x_{n-2}<x\le x_{n-1}$ и $x_{n-3}<x\le x_{n-2}$, аналогично предыдущему, получаем $F_{n-2}^2(x)\equiv F_{n-2}^1(x)$ и т.д. Рассмотрение (7) на участках $x_1<x\le x_2$ и $x_0<x\le x_1$ дает $F_1^2(x)\equiv F_1^1(x)$. Как результат, выражение (7) не содержит ни одного слагаемого с функцией абсолютного значения. Но тогда $s(x)=F^2(x)-F^1(x)=0$ для всех $x\in[a,b]$, т.е. $F^2(x)\equiv F^1(x)$. Следовательно, $f_\Delta^2(x)\equiv f_\Delta^1(x)$. Теорема доказана. □

Требование того, что функции $f_i(x)$ заданы на всем отрезке $[a,b]$ существенно. Поэтому условие (i) мы выделили в отдельный пункт, хотя оно в принципе является следствием условия (iii).

Замечание. Если в точках x_i имеет место гладкая стыковка до порядка m_i, т.е. $f_i^{(q)}(x_i)=f_{i+1}^{(q)}(x_i)$ для $q=1,\ldots,m_i$, то в (5) суммирование будет начинаться с номера $q=m_i+1$ и все слагаемые ряда будут содержать общий множитель $(x-x_i)^{m_i}$. Поэтому можно записать

$$F_i(x)=\frac{1}{2}(x-x_i)^{m_i}\sum_{q=m_i+1}^{\infty}\frac{f_{i+1}^{(q)}(x_i)-f_i^{(q)}(x_i)}{q!}(x-x_i)^{q-m_i-1}. \qquad (8)$$

Следствие. *Кусочно-аналитическая функция* (1)*, для которой выполняются условия* (i) – (iii) *теоремы 1, может быть представлена в виде*

$$f_\Delta(x)=f_1(x)+2\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x)Q(x,x_i), \qquad (9)$$

где функция $Q(x,a)$ *определена выражением* (1.1.4)*, а аналитические функции* $F_i(x)$ *определяются в соответствии с* (5).

Доказательство. Пусть $x_{n-1}<x\le x_n$. На этом участке $f_\Delta(x)=f_n(x)$. Раскрывая в (3) для этих *x* модули, получаем

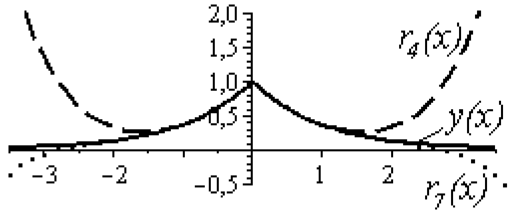
$$f_n(x)=\frac{1}{2}\left(f_1(x)+f_n(x)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}F_i(x)\left(x-x_i\right).$$

Функции, стоящие в левой и правой части этого равенства, заданы для всех $x_0 \le x \le x_n$ и являются аналитическими функциями на этом отрезке. Поэтому это равенство имеет место для всех x этого отрезка. Запишем его в виде $0 = \frac{1}{2}\left(f_1(x) - f_n(x)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)\left(x - x_i\right)$ и сложим с (3). В результате получим $f_\Delta(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)\left(x - x_i + \left|x - x_i\right|\right)$. Вспоминая определение (1.1.4) функции $Q(x,a)$, приходим к (9). ■

Отметим еще раз, что Теорема 1 не выполняется для произвольных непрерывных кусочно-аналитических функций. Так в представлении (1) аналитические выражения функций $f_i(x)$ нам известны только на соответствующих участках $x_{i-1} < x \le x_i$. В то время как для представления (3) – (5) используются условия (i), (iii) обеспечивающие знание аналитических функций $f_i(x)$ на всем отрезке $[a,b]$. Однако во многих случаях это условие выполняется. Например, условия (i), (iii) выполняется, когда участки функции $f_\Delta(x)$ задаются в виде кусков синусов, косинусов, показательной и некоторых других элементарных функций. То же имеет место для сплайнов. Их звенья являются полиномами, т.е. аналитическим функциями на всей вещественной оси.

<u>Пример 4</u>. Написать представление (3) кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$



Ряды Тейлора Функций e^x и e^{-x} сходятся для всех x. Поэтому в соответствии с (4) имеем $F(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = ch(x)$. Из (5) получаем

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^{(q)}\Big|_{x=0} - (e^x)^{(q)}\Big|_{x=0}}{q!} x^{q-1} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q - 1}{q!} x^{q-1}.$$

Тогда

$$y(x) = ch(x) + \frac{1}{2}|x|\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q - 1}{q!} x^{q-1} = ch(x) - |x|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - |x|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j |x|^j}{j!} = e^{-|x|}$$

Ограничиваясь степенями x не превосходящими n, получим приближение кусочной функции $y(x)$ в виде кусочного полинома $r_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j |x|^j}{j!}$.

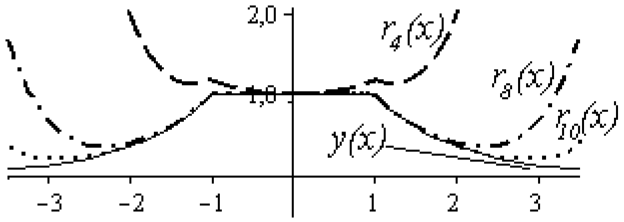
Здесь слагаемые с четными номерами не имеют в своем составе $|x|$, а в слагаемых с нечетными номерами модуль можно вынести в качестве множителя. Например,

$$r_4(x)=1-|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}|x|^3+\frac{1}{24}x^4=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)|x|.$$

График функции $y(x)$ и ее приближения $r_4(x)$, $r_7(x)$ приведены на предыдущем рисунке. □

<u>Пример 5</u>. Написать представление (3) четной кусочной функции

$$y(x)=\begin{cases} e^{1+x}, x\le -1 \\ 1 \quad ,-1<x\le 1 \\ e^{1-x}, x>1 \end{cases}$$



Имеем $F(x)=\frac{1}{2}(e^{1+x}+e^{1-x})=e\cdot ch(x)$. Далее

$$F_1(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{0-(e^{1+x})^{(q)}\Big|_{x=-1}}{q!}(x+1)^{q-1}=-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}(x+1)^{q-1}$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(e^{1-x})^{(q)}\Big|_{x=1}-0}{q!}(x-1)^{q-1}=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q!}(x-1)^{q-1}.$$

Тогда получаем

$$y(x)=e\cdot ch(x)-\frac{1}{2}|x+1|\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q!}(x+1)^{q-1}+\frac{1}{2}|x-1|\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q!}(x-1)^{q-1}$$

Заменяя функцию $ch x$ ее рядом Тейлора в точке $x=0$ и ограничиваясь степенью n кусочных полиномов, можно получить приближение $r_n(x)$ кусочной функции в виде кусочного полинома.

$$r_n(x)=e\cdot\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\frac{1}{2}|x+1|\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{q!}(x+1)^{q-1}+\frac{1}{2}|x-1|\sum_{q=1}^{n}\frac{(-1)^q}{q!}(x-1)^{q-1}.$$

Например, для $r_4(x)$ мы имеем

$$r_4(x)=\frac{e}{24}\cdot\left(24+12x^2+x^4\right)-\frac{1}{48}|x+1|\left(41+23x+7x^2+x^3\right)+$$

$$+\frac{1}{48}|x-1|\left(-41+23x-7x^2+x^3\right)$$

График функции $y(x)$ и ее приближения приведены на предыдущем рисунке. Отметим, что функцию $ch x$ можно представить рядом Тейлора в окрестности другой точки (например $x=1$) и получить другое кусочно полиномиальное приближение $r_n(x)$. □

1.3 Представление кусочных полиномов

1.3.1 Кусочные полиномы общего вида

Среди кусочно-аналитических функций наиболее распространенными являются кусочные полиномы, частным случаем которых являются сплайны. Кусочные полиномы используются в геометрическом моделировании, теории аппроксимации и многих других разделах прикладной математики. Здесь мы приведем способ представления кусочных полиномов в виде единого «аналитического» выражения с использованием функции абсолютного значения.

У кусочных полиномов каждый сегмент является полиномом, т.е. аналитической функцией на всей вещественной оси. Поэтому применимы результаты п. 1.2 и, кроме того, можно полагать $a=-\infty$ и $b=\infty$.

Пусть дано разбиение вещественной оси $\Delta=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $-\infty=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=\infty$ и непрерывный кусочный полином $P_\Delta(x)$,

$$P_\Delta(x)=\begin{cases} p_1(x) \ , x\le x_1 \\ p_2(x) \ , x_1<x\le x_2 \\ \cdots \\ p_{n-1}(x), x_{n-2}<x\le x_{n-1} \\ p_n(x) \ , x>x_{n-1} \end{cases}, \tag{1}$$

задаваемый на участках $x_{k-1}<x\le x_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ полиномами $p_k(x)=\sum_{j=0}^{l_k}a_{kj}x^j$. Пусть также выполняется условие непрерывности $p_k(x_k)=p_{k+1}(x_k)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1. (Доля П.Г.) *Существует единственное представление непрерывного кусочного полинома $P_\Delta(x)$ такое, что*

$$P_\Delta(x)=P(x)+\sum_{k=1}^{n-1}P_k(x)\left|x-x_k\right|, \tag{2}$$

где $P(x)$ и $P_k(x)$ некоторые полиномы. Для полинома $P(x)$ имеет место представление

$$P(x)=\frac{1}{2}\left(p_1(x)+p_n(x)\right) \tag{3}$$

Пусть известно, что в точках $x=x_k$ $(k=1,\ldots,n-1)$ выполняется гладкая стыковка до порядка m_k $\left(0\le m_k<h_k=\max\{l_k,l_{k+1}\}\right)$, т.е. имеют место равенства $p_k^{(q)}(x_k)=p_{k+1}^{(q)}(x_k)$ $\left(q=0,1,\ldots,m_k\right)$. Тогда полиномы $P_k(x)$ задаются следующим образом

$$P_k(x)=P_k^{N_k}(x)(x-x_k)^{m_k}, \tag{4}$$

где

$$P_k^{N_k}(x)=\frac{1}{2}\sum_{q=m_k+1}^{h_k}\frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k)-p_k^{(q)}(x_k)}{q!}(x-x_k)^{q-m_k-1}. \tag{5}$$

являются полиномами степени $N_k = \max\{l_k, l_{k+1}\} - m_k - 1$.

Доказательство. Доказательство почти немедленно следует из теоремы 2.1. Действительно, полиномы $p_k(x)$ являются аналитическими функциями на всей вещественной оси и условия (i) и (iii) теоремы 2.1 выполняются автоматически. Поскольку ряды Тейлора полиномов содержат конечное число слагаемых, то ряды (2.5) будут конечными и, следовательно, функции $F_i(x)$ будут полиномами. Представление (3) полинома $P(x)$ сразу следует из (2.4).

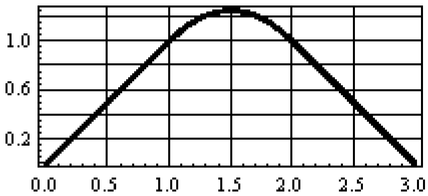
Из (2.5) следует, что полиномы $P_k(x)$ будут иметь степень равную максимуму из степеней l_k и l_{k+1} полиномов $p_k(x)$ и $p_{k+1}(x)$.Тогда, учитывая (2.8), мы получаем

$$P_k(x) = \frac{1}{2}(x - x_k)^{m_k} \sum_{q=m_k+1}^{h_k} \frac{p_{k+1}^{(q)}(x_k) - p_k^{(q)}(x_k)}{q!}(x - x_k)^{q-m_k-1},$$

где $h_k = \max\{l_k, l_{k+1}\}$. Теорема доказана. ■

Пример 1. Написать уравнение следующего кусочного полинома

$$S(x) = \begin{cases} x & ,x \le 1 \\ 3x - x^2 - 1 & ,1 < x < 2 \\ 3 - x & ,x \ge 2 \end{cases}$$

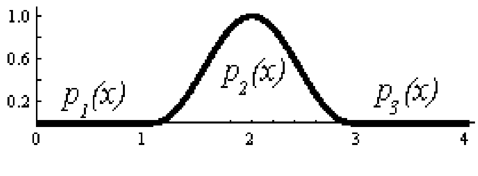


Здесь $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 3x - x^2 - 1$, $p_3(x) = 3 - x$. В соответствии с (3) имеем $P(x) = \frac{1}{2}\big(x + (3 - x)\big) = \frac{3}{2}$. Далее убеждаемся, что функция $S(x)$ непрерывна, а в точках $x = 1$ и $x = 2$ непрерывны также первые производные. Поэтому порядок гладкости в этих узлах равен $m_1 = m_2 = 1$. Легко видеть, что $N_1 = \max\{1,2\} - m_0 - 1 = 0$ и аналогично $N_2 = 0$. Тогда из (5) следует, что $P_1^0(x) = \frac{1}{2}\frac{p_1''(1) - p_0''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$ и $P_2^0(x) = \frac{1}{2}\frac{p_2''(2) - p_1''(2)}{2!} = \frac{1}{2}$. В результате формула (2) дает

$$S(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x-1)\,|\,x-1\,| + \frac{1}{2}(x-2)\,|\,x-2\,|. \qquad \square$$

Пример 2. Написать уравнение следующего кусочного полинома

$$S(x) = \begin{cases} 0 & ,x \le 1 \\ (x-1)^3(3-x)^3 & ,1 < x < 3 \\ 0 & ,x \ge 3 \end{cases}$$



Очевидно, что в точках стыка $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ непрерывны первая и вторая производные. Поскольку $p_1(x) = 0$ и $p_3(x) = 0$, то формула (5) дает

$$P_1^3(x)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=3}^{6}\frac{p_2^{(q)}(1)}{q!}(x-1)^{q-3} \quad \text{и} \quad P_2^3(x)=-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=3}^{6}\frac{p_2^{(q)}(3)}{q!}(x-3)^{q-3}$$

Легко определить, что

$$p_2^{(3)}(x)=-6\Big((x-3)^3+9(x-1)(x-3)^2+9(x-1)^2(x-3)+(x-3)^3\Big);$$

$$p_2^{(4)}(x)=-72\Big((x-3)^2+3(x-1)(x-3)+(x-1)^2\Big);$$

$$p_2^{(5)}(x)=-720(x-2); \qquad p_2^{(6)}(x)=-720.$$

Вычисляя значения этих производных в точке $x_1=1$ и подставляя в формулу для $P_1^3(x)$, получаем

$$P_1^3(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3!}48-\frac{1}{4!}72(x-1)+\frac{1}{5!}720(x-1)^2-\frac{1}{6!}720(x-1)^3\right)=-\frac{1}{2}(x-3)^3$$

Аналогично, вычисляя значения производных в точке $x_2=3$ и подставляя в формулу для $P_2^3(x)$, получаем

$$P_2^3(x)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3!}48-\frac{1}{4!}288(x-3)-\frac{1}{5!}720(x-3)^2-\frac{1}{6!}720(x-3)^3\right)=\frac{1}{2}(x-1)^3$$

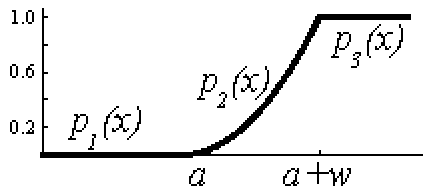
Тогда в соответствии с (2) – (4) получаем

$$S(x)=P_1^3(x)(x-1)^2\,|x-1|+P_2^3(x)(x-3)^2\,|x-3|=$$

$$=-\frac{1}{2}(x-3)^3\,|x-1|^3+\frac{1}{2}(x-1)^3\,|x-3|^3. \qquad \square$$

<u>Пример 3</u>. Написать уравнение n – й степени кусочного полинома $P(x,a,w)$ $(w>0)$.

$$P^n(x,a,w)=\begin{cases}0 & ,x\le a\\ (x-a)^n/w^n & ,a<x<a+w\\ 1 & ,x\ge a+w\end{cases}$$



Здесь $x_1=a, x_2=a+w$, $m_1=n-1$, $m_2=0$, $p_1(x)=0$, $p_2(x)=(x-a)^n/w^n$, $p_3(x)=1$. В соответствии с (3) $P(x)=1/2$. Из (5) получаем

$$P_1^0(x)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=n}^{n}\frac{p_2^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^{q-n}=\frac{1}{2}\frac{n!/w^n}{n!}=\frac{1}{2w^n}$$

Далее имеем (здесь $x_2=a+w$)

$$P_2^{n-1}(x)=-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{q=1}^{n}\frac{p_2^{(q)}(x_2)}{q!}(x-x_2)^{q-1}=-\frac{1}{2(x-x_2)}\sum\nolimits_{q=1}^{n}\frac{p_2^{(q)}(x_2)}{q!}(x-x_2)^{q}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-x_2)}\left(\sum\nolimits_{q=0}^{n}\frac{p_2^{(q)}(x_2)}{q!}(x-x_2)^{q}-p_2(x_2)\right)$$

Но первая сумма является рядом Тейлора полинома $p_2(x)=(x-a)^n/w^n$, который совпадает с этим полиномом. Поэтому получаем

$$P_2^{n-1}(x) = -\frac{1}{2(x-x_2)}\left(\frac{(x-a)^n}{w^n}-1\right) = -\frac{1}{2w^n}\frac{(x-a)^n-w^n}{x-a-w}\,. \qquad (a)$$

Из (2), (4) получаем

$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2} + P_1^0(x)(x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,| + P_2^{n-1}(x)\,|\,x-a-w\,| =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2w^n}(x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,| - \frac{1}{2w^n}\frac{\left(x-a\right)^n - w^n}{x-a-w}\,|\,x-a-w\,| =$$

$$= \frac{1}{2w^n}\Big(w^n + (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,| - \big((x-a)^n - w^n\big)sign(x-a-w)\Big) \qquad (6)$$

Заметим, что разрыва у этой функции нет. Функция $sign(x-a-w)$ имеет разрыв в точке $x = a+w$, но множитель, стоящий перед $sign(...)$, в этой точке обращается в ноль. Поэтому слагаемое $\big((x-a)^n - w^n\big)sign(x-a-w)$ в этой точке непрерывно.

Последнюю формулу еще можно записать в виде

$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2w^n}\Big(w^n + (x-a)^n sign(x-a) - \big((x-a)^n - w^n\big)sign(x-a-w)\Big)$$

В такой форме, формула легко проверяется. Действительно, при $x < a$ имеем

$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2w^n}\Big(w^n - (x-a)^n + \big((x-a)^n - w^n\big)\Big) = 0$$

При $a < x < a+w$ имеем

$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2w^n}\Big(w^n + (x-a)^n + \big((x-a)^n - w^n\big)\Big) = \frac{(x-a)^n}{w^n}$$

При $x > a+w$ имеем

$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2w^n}\Big(w^n + (x-a)^n - \big((x-a)^n - w^n\big)\Big) = 1$$

Например, при *n=2* мы получаем

$$P^2(x,a,w) = \frac{1}{2w^2}\left(w^2 + (x-a)\,|\,x-a\,| - \frac{(x-a)^n - w^2}{x-a-w}\,|\,x-a-w\,|\right) =$$

$$= \frac{1}{2w^2}\Big(w^2 + (x-a)\,|\,x-a\,| - (x-a+w)\,|\,x-a-w\,|\Big) \qquad (7)$$

При *n=1* мы получаем определение (1.1.1) функции $P(x,a,w)$. Поскольку функция $\Pi(x,a,w) = w \cdot P(x,a,w)$, то можно сразу записать формулы для n – й степени функции $\Pi(x,a,w)$. Например

$$\Pi^2(x,a,w) = \frac{1}{2}\Big(w^2 + (x-a)\,|\,x-a\,| - (x-a+w)\,|\,x-a-w\,|\Big) \qquad (8)$$

Замечание. Формула (a) не применима при $x = a+w$. Но это было введено искусственно делением и умножением на множитель $x-a-w$. Результирующая формула (6) применима для всех x.

Формула (6) может быть записана в виде "одноэтажных" модулей поскольку

$$sign(x-a-w)\left((x-a)^n - w^n\right) =$$
$$= sign(x-a-w)(x-a-w)\left((x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}w + \ldots + (x-a)w^{n-2} + w^{n-1}\right) =$$
$$= |x-a-w|\left((x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}w + \ldots + (x-a)w^{n-2} + w^{n-1}\right)$$

Поэтому

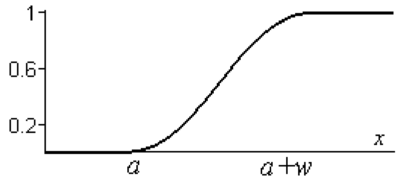
$$P^n(x,a,w) = \frac{1}{2w^n}\left(w^n + (x-a)^{n-1}|x-a| - R_{n-1}(x)|x-a-w|\right),$$

где полином $R_{n-1}(x)$ степени *n-1* имеет вид

$$R_{n-1}(x) = (x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}w + \ldots + (x-a)w^{n-2} + w^{n-1} \qquad \square$$

Пример 4. Написать уравнение следующего кусочного полинома $(w > 0)$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & ,x \le a \\ p_2(x) & ,a < x < a+w \\ 1 & ,x \ge a+w \end{cases}$$



где $p_2(x) = 10\left(\frac{x-a}{w}\right)^3 - 15\left(\frac{x-a}{w}\right)^4 + 6\left(\frac{x-a}{w}\right)^5$. Легко видеть, что на интервале $a < x < a+w$ функция $S(x)$ монотонно возрастает и в точках $x_1 = a$ и $x_2 = a+w$ имеет непрерывные первую и вторую производные. Также легко вычислить

$$p_2^{(3)}(x) = \frac{60}{w^3} - 360\frac{x-a}{w^4} + 360\frac{(x-a)^2}{w^5};$$
$$p_2^{(4)}(x) = -\frac{360}{w^4} + 720\frac{x-a}{w^5}; \quad p_2^{(5)}(x) = \frac{720}{w^5}.$$

Здесь $m_1 = m_2 = 2$, $p_1(x) = 0$, $p_3(x) = 1$. В соответствии с (3) $P(x) = 1/2$. Из (5) получаем

$$P_1^2(x) = \frac{1}{2}\sum_{q=3}^{5}\frac{p_2^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^{q-3} = \frac{1}{2w^3}\left(10 - 15\frac{x-a}{w} + 6\left(\frac{x-a}{w}\right)^2\right)$$

Аналогично получаем

$$P_2^2(x) = -\frac{1}{2}\sum_{q=3}^{5}\frac{p_2^{(q)}(a+w)}{q!}(x-a-w)^{q-3} =$$
$$= -\frac{1}{2w^3}\left(10 + 15\frac{x-a-w}{w} + 6\left(\frac{x-a-w}{w}\right)^2\right)$$

Тогда из (2), (4) получаем

$$S(x) = \frac{1}{2} + P_1^2(x)(x-a)^2|x-a| + P_2^2(x)(x-a-w)^2|x-a-w| =$$

$$=\frac{1}{2w^5}\Big(w^5+(10w^2-15w(x-a)+6(x-a)^2)\,|\,x-a\,|^3-$$
$$-(10w^2+15w(x-a-w)+6(x-a-w)^2)\,|\,x-a-w\,|^3\Big) \qquad (9)$$

□

<u>Пример 5</u>. Преобразовать к «одноэтажному» модульному выражению функцию $y(x)=|x-a||x-b|$, где $a<b$. Имеем

$$y(x)=\begin{cases} p_1(x)=(x-a)(x-b)\ \ ,\ x>b \\ p_2(x)=-(x-a)(x-b),\ a\le x\le b\,, \\ p_3(x)=(x-a)(x-b)\ \ ,x<a \end{cases}$$

$p_1'(x)=p_3'(x)=2x-(a+b)$, $p_2'(x)=-2x+(a+b)$, $p_1''(x)=p_3''(x)=2$, $p_2''(x)=-2$.
Для этого кусочного полинома используем теорему 1 п.1.3.1. Имеем

$$y(x)=\frac{1}{2}(p_1(x)+p_3(x))+\frac{1}{2}\left(\frac{p_2'(a)-p_1'(a)}{1!}+\frac{p_2''(a)-p_1''(a)}{2!}(x-a)\right)|x-a|+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{p_3'(b)-p_2'(b)}{1!}+\frac{p_3''(b)-p_2''(b)}{2!}(x-b)\right)|x-b|=$$
$$=(x-a)(x-b)+\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)-(a-b)}{1!}+\frac{-2-2}{2!}(x-a)\right)|x-a|+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)-(a-b)}{1!}+\frac{2-(-2)}{2!}(x-b)\right)|x-b|=$$
$$=(x-a)(x-b)+\big((b-a)-(x-a)\big)|x-a|+\big((b-a)+(x-b)\big)|x-b|=$$
$$=(x-a)(x-b)+\big(x-a\big)|x-b|-\big(x-b\big)|x-a|.$$

Т.о. получаем

$$|x-a||x-b|=(x-a)(x-b)+\big(x-a\big)|x-b|-\big(x-b\big)|x-a|,\ a<b. \qquad (10)$$

□

<u>Пример 6</u>. Преобразовать к «одноэтажному» модульному представлению выражение $|\,x-a+|\,x-b\,||$.

Начнем с функции $y(x)=|x-a+|\,x-a\,||$. Имеем

$$y(x)=\begin{cases} x>a\ \ |\,x-a+(x-a)\,|=2(x-a) \\ x\le a\ \ |\,x-a-(x-a)\,|=0 \end{cases}$$

или

$$|x-a+|\,x-a\,||=(x-a)+|\,x-a\,|=2Q(x,a)\,.$$

Для функции $y(x)=|x-a+|\,x-b\,||$, когда $a<b$, имеем

$$y(x)=\begin{cases} x>b\ \ |\,x-a+(x-b)\,|=|\,2x-(a+b)\,|=2x-(a+b) \\ a<x\le b\ \ |\,x-a-(x-b)\,|=|\,b-a\,|=b-a \\ x\le a\qquad |\,x-a-(x-b)\,|=b-a \end{cases}$$

или применяя общую формулу для представления кусочного полинома

$$y(x)=\frac{1}{2}((b-a)+2x-(a+b))+\frac{1}{2}(\frac{2-0}{1!})\,|\,x-b\,|=x-a+|\,x-b\,|$$

Т.о. имеем

$$|x-a+|x-b||=x-a+|x-b|,\ \left(a<b\right). \qquad (11)$$

Пусть теперь $a>b$. Тогда

$$y(x)=\begin{cases} x>a \quad |x-a+(x-b)|=|2x-(a+b)|=2x-(a+b) \\ b<x\le a \quad |x-a+(x-b)|=2|x-\dfrac{a+b}{2}| \\ x\le b \qquad |x-a-(x-b)|=|b-a|=a-b \end{cases}$$

Имеем две точки излома $x=b$ и $x=(a+b)/2$. Уравнение этой ломаной будет иметь вид

$$y(x)=\frac{1}{2}(a-b+2x-(a+b))+\frac{1}{2}(-2-0)|x-b|+\frac{1}{2}(2-(-2))|x-\frac{a+b}{2}|=$$

$$=x-b-|x-b|+2|x-\frac{a+b}{2}|.$$

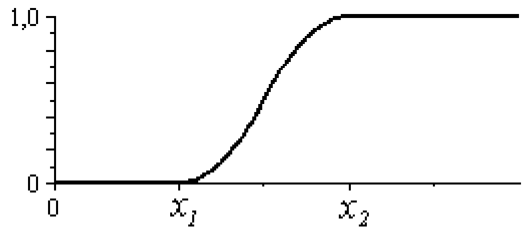
Т.о.

$$|x-a+|x-b||=x-b-|x-b|+\left|2x-a-b\right|,\ \left(b<a\right). \qquad (12)$$

□

<u>Пример 7</u>. Написать уравнение следующего кусочно гладкого полинома $\left(x_1<x_2\right)$

$$S(x,x_1,x_2)=\begin{cases} 0 & ,x<x_1 \\ 2\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)^2 & ,x_1\le x\le\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-x_2}{x_2-x_1}\right)^2 & ,\dfrac{x_1+x_2}{2}<x\le x_2 \\ 1 & ,x>x_2 \end{cases}$$



Легко видеть, что его производные равны

$$S'_x(x,x_1,x_2)=\begin{cases} 0 & ,x<x_1 \\ \dfrac{4(x-x_1)}{\left(x_2-x_1\right)^2} & ,x_1\le x\le\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ \dfrac{4(x_2-x)}{\left(x_2-x_1\right)^2} & ,\dfrac{x_1+x_2}{2}<x\le x_2 \\ 0 & ,x>x_2 \end{cases} \qquad S''_{xx}(x,x_1,x_2)=\begin{cases} 0 & ,x<x_1 \\ \dfrac{4}{\left(x_2-x_1\right)^2} & ,x_1\le x\le\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ -\dfrac{4}{\left(x_2-x_1\right)^2} & ,\dfrac{x_1+x_2}{2}<x\le x_2 \\ 0 & ,x>x_2 \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $S(x,x_1,x_2)$ непрерывен и имеет непрерывную первую производную, т.е. все $m_i=1$ (здесь точки стыка

$x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, x_2$). Формула (3.5) дает $P_1 = \frac{1}{\left(x_2-x_1\right)^2}$, $P_2 = -\frac{2}{\left(x_2-x_1\right)^2}$, $P_3 = \frac{1}{\left(x_2-x_1\right)^2}$. И мы получаем

$$S(x,x_1,x_2) = \frac{1}{2} + \frac{(x-x_1)\,|x-x_1|}{\left(x_2-x_1\right)^2} -$$

$$-\frac{2}{\left(x_2-x_1\right)^2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left|x-\frac{x_1+x_2}{2}\right| + \frac{(x-x_2)\,|x-x_2|}{\left(x_2-x_1\right)^2}.$$

Например, $S(x,0,1) = \frac{1}{2} + x|x| - 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left|x-\frac{1}{2}\right| + (x-1)|x-1|$. □

1.3.2 Полиномиальные сплайны

Сплайн функция это кусочный полином, все сегменты которого является полиномами одинаковой степени $l_i = N$ и для всех узлов порядок гладкости одинаков $m_i = m$ $\left(0 \le m < N\right)$.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задано множество точек $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Функция $S_\Delta^{N,m}(x)$ называется сплайном степени N класса C^m $\left(0 \le m < N\right)$ с узлами на сетке Δ, если на всех участках $[x_0, x_1]$, $(x_i, x_{i+1}]$, $\left(i = 1, \ \ldots, n-1\right)$, функция $S_\Delta^{N,m}(x)$ является многочленом степени N (т.е. $S_\Delta^{N,m}(x) = p_i(x) = \sum_{k=0}^{N} a_{i\,k}(x-x_i)^k$ для $x \in (x_i, x_{i+1}])$ и $S_\Delta^{N,m}(x) \in C^m$. Число $r = N - m$ называется дефектом сплайна и указывает на число старших производных порядка $m+1, \ \ldots, N$, которые имеют разрывы или не существуют. Соответственно производные порядков $1, \ 2, \ \ldots, \ m$ непрерывны. Сплайн дефекта 1 мы будем называть просто сплайном, опуская индекс m в его обозначении, и будем писать $S_\Delta^N(x)$ или $S^N(x)$. В других случаях мы будем явно указывать дефект сплайна.

Множество сплайнов, заданных на сетке Δ и обозначаемое $S^{N,m}(\Delta)$, является линейным пространством [2]. Каждое звено сплайна зависит от *N+1* коэффициента определяющего его многочлена. Общее число коэффициентов $\left(N+1\right)\times n$. Но в точках x_i, $\left(i = 1, \ldots, n-1\right)$ должны выполняться условия непрерывности первых m производных сплайна и самой функции. Это дает $\left(m+1\right)\times\left(n-1\right)$ линейных уравнений для коэффициентов $a_{i\,k}$. В результате число независимых коэффициентов будет

$$\left(N+1\right)\cdot n - \left(m+1\right)\cdot(n-1) = N + 1 + (N-m)\cdot\left(n-1\right).$$

Это есть размерность пространства сплайнов $S^{N,m}(\Delta)$.

Отметим, что при построении сплайнов точки x_0 и x_n не являются точками соединения полиномиальных сегментов; они используются только для задания граничных условий. Поэтому полиномы $p_1(x)$ и $p_n(x)$ мы можем рассматривать на участках $-\infty < x \le x_1$ и $x_{n-1} < x < \infty$. Теорему 1 (п. 1.3.1) для полиномиальных сплайнов мы можем сформулировать в виде

Теорема 2. *Полиномиальный сплайн $S_\Delta^{N,m}(x)$ степени N заданный на сетке $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ с гладкостью $m < N$ может быть представлен в виде*

$$S_\Delta^{N,m}(x) = P^N(x) + \sum\nolimits_{k=1}^{n-1} P_k^{N-m-1}(x)(x-x_k)^m \left|x - x_k\right|, \tag{13}$$

где $P^N(x)$ некоторый полином степени не выше чем N и $P_k^{N-m-1}(x)$ некоторые полиномы степени $N-m-1$.

Заметим, что суммарное число коэффициентов полиномов в выражении (13) равно $N+1+(n-1)\times(N-m)$ и совпадает с размерностью пространства сплайнов $S^{N,m}(\Delta)$.

В частности для сплайна $S_\Delta^N(x) \equiv S_\Delta^{N,N-1}(x)$ степени N дефекта $r = N - m = 1$ имеем $P_k^0(x) = Const$ и (5) дает $P_k^0 = \left(a_{i+1\,N} - a_{i\,N}\right)/2$. Подставляя P_k^0 в (13), получаем

Следствие 1. *Представление сплайна $S_\Delta^N(x)$ степени N дефекта 1 имеет вид*

$$S_\Delta^N(x) = P^N(x) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1\,N} - a_{k\,N}\right)(x-x_k)^{N-1}\left|x-x_k\right|. \tag{14}$$

Вспоминая следствие 1 п.1.2 можно сделать вывод, что любой кусочный полином можно представить в виде $P_\Delta(x) = p_1(x) + 2\sum\nolimits_{k=1}^{n-1} P_k(x) Q(x, x_k)$. Но тогда из (14) получаем

$$S_\Delta^N(x) = p_1(x) + \sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1\,N} - a_{k\,N}\right)(x-x_k)^{N-1} Q(x,x_k) =$$
$$= p_1(x) + \sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1\,N} - a_{k\,N}\right) Q^N(x,x_k).$$

Т.о. для построения сплайна степени *N* дефекта *1* достаточно знать уравнение первого полиномиального звена сплайна $p_1(x) = \sum\nolimits_{j=0}^N a_{1\,j} x^j$ и только старшие коэффициенты $a_{k\,N}$ в уравнениях $p_k(x) = \sum\nolimits_{j=0}^N a_{k\,j} x^j$ остальных звеньев.

В теории сплайнов используют усеченные степенные функции вида $t_+^N = \begin{cases} 0\ , t \le 0 \\ t^N, t > 0 \end{cases}$. Как легко заметить $Q^N(x,a) = (x-a)_+^N$. Поэтому последнее выражение дает известное представление полиномиального сплайна через усеченные степенные функции [ ].

1⁰. Уравнение Бернштейна кусочно-линейной функции (ломаной).

Дан набор узлов $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и надо построить ломаную на отрезке $[x_0, x_n]$. Пусть при этом отрезок, соединяющий точки $(x_0, y_0),(x_1, y_1)$ продолжается влево и определяет для всех $x < x_1$ луч ломаной, проходящий через эти точки. А отрезок, соединяющий пару точек $(x_{n-1}, y_{n-1}),(x_n, y_n)$, определяет для $x > x_{n-1}$ другой луч ломаной. Формула (14) при *N=1* принимает вид

$$S_{\Delta}^{1}(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(a_{k+1\,1} - a_{k\,1}\big)|x - x_k|$$

Уравнение прямой, походящей через два соседних узла (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), имеет вид $p_k(x) = y_{k-1} + \dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\big(x - x_{k-1}\big)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$. Тогда получаем

$$S_{\Delta}^{1}(x) = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\big(x - x_0\big) + y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\big(x - x_{n-1}\big) \right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right)|x - x_k| \qquad (15)$$

Легко видеть, что формула (1.5) может быть приведена к виду (15), если функции $P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})$ заменить представлением (1.1). Вероятно, формула (15) была известна еще С.Н.Бернштейну. В работе [ ] 1905года он приводит ее аналог для случая равномерного распределения узлов и использует при доказательстве теоремы Вейерштрасса.

2⁰. Интерполяционный кусочно- кубический полином Эрмита

В узлах $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ заданы значения функции y_i и значения производных g_i. Требуется построить кусочную функцию $S_{\Delta}^{H}(x) \in C^1$, которая на каждом участке $[x_0, x_1]$, $(x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2,\ldots,n)$ является кубическим полиномом и в узлах x_i имеет заданные значения y_i и g_i, т.е. $S_{\Delta}^{H}(x_i) = y_i$, $\dfrac{dS_{\Delta}^{H}(x_i)}{d\,x} = g_i$

$(i = 0,1,\ldots,n)$. Такую функцию $S_{\Delta}^{H}(x)$называют интерполяционным кусочно-кубическим полиномом Эрмита. Задача легко решается, поскольку задание значений и производных на концах кубического полиномиального сегмента однозначно определяет каждый сегмент. Здесь мы приводим способ построения единого аналитического выражения, дающего решение этой задачи.

Точки x_0 и x_n не являются точками стыка полиномиальных сегментов и используются только для построения крайних кубических сегментов $p_1(x)$ и $p_n(x)$. В соответствии с (13) кубический составной полином Эрмита $S_{\Delta}^{H}(x) = S_{\Delta}^{3,1}(x)$ будет иметь вид

$$S_\Delta^H(x) = P^3(x) + \sum_{i=1}^{n-1} P_i^1(x)(x-x_i)\left|x-x_i\right| \qquad (16)$$

Из (5) получаем

$$P_i^1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{i2}}{2!} + \frac{b_{i3}}{3!}(x-x_i)\right), \qquad (17)$$

где b_{i2} и b_{i3} разности 2-й и 3-й производных полиномиальных сегментов $p_{i+1}(x)$ и $p_i(x)$ в точке x_i.

Уравнение кубического сегмента, проходящего через два соседних узла (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), и имеющего в них заданные производные g_{i-1}, g_i, имеет вид [ ]

$$p_i(x) = y_{i-1}\left(h_i + 2(x-x_{i-1})\right)\frac{(x-x_i)^2}{h_i^3} + g_{i-1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{h_i^2} +$$
$$+ g_i\frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})^2}{h_i^2} + y_i\frac{\left(h_i - 2(x-x_i)\right)(x-x_{i-1})^2}{h_i^3}, \qquad (18)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$. Эта формула может быть проверена прямым вычислением. Вычислим вторые производные от $p_{i+1}(x)$ и $p_i(x)$ в точке x_i и определим их разность. После некоторых преобразований получаем

$$b_{i2} = p''_{i+1}(x_i) - p''_i(x_i) = 6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}\right) - 2\left(\frac{g_{i+1}+2g_i}{h_{i+1}} + \frac{g_{i-1}+2g_i}{h_i}\right)$$

Для разности третьих производных получаем

$$b_{i3} = p'''_{i+1}(x_i) - p'''_i(x_i) = 6\left(\frac{g_i + g_{i+1}}{h_{i+1}^{\;2}} - \frac{2(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}^{\;3}} + \frac{2(y_i - y_{i-1})}{h_i^3} - \frac{g_{i-1}+g_i}{h_i^2}\right)$$

Тогда из (17) получаем

$$P_i^1(x) = \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right) - \left(\frac{g_{i+1}+2g_i}{h_{i+1}} + \frac{g_{i-1}+2g_i}{h_i}\right) +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{g_i+g_{i+1}}{h_{i+1}^{\;2}} - \frac{2(y_{i+1}-y_i)}{h_{i+1}^{\;3}} + \frac{2(y_i-y_{i-1})}{h_i^3} - \frac{g_{i-1}+g_i}{h_i^2}\right)(x-x_i)\right) \qquad (19)$$

Подставляя в (18) $i=1$ и $i=n$, получаем выражения для полиномов $p_1(x)$ и $p_n(x)$, а также полином $P^3(x) = (p_1(x) + p_n(x))/2$. Если подставить $P^3(x)$ и выражение (19) в (16), то можно получить единое выражение для интерполяционного кусочно-кубического полинома Эрмита $S_\Delta^H(x)$.

<u>Пример 1</u>. Написать уравнение кусочно-кубического полинома Эрмита, проходящего через точки (0,0), (1,0), (2,1), (3,0), (4,0) и имеющего в этих точках нулевые производные.

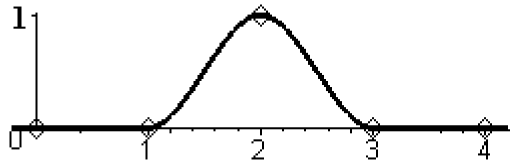
Кубический сегмент, который проходит через точки (0,0), (1,0) и имеет в них нулевые производные, тождественно равен нулю, т.е. $p_1(x) \equiv 0$. Аналогично $p_4(x) \equiv 0$. Поэтому $P^3(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_4(x)) = 0$.

Из (19) получаем

$$P_1^1(x)=\frac{1}{2}\big(3\big(y_2-y_0\big)+\big(-2y_2+4y_1-2y_0\big)(x-x_1)\big)=\frac{1}{2}\big(3-2(x-1)\big)=\frac{5}{2}-x\,.$$

Аналогично $P_2^1(x)=2(x-2)$ и $P_3^1(x)=\frac{3}{2}-x$. Подставляя все в (16), получаем

$$S_\Delta^H(x)=\left(\frac{5}{2}-x\right)(x-1)\,|\,x-1\,|+2(x-2)^2\,|\,x-2\,|+\left(\frac{3}{2}-x\right)(x-3)\,|\,x-3\,|$$



Заметим, что из уравнения сразу видно, что в точке *x=2* непрерывна также и вторая производная, поскольку выражение $(x-2)^2\,|\,x-2\,|\equiv|\,x-2\,|^3$ является дважды непрерывно дифференцируемым во всех точках, включая точку *x=2*.

□

<u>Пример 2</u>. Написать уравнение кусочно-кубического полинома Эрмита $P_H(x,a,w)\in C^1$ равного 0 при $x\le a$, равного 1 при $x\ge a+w$ $(w>0)$ и имеющего в точках $x_1=a$, $x_2=a+w$ нулевые производные.

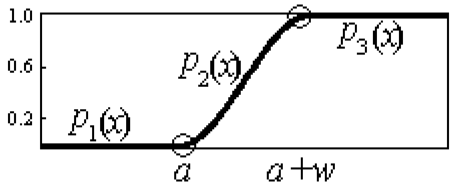


Рис. 8 График функции $P_H(x,a,w)$

Очевидно, что $p_1(x)=0$ и $p_3(x)=1$. С учетом того, что $g_1=0, g_2=0$, формула (19) дает

$$P_1^1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{w^2}-\frac{2}{w^3}(x-a)\right),\;\; P_2^1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{w^2}+\frac{2}{w^3}(x-a-w)\right).$$

Тогда для кусочно-кубического полинома Эрмита $P_H(x,a,w)$ получаем

$$P_H(x,a,w)=\frac{p_1(x)+p_3(x)}{2}+P_1^1(x)(x-a)\,|\,x-a\,|+P_2^1(x)(x-a-w)\,|\,x-a-w\,|=$$

$$=\frac{1}{2w^3}\Big(w^3+3w\big((x-a)\,|\,x-a\,|+(x-a-w)\,|\,x-a-w\,|\big)-$$

$$-2(x-a)^2\,|\,x-a\,|+2(x-a-w)^2\,|\,x-a-w\,|\Big)=$$

$$=\frac{1}{w^3}\left(\frac{w^3}{2}-(x-a-\frac{3}{2}w)(x-a)\big|x-a\big|+(x-a+\frac{w}{2})(x-a-w)\big|x-a-w\big|\right)\quad(20)$$

Это выражение можно записать в кусочном виде следующим образом

$$P_H(x,a,w)=\begin{cases} 0 & ,x\le a \\ \dfrac{(x-a)^2(2a-2x+3w)}{w^3} & ,a<x<a+w \\ 1 & ,x\ge a+w \end{cases}.$$

Например, при $a=0, w=1$ это уравнение (20) имеет вид

$$P_H(x,0,1)=\frac{1}{2}\left(1+(3-2x)x\,|\,x\,|+(2x+1)(x-1)\,|\,x-1\,|\right). \qquad \square$$

3[0]*. Интерполяционные кубические сплайны*

Кубический сплайн это кусочный кубический полином, который проходит через заданные точки, и в которых первая и вторая производные непрерывны. Т.о. дано множество узлов $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^n$, $x_0<x_1<\ldots<x_n$. Требуется построить интерполяционный кубический сплайн $S_\Delta^3(x)\equiv S_\Delta^{3,2}(x)\in C^2$ дефекта 1 на отрезке $[x_0,x_n]$. Точки x_0 и x_n не являются точками стыка кубических сегментов и формула (13) принимает вид

$$S_\Delta^3(x)=P^3(x)+\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}c_i\left|x-x_i\right|^3, \tag{21}$$

где $c_k=P_k^0=Const$. Продифференцируем это выражение 2 раза по *x*

$$L(x)=\frac{d^2}{d\,x^2}S_\Delta^3(x)=P^{3''}(x)+6\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}c_i\left|x-x_i\right|. \tag{22}$$

Напомним, что $\left|x-a\right|^3\in C^2$ и $\left(|\,x-a\,|^3\right)''=6\,|\,x-a\,|$. Поэтому дифференцирование законно.

Поскольку кубический сплайн $S_\Delta^3(x)$ имеет непрерывные вторые производные во всех точках, то функция *L(x)* является непрерывной кусочно-линейной и ее значения в точках x_i совпадают со значениями s_i вторых производных сплайна $S_\Delta^3(x)$ в этих точках.

Предположим, что эти значения s_i нам известны. Уравнение ломаной, проходящей через узлы (x_i,s_i), определяется формулой Бернштейна (15)

$$L(x)=L_1(x)+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{s_i-s_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)\left|x-x_i\right|,$$

где

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\left(s_0+\frac{s_1-s_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)+s_{n-1}+\frac{s_n-s_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\left(x-x_{n-1}\right)\right)$$

линейная функция. Интегрируя это выражение дважды, получаем

$$S_\Delta^3(x)=R_3(x)+\frac{1}{12}\sum\nolimits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{s_i-s_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)\left|x-x_i\right|^3+C_0+C_1\cdot x, \tag{23}$$

где $R_3(x)$ кубический полином, получаемый двойным интегрирование линейной функции $L_1(x)$, и C_0, C_1 некоторые постоянные. Здесь мы воспользовались следующими формулами интегрирования

$$\int |\,x\,|\,dx = \frac{1}{2}x|\,x\,| + Const \qquad \text{и} \qquad \int x|x|dx = \frac{1}{3}|x|^3 + Const\,.$$

В силу теоремы 1 представление (23) кусочного полинома $S_\Delta^3(x)$ единственно. Поэтому многочлен, расположенный вне суммы в (23), может быть вычислен по формуле (3). В результате для интерполяционного кубического сплайна получаем

$$S^3(x) = \frac{1}{2}\big(p_1(x) + p_n(x)\big) + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{s_{i+1}-s_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{s_i - s_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)|x - x_i|^3\,. \qquad (24)$$

Если известны значения вторых производных s_{i-1} и s_i на концах кубического сегмента, то его уравнение имеет вид [ ]

$$p_i(x) = \frac{s_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \frac{s_i(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_{i-1}h_i}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_ih_i}{6}\right)(x - x_{i-1}) \qquad (25)$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$. Это можно проверить прямым вычислением.

Используя эти выражения при *i=1* и *i=n*, получаем выражения полиномов $p_1(x)$ и $p_n(x)$ в формуле (24). Т.о. для построения уравнения кубического сплайна необходимо определить значения всех вторых производных s_i в его узлах. Приведем метод, который наиболее часто используется для определения этих значений.

Продифференцируем выражение (19)

$$p_i'(x) = -\frac{s_{i-1}(x_i - x)^2}{2h_i} + \frac{s_i(x - x_{i-1})^2}{2h_i} - \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_{i-1}h_i}{6}\right) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_ih_i}{6}\right). \qquad (26)$$

Поскольку в точке x_i стыка соседних кубических сегментов $p_i(x), p_{i+1}(x)$ первые производные непрерывны, то имеет место равенство $p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i)$. Используя для первых производных выражение (26), получаем

$$\frac{s_ih_i}{2} - \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{s_{i-1}h_i}{6}\right) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_ih_i}{6}\right) = -\frac{s_ih_{i+1}}{2} - \left(\frac{y_i}{h_{i+1}} - \frac{s_ih_{i+1}}{6}\right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{s_{i+1}h_{i+1}}{6}\right)$$

После простых преобразований, приходим к уравнению

$$h_is_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})s_i + h_{i+1}s_{i+1} = \frac{6(y_{i+1} - y_i)}{h_{i+1}} - \frac{6(y_i - y_{i-1})}{h_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \quad (27)$$

Запишем такое уравнение для каждого внутреннего узла $x_i \ (i = 1, \ldots, n-1)$ и получим (*n-1*) условие на (*n+1*) неизвестное значение s_i. Для однозначной разрешимости надо иметь два дополнительных условия. Наиболее часто этими условиями являются:

(i) Свободные концы, т.е. нулевая кривизна сплайна в x_0 и x_n, что дает $s_0 = 0$ и $s_n = 0$.

(ii) Защемленные концы, т.е. заданы первые производные в x_0 и x_n. Положим *i=1* и $p_1'(x_0)=g_0$ в (21). После простых преобразований получаем $2h_1s_0+h_1s_1=6\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-6g_0$. Аналогично, полагая *i=n* и $p_n'(x_n)=g_n$, приходим к уравнению $h_ns_{n-1}+2h_ns_n=6g_n-6\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}$.

Имея (*n-1*) уравнение (27) и два дополнительных условия, мы можем определить все неизвестные. Например, для случая (ii) мы приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) & h_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_n & 2h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} =$$

$$=6\begin{pmatrix} (y_1-y_0)/h_1-g_0 \\ (y_2-y_1)/h_2-(y_1-y_0)/h_1 \\ (y_3-y_2)/h_3-(y_2-y_1)/h_2 \\ \vdots \\ (y_n-y_{n-1})/h_n-(y_{n-1}-y_{n-2})/h_{n-1} \\ g_n-(y_n-y_{n-1})/h_n \end{pmatrix} \qquad (28)$$

Матрица коэффициентов системы диагонально доминантная, поэтому у нее существует единственное решение. Решая полученную линейную трехдиагональную систему уравнений относительно неизвестных s_i и, подставляя их значения в уравнение (24), получаем уравнение кубического сплайна.

Пример 1. Составить уравнение кубического сплайна $S^3(x)$, проходящего через точки (0, 0), (1, 0), (2, 1/4), (3, 1), (4, 1/4), (5, 0), (6, 0) и имеющего на концах нулевые производные.

В нашем случае $\{y_i\}_{i=0}^{6}=(0,0,1/4,1,1/4,0,0)$, $x_i=i$, $h_i=1$ и $g_0=0$, $g_6=0$. Тогда система уравнений (28) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему, получаем $s_0 = 0, s_1 = 0, s_2 = \dfrac{3}{2}, s_3 = -3, s_4 = \dfrac{3}{2}, s_5 = 0, s_6 = 0$. Используя (25) при $i=1$ и $i=6$, получаем $p_1(x) = 0$ и $p_6(x) = 0$. Тогда из (24)

$$S^3(x) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{5}(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1})\,|\,x - i\,|^3 =$$

$$= \frac{1}{8}|\,x-1|^3 - \frac{1}{2}|\,x-2\,|^3 + \frac{3}{4}|\,x-3|^3 - \frac{1}{2}|\,x-4|^3 + \frac{1}{8}|\,x-5\,|^3$$

График этого сплайна приведен на следующем рисунке.

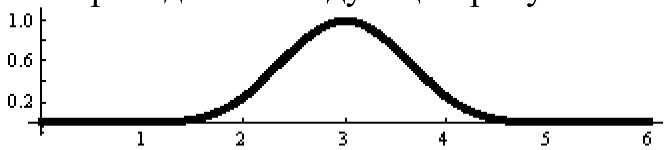


Рис. 9

Поскольку $p_1(x) = 0$ и $p_6(x) = 0$, то вне интервала (1, 5) эта функция равна нулю. Это пример так называемого В – сплайна. □

<u>Пример 2</u>. Составить уравнение кубического сплайна $S^3(x)$, проходящего через точки (0,0), (1,1), (2,0), (3,-1), (4,0) (это значения функции $\sin(\pi x/2)$ при $x=0, 1, 2, 3, 4$) и имеющего свободные концы.

Здесь $x_i = i$, $h_i = 1$ ($i=0,1,2,3,4$). Составляем систему уравнений (27) и добавляем к ним два граничных условия (i) $s_0 = 0, s_4 = 0$. Система уравнений относительно вторых производных s_i отличается от системы (28) только первым и последним уравнениями

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему, получаем $s_0 = 0, s_1 = -3, s_2 = 0, s_3 = 3, s_4 = 0$. Используя формулу (25) при $i=1$ и $i=4$, получаем $p_1(x) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}x^3$ и $p_4(x) = \dfrac{1}{2}(4-x)^3 - \dfrac{3}{2}(4-x)$. Подставляя все в (24) и упрощая, получаем

$$S^3(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_4(x)) + \frac{1}{12}\left(6\,|\,x-1|^3 + 0\,|\,x-2|^3 - 6\,|\,x-3|^3\right) =$$
$$= 13 - \frac{21}{2}x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}|\,x-1|^3 - \frac{1}{2}|\,x-3|^3.$$

На следующем рисунке приведены графики функций $S^3(x)$ и $\sin\frac{\pi x}{2}$. Как видим на отрезке [-1,5] они почти одинаковы.

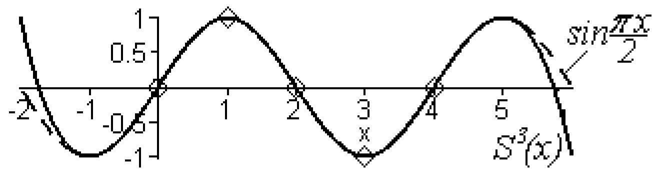


Рис. 10 График кубической сплайн функции $S^3(x)$ (сплошная линия) и функции $\sin(\pi x/2)$ (пунктирная линия).

□

1.4 Кусочно-гладкие непрерывные функции

Рассмотрим набор точек вещественной оси $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и последовательность непрерывных функций $\{f_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$. Говорят, что функция *f(x)* является кусочно-непрерывной, если она задается в виде

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \le x_0 \\ f_1(x), & x_0 < x \le x_1 \\ \cdots \\ f_n(x), & x_{n-1} < x \le x_n \\ f_{n+1}(x), & x > x_n \end{cases} \qquad (1)$$

и функции $f_i(x)$ непрерывны на соответствующих участках. В этом случае кусочная функция $f(x)$ в точках x_i может иметь только разрывы первого рода. Мы также полагаем, что кусочная функция состоит из конечного числа звеньев. Для определенности мы полагаем, что все участки являются полуоткрытыми интервалами $x_{i-1} < x \le x_i$, однако это не существенно.

Здесь мы будем использовать кусочно-аналитические функции, которые определены на всей оси $-\infty < x < \infty$ и задаются различными аналитическими выражениями $f_i(x)$. В аналитической геометрии используют, как правило, непрерывные функции и мы будем работать только с такими функциями. Кусочно-аналитическая функция $f(x)$ будет непрерывной, если выполняются дополнительные условия

$$f_{i-1}(x_{i-1}) = f_i(x_{i-1}) \;\; \left(i = 1,\ldots,n+1\right). \qquad (2)$$

В настоящем разделе мы покажем, как можно переходить от кусочного представления (1) таких функций к единому «аналитическому» выражению (не используя условия (i) – (iii) теоремы 2.1 п.1.2).

Рассмотрим следующую кусочно-линейную функцию аргумента x

$$\Pi(x,a,w)=\frac{1}{2}(w+|x-a|-|x-a-w|) \quad (w>0) \tag{3}$$

Легко видеть, что она равна $x-a$ при $a<x<a+w$, равна 0 при $x\le a$ и равна w при $x\ge a+w$. Эта функция с точностью до числового множителя $1/w$ совпадает с функцией *P(x,a,w)* определенной в п. 1.1.

Пусть задана возрастающая последовательность чисел $\{x_i\}_{i=0}^n$ и последовательность функций, определенных на отрезках вещественной оси $[x_{i-1},x_i]_{i=1}^n$ аналитическими выражениями $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$. Будем также предполагать, что соседние функции в точках прилегания смежных отрезков имеют одинаковые значения, т.е. $f_{i-1}(x_i)=f_i(x_i) \quad (i=1,\ldots,n)$. Тогда имеет место

Теорема 1 (Доля П.Г.) *Уравнение непрерывной криволинейной ломаной, которая на отрезках* $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *задана функциями* $f_i(x)$ *и вне отрезка* $[x_0,x_n]$ *сохраняет постоянные значения, имеет следующий вид*:

$$y_b(x)=f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\Big(f_i\big(x_{i-1}+\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})\big)-f_i(x_{i-1})\Big) \tag{4}$$

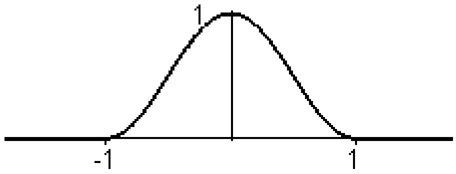
Доказательство. Фиксируем p $(1\le p\le n)$ и рассмотрим правую часть (4) на интервале $x_{p-1}\le x\le x_p$. Все функции $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в выражении (4) при $i<p$ будут равны единице, а соответствующие им слагаемые будут иметь вид $f_i(x_i)-f_i(x_{i-1})$. Все функции $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ в выражении (4) при $i>p$ будут равны нулю и соответствующие им слагаемые обращаются в ноль. Поэтому правая часть выражения (4) принимает вид

$$f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{p-1}\big(f_i(x_i)-f_i(x_{i-1})\big)+f_p\big(x_{p-1}+\Pi(x,x_{p-1},x_p-x_{p-1})\big)-f_p(x_{p-1})$$

Учитывая условие непрерывности $f_{i-1}(x_i)=f_i(x_i)$, получаем $f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{p-1}\big(f_i(x_i)-f_i(x_{i-1})\big)=f_{p-1}(x_{p-1})$. Для $x\in[x_{p-1},x_p]$ из (3) следует, что $\Pi(x,x_{p-1},x_p-x_{p-1})=x-x_{p-1}$. Поэтому выражение (4) преобразуется к виду $y_b(x)=f_{p-1}(x_{p-1})+f_p(x)-f_p(x_{p-1})=f_p(x)$. Если $x<x_0$, то в формуле (4) все функции $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ равны нулю, и мы получаем, что $y_b(x)=f_1(x_0)$. Если $x>x_n$, то в (4) все функции $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$ равны единице, и мы получаем, что $y_b(x)=f_1(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x_i)-f_i(x_{i-1})\big)=f_n(x_n)$. Таким образом, функция $y_b(x)$ на каждом интервале $x_{p-1}\le x\le x_p$ совпадает с соответствующей функцией $f_p(x)$. Левее точки x_0 функция имеет постоянное значение $f_1(x_0)$, а правее точки x_n функция имеет постоянное значение $f_n(x_n)$. □

Пример 1. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x)=\begin{cases}0 & ,x\le -1\\ \dfrac{1+\cos\pi x}{2} & ,-1<x<1\\ 0 & ,x\ge 1\end{cases}$$

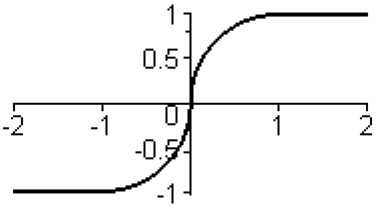


В соответствии с (4) имеем

$$y(x)=\frac{1+\cos(\pi(-1+\Pi(x,-1,2)))}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}(|x+1|-|x-1|\right)\right)$$ □

Пример 2. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x)=\begin{cases}-1 & ,x\le -1\\ -\sqrt{1-(x+1)^2} & ,-1<x\le 0\\ \sqrt{1-(x-1)^2} & ,0<x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}$$



Здесь $\{x_i\}_{i=0}^{2}=(-1,0,1)$, а криволинейные отрезки составной функции являются дугами окружности $f_1(x)=-\sqrt{1-(x+1)^2}$ и $f_2(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$. Функция $y(x)$ сохраняет постоянные значения вне отрезка $[-1,1]$. Поэтому можно использовать формулу (4). Имеем

$$y(x)=f_1(-1)+\left(f_1(-1+\Pi(x,-1,1))-f_1(-1)\right)+\left(f_2(\Pi(x,0,1))-f_2(0)\right)=$$
$$=-\sqrt{1-\Pi^2(x,-1,1)}+\sqrt{2\Pi(x,0,1)-\Pi^2(x,0,1)}.$$

Но, в соответствии с (3.8), имеем

$$\Pi^2(x,-1,1)=\frac{1}{2}\left(1+(x+1)|x+1|-(x+2)|x|\right)$$

$$\Pi^2(x,0,1)=\frac{1}{2}\left(1+x|x|-(x+1)|x-1|\right)$$

Поэтому, после некоторых преобразований, получаем

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-(x-2)|x|+(x-1)|x-1|}-\sqrt{1+(x+2)|x|-(x+1)|x+1|}\right).$$

□

Предположим, что непрерывную криволинейную ломаную левее точки x_0 нужно определить с помощью функции $f_0(x)$, и правее точки x_n нужно определить с помощью функции $f_{n+1}(x)$ с сохранением условия непрерывности $f_0(x_0)=f_1(x_0)$ и $f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)$.

Теорема 2. *Уравнение непрерывной кусочно-аналитической функции, которая на отрезках* $[x_{i-1},x_i]$ *совпадает с функциями* $f_i(x)$, *при* $x\le x_0$ *определяется функцией* $f_0(x)$ *и при* $x\ge x_n$ *определяется функцией* $f_{n+1}(x)$, *имеет следующий вид:*

$$y(x)=f_0(x_0+Q_l(x,x_0))+\sum_{i=1}^{n}\Big(f_i\big(x_{i-1}+\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})\big)-f_i(x_{i-1})\Big)+$$
$$+\big(f_{n+1}(x_n+Q(x,x_n))-f_{n+1}(x_n)\big) \qquad (5)$$

Доказательство. Действительно, при $x\le x_0$ из (4) и (3) получаем $Q_l(x,x_0)=x-x_0$, $Q(x,x_n)=0$ и $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$ для любого *i*. Поэтому (5) преобразуется к виду

$$y(x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x_{i-1})-f_i(x_{i-1})\big)+\big(f_{n+1}(x_n)-f_{n+1}(x_n)\big)=f_0(x)$$

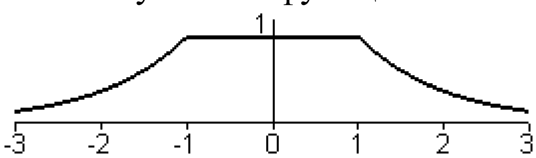
При $x_0\le x\le x_n$ имеем $Q_l(x,x_0)=0$, $Q(x,x_n)=0$ и формула (5) совпадает с (4). При $x>x_n$ имеем $Q_l(x,x_0)=0$, $\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=1$ для любого i и $Q(x,x_n)=x-x_n$. Поэтому (5) дает

$$y(x)=f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\big(f_i(x_i)-f_i(x_{i-1})\big)+\big(f_{n+1}(x)-f_{n+1}(x_n)\big)\ =f_{n+1}(x).$$

Т.о., функция $y(x)$, построенная по формуле (5), при $x\le x_0$ совпадает с функцией $f_0(x)$. В промежутке $x_0\le x\le x_n$ функция *y(x)* совпадает с функцией $y_b(x)$, составленной из криволинейных отрезков с уравнениями $f_i(x)$. При $x>x_n$ функция $y(x)$ совпадает с функцией $f_{n+1}(x)$. □

Пример 3. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x)=\begin{cases}e^{1+x} & ,x\le -1\\ 1 & ,-1<x<1\\ e^{1-x} & ,x\ge 1\end{cases}$$



Здесь $\{x_i\}_{i=0}^{1}=(-1,1)$ и $f_0(x)=e^{1+x}$, $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^{1-x}$. В соответствии с (5) получаем

$$y(x)=e^{1+(-1+Q_l(x,-1))}+(1-1)+(e^{1-(1+Q(x,1))}-1)=e^{Q_l(x,-1)}+e^{-Q(x,1)}-1.$$

(сравните с примером 3 п. 1.2) □

Пример 4. Приведем еще раз вывод явного уравнения ломаной, используя формулу (5). Дан набор узлов $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^{n}$, $x_0<x_1<\ldots<x_n$ и надо построить интерполяционную кусочно-линейную функцию. Пусть при этом отрезок, соединяющий точки $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ продолжается влево и определяет для всех $x<x_1$ луч ломаной, проходящий через эти точки. А отрезок, соединяющий пару точек $(x_{n-1},y_{n-1}),(x_n,y_n)$, определяет для $x>x_{n-1}$ другой луч ломаной.

Уравнение прямой, проходящей через два соседних узла, имеет вид

$$f_i(x)=y_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$$

Используя (5), явное уравнение ломаной можно записать в виде

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_1 + Q_l(x, x_1) - x_0) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \left(y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \left(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) - x_{i-1} \right) - y_{i-1} \right) +$$

$$+ \left(y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \left(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1}) - x_{n-1} \right) - y_{n-1} \right) =$$

$$= y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} Q_l(x, x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} Q(x, x_{n-1}) \quad (6)$$

Вспоминая определения (1.4) и (3), уравнение (6) можно привести к виду (3.15), содержащему только функцию абсолютного значения.

Из теоремы 2 можно получить два тождества

Следствие 1. *Если в* (5) *все функции взять равными* $f_i(x) = x$, *то мы получим тождество*

$$x \equiv x_0 + Q_l(x, x_0) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) + Q(x, x_n). \quad (7)$$

Следствие 2. *Для произвольной функции* $y = f(x)$ *и произвольного разбиения оси ординат* $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ $(y_0 < y_1 < \ldots < y_n)$ *выполняется следующее тождество*

$$f(x) \equiv y_0 + Q_l(f(x), y_0) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \Pi(f(x), y_{i-1}, y_i - y_{i-1}) + Q(f(x), y_n). \quad (8)$$

Доказательство. Тождество (8) фактически является тождеством (7) в котором значение x заменили на $f(x)$, а набор $\{x_i\}$ на $\{y_i\}$. □

Пример 5. Разбиение $\{y_i\}$ состоит из одной точки $y_0 = 0$. Тогда для произвольной функции $f(x)$ мы получаем $f(x) \equiv Q_l(f(x), 0) + Q(f(x), 0)$. Пусть, например, $f(x) = \sin x$. Графики функций $Q_l(\sin x, 0)$ и $Q(\sin x, 0)$ приведены на следующем рисунке.

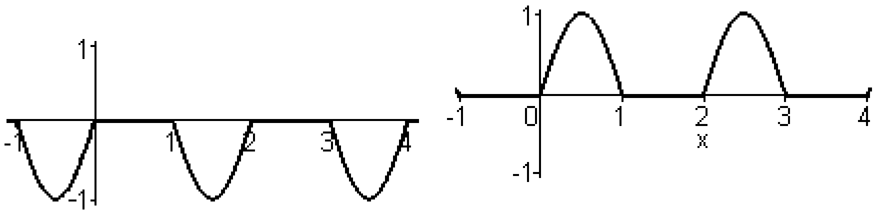


Рис. 11 Графики функций $Q_l(\sin x, 0)$ (слева) и $Q(\sin x, 0)$ (справа).

Очевидно, что сложение таких функций даст функцию $\sin x$.

Пример 6. Пусть разбиение $\{y_i\}$ состоит из двух точек $y_0 = -1$ и $y_1 = 1$. Тогда для произвольной функции $f(x)$ мы имеем

$$f(x) \equiv y_0 + Q_l(f(x), y_0) + \Pi(f(x), y_0, y_1 - y_0) + Q(f(x), y_1).$$

Пусть, например, $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Графики функций $-1 + Q_l(f(x), -1)$, $\Pi(f(x), -1, 2)$, $Q(f(x), 1)$ приведены на рисунках 12*a*, 12*b*, 12*c*. Очевидно, что сложение таких функций даст функцию $f(x)$ (Рис. 12*d*).

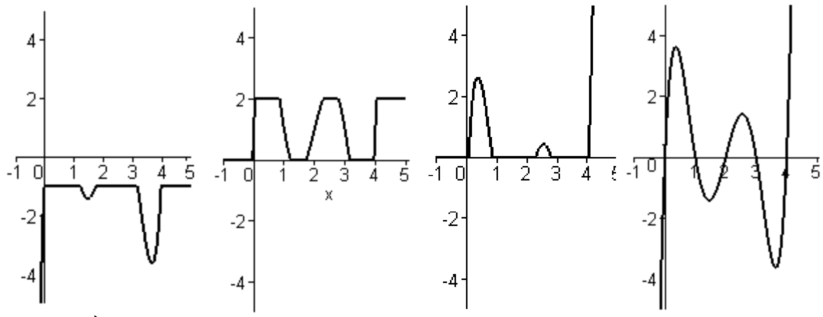


Рис. 12 Графики функций $a)\ -1+Q_l(f(x),-1)$; $b)\ \Pi(f(x),-1,2)$; $c)\ Q(f(x),1)$; $d)\ f(x)$.

Замечание. Формулы (4) и (5) дают уравнение непрерывной функции, даже если условие сопряжения соседних функций $f_i(x_i)=f_{i+1}(x_i)$ не выполняется. Однако, в этом случае начальная точка $(x_i, f_{i+1}(x_i))$ каждого следующего криволинейного отрезка пристыковывается к конечной точке предыдущего криволинейного отрезка $(x_i, f_i(x_i))$ так, что они образуют непрерывную кривую. Рассмотрим пример.

Пример 7. Рассмотрим следующую кусочно-непрерывную функцию

$$y(x)=\begin{cases}1+x & ,x\le 0\\ x(1-x), & 0<x\le 1\\ 1/2 & ,x>1\end{cases}$$

Она имеет разрывы первого рода в точках $x_0=0$ и $x_1=1$. Ее график показан на следующем рисунке слева. Применение формулы (5) дает $y(x)=1+Q_l(x,0)+\Pi(x,0,1)(1-\Pi(x,0,1))$. График этой функции показан на следующем рисунке справа.

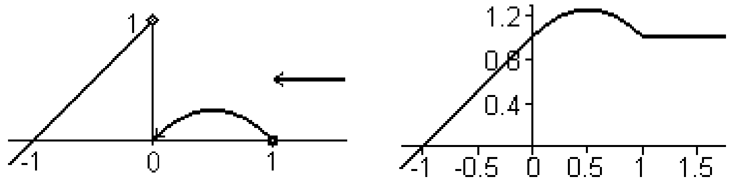


Рис. 13

Фактически каждый следующий криволинейный отрезок, начиная со второго, сдвигается вверх или вниз так, чтобы вместе с предыдущим криволинейным отрезком образовывать непрерывную кривую.

1.5 Способы получения уравнений непрерывных кусочных функций.

Используя приемы построения «аналитических» уравнений непрерывных кусочных функций, изложенные в предыдущих разделах, можно получить уравнение практически любой непрерывной кусочной функции. Однако если уравнение построено, то еще нельзя утверждать, что другого представления, использующего функцию абсолютного значения, не существует. Иногда можно получить другое формульное представление, которое по виду будет проще.

1.5.1 Сложная PSC функция

Рассмотрим снова примеры 1 – 3 п. 1.2. Легко заметить, что все звенья составных функций можно было представить в виде $e^{g_i(x)}$, а саму составную функцию в виде $y(x)=e^{g(x)}$, где *g(x)* является составной функцией.

<u>Пример 1</u>. Написать уравнение функции $y(x)=\begin{cases} e^{x} \ , x\le 0 \\ e^{-x}, x>0 \end{cases}$. Если ввести $g(x)=\begin{cases} x \ \ , x\le 0 \\ -x, x>0 \end{cases} = -|x|$, то легко заметить, что $y(x)=e^{g(x)}=e^{-|x|}$.

<u>Пример 2</u>. Написать уравнение функции $y(x)=\begin{cases} e^{x}, x\le 0 \\ 1 \ \ , x>0 \end{cases}$. Если ввести $g(x)=\begin{cases} x \ , x\le 0 \\ 0 \ , x>0 \end{cases} = Q_l(x,0)=\dfrac{1}{2}(x-|x|)$, то мы получаем $y(x)=e^{g(x)}=e^{\frac{x-|x|}{2}}$. □

<u>Пример 3</u>. Для кусочной функции $y(x)=\begin{cases} e^{1+x}, x\le -1 \\ 1 \quad ,-1<x\le 1 \\ e^{1-x}, x>1 \end{cases}$ можно заметить, что каждый сегмент является экспоненциальной функцией $e^{g(x)}$ с показателем степени $g(x)=\begin{cases} 1+x \ , \quad x\le -1 \\ 0 \quad\ ,-1<x\le 1 \\ 1-x \ , \quad\ x>1 \end{cases}$. Но *g(x)* является ломаной и, для нее, используя формулу (1.5) (или (3.15)) мы можем получить уравнение в виде $g(x)=1-\dfrac{1}{2}|x+1|-\dfrac{1}{2}|x-1|$. Т.о. получаем, что $y(x)=e^{1-\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|}$. (Сравните с примером 3 п.1.4). □

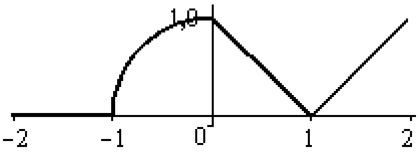
Этот подход можно использовать во всех случаях, когда куски составной функции можно представить в виде композиции функции *f(x)* и некоторой составной функции *g(x)*. Пусть

$$y(x)=\begin{cases} f(g_1(x)), x_0\le x\le x_1 \\ f(g_2(x)), x_1< x\le x_2 \\ \cdots \\ f(g_n(x)), x_{n-1}< x\le x_n \end{cases} \text{,т.е. } y(x)=f(g(x)) \text{, где } g(x)=\begin{cases} g_1(x), x_0\le x\le x_1 \\ g_2(x), x_1< x\le x_2 \\ \cdots \\ g_n(x), x_{n-1}< x\le x_n \end{cases}$$

Если для составной функции *g(x)* есть способ записать единое «аналитическое» выражение *G(x)*, то исходная составная функция тогда будет иметь представление $y(x)=f(G(x))$.

<u>Пример 4</u>. Написать уравнение функции

$$y(x)=\begin{cases}0 , & x\le -1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\le 0\\ 1-x , & 0<x\le 1\\ x-1 , & x>1\end{cases}$$



Легко понять, что функцию можно представить как корень квадратный из кусочной функции $g(x)=\begin{cases}0 , & x\le -1\\ 1-x^2 , & -1<x\le 0\\ (1-x)^2, & 0<x\le 1\\ (x-1)^2, & x>1\end{cases}=\begin{cases}0 , & x\le -1\\ 1-x^2 , & -1<x\le 0\\ (x-1)^2, & x>0\end{cases}$. Функция *g(x)* является кусочным полиномом. Поэтому, из формул (3.2) – (3.5) имеем

$$g(x)=\frac{0+(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{(-2x)\big|_{x=-1}-0}{1!}+\frac{-2-0}{2!}(x+1)\right)|x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2(x-1)\big|_{x=0}-(-2x)\big|_{x=0}}{1!}+\frac{2-(-2)}{2!}x\right)|x|=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(1-x)|x+1|-(1-x)|x|$$

Следовательно, $y(x)=\sqrt{\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(1-x)|x+1|-(1-x)|x|}$.

<u>Пример 5</u>. Написать уравнение функции

$$y(x)=\begin{cases}0 , & x\le -1\\ \sqrt{1-x^2} , & -1<x\le 0\\ \sqrt{1-x^2/4}, & 0<x\le 1\\ 0 , & x>1\end{cases}$$

Функцию можно представить как корень квадратный из кусочной функции $g(x)=\begin{cases}0 , & x\le -1\\ 1-x^2 , & -1<x\le 0\\ 1-x^2/4, & 0<x\le 1\\ 0 , & x>1\end{cases}$. Функция *g(x)* является кусочным полиномом.

Используя формулы (3.2) – (3.5), получаем

$$y(x)=\sqrt{\frac{1}{2}(1-x)|x+1|+\frac{3}{8}x|x|+\frac{1}{8}(2+x)|x-2|}.$$

В принципе функция *f(x)* сама может быть составной. Пусть мы имеем непрерывную составную функцию

$$y(x)=\begin{cases} f_1(g_1(x)), x_0 \le x \le x_1 \\ f_2(g_2(x)), x_1 < x \le x_2 \\ \dots \\ f_n(g_n(x)), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases}.$$

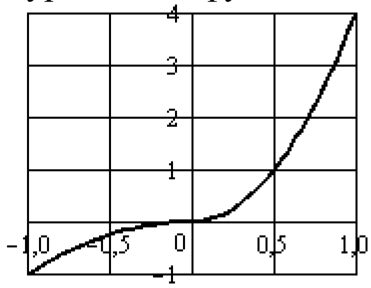
Если мы сможем выделить непрерывные составные функции

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x), x_0 \le x \le x_1 \\ g_2(x), x_1 < x \le x_2 \\ \dots \\ g_n(x), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \quad \text{и} \quad f(t)=\begin{cases} f_1(t) \ , g(x_0) \le t \le g(x_1) \\ f_2(t) \ , g(x_1) < t \le g(x_2) \\ \dots \\ f_n(t) \ , g(x_{n-1}) < t \le g(x_n) \end{cases}.$$

и для них сможем записать единые «аналитические» выражения *G(x)* и *F(t)*, то, очевидно, что единое выражение для *y(x)* будет иметь вид $y(x)=F(G(x))$.

Пример 6. Написать уравнение функции

$$y(x)=\begin{cases} -x^2, x \le 0 \\ 4x^2, x > 0 \end{cases}$$



Введем функции $f(x)=\begin{cases} -x^2, x \le 0 \\ x^2 \ \ , x > 0 \end{cases}$ и $g(x)=\begin{cases} x \ \ , x \le 0 \\ 2x, x > 0 \end{cases}$. Легко проверить, что

$f(x)=x|x|$ и $g(x)=\frac{1}{2}(3x+|x|)$. Очевидно, что $y(x)=f(g(x))$. Поэтому

$$y(x)=\frac{1}{4}(3x+|x|)\big|\,3x+|x|\,\big|.$$

Заметим, что, используя формулы (3.2) – (3.5) представления кусочных полиномов, мы можем получить другое выражение $y(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2+5x|x|\right)$. Оно не содержит «двухэтажного» модуля.

Рассмотрим эти примеры с общей точки зрения. Легко понять, что имеет место следующее равенство

$$f\left(\begin{cases} g_1(x), x_0 \le x \le x_1 \\ \dots \\ g_n(x), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases}\right)=\begin{cases} f(g_1(x)), x_0 \le x \le x_1 \\ \dots \\ f(g_n(x)), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Для составной функции *g(x)* (являющейся аргументом) мы имеем представление (4.5), т.е.

$$g(x)=g_1(x_1+Q_l(x,x_1))+\sum\nolimits_{i=2}^{n-1}\left(g_i(x_{i-1}+\Pi(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})-g_i(x_{i-1})\right)+$$
$$+\left(g_n(x_{n-1}+Q(x,x_{n-1}))-g_n(x_{n-1})\right)$$

Здесь считаем, что $x_0 = -\infty$ и $x_n = \infty$. Это определяет выбор функций $Q_l(x, x_1)$ и $Q(x, x_{n-1})$ в первом и последнем слагаемом.

Для составной функции *f(g(x))*, стоящей справа, также можно записать PSC выражение (4.5) в виде

$$fg(x) = f(g_1(x_1 + Q_l(x, x_1))) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(f(g_i(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - f(g_i(x_{i-1}))\right) + \\ + \left(f(g_n(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1}))) - f(g_n(x_{n-1}))\right)$$

В результате мы приходим к тождеству

$$f\Big(g_1(x_1 + Q_l(x, x_1)) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(g_i(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) - g_i(x_{i-1})\right) + \\ + \left(g_n(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1})) - g_n(x_{n-1})\right)\Big) \equiv \qquad (2)$$

$$= f(g_1(x_1 + Q_l(x, x_1))) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(f(g_i(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - f(g_i(x_{i-1}))\right) + \\ + \left(f(g_n(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1}))) - f(g_n(x_{n-1}))\right)$$

Отметим еще раз, что тождество (2) является PSC представлением тождества (1), которое справедливо, если область значений функции *g(x)* принадлежит области определения функции *f(x)* (*f* от PSC суммы равно PSC сумме *f* от каждого слагаемого).

Пусть $x_1=0$ является единственной точкой излома функции *g(x)*. Тогда

$$f\left(g_1(x_1 + Q_l(x, x_1)) + g_2(x_1 + Q(x, x_1)) - g_2(x_1)\right) \equiv \\ \equiv f(g_1(x_1 + Q_l(x, x_1))) + f(g_2(x_1 + Q(x, x_1))) - f(g_2(x_1))$$

Например, если $g(x) = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases} = -Q_l(x, 0) + Q(x, 0)$. Тогда для любой функции *f(0)=0* мы имеем тождество $f(|x|) \equiv f(-Q_l(x, 0)) + f(Q(x, 0))$. Конечно, это тождество легко проверяется рассмотрением его левой и правой частей при *x>0* и *x<0*.

Если все функции $g_i(x)=x$, то (2) принимает вид

$$f\left(x_1 + Q_l(x, x_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) + Q(x, x_{n-1})\right) \equiv \\ \equiv f(x_1 + Q_l(x, x_1)) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(f(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - f(x_{i-1})\right) + \\ + \left(f(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1})) - f(x_{n-1})\right)$$

Но слева стоит аргумент $x_1 + Q_l(x, x_1) + \sum_{i=2}^{n-1}\Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) + Q(x, x_{n-1}) \equiv x$. Поэтому мы получаем для любой функции *f(x)*

$$f(x) \equiv f(x_1 + Q_l(x, x_1)) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(f(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - f(x_{i-1})\right) + \\ + \left(f(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1})) - f(x_{n-1})\right) \qquad (3)$$

Пусть *f(x)* является кусочной функцией (непрерывной), точками ее излома являются точки $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ и на соответствующих участках $x_{i-1} < x \leq x_i$ она задана аналитическими выражениями $f_i(x)$. Тогда, легко видеть, что каждое слагаемое в (3) содержит изменение аргумента как раз на участке $x_{i-1} < x \leq x_i$

. Значит, функция *f* для такого слагаемого может быть заменена выражением $f_i(x)$, и мы получаем

$$f(x) \equiv f_1(x_1 + Q_l(x, x_1)) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(f_i(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})) - f_i(x_{i-1})\right) +$$
$$+\left(f_n(x_{n-1} + Q(x, x_{n-1})) - f_n(x_{n-1})\right),$$

Это в точности совпадает с формулой (4.5) с которой мы начали наши рассуждения.

1.5.2 Сумма и произведение составных функций.

Составную функцию иногда можно представить в виде произведения двух составных функций. А именно, если функция

$$y(x) = \begin{cases} f_1(x)g_1(x), x_0 \le x \le x_1 \\ \cdots \\ f_n(x)g_n(x), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases}$$

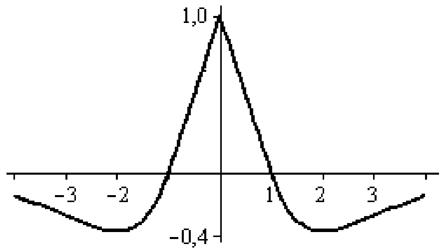
может быть представлена в виде произведения двух непрерывных функций

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x_0 \le x \le x_1 \\ \cdots \\ f_n(x), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x), x_0 \le x \le x_1 \\ \cdots \\ g_n(x), x_{n-1} < x \le x_n \end{cases} \qquad (4)$$

и для функций *f(x)* и *g(x)* можно построить «аналитические» представления *F(x)* и *G(x)*, то «аналитическим» представлением функции *y(x)* будет выражение $y(x) = F(x) \cdot G(x)$.

<u>Пример 7</u>. Написать уравнение функции

$$y(x) = \begin{cases} (1+x)e^{1+x}, & x \le -1 \\ (1+x) & ,-1 < x \le 0 \\ (1-x) & ,\ 0 < x \le 1 \\ (1-x)e^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$



Легко заметить, что функцию *y(x)* можно представить в виде произведения составных функций

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, x \le 0 \\ 1-x, x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} e^{1+x}, x \le -1 \\ 1 \quad ,-1 < x \le 1. \\ e^{1-x}, x > 1 \end{cases}$$

Первая из них совпадает с функцией $1-|x|$, а для второй в примере 3 мы получили представление $e^{1-\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|}$. Т.о. получаем $y(x) = (1-|x|)e^{1-\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|}$. Заметим, что узлы составных функций *f(x)* и *g(x)* в этом примере не совпадают. Точнее множество узлов $\{-1, 0, 1\}$ функции *y(x)* состоит из объединения множеств $\{0\} \bigcup \{-1, 1\}$ узлов функций *f(x)* и *g(x)*.

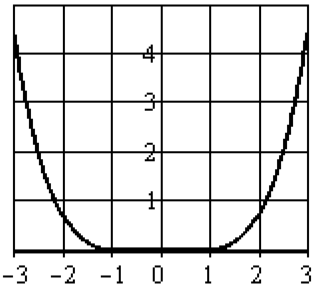
Кусочную функцию иногда можно представить в виде суммы двух составных функций. А именно, если функция

$$y(x)=\begin{cases} f_1(x)+g_1(x), x_0\le x\le x_1 \\ \cdots \\ f_n(x)+g_n(x), x_{n-1}<x\le x_n \end{cases}$$

может быть представлена в виде суммы двух непрерывных кусочных функций (4) и для функций *f(x)* и *g(x)* можно построить «аналитические» представления *F(x)* и *G(x)*, то «аналитическим» представлением функции *y(x)* будет выражение $y(x)=F(x)+G(x)$.

Пример 8. Написать уравнение функции

$$y(x)=\begin{cases} x+e^{-1-x}\ , & x\le -1 \\ 0 & ,-1<x\le 1 \\ -x+e^{x-1}\ , & x>1 \end{cases}$$



Представим функцию *y(x)* в виде суммы двух кусочных функций

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & x\le -1 \\ -1\ ,-1<x\le 1 \\ -x\ , & x>1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x)=\begin{cases} e^{-1-x}, & x\le -1 \\ 1 & ,-1<x\le 1. \\ e^{x-1}\ , & x>1 \end{cases}$$

Функция *f(x)* является ломаной и для нее можно применить формулу Бернштейна (3.15). Имеем $f(x)=-\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|$. Функцию *g(x)* можно представить в виде $g(x)=e^{h(x)}$, где кусочная функция *h(x)* имеет вид

$$h(x)=\begin{cases} -1-x, & x\le -1 \\ 0 & ,-1<x\le 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases} = -1+\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|.$$

Тогда для *y(x)* получаем

$$y(x)=-\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|+e^{-1+\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|}. \qquad \square$$

1.5.3 Другие способы представления функций

Можно поставить разные задачи по конструированию уравнений составных функций: изменить функцию на отрезке, срезать горб функции по прямой линии, сделать вмятину на графике функции и много других. Здесь мы рассматриваем только некоторые из таких задач.

1^0. Дана функция $f(x)\ (-\infty<x<\infty)$ и ее надо изменить на участке [*a*,*b*], заменив функцией $\varphi(x)$, которая в точках *a* и *b* принимает те же значения, т.е. $\varphi(a)=f(a)$ и $\varphi(b)=f(b)$. Для этого надо использовать общую формулу (4.4) теоремы 1 п.1.4.

Лемма 1. *Уравнение функции* $F(x)$, *которая на отрезке* $[a,b]\left(a<b\right)$ *совпадает с функцией* $\varphi(x)$, *а вне него – с функцией* $f(x)$ ($\varphi(a)=f(a)$, $\varphi(b)=f(b)$), *имеет вид*

$$F(x)=f(x)-f(a+\Pi(x,a,b-a))+\varphi(a+\Pi(x,a,b-a)) \qquad (5)$$

Доказательство. При $x<a$ имеем $\Pi(x,a,b-a)=0$. Поэтому

$$F(x)=f(x)-f(a)+\varphi(a)=f(x).$$

При $a\le x\le b$ имеем $\Pi(x,a,b-a)=x-a$. Поэтому

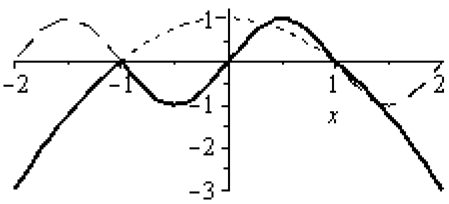
$$F(x)=f(x)-f(a+(x-a))+\varphi(a+(x-a))=\varphi(x).$$

При $x>b$ имеем $\Pi(x,a,b-a)=b-a$. Поэтому

$$F(x)=f(x)-f(a+(b-a))+\varphi(a+(b-a))=f(x).$$

Лемма доказана. ■

Пример 1. Изменить функцию $f(x)=1-x^2$ на участке [-1,1] функцией $\varphi(x)=\sin\pi x$.

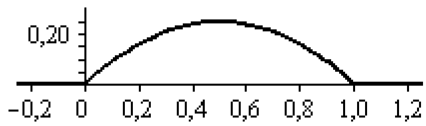


После подстановки в формулу (5) и некоторых преобразований получаем

$$F(x)=1-x^2+\frac{1}{2}\left((x-1)\,|x+1|-(x+1)\,|x-1|\right)+\sin\frac{\pi}{2}\left(|x+1|-|x-1|\right). \qquad \square$$

Пример 2. Написать уравнение функции

$$y(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ x(1-x), & 0<x<1\\ 0 & ,x\ge 1\end{cases}$$



Можно считать, что основную функцию $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[0,1]$ мы хотим заменить функцией $\varphi(x)=x(1-x)$. Из (5) сразу получаем

$$F(x)=\varphi(\Pi(x,0,1))=\Pi(x,0,1)\left(1-\Pi(x,0,1)\right)=\Pi(x,0,1)-\Pi^2(x,0,1)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+|x|-|x-1|\right)-\frac{1}{4}\left(1+|x|-|x-1|\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+|x|-|x-1|\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(1+x^2+(x-1)^2+2|x|-2|x-1|-2|x||x-1|\right)$$

В соответствии с (1.3.10) имеем $|x||x-1|=x(x-1)+x|x-1|-(x-1)|x|$. Поэтому

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(1+|x|-|x-1|\right)-\frac{1}{2}(1-x+x^2)-\frac{1}{2}(|x|-|x-1|)+$$

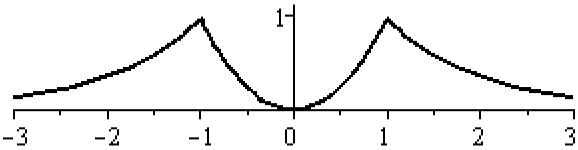
$$+\frac{1}{2}(x(x-1)+x|x-1|-(x-1)|x|)=\frac{1}{2}\left(x|x-1|-(x-1)|x|\right)$$

Конечно, тот же результат можно было бы получить, если применить формулы (3.2) – (3.5). □

Непрерывная функция $f(x)$, фигурирующая в лемме 1, сама может быть кусочной, составленной на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ из сегментов с уравнениями $f_i(x)$. Если ее $i-$е звено $f_i(x)$ заменить на $h_i(x)$ такое, что $h_i(x_i) - h_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) - f_i(x_{i-1})$, то составная функция изменит свои значения только на этом отрезке. Если $h_i(x_i) - h_i(x_{i-1}) \neq f_i(x_i) - f_i(x_{i-1})$, то результирующая функция останется непрерывной, однако изменит значения для всех $x > x_{i-1}$.

Пример 3. Написать уравнение кусочной функции

$$y(x) = \begin{cases} e^{1+x} & , x \le -1 \\ x^2 & , -1 < x < 1 \\ e^{1-x} & , x \ge 1 \end{cases}$$



В примере 3 п. 1.4 мы построили уравнение кусочной функции

$$y_1(x) = \begin{cases} e^{1+x} & , x \le -1 \\ 1 & , -1 < x < 1 = e^{Q_l(x,-1)} + (1-1) + (e^{-Q(x,1)} - 1) \\ e^{1-x} & , x \ge 1 \end{cases}$$

Функция $y(x)$ отличается от $y_1(x)$ на отрезке $[-1,1]$. Поэтому можем сразу записать

$$y(x) = e^{Q_l(x,-1)} + ((-1 + \Pi(x,-1,2))^2 - 1) + e^{-Q(x,1)} - 1 =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\left(x+1-|x+1|\right)} + e^{-\frac{1}{2}\left(x-1+|x-1|\right)} - 1 + \frac{1}{2}\left((x-1)|x+1| - (x+1)|x-1|\right)$$ □

2^0. Вместо формулы (4.5) (или (4.4)) можно построить формулу

$$y(x) = k_0 f_0(x_0 + Q_l(x, x_0)) + \sum_{i=1}^{n} k_i \left(f_i\left(x_{i-1} + \Pi(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})\right) - f_i(x_{i-1}) \right) +$$

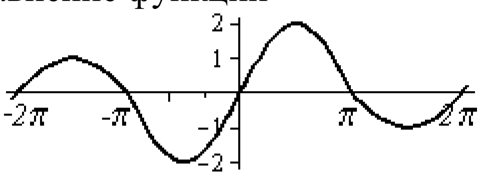
$$+ k_{n+1}\left(f_{n+1}(x_n + Q(x, x_n)) - f_{n+1}(x_n) \right) \qquad (6)$$

где k_i константы. Если все $k_i = 1$, то имеем общую формулу представления непрерывной кусочной функции. Если какой-то $k_i = -1$, и функция $f_i(x)$ в концах отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ принимает одинаковые значения, то произойдет отражение сверху вниз относительно горизонтальной прямой $y = f_i(x_{i-1})$ графика соответствующего звена функции.

Если для какого-то сегмента коэффициент $k_i \neq \pm 1$, то будем иметь растяжение по вертикали в k_i раз. При этом непрерывность получаемой функции будет сохраняться. Если $k_i = 0$, то соответствующий кусок составной функции срезается по горизонтали.

Пример 4. Написать уравнение функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x & , |x| > \pi \\ 2\sin x, & |x| \le \pi \end{cases}$$



Уравнение функции $\sin x$ можно записать в виде (уравнения всех звеньев имеет одинаковый вид $\sin x$)

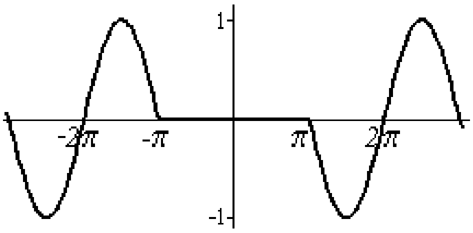
$$\sin x = \sin(-\pi + Q_l(x,-\pi)) + \sin(-\pi + \Pi(x,-\pi,2\pi)) + \sin(\pi + Q(x,\pi))$$

Добавляя в среднем слагаемом множитель 2, получаем

$$y(x) = \sin(-\pi + Q_l(x,-\pi)) + 2\sin(-\pi + \Pi(x,-\pi,2\pi)) + \sin(\pi + Q(x,\pi)) =$$
$$= -\sin Q_l(x,-\pi) - 2\sin \Pi(x,-\pi,2\pi) - \sin Q(x,\pi)\,. \qquad \square$$

Пример 5. Написать уравнение функции

$$y(x) = \begin{cases} \sin x, |x| > \pi \\ 0 \quad ,|x| \le \pi \end{cases}$$

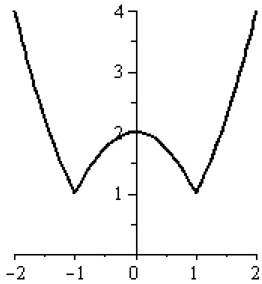


Представляя функцию $\sin x$ так же как и в предыдущем примере и, выбирая для среднего слагаемого множитель 0, получаем

$$y(x) = -\sin Q_l(x,-\pi) - \sin Q(x,\pi)\,. \qquad \square$$

Пример 6. Написать уравнение функции

$$y(x) = \begin{cases} x^2 \qquad ,|x| > 1 \\ 1 - x^2 \ ,|x| \le 1 \end{cases}$$



Сегмент $1 - x^2$ функции $y(x)$ получается отражением сегмента x^2 относительно прямой $y = 1$. Представляя функцию x^2 в PSC виде с узлами в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ и меняя знак соответствующего слагаемого, получаем

$$y(x) = (-1 + Q_l(x,-1))^2 - (-1 + \Pi(x,-1,2))^2 + (1 + Q(x,1))^2 =$$
$$= x^2 + (x+1)|x-1| - (x-1)|x+1| \qquad \square$$

1.6 Задачи и упражнения к главе 1.

<u>*Упражнение 1*</u>. Проверить тождества по x (другие параметры являются константами: $w>0$, $\alpha>0$, $n=1,2,\ldots$)

1. $(x-a)^n \equiv Q_l^{\,n}(x,a)+Q^n(x,a)$;
2. $|x-a|^n \equiv Q(x,a)+(-1)^n Q_l^n(x,a)$
3. $\Pi(x,a,w)\equiv Q(x,a)-Q(x,a+w)$;
4. $\Pi(x,a,b)+\Pi(x,a+b,c)\equiv \Pi(x,a,b+c)$
5. $Q(w\cdot x,w\cdot a)=w\cdot Q(x,a)$;
6. $P\left(x/\alpha,a,w\right)=P\left(x,\alpha\cdot a,w\right)$;
7. $P(\alpha\cdot x,\alpha\cdot a,\alpha\cdot w)=P(x,a,w)$;
8. $Q_l(x,a)+Q(x,a+w)=x-a-\Pi(x,a,w)$;
9. $Q_l(x,a)-Q_l(x,a+w)=w-\Pi(x,a,w)$
10. $P(t-b,a,w)=P(t,a+b,w)$;
11. $\Pi(t-b,a,w)=\Pi(t,a+b,w)$;
12. $P(x,a,b-a)=P(x,b,a-b)$;
13. $Q(x,y)+Q(y,x)=|x-y|$;
14. $Q(x,a)+Q_l(a,x)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q(x,a)=\frac{1}{2}\big((x-a)+|\,x-a\,|\big)=-\frac{1}{2}\big((a-x)-|\,a-x\,|\big)=-Q_l(a,x). \qquad \square$$

15. $Q(x+\alpha,a)=Q(x,a-\alpha)$
16. $Q(-x,a)=-Q_l(x,-a)$
17. $\Pi(t,a,w_1)-\Pi(t,a+w_2,w_1)=\Pi(t,a,w_2)-\Pi(t,a+w_1,w_2)$
18. $Q_l^{\,n}(x,a)+\Pi^n(x,a,w)=\left(w+Q_l(x,a+w)\right)^n$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверка равенства при *n=1* выполняется из определений функций $Q_l(x,a), \Pi(x,a,w)$. Имеем

$$Q_l(x,a)+\Pi(x,a,w)=\frac{1}{2}\big(x-a-|x-a|\big)+\frac{1}{2}(w+|\,x-a\,|-|\,x-a-w\,|)=$$

$$=w+\frac{1}{2}\big(x-(a+w)-|x-(a+w)|\big)=w+Q_l(x,a+w)\ ,\ (w>0)$$

Легко видеть, что $Q_l(x,a)\times\Pi(x,a,w)=0$, поскольку функция $Q_l(x,a)$ отлична от 0 при $x<a$, а функция $\Pi(x,a,w)$ отлична от нуля при $x>a$. Поэтому для $n>1$ получаем

$$\left(w+Q_l(x,a+w)\right)^n=\left(Q_l(x,a)+\Pi(x,a,w)\right)^n=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^jQ_l^{n-j}(x,a)\Pi^j(x,a,w)=Q_l^{\,n}(x,a)+\Pi^n(x,a,w)$$

Здесь все слагаемые кроме первого и последнего в сумме $\sum_{j=0}^{n} C_n^j Q_l^{n-j}(x,a)\Pi^j(x,a,w)$ равны 0. □

19. $\Pi^n(x,a,w) + Q^n(x,a+w) = Q^n(x,a+w)$

20. Непосредственным возведением в степень проверить, что

$$Q^n(x,a) = \frac{1}{2}\left((x-a)^n + (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,|\right).$$

Доказательство. Имеем

$$Q^n(x,a) = \left(\frac{1}{2}\left(x-a+|x-a|\right)\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n} C_n^j (x-a)^{n-j}\,|\,x-a\,|^j .$$

Разделим эту сумму по четным и нечетным степеням индекса суммирования j. Имеем

$$Q^n(x,a) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}(x-a)^{n-2k}\,|\,x-a\,|^{2k} + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1}(x-a)^{n-2k-1}\,|\,x-a\,|^{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left((x-a)^n \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} + (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,| \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1}\right)$$

Здесь квадратные скобки используются для обозначения целой части числа. Для сумм, стоящих в последнем выражении, имеются следующие формулы (см. [9], раздел 4.2.1)

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = 2^{n-1} \text{ и } \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Поэтому последнее выражение приводится к виду

$$Q^n(x,a) = \frac{1}{2}\left((x-a)^n + (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,|\right)$$

Отметим, что для n – нечетного $|\,x-a\,|^n = |\,x-a\,|^{n-1}\,|\,x-a\,| = (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,|$ и равенство может быть записано в виде $Q^n(x,a) = \frac{1}{2}\left((x-a)^n + |\,x-a\,|^n\right)$. □

Замечание. Конечно можно сразу заметить, что $Q^n(x,a) = (x-a)^{n-1}Q(x,a)$, откуда следует требуемое равенство.

21. Непосредственным возведением в степень проверить, что

$$Q_l^n(x,a) = \frac{1}{2}\left((x-a)^n - (x-a)^{n-1}\,|\,x-a\,|\right).$$

22. $\Pi^n(x,a,w) + \sum_{j=1}^{n} C_n^j w^{n-j} Q^j(x,a+w) = Q^n(x,a)$.

Доказательство. При $n=1$ это равенство $\Pi(x,a,w) + Q(x,a+w) = Q(x,a)$, проверяется из определений функций $Q(x,a)$ и $\Pi(x,a,w)$. Для $n>1$ имеем

$$Q^n(x,a) = \left(\Pi(x,a,w) + Q(x,a+w)\right)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \, \Pi^{n-j}(x,a,w) Q^j(x,a+w) =$$

$$= \Pi^n(x,a,w) + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \, \Pi^{n-j}(x,a,w) Q^j(x,a+w) + Q^n(x,a+w)$$

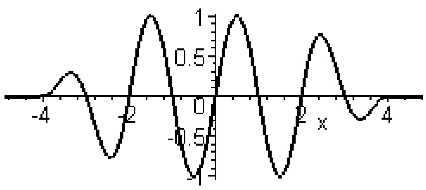
Любое слагаемое внутренней суммы равно 0 при $x<a+w$, а при $x \geq a+w$ функция $\Pi(x,a,w) = w$. Поэтому произведение $\Pi^{n-j}(x,a,w)Q^j(x,a+w)$, стоящее в этой сумме, может быть заменено на $w^{n-j}Q^j(x,a+w)$ и мы получаем требуемую формулу. □

Упражнение 2. Показать, что

1. $\max(x,y) = x + Q(y,x) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right)$;
2. $\min(x,y) = x - Q(x,y) == \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right)$;
3. $Q(Q(x,a),b) = Q(x,a+b)$ (проверить!!!!);.
4. $Q(x_1 + Q_l(x,x_1),x_0) = \Pi(x,x_0,x_1-x_0)$ $(x_1 \geq x_0)$.
5. $Q_l(x_1 + Q_l(x,x_1),x_0) = Q_l(x,x_0)$ $(x_1 \geq x_0)$;

Упражнение 3. Построить графики функций

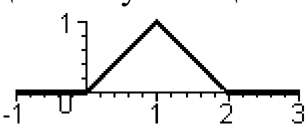
1. $\Pi(x,a,w)$ при $w<0$;
2. $\Pi(\sin \pi x, -0.5, 1) - 0.5$;
3. $\left(P(x,-4,2) - P(x,2,2)\right)\sin \pi x$



4. $\sin\left(\pi \Pi(x,0,6)\right)$;
5. $\sqrt{\Pi(x,0,1)}$;
6. $ch(-1+\Pi(x,-1,2))-1$.

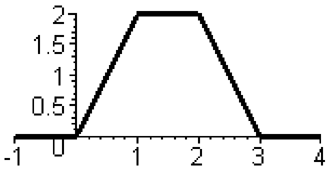
Упражнение 4. Написать уравнения следующих кусочно-линейных функций (координаты узлов целые числа, см. графики)

1

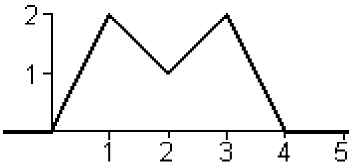


$y = \frac{1}{2}|x| - |x-1| + \frac{1}{2}|x-2|$

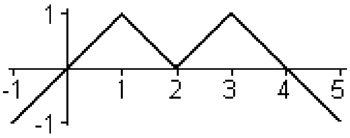
2



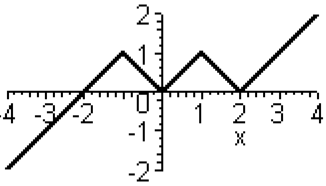
$y = |x| - |x-1| - |x-2| + |x-3|$

3 

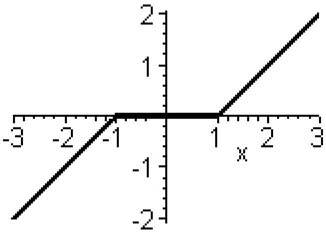
$|x|-\frac{3}{2}|x-1|+|x-2|-\frac{3}{2}|x-3|+|x-4|$

4 

$2-|x-1|+|x-2|-|x-3|$

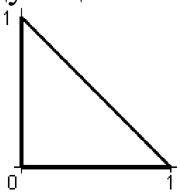
5 

$y=-|x+1|+|x|-|x-1|+|x-2|+x$

6 

$y=x-\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|$

<u>Упражнение 5</u>. Написать параметрические уравнения $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ следующих ломаных

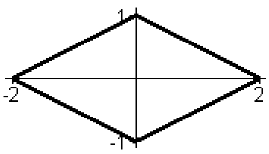
1 

$x=P(t,0,1)-P(t,1,1)=$

$=\frac{1}{2}(|t|-2|t-1|+|t-2|)$

$y=P(t,1,1)-P(t,2,1)=$

$=\frac{1}{2}(|t-1|-2|t-2|+|t-3|)$

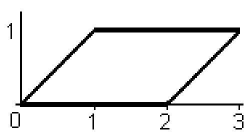
2 

$x=2-4P(t,0,2)+4P(t,2,2)=$

$=2-|t|+2|t-2|-|t-4|$

$y=P(t,0,1)-2P(t,1,2)+P(t,3,1)=$

$=\frac{1}{2}(|t|-2|t-1|+2|t-3|-|t-4|)$

3 

$x=3P(t,0,3)-3P(t,3,3)=$

$=\frac{1}{2}(|t|-2|t-3|+|t-6|)$

$y=P(t,2,1)-P(t,5,1)=$

$=\frac{1}{2}(|t-2|-|t-3|-|t-5|+|t-6|)$

Указание. Построить явные уравнения координатных функций $x(t),y(t)$ как в примере 3 п.1.1.

<u>Упражнение 6</u>. Построить представление (2.3) – (2.5) следующих кусочных функций

1 $$f(x)=\begin{cases} x & ,-\dfrac{1}{2}\le x\le 0 \\ \ln(1+x) & ,0<x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

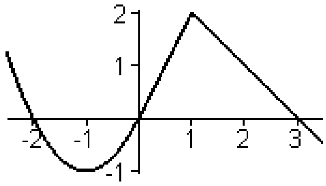
2 $$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, x\le 0 \\ e^x \quad ,x>0\end{cases}$$

3 $$f(x)=\begin{cases} -2^x, x\le 0 \\ 3^x \quad ,x>0\end{cases}$$

4 $$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, x\le 0 \\ 3^x \quad ,x>0\end{cases}$$

Упражнение 7. Написать уравнения следующих кусочных полиномов

1 $$S(x)=\begin{cases} x(x+2), x\le 0 \\ 2x \quad ,0<x<1 \\ 3-x \quad ,x\ge 1\end{cases}$$



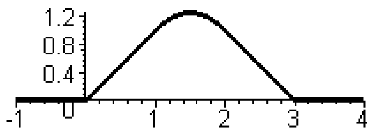
$S(x)=\frac{1}{2}(x^2+x+3)-\frac{1}{2}x\,|\,x\,|-\frac{3}{2}|\,x-1|$

Здесь $m_0=1, m_1=0$, $N_0=N_1=0$, $P(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x+3)$, $P_0^0(x)=-\dfrac{1}{2}$, $P_1^0(x)=-\dfrac{3}{2}$. Ответ: $S(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x+3)-\dfrac{1}{2}x\,|\,x\,|-\dfrac{3}{2}|\,x-1|$.

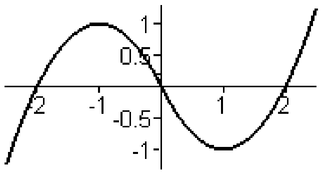
2 $$y=\begin{cases} -x^3 \ ,x<0 \\ x^3 \quad ,x\ge 0\end{cases}$$ Ответ: $y=x^2\,|\,x\,|\equiv|\,x\,|^3$.

3 $$y=\begin{cases} 0 \quad ,x<0 \\ x^2 \ ,x\ge 0\end{cases}$$ Ответ: $y=\dfrac{1}{2}x\left(x+|x|\right)$

4 $$y=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ x & ,0\le x<1 \\ x(3-x)-1 & ,1\le x<2 \\ 3-x & ,2\le x<3 \\ 0 & ,x>3\end{cases}$$

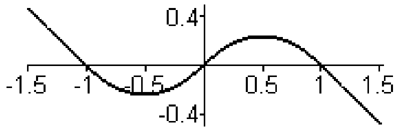


5 $$y(x)=\begin{cases} 1-(x+1)^2, x\le 0 \\ (x-1)^2-1, x>0\end{cases}$$



Здесь $f_0(x)=1-(x+1)^2$, $f_1(x)=(x-1)^2-1$ и $x_0=0$. Из (4.5) имеем $y(x)=f_0(Q_l(x,0))+f_1(Q(x,0))=\ 1-(Q_l(x,0)+1)^2+(Q(x,0)-1)^2-1$. После преобразований получаем $y(x)=x(|\,x\,|-2)$.

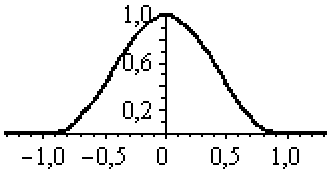
6
$$y(x)=\begin{cases}-1-x & ,x\le -1\\ x(1+x), & -1<x\le 0\\ x(1-x), & 0<x\le 1\\ 1-x & ,x>1\end{cases}$$



7
$$y(x)=\begin{cases}2x & ,x\le 0\\ x(x-1)(x-2), & 0<x<2\\ 2(x-2) & ,x\ge 2\end{cases}$$

$$y=-2+2x+\frac{3}{2}|x-2|+\frac{1}{2}|x|^3-\frac{3}{8}x^2|x-2|-\frac{3}{2}x|x|-\frac{1}{8}|x-2|^3$$

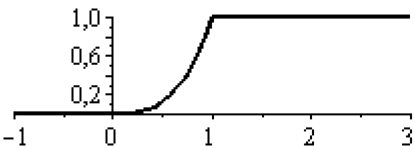
8
$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^3 & |x|<1\\ 0 & |x|\ge 1\end{cases}$$



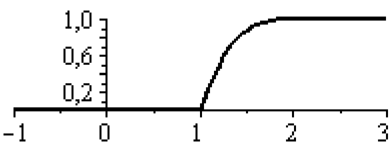
9
$$IP(x,a,w)=\int_{-\infty}^{x}P(\xi,a,w)d\xi=\begin{cases}0 & ,x\le a\\ \dfrac{(x-a)^2}{2w}, & a<x\le a+w\\ x-a-\dfrac{w}{2}, & x>a+w\end{cases}$$

<u>*Упражнение 8*</u>. Преобразовать следующие функции к виду, содержащему только ”одноэтажные” модули.

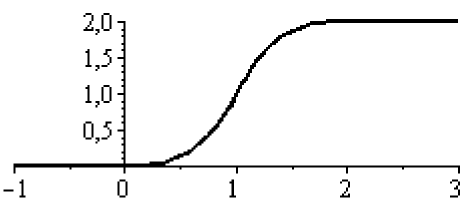
1. $\Pi^2(x,a,w)$;
2. $\left(|x-a|+|x-b|\right)^2$;
3. $\left(|x-a|+|x-b|\right)|x-c|$;
4. $P(x^3,0,1)$



5. $P((x-2)^3,-1,1)$



6. $y(x)=P(x^3,0,1)+$
$+P((x-2)^3,-1,1)$



Проверить, что в точке *x=1* первая производная функции $y(x)$ непрерывна.

Упражнение 9. Даны координаты узлов (x_i, y_i) и значения производных g_i в этих узлах. Написать уравнения интерполяционных кусочно-кубических полиномов Эрмита.

1. (x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,0); $g_i = (0,0,0,0)$.
2. (x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,0); $g_i = (1,1,-1,-1)$.
3. (x_i, y_i) = (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5); $g_i = (-1,-1,3,3)$.
   Ответ: $y(x) = x + x|x| - (x-1)|x-1|$
4. (x_i, y_i) = (-2,-4), (-1,-2), (1,0), (2,0); $g_i = (1,3,-1,1)$.
   Ответ: $y(x) = 2 + x + x^2 - (x+1)|x+1| + (x-1)|x-1|$
5. (x_i, y_i) = (-2,6), (0,4), (2,2), (4,0); $g_i = (1,-3,1,-3)$.
   Ответ: $y(x) = x - x^2 + x|x| - (x-2)|x-2|$

Упражнение 10. Даны координаты узлов (x_i, y_i) и значения первых производных g_0 и g_n на концах (или свободные концы $s_0 = 0$ и $s_n = 0$). Написать уравнения интерполяционных кубических сплайн функций.

1. (x_i, y_i) = (0,0), (1,3), (2,1), (3,3) , $g_0 = 1$, $g_3 = 2$.

Ответ: $z = \frac{45}{2} - \frac{53}{2}x - \frac{83}{6}x^2 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{25}{6}|x+1|^3 - \frac{10}{3}|x-2|^3$

2. (x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,-1), (3,0), $g_0 = 1$, $g_3 = 1$.

Ответ: $z = \frac{147}{10} - \frac{179}{10}x + \frac{81}{10}x^2 - \frac{9}{5}x^3 + \frac{21}{10}|x-1|^3 - \frac{21}{10}|x-2|^3$

3. (x_i, y_i) = (0,0), (1,1), (2,-1), (3,0) , $s_0 = 0$, $s_3 = 0$.

Ответ: $z = \frac{21}{2} - \frac{23}{2}x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{2}|x-1|^3 - \frac{3}{2}|x-2|^3$

4 (x_i, y_i) = (0,1), (1,2), (2,1), (3,2), $g_0 = 0$, $g_3 = 0$.

Ответ: $z = 15 - 18x + 9x^2 - 2x^3 + 2|x-1|^3 - 2|x-2|^3$.

5 (x_i, y_i) = (0,1), (1,2), (2,1), (3,2), $s_0 = 0$, $s_3 = 0$.

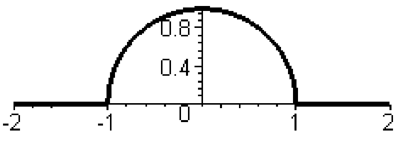
Ответ: $z = 8 - \frac{22}{3}x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + |x-1|^3 - |x-2|^3$.

6 (x_i, y_i) = (-2,-8), (-1,-2), (2,4), (3,16), $g_0 = 4$, $g_3 = 15$.

Ответ: $z = 6 - 18x - x^2 - 2x^3 + 2|x+1|^3 - |x-2|^3$.

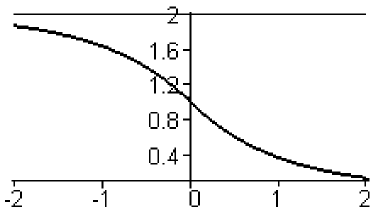
Упражнение 11. Написать аналитические выражения кусочных функций

1
$$y = \begin{cases} 0 & ,x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & ,-1 \le x < 1 \\ 0 & ,x > 1 \end{cases}$$



Ответ: $y = \sqrt{1 - x^2 + |1 - x^2|} / \sqrt{2}$

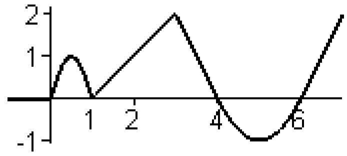
2 $$y(x)=\begin{cases}2-e^{x} & ,x\le 0\\ e^{-x} & ,x>0\end{cases}$$



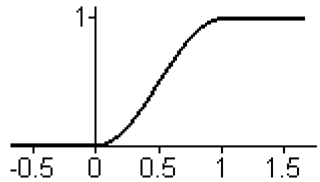
Ответ:

$$y(x)=1-2e^{-|x|/2}sh(x/2)$$

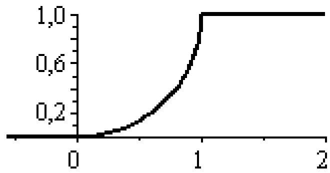
3 $$y(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ \sin\pi x & ,0<x\le 1\\ x-1 & ,1<x\le 3\\ 8-2x & ,3<x\le 4\\ (x-4)(x-6) & ,4<x\le 6\\ 2x & ,x>6\end{cases}$$



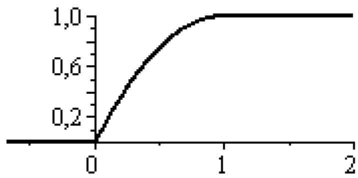
4 $$y(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ \left(1-\cos\pi x\right)/2, & 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$



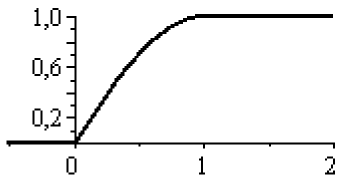
5 $$y(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ 1-\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$



6 $$y(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ 1-(x-1)^2, & 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$



7 $$y(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi x}{2}, & 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

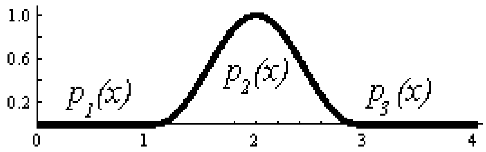


8 $$y(x)=\begin{cases}-\left(x+1/2\right)/\sqrt{3}\,, & x\le -1/2\\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}/2 & ,-1/2<x\le 1/2\\ \left(x-1/2\right)/\sqrt{3} & , \quad x>1/2\end{cases}$$

<u>*Упражнение 12*</u>. В следующих примерах кусочные функции сохраняют постоянное значение вне некоторого интервала. Если написать уравнение функции *F(x)*, которая совпадает с исходной *f(x)* на требуемом отрезке [*a*,*b*], то уравнение составной функции *f(x)* можно получить отсечением, т.е. используя формулу $f(x)=F(a+\Pi(x,a,b-a))$. Используя этот способ, составить уравнения следующих функций

1^0. Написать уравнение следующего кусочного полинома

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 1\\ (x-1)^3(3-x)^3 & ,1<x<3\\ 0 & ,x\ge 3\end{cases}$$



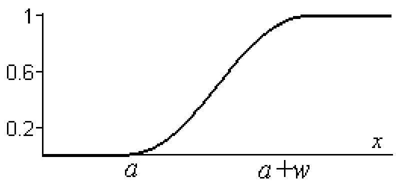
Указание. Здесь $F(x)=(x-1)^3(3-x)^3$ и $f(x)=F(1+\Pi(x,1,2))=$ $=\Pi^3(x,1,2)\cdot\left(2-\Pi(x,1,2)\right)^3$. Затем преобразовать к "одноэтажному" модульному выражению. Сравните с примером 2 п. 1.3.1.

2^0. Дана функция $f(x)=x^3(1-x)^3$. Написать уравнение и построить график функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку [0,1]. Ответ: $f(\Pi(x,0,1))$. Преобразовать к "одноэтажному" модульному выражению.

3^0. Дана функция $f(x)=x^4(1-x)$. Написать уравнение и построить график функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку [0,1]. Преобразовать ответ к "одноэтажному" модульному выражению.

4^0. Дана функция $f(x)=10\left(\dfrac{x-a}{w}\right)^3-15\left(\dfrac{x-a}{w}\right)^4+6\left(\dfrac{x-a}{w}\right)^5$. Написать уравнение функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку $[a,a+w]$ $(w>0)$.

Ответ: $f(a+\Pi(x,a,w))$

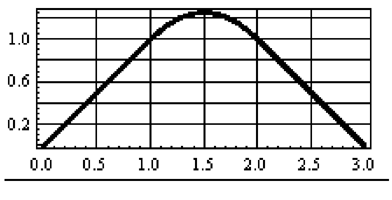


Проверить, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема.

5^0. Дана функция $f(x)=1-\cos\left(\Pi(x,0,2\pi)\right)$. Написать уравнение и построить график функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку $[0,2\pi]$.

6^0. Дана функция

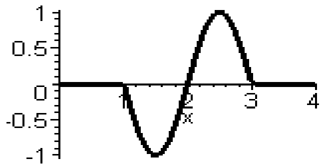
$$f(x)=\begin{cases}x & ,x\le 1\\ 3x-x^2-1 & ,1<x<2\\ 3-x & ,x\ge 2\end{cases}$$



Написать уравнение функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку [0,3]. Получить (см. пример.1 п.1.3.1) $S(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}(x-1)\,|\,x-1|+\dfrac{1}{2}(x-2)\,|\,x-2\,|$. Затем построить $S(\Pi(x,0,3))$.

7^0. Написать уравнение и построить график функции, полученной из *f(x)* усечением по отрезку [1, 3].

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \sin\pi x, & 1<x<3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}$$

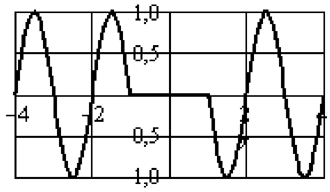


Ответ: $y(x)=\sin\big(\pi(1+\Pi(x,1,2))\big)=\sin(\frac{\pi}{2}(|x-1|-|x-3|))$

*<u>Упражнение 1</u>*3. Используя приемы, изложенные в п.1.5, написать уравнения следующих кусочных функций

1

$$y(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\le -1\\ 0, & -1<x\le 1\\ \sin\pi x, & x>1\end{cases}$$



Указание. Представить $y(x)=f(g(x))$, где

$$f(x)=\sin\pi x \text{ и } g(x)=\begin{cases}x, & x\le -1\\ -1, & -1<x\le 1\\ x-2, & x>1\end{cases}=-1+x-\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|.$$

Ответ: $y(x)=-\sin\pi\left(x-\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1\right).$

2

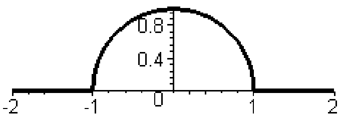
$$y(x)=\begin{cases}-x^2 2^{2x}, & x\le 0\\ 4x^2 2^{2x}, & x>0\end{cases}$$

3

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\le -1/2\\ \cos\pi x, & -1/2<x\le 0\\ 1, & 0<x\le 2\\ \cos\pi x, & 2<x\le 5/2\\ 0, & x>5/2\end{cases}$$

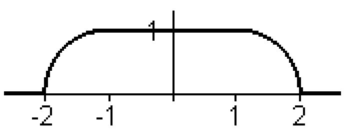
4

$$y=\begin{cases}0, & x<-1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$



5

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \sqrt{1-(x+1)^2}, & -2<x\le -1\\ 1, & -1<x\le 1\\ \sqrt{1-(x-1)^2}, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$



6 $$y(x)=\begin{cases}0 & ,x\le -2\\ \sqrt{1-(x+1)^2} & ,-2<x\le 0\\ \sqrt{1-(x-1)^2} & ,0<x\le 2\\ 0 & ,x>2\end{cases}$$

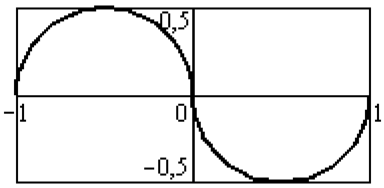
7 $$y=\begin{cases}(x+1)^2, & x<-1\\ 0 & ,-1\le x<1\\ (x-1)^2, & x>1\end{cases}$$

8 $$y=\begin{cases}-(x+1)^2, & x<-1\\ 0 & ,-1\le x<1\\ (x-1)^2\ , & x>1\end{cases}$$

9 $$y(x)=\begin{cases}-x(x+1) & , \quad x\le 0\\ x(1-x) & ,0<x\le 1\\ (x-1)(2-x) & ,1<x\le 2\\ 0 & ,2<x\le 3\\ -x(x-3) & , \quad x>3\end{cases}$$

Указание. Представить *y(x)* как произведение двух кусочных функций.

10. $$y(x)=\begin{cases}\sqrt{-x(1+x)}, & -1\le x\le 0\\ -\sqrt{x(1-x)}\ , & 0<x\le 1\end{cases}$$



и ноль вне отрезка [-1, 1].

Упражнение 14. Объяснить в чем различие функций ($f(x)$ произвольная функция):

1. $f(x)$ и $f(Q(x,0))$;
2. $f(x)$ и $Q(f(x),0)$;
3. $f(x)$ и $f(\Pi(x,0,L))$;
4. $f(x)$ и $\Pi(f(x),0,L)$;
5. $f(x)$ и $a+\Pi(f(x),a,b-a)$ $(b>a)$;

Упражнение 15. Дана функция $z(x,n)=\sum_{i=1}^{n}\left(P(x,2(i-1),1)-P(x,2i-1,1)\right)$. Построить графики функций $f(z(x,n))$ при *n=1,3,5*, если функция *f(x)* задана в виде

1. $f(x)=x(1-x)$;
2. $f(x)=x^3(1-x)$;
3. $f(x)=x(1-x)^3$.
4. $f(x)=\sin\pi x$
5. $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$, $0\le x\le 2$.

Какая особенность характерна для этих функций $f(z(x,n))$?