Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 517+681
№ 733 , 2006, с. 106-116

Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики

П. Г. Доля
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The formulas of periodic extension of function from segment to full real axis are proposed. They are used to construction of an explicit solution of the first boundary value problem for the one-dimensional wave equation for the finite string. Formulas of primitives of piecewise continuous functions are given.

1. Введение

Периодические функции играют в математике значительную роль. Однако использование их ограничено нашими конструктивными возможностями, связанными со сложностью построения формул произвольных периодических функций. Появление систем компьютерной математики, содержащих множество “неклассических” элементарных функций и умеющих выполнять сложные математические преобразования, облегчает решение этой задачи. В настоящей работе предложено несколько формул, расширяющих наши возможности по конструированию таких функций.

Полученные формулы находят свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования. Здесь мы затрагиваем только одну из возможных областей их применения – решение одномерного волнового уравнения методом продолжения [1]. Основная его идея применительно к первой краевой задаче для конечного отрезка состоит в построении нечетного периодического продолжения начальных функций на всю вещественную ось, и затем подстановка их в формулу Даламбера. Обычно такое продолжение выполняется не с помощью формул, а алгоритмически – построением разных формул в различных областях изменения аргументов. В связи с этим применение метода ограничено из-за сложности анализа получаемого решения. Построение явных формул периодического продолжения начальных функций значительно расширяет возможности и доступность метода.

2. Периодическое продолжение функции с отрезка

Для моделирования периодических функций мы будем использовать несколько функций. Одна из них элементарная функция *Mod(x,y)* – взятие остатка от деления числа x на число y. Такая встроенная функция имеется в пакете Mathematica. В системе символьной математики Maple аналогичной функции нет, но она может быть реализована с помощью формулы $Mod(x,y) = x - y \cdot \left[\frac{x}{y}\right]$ $(y \neq 0)$, где квадратные скобки $[z]$ обозначают функцию взятия ближайшего целого не превосходящего z. Функция $[z]$ имеется в Maple (*floor(z)*) и она может быть использована для создания функции *Mod*.

Функция $Mod(x,L)$ является периодической по переменной x функцией с периодом L $(L>0)$, на полуинтервале $0 \le x < L$ она совпадает с линейной функцией $y=x$, и в точках $x = k \cdot L$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ имеет разрывы первого рода.

Мы также часто будем использовать непрерывную пилообразную функцию. Дадим ей специальное имя $Stc(x,w)$ и определим следующим образом:

$$Stc(x,w) = \left| Mod\left(x - \frac{w}{2}, w \right) - \frac{w}{2} \right| . \qquad (2.1)$$

Это непрерывная четная периодическая по переменной x функция с периодом w, которая на отрезке $0 \le x \le \frac{w}{2}$ совпадает с линейной функцией $y=x$.

Рассмотрим задачу построения периодического продолжения функции $\varphi(x)$, заданной на полуинтервале $[a,b)$, на всю вещественную ось ($a<b$ – конечные числа). Функцию $\varphi(x)$ на этом полуинтервале будем считать кусочно-гладкой непрерывной функцией.

Периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ с полуинтервала $[a,b)$ может быть получено с помощью следующей формулы:

$$f(x) = \varphi(a + Mod(x-a, b-a)) . \qquad (2.2)$$

Доказательство. Для $x \in [a,b)$, $0 \le x - a < b - a$ и $Mod(x-a, b-a) = x - a$. Тогда $f(x) = \varphi(a + Mod(x-a,b-a)) = \varphi(a + (x-a)) = \varphi(x)$ и $f(x)$ совпадает с $\varphi(x)$ на полуинтервале $[a,b)$. Т.к. $Mod(x+L,L) = Mod(x,L)$, то имеем $f(x+(b-a)) = \varphi(a + Mod(x-a+(b-a), b-a)) = \varphi(a + Mod(x-a,b-a)) = f(x)$, и функция $f(x)$ является периодической с периодом b-a.

Если непрерывная функция $\varphi(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает одинаковые значения $\varphi(a) = \varphi(b)$, то результирующее периодическое продолжение $f(x)$, построенное по формуле (2.2), будет непрерывной функцией. Очевидно, что достаточно проверить непрерывность только в точке b. Имеем $f(b-0) = \varphi(b-0) = \varphi(b) = \varphi(a) = \varphi(a+0) = f(a+(b-a)+0) = f(b+0)$. Здесь выражение $f(x \pm 0)$ означает вычисление правого или левого предела функции $f(x)$ в точке x.

Часто перед тем, как функцию продолжить периодически, на нее накладывается условие четности или нечетности.

Для функции $\varphi(x)$ заданной на отрезке $[0,L]$ $(L>0)$, продолженной четно на отрезок $[-L,0]$ и затем периодически на всю ось с периодом $2L$, формула продолжения имеет следующий вид:

$$F(x) = \varphi(Stc(x,2L)) \qquad (2.3)$$

Доказательство. Если $x \in [0,L]$, то $Stc(x,2L) = x$. Поэтому $F(x) = \varphi(Stc(x,2L)) = \varphi(x)$, т.е. на отрезке $[0,L]$ функция $F(x)$ совпадает с $\varphi(x)$. Если $x \in [-L,0]$, то $Stc(x,2L) = -x = |x|$ и $F(x) = \varphi(-x)$ является четной копией функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,L]$ на отрезок $[-L,0]$. Т.к. функция $Stc(x,2L)$ совпадает с $|x|$ на отрезке $[-L,L]$ и периодична с периодом $2L$, то выражение

$F(x) = \varphi(Stc(x,2L))$ будет повторять значения функции $\varphi(|x|)$ с отрезка [*-L,L*] с периодом *2L* на всю ось. Как легко заметить, если функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке [*0,L*], то результирующая функция *F(x)* будет непрерывной на всей оси.

Для функции $\varphi(x)$, заданной на отрезке [*0,L*] и обращающейся в ноль на его концах $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, нечетное периодическое продолжение на всю ось может быть построено по следующей формуле:

$$F(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]}\varphi(Stc(x,2L)), \tag{2.4}$$

где квадратные скобки [*x*] означают взятие ближайшего целого, не превосходящего данное число *x*.

Доказательство. Если $x \in (0, L)$, то $(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} = 1$, $Stc(x,2L) = x$ и $F(x) = \varphi(Stc(x,2L)) = \varphi(x)$. Если $x \in (-L,0)$, то $Stc(x,2L) = -x = |x|$, $(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]} = -1$ и $F(x) = -\varphi(-x)$. Кроме того, $F(L) = F(-L) = -\varphi(L) = 0$ и $F(0) = \varphi(0) = 0$. Т.е. *F(x)* на отрезке [*0,L*] совпадает с $\varphi(x)$, а на отрезке [*-L,0*] является нечетной копией функции $\varphi(x)$ с отрезка [*0,L*]. Поскольку имеют место соотношения

$$F(x+2L) = (-1)^{\left[\frac{x+2L}{L}\right]}\varphi(Stc(x+2L,2L)) = (-1)^{\left[\frac{x}{L}+2\right]}\varphi(Stc(x,2L)) = F(x),$$

то функция *F(x)* является также периодической с периодом *2L*.

Полученная таким образом функция *F(x)* является непрерывной на всей оси, если $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке [*0,L*]. Непрерывность функции *F(x)* в 0 обеспечивается условием $\varphi(0) = 0$, поскольку имеют место равенства $F(0-0) = -\varphi(-0) = 0 = \varphi(+0) = F(0+0)$. Непрерывность в точке *x=L* следует из условия $\varphi(L) = 0$, т.к. в силу нечетности и периодичности функции *F(x)* имеем $F(L-0) = \varphi(L-0) = 0 = -\varphi(-L+0) = F(-L+0) = F(L+0)$.

Формула (2.4) отличается от формулы (2.3) множителем, который меняет знак результирующей функции на отрезках, на которых пилообразная функция убывает и, тем самым, превращает ее в нечетную периодическую функцию с периодом *2L*.

3. Решение уравнения колебаний струны с закрепленными концами

Используем формулу (2.4) в методе продолжения при решении первой краевой задачи для однородного одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{3.1}$$

на конечном отрезке [*0,L*] при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le L) \tag{3.2}$$

и граничных условиях

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t) \quad t \ge 0 \tag{3.3}$$

Решение этой задачи находится в виде суммы двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Первая из них удовлетворяет уравнению (3.1), начальным условиям (3.2) и однородным граничным условиям $(\mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 0)$. Вторая удовлетворяет уравнению (3.1), нулевым начальным условиям $(\varphi(x)=0,\psi(x)=0)$ и граничным условиям (3.3). Сейчас мы будем заниматься первой задачей – решением уравнения колебаний конечной струны с закрепленными концами.

Для этой задачи хорошо известен метод продолжения, который в нашем случае можно представить следующим образом. Выполним нечетное продолжение начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с отрезка $[0,L]$ на отрезок $[-L,0]$ и затем периодическое продолжение полученных функций с отрезка $[-L,L]$ на всю вещественную ось. Такое продолжение выполняется с помощью формулы (2.4)

$$\Gamma(x)=(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]}\varphi(Stc(x,2L)),\quad \Psi(x)=(-1)^{\left[\frac{x}{L}\right]}\psi(Stc(x,2L)) \tag{3.4}$$

Полученные (непрерывные, если $\varphi(0)=\varphi(L)=0\,,\psi(0)=\psi(L)=0$) нечетные периодические функции $\Gamma(x)$ и $\Psi(x)$ подставляем в формулу Даламбера для бесконечной струны

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(x+at)+\Gamma(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha\,. \tag{3.5}$$

Построенная функция $u(x,t)$ на интервале $(0,L)$ удовлетворяет начальным условиям (3.2) и на его концах однородным граничным условиям. Это значит, что конечная струна с закрепленными концами колеблется как участок $0\le x\le L$ бесконечной струны с начальными условиями $\Gamma(x)$ и $\Psi(x)$. В результате решение задачи о колебании конечной струны с закрепленными концами определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]}\varphi(Stc(x+at,2L))+(-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]}\varphi(Stc(x-at,2L))}{2}+\\ &+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(-1)^{\left[\frac{\alpha}{L}\right]}\psi(Stc(\alpha,2L))d\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если начальная скорость $\psi(x)$ точек струны равна 0, то формула (3.6) дает удобное решение краевой задачи в замкнутом виде. Если функция $\psi(x)$ не равна 0, то вычисление интеграла в формуле (3.6) вызывает некоторые сложности. Исследуем этот интеграл $I(x,t)=\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)d\alpha$.

Относительно функции $\Psi(x)$ мы знаем, что она нечетная, периодическая с периодом $2L$ функция, которая на отрезке $[0,L]$ совпадает с функцией $\psi(x)$ и на его концах обращается в ноль.

Лемма 1. Для любого z и любой нечетной периодической с периодом $2L$ функции $f(z)$ выполняется равенство $\int_{Stc(z,2L)}^{z}f(\xi)d\xi=0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку вещественной оси z, расположенную на отрезке возрастания функции $Stc(z,2L)$, например, в положении $z=z_1$ (см. Рис. 1).

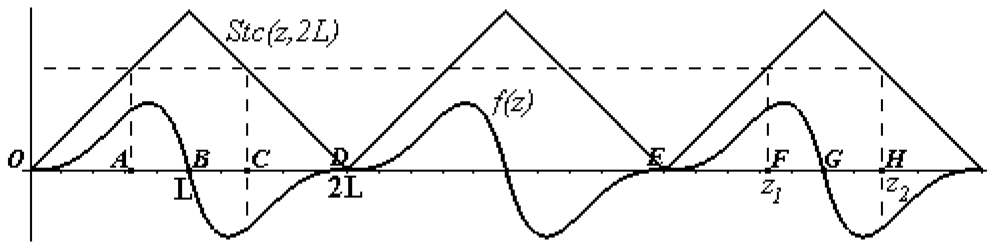

Рис.1.

Координата точки А равна $Stc(z_1,2L)$, и мы имеем $\int\limits_{Stc(z_1,2L)}^{z_1} = \int\limits_A^C + \int\limits_C^D + \int\limits_D^E + \int\limits_E^F$. Но для нечетной периодической функции имеют место равенства $\int\limits_A^C f(\xi)d\xi = 0$, $\int\limits_C^D f(\xi)d\xi + \int\limits_E^F f(\xi)d\xi = 0$ и $\int\limits_D^E f(\xi)d\xi = 0$ как интеграл по некоторому количеству периодов (одному, нескольким или ни одному). Следовательно, для выбранного расположения точки $z=z_1$ получаем $\int\limits_{Stc(z_1,2L)}^{z_1} f(\xi)d\xi = 0$. Пусть теперь точка z расположена на отрезке убывания функции $Stc(z,2L)$, например, в положении $z=z_2$ (см. Рис.1). Тогда имеем $\int\limits_{Stc(z_2,2L)}^{z_2} = \int\limits_A^B + \int\limits_B^D + \int\limits_D^E + \int\limits_E^G + \int\limits_G^H$. Но для нечетной периодической функции имеют место равенства $\int\limits_A^B f(\xi)d\xi + \int\limits_G^H f(\xi)d\xi = 0$, $\int\limits_B^D f(\xi)d\xi + \int\limits_E^G f(\xi)d\xi = 0$ и $\int\limits_D^E f(\xi)d\xi = 0$ как интеграл по некоторому количеству периодов. Следовательно, для выбранного расположения точки z также получаем $\int\limits_{Stc(z_2,2L)}^{z_2} f(\xi)d\xi = 0$. Рассматриваемый интеграл $\int\limits_{Stc(z,2L)}^{z} f(\xi)d\xi$ также будет равен нулю, если точка z расположена на отрезке OB или BD. Аналогично показывается, что этот интеграл равен нулю, если точка z расположена левее отрезка $[0,L]$, т.е. для $z<0$. Т.о. утверждение леммы доказано.

Теперь для интеграла $I(x,t)$ можно записать цепочку равенств

$$\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha = \int\limits_{x-at}^{Stc(x-at,2L)} \Psi(\alpha)d\alpha + \int\limits_{Stc(x-at,2L)}^{Stc(x+at,2L)} \Psi(\alpha)d\alpha + \int\limits_{Stc(x+at,2L)}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha = \int\limits_{Stc(x-at,2L)}^{Stc(x+at,2L)} \psi(\alpha)d\alpha$$

Здесь мы воспользовались предыдущей леммой, из которой следует, что для любых x и t имеют место равенства $\int\limits_{x-at}^{Stc(x-at,2L)} \Psi(\alpha)d\alpha = 0$ и $\int\limits_{Stc(x+at,2L)}^{x+at} \Psi(\alpha)d\alpha = 0$. В оставшемся интеграле нечетную периодическую функцию $\Psi(\alpha)$ мы заменили функцией $\psi(\alpha)$, поскольку для этого интеграла отрезок интегрирования целиком принадлежит отрезку $[0,L]$, на котором функция $\Psi(\alpha)$ совпадает с $\psi(\alpha)$. Следовательно, формулу (3.6) можно переписать в следующем виде:

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]}\varphi(Stc(x+at,2L))+(-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]}\varphi(Stc(x-at,2L))}{2}+ \\ +\frac{1}{2a}\int\limits_{Stc(x-at,2L)}^{Stc(x+at,2L)}\psi(\alpha)d\alpha \qquad (3.7)$$

Эта формула дает явное решение задачи о колебании конечной струны с закрепленными концами.

Замечание 1. Формула Даламбера (3.5) для бесконечной струны дает решение волнового уравнения, если $\Psi(x)$ непрерывно-дифференцируемая, а $\Gamma(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемая функции. Переходя к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы должны потребовать [1] выполнение дополнительного условия $\varphi''(0)=\varphi''(L)=0$. Если это не так, то решение, получаемое с помощью формулы (3.5) и, следовательно, с помощью формул (3.6) и (3.7), нужно рассматривать как обобщенное.

4. Решение волнового уравнения для кусочных начальных условий

Начальные значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ часто бывают заданными как кусочные функции. Если $\varphi(x)$ кусочно-гладкая непрерывная функция и на различных отрезках изменения аргумента представима различными формулами, то ее уравнение можно записать одной формулой [3]. Тогда в системах символьной математики в формуле (3.7) для функции $\varphi(x)$ замена аргумента x на $Stc(x\pm at,2L)$ выполняется легко. Если функция $\psi(x)$ такова, что ее первообразная $\Phi(x)$ известна, то вычисление интеграла в (3.7) также сводится к подстановке в формулу $\Phi(x)$ верхнего и нижнего пределов интегрирования и вычисления их разности. Однако вычисление первообразной кусочно-непрерывной функции $\psi(x)$ требует некоторых преобразований.

Вначале рассмотрим случай непрерывной кусочно-линейной функции $\psi(x)$. В работе [3] показано, что если даны координаты узлов ломаной $\{(x_0,\psi_0),(x_1,\psi_1),\ldots,(x_n,\psi_n)\}$ $(x_k<x_{k+1})$, то ее уравнение на отрезке $[x_0,x_n]$ можно записать следующим образом:

$$\psi(x)=\psi_0+\sum_{k=1}^{n}(\psi_k-\psi_{k-1})P(x,x_{k-1},x_k-x_{k-1}), \qquad (4.1)$$

где функция $P(x,a,w)$ определяется формулой

$$P(t,a,w)=\frac{1}{2w}(w+|t-a|-|t-a-w|) \quad (w\neq 0). \qquad (4.2)$$

Ясно, что вычисление первообразной функции $\psi(x)$ сводится к вычислению первообразной функции $P(x,a,w)$, которую мы обозначим $IP(x,a,w)$.

Возьмем достаточно большое по модулю отрицательное число $t_0 < a$ и вычислим интеграл $IP(t,a,w) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,a,w)d\tau$, (w>0). При *t<a* получаем, что $\int_{t_0}^{t} P(\tau,a,w)d\tau = 0$. При $a \le t \le a+w$ имеем $\int_{t_0}^{t} P(\tau,a,w)d\tau = \int_{a}^{t} \frac{\tau - a}{w} d\tau = \frac{(t-a)^2}{2w}$. При $t > a+w$ имеем $\int_{t_0}^{t} P(\tau,a,w)d\tau = \int_{a}^{a+w} \frac{\tau - a}{w} d\tau + \int_{a+w}^{t} 1 \cdot d\tau = t - a - \frac{w}{2}$. Можно заметить, что этот интеграл представим в виде единого выражения следующего вида $\frac{1}{2}\big((t-a)P(t,a,w) + Q(t,a+w)\big)$, где

$$Q(t,a) = \frac{1}{2}\big(t - a + |t-a|\big). \tag{4.3}$$

Действительно, рассматривая это выражение на частях вещественной оси $t < a$, $a \le t \le a+w$ и $t > a+w$, мы получаем такие же значения, что и выше для интеграла. Таким образом, первообразная функции *P(t,a,w)* может быть представлена в следующем виде:

$$IP(t,a,w) = \int_{t_0}^{t} P(\tau,a,w)d\tau = \frac{1}{2}\big((t-a)P(t,a,w) + Q(t,a+w)\big) \tag{4.4}$$

Отметим, что *IP(t,a,w)* является непрерывно-дифференцируемой функцией как первообразная от непрерывной функции. При *t<a* функция *IP(t,a,w)* равна нулю, на отрезке $a \le t \le a+w$ она является параболой, а при *t>a* является линейной функцией.

С учетом (4.4) первообразная произвольной ломаной, задаваемой формулой (4.1), с точностью до константы будет определяться формулой:

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau = \psi_0 \cdot (x - x_0) + \sum_{k=1}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1})\, IP(x, x_{k-1}, x_k - x_{k-1}). \tag{4.5}$$

Рассмотрим теперь случай кусочно-непрерывной на отрезке [*a,b*] функции. Пусть отрезок разбит на части точками $\{x_i\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, и на каждом внутреннем полуинтервале $[x_{i-1}, x_i)$ (*i=1,2,...n*) функция *f(x)* задается гладкой функцией $f_i(x)$, которая непрерывна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Пусть также вне отрезка при $x < x_0$ функция *f(x)* задается функцией $f_0(x)$, а при $x \ge x_n$ она определяется функцией $f_{n+1}(x)$.

Пусть первообразные $\Phi_i(x)$ каждой из функций $f_i(x)$ известны. Тогда первообразная $\Phi(x)$ кусочно-непрерывной функции *f(x)* с точностью до константы определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \Phi_0(x_0 + Q_l(x, x_0)) + \big(\Phi_{n+1}(x_n + Q(x, x_n)) - \Phi_{n+1}(x_n)\big) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \{\Phi_i\big(x_{i-1} + (x_i - x_{i-1})P(x, x_{i-1}, x_i - x_{i-1})\big) - \Phi_i(x_{i-1})\}\end{aligned}, \tag{4.6}$$

где функции *P(x,a,w)* и *Q(x,a)* определяются формулами (4.2) и (4.3), а $Q_l(x,a)$ определяется формулой $Q_l(t,a)=\frac{1}{2}\left(t-a-|t-a|\right)$.

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что функция $\Phi(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(\tau)d\tau$ (α произвольное достаточно большое по модулю отрицательное число $\alpha<a$) совпадает с правой частью формулы (4.6) для любого *x*. Обозначим выражение, стоящее в правой части (4.6), через $I(x)$. Тогда при $x<a$ будем иметь $\Phi(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(\tau)d\tau=\int\limits_{\alpha}^{x} f_0(\tau)d\tau=\Phi_0(x)-\Phi_0(\alpha)+Const$. Выберем константу равной $\Phi_0(\alpha)$. В этом случае $(x<x_0)$ имеем $Q_l(x,x_0)=x-x_0$, $Q(x,x_n)=0$, $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$ $\forall i\ge 1$. Т.о. в выражении для *I(x)* все слагаемые, кроме первого, обращаются в 0. Поэтому получаем $I(x)=\Phi_0(x)=\Phi(x)$. Для случая $x_0\le x<x_1$ имеем

$$\Phi(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(\tau)d\tau=\int\limits_{\alpha}^{x_0} f_0(\tau)d\tau+\int\limits_{x_0}^{x} f_1(\tau)d\tau=\Phi_0(x_0)+\left(\Phi_1(x)-\Phi_1(x_0)\right)$$

Но в этом случае в выражении для $I(x)$ имеем $P(x,x_0,x_1-x_0)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, $Q_l(x,x_0)=0$, $Q(x,x_n)=0$ и $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$ $\forall i\ge 2$. Поэтому второе слагаемое в правой части (4.6) и все слагаемые в сумме, начиная со второго, обращаются в 0 и мы получаем, что $I(x)=\Phi_0(x_0)+\left(\Phi_1(x)-\Phi_1(x_0)\right)=\Phi(x)$. Для случая $x_{k-1}\le x<x_k$ $(k=2,3,\ldots,n)$ имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{x} f(\tau)d\tau=\int\limits_{\alpha}^{x_0} f_0(\tau)d\tau+\int\limits_{x_0}^{x_1} f_1(\tau)d\tau+\int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(\tau)d\tau+\ldots+\int\limits_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} f_{k-1}(\tau)d\tau+\int\limits_{x_{k-1}}^{x} f_k(\tau)d\tau=$$

$$=\Phi_0(x_0)+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\Phi_i(x_i)-\Phi_i(x_{i-1})\right)+\left(\Phi_k(x)-\Phi_k(x_{k-1})\right).$$

Для этого же полуинтервала изменения аргумента в выражении для $I(x)$ имеем $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=1$ $\forall i\le k-1$, $P(x,x_{k-1},x_k-x_{k-1})=\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}$ и $\forall i\ge k+1$ $P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})=0$. Кроме того, $Q_l(x,x_0)=0$, $Q(x,x_n)=0$. В результате второе слагаемое в (4.6) и все слагаемые в сумме, начиная с $(k+1)$-го, обращаются в 0, а слагаемые в сумме до $(k-1)$-го дают $\sum_{i=1}^{k-1}\left(\Phi_i(x_i)-\Phi_i(x_{i-1})\right)$. Остается также *k*-е слагаемое в виде $\Phi_k(x)-\Phi_k(x_{k-1})$. В итоге мы получаем то же выражение для *I(x)*, что и для первообразной, т.е. в этом случае также имеем равенство $I(x)=\Phi(x)$. Случай $x\ge x_n$ отличается от предыдущего при $k=n$ тем, что $Q(x,x_n)=x-x_n$, и второе слагаемое в правой части (4.6) принимает вид

$\Phi_{n+1}(x)-\Phi_{n+1}(x_n)$. В результате и в этом случае получаем, что $\Phi(x)=I(x)$. Т.о. для всех участков изменения аргумента выражения $\Phi(x)$ и $I(x)$ совпадают.

Отметим, что значение исходной кусочно-непрерывной функции в точках разбиения x_i не существенно, поскольку изменение значения функции $f_i(x)$ на концах отрезка интегрирования $[x_{i-1},x_i]$ не влияет на значение интеграла. Поэтому значения первообразных $\Phi_i(x_{i-1})$, стоящие в формуле (4.6), можно рассматривать как соответствующие предельные значения. Кроме того, эти константы в формуле для первообразной $\Phi(x)$ вообще могут быть отброшены.

Приведем один частный случай формулы (4.6). Часто начальная скорость струны задается как кусочно-постоянная функция *g(x)*, принимающая на полуинтервалах $x_{i-1}\le x<x_i$ $(i=1,2,...,n)$ значения g_i и нулевое значение вне отрезка $[x_0,x_n]$. Тогда первообразные констант g_i, очевидно, имеют вид $\Phi_i(x)=g_i\cdot x$, $\Phi_0=\Phi_{n+1}=0$, а соответствующие слагаемые в сумме (4.6) принимают вид

$$g_i\left(x_{i-1}+(x_i-x_{i-1})P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})\right)-g_ix_{i-1}=g_i(x_i-x_{i-1})P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1})$$

В результате мы приходим к формуле вычисления первообразной кусочно-постоянной функции

$$\int_{\alpha}^{x}g(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{n}g_i(x_i-x_{i-1})P(x,x_{i-1},x_i-x_{i-1}) \tag{4.7}$$

Вернемся к решению волнового уравнения. Большинство начальных функций $\psi(x)$ (начальная скорость) являются либо кусочно-непрерывными, либо кусочно-гладкими непрерывными функциями, которые на различных участках изменения аргумента от x_{i-1} до x_i задаются разными функциями $\psi_i(x)$. Использование формулы (4.6) позволяет записать для них единое формульное выражение для первообразной $\Phi(x)$ через первообразные $\Phi_i(x)$ составляющих функций $\psi_i(x)$. Если первообразная какой-либо функции $\psi_i(x)$ неизвестна, то функцию $\psi_i(x)$ можно представить кусочно-линейной функцией или, например, кубическим сплайном, для которых первообразные вычисляются.

Таким образом, имея первообразную $\Phi(x)$ кусочно-непрерывной функции $\psi(x)$, построенную с помощью формулы (4.6) (или (4.5), (4.7)), можно записать явное решение задачи колебания струны с закрепленными концами

$$u(x,t)=\frac{(-1)^{\left[\frac{x+at}{L}\right]}\varphi(Stc(x+at,2L))+(-1)^{\left[\frac{x-at}{L}\right]}\varphi(Stc(x-at,2L))}{2}+ \\ +\frac{1}{2a}\left(\Phi(Stc(x+at,2L)-\Phi\left(Stc(x-at,2L)\right)\right) \tag{4.8}$$

Формула (4.8) содержит только суперпозицию начальных функций и их первообразных с элементарными функциями $[x],|x|,Mod(x,y)$ (пилообразная функция $Stc(x,w)$ выражается через эти функции) и может рассматриваться как явное решение соответствующей задачи.

5. Учет граничных значений

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Общее решение приведено в работах [1, 2]. Если задано граничное значение только на левом конце $u(0,t)=\mu_l(t)$, $u(L,t)=0$, то решение имеет вид:

$$u_l(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\overline{\mu_l}(t-\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a})-\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\mu_l}(t+\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a}), \tag{5.1}$$

где функция $\overline{\mu_l}(t)$ совпадает с $\mu(t)$ при *t>0* и равна нулю при *t<0*. При этом формула содержит для каждого фиксированного *t* только конечное число членов.

Представим формулу (5.1) в форме удобной для реализации в системах символьной математики. Будем считать, что граничная функция $u(0,t)=\mu_l(t)$ согласуется с начальным условием $u(x,0)=\varphi(x)$, т.е. выполняется условие $u(0,0)=\mu_l(0)=\varphi(0)=0$. Учитывая это, замечаем, что функция $\overline{\mu}(t)$, совпадающая с $\mu(t)$ для положительных *t*, и равная 0 при отрицательных *t* будет непрерывной в 0. Такую функцию можно представить в виде $\overline{\mu}(t)=\mu(Q(t,0))$, где функция *Q(t,a)* определяется формулой (4.3). Действительно, при *t<0* имеем $Q(t,0)=0$ и $\overline{\mu}(t)=\mu(0)=0$. При $t\ge 0$ имеем $Q(t,0)=t$ и $\overline{\mu}(t)=\mu(t)$. Т.о. функция $\mu(Q(t,0))$ автоматически обнуляется при отрицательных значениях аргумента *t* и является непрерывной, если $\mu(0)=0$.

Определим теперь, сколько слагаемых в сумме (5.1) следует брать. Легко видеть, что в первой сумме (5.1) положительные значения аргумента $t-\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a}$ функции $\overline{\mu}$ могут быть только для $i<\left[\left(t-\frac{x}{a}\right)/\left(\frac{2L}{a}\right)\right]=\left[\frac{at-x}{2L}\right]\le\left[\frac{at}{2L}\right]$. Во второй сумме (5.1) аргументы $t+\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a}>0$ положительны при $i<\left[\left(t+\frac{x}{a}\right)/\left(\frac{2L}{a}\right)\right]=\left[\frac{at+x}{2L}\right]\le\left[\frac{at+L}{2L}\right]$. Количество членов в суммах мы можем взять равным большей из двух полученных верхних оценок, т.е. $n_l=\left[\frac{at+L}{2L}\right]$.

Тогда выражение (5.1) можно переписать в виде:

$$u_l(x,t)=\mu_l(Q(t-\frac{x}{a},0))+\sum_{i=1}^{n_l}\mu_l(Q(t-\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a},0))-\mu_l(Q(t+\frac{x}{a}-i\frac{2L}{a},0)), \tag{5.2}$$

где n_l определено выше и при любом фиксированном *t>0* является конечным числом.

Если задано граничное значение только на правом конце $u(0,t)=0$, $u(L,t)=\mu_r(t)$, то, аналогично предыдущему, формула, приведенная в [1], может быть преобразована к более удобному для вычислений виду

$$u_r(x,t)=\sum_{i=0}^{n_r}\mu_r(Q(t+\frac{x}{a}-\frac{L}{a}-i\frac{2L}{a},0))-\mu_r(Q(t-\frac{x}{a}-\frac{L}{a}-i\frac{2L}{a},0)), \qquad (5.3)$$

где $n_r=\left[\frac{at}{2L}\right]$.

Складывая решения, представляемые формулами (5.2), (5.3), и (3.7), мы получаем явное формульное решение первой краевой задачи для конечной струны.

6. Заключение.

Формулы (2.2) - (2.4) дают способ построения формул периодического или четного и нечетного периодического продолжения функции с отрезка на всю вещественную ось. Использование их в методе продолжения позволяет дать явное формульное решение (3.7), (5.2), (5.3) первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний конечной струны. Для случая, когда начальное смещение является кусочно-гладкой, а начальная скорость $\psi(x)$ кусочно-непрерывной функциями, решение может быть получено в замкнутом виде, если первообразные кусков, составляющих функцию $\psi(x)$, известны. Удобные формулы (4.5) - (4.7) вычисления первообразных кусочных функций позволяют в системах символьной математики с помощью формулы (4.8) генерировать решения задачи колебаний конечной струны для широкого класса начальных функций практически с любой степенью точности, не используя сложного программирования. Ряд примеров решения волнового уравнения, использующих формулы настоящей работы, приведены в пакете расширения *PscFunctions* системы символьной математики MAPLE, представленного на интернет сайте www.maplesoft.com/products/thirdparty/PSCFunctions.

Метод продолжения применим для решения различных задач, например, при решении уравнения теплопроводности. Везде, где используется этот метод, будут полезны формулы периодического продолжения функций настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830с.
3. Доля П.Г. Моделирование кусочно-гладких непрерывных функций и кривых.// Вестник Харьк. нац. ун-та., - 2005.- № 661. Сер. ”Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления”, вып.4. – С.97-103.