Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

Элементарные задачи

Харьков – 2005

Введение

Учебное пособие содержит элементарные задачи курса римановой геометрии по следующим базовым темам:

I. Длина кривой. Угол между кривыми. Обьем области.

II. Индуцированная метрика.

III. Связность. Ковариантные производные.

IV. Риманова связность.

V. Поля Якоби.

Решение предлагаемых задач позволяет овладеть основными приемами непосредственного вычисления фундаментальных объектов на римановых многообразиях, проиллюстрировать и закрепить теоретический материал, конкретизировать содержание излагаемых идей, определений и утверждений.

Задачи могут включаться в лекционный курс "Риманова геометрия", могут быть рекомендованы в качестве дополнительного материала к лекционному курсу "Дифференциальная геометрия", а также могут предлагаться студентам и для самостоятельной работы.

В пособии приведены ответы ко всем задачам, в отдельных случаях предлагаются также и указания на способ решения. Пособие дополнительно содержит список литературы, которая может быть рекомендована к ознакомлению при решении задач из предлагаемого учебно-методического пособия.

Учебное пособие может быть полезным студентам, изучающим специальный курс "Риманова геометрия" по кафедре геометрии механико-математического факультета ХНУ, а также студентам физико-математических факультетов, интересующимся римановой геометрией.

I. Длина кривой. Угол между кривыми. Обьем области.

1. На римановом многообразии (M, g) найти длину кривой кривой γ:

1) окружность на евклидовой плоскости

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = \alpha \\ u^2 = t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \, ;$$

2) отрезок на евклидовой плоскости

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \phi_0 \end{cases}, \ t \in [0, \alpha] \, ;$$

3) параллель на сфере

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = \alpha \\ u^2 = t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \, ;$$

4) меридиан на сфере

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \phi_0 \end{cases}, \ t \in [0, \alpha] \, ;$$

5) параллель на псевдосфере

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sinh^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = \alpha \\ u^2 = t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi] \, ;$$

6) меридиан на псевдосфере

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sinh^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = t \\ u^2 = \phi_0 \end{cases}, \ t \in [0, \alpha] \, ;$$

7) геодезическая на плоскости Лобачевского (интерпретация Пуанкаре)

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a + r\cos t \\ u^2 = r \sin t \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta] \subset (0, \pi) \, ;$$

8) геодезическая на плоскости Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a \\ u^2 = t \end{cases}, \ t \in [h_1, h_2] \subset (0, +\infty) \, ;$$

9) окружность на плоскости Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a + r\cos t \\ u^2 = b + r\sin t \end{cases}, \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi] \\ 0 < r < b \end{matrix} \quad ;$$

10) кривая в пространстве Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = at \\ u^2 = bt \\ u^3 = c \end{cases}, \ t \in [h_1, h_2]$$

11) кривая в пространстве Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = c \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$$

12) "винтовая линия" в пространстве Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = ct \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta]$$

13) винтовая линия в евклидовом пространстве

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = ct \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta] \, ;$$

14) винтовая линия в псевдо-евклидовом пространстве

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = ct \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta] \, ;$$

15) окружность в евклидовом пространстве

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = a\cos t \\ u^4 = a\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi] \, ;$$

16) окружность в псевдо-евклидовом пространстве

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = a\cos t \\ u^4 = a\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi] \, ;$$

17) кривая в пространстве Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^4)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^4)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^4)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^4)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma : \begin{cases} u^1 = a\cos t \\ u^2 = a\sin t \\ u^3 = a\cos t \\ u^4 = a\sin t, \end{cases} \; t \in [\alpha, \beta] \, .$$

2. На римановом многообразии (M, g) найти угол между кривыми γ_1 и γ_2:

1) окружности на сфере

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 : \begin{cases} u^1 = \frac{\pi}{3} \\ u^2 = t \end{cases}, \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = \sigma \\ u^2 = \frac{\pi}{6} \end{cases} ;$$

2) геодезические на плоскости Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 : \begin{cases} u^1 = a_1 + r_1\cos t \\ u^2 = r_1 \sin t \end{cases}, \; \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = a_2 + r_2\cos\sigma \\ u^2 = r_2\sin\sigma \end{cases} ;$$

3) геодезические на плоскости Лобачевского

$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 : \begin{cases} u^1 = a_1 + r_1\cos t \\ u^2 = r_1 \sin t \end{cases}, \quad \gamma_2 : \begin{cases} u^1 = a_2 \\ u^2 = \sigma \end{cases} ;$$

4) кривые в пространстве Лобачевского

$$g=\begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_1:\left\{\begin{array}{l} u^1=at \\ u^2=at \\ u^3=\pi/4 \end{array}\right., \quad \gamma_2:\left\{\begin{array}{l} u^1=A\cos t \\ u^2=A\sin t \\ u^3=\tau \end{array}\right.$$

5) окружности на сфере

$$g=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u^1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \gamma_1:\cos u^1\cos u^2-a(1-\sin u^1)=0, \\ \gamma_2:\cos u^1\sin u^2-a(1-\sin u^1)=0. \end{array}$$

3. На римановом многообразии M^2 с метрикой $g_{ij}=\delta_{ij}\dfrac{R^2}{(u^2)^2}$ найти ортогональные траектории семейства кривых $(u^1)^2+(u^2-b)^2=b^2$, и ортогональные траектории семейства кривых $(u^1)^2+(u^2)^2=b^2$, где b – параметр.

4. На римановом многообразии M^2 с метрикой $g_{ij}=\delta_{ij}\dfrac{R^2}{(u^2)^2}$ найти периметр P_Δ и сумму углов $\sum_\Delta$ криволинейного треугольника, образованного кривыми

$$\gamma_1:\left\{\begin{array}{l} u^1=r\cos t \\ u^2=r\sin t \end{array}\right., \quad \gamma_2:\left\{\begin{array}{l} u^1=\sqrt{2}r+r\cos\phi \\ u^2=r\sin\phi \end{array}\right., \quad \gamma_3:\left\{\begin{array}{l} u^1=\sigma \\ u^2=\dfrac{r}{2} \end{array}\right. .$$

5. На римановом многообразии (M,g) найти площадь (объем) области Ω:

1) $$g=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 \end{pmatrix}, \quad \Omega=\left\{(u^1,u^2)\,\middle|\,\begin{array}{l} u^1\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(0,+\infty) \\ u^2\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(0,2\pi) \end{array}\right\};$$

2) $$g=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \Omega=\left\{(u^1,u^2)\,\middle|\,\begin{array}{l} u^1\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(0,\pi) \\ u^2\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(0,2\pi) \end{array}\right\};$$

3) $$g=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\mathrm{sh}^2 u^1 \end{pmatrix}, \quad \Omega=\left\{(u^1,u^2)\,\middle|\,\begin{array}{l} u^1\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(0,+\infty) \\ u^2\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(0,2\pi) \end{array}\right\};$$

4) $$g=\begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \Omega=\left\{(u^1,u^2)\,\middle|\,\begin{array}{l} a_1<u_1<b_1 \\ 0<a_2<u^2<b_2 \end{array}\right\};$$

5)
$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \left\{ (u^1, u^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} u^2 > 0, -r_1 < u^1 < r_1 \\ r_1^2 < (u^1)^2 + (u^2)^2 < r_2^2 \end{array} \right\};$$

6)
$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \left\{ (u^1, u^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} u^2 > 0, r_1^2 < (u^1)^2 + (u^2)^2 < r_2^2 \\ au^1 - u^2 < 0, au^1 + u^2 > 0 \end{array} \right\};$$

7)
$$g = \begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \left\{ (u^1, u^2) | (u^1 - a)^2 + (u^2 - b)^2 < r^2, b < r \right\};$$

8)
$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u^1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \left\{ (u^1, u^2, u^3) \;\middle|\; \begin{array}{l} u^1 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (0, \pi), \\ u^2 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset (0, \pi), \\ u^3 \in (\alpha_3, \beta_3) \subset (0, 2\pi) \end{array} \right\}.$$

II. Индуцированная метрика

1. Найти риманову метрику на многообразии M, индуцированную погружением Φ многообразия M в риманово многообразие $(N, g_{ij} dx^i dx^j)$.

1) Гиперплоскость E^3 в евклидовом пространстве E^4:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = v^1, \\ x^2 = v^2, \\ x^3 = v^3, \\ x^4 = 0, \\ v^1, v^2, v^3 \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \qquad g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной аффинной плоскости в евклидовом пространстве произвольной размерности.

2) Гиперплоскость E^2 в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = v^1, \\ x^2 = v^2, \\ x^3 = -R, \\ v^1, v^2 \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной аффинной плоскости в произвольном псевдоевклидовом пространстве.

3) Тор Клиффорда T^2 в евклидовом пространстве E^4:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = \cos u^1, \\ x^2 = \sin u^1, \\ x^3 = \cos u^2, \\ x^4 = \sin u^2, \\ u^1, u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности $\Phi : T^n \to E^{2n}$.

4) Гиперсфера S^2 радиуса R в евклидовом пространстве E^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = R \sin u^1 \cos u^2, \\ x^2 = R \sin u^1 \sin u^2, \\ x^3 = R \cos u^1, \\ u^1 \in (0, \pi), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности.

5) Гиперсфера S^2 радиуса R в евклидовом пространстве E^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = v^1, x^2 = v^2, \\ x^3 = \pm\sqrt{R^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2}, \\ (v^1)^2 + (v^2)^2 < R^2 \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности.

6) Гиперсфера S^2 радиуса R в евклидовом пространстве E^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = \dfrac{2R^2 w^1}{(w^1)^2 + (w^2)^2 + R^2} \\ x^2 = \dfrac{2R^2 w^2}{(w^1)^2 + (w^2)^2 + R^2} \\ x^3 = R\dfrac{(w^1)^2 + (w^2)^2 - R^2}{(w^1)^2 + (w^2)^2 + R^2}, \\ w^1, w^2 \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности.

7) Гиперсфера S^2 в трехмерной сфере S^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = \phi_0 = const, \\ x^2 = u^1, \\ x^3 = u^2, \\ u^1 \in (0, \pi), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 x^1 \sin^2 x^2 \end{pmatrix}.$$

Сравнить с результатом задачи 1.4.

8) Псевдосфера радиуса R в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = R\mathrm{sh} u^1 \cos u^2, \\ x^2 = R\mathrm{sh} u^1 \sin u^2, \\ x^3 = R\mathrm{ch} u^1, \\ u^1 \in (0, +\infty), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сравнить с результатом задачи 1.4.

9) Псевдосфера радиуса R в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = v^1, x^2 = v^2, \\ x^3 = \pm\sqrt{R^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2}, \\ v^1, v^2 \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности. Сравнить с результатом задачи 1.5.

10) Псевдосфера радиуса R в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = \dfrac{2R^2 w^1}{R^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2} \\ x^2 = \dfrac{2R^2 w^2}{R^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2} \\ x^3 = R\dfrac{R^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2}{R^2 - (w^1)^2 - (w^2)^2}, \\ (w^1)^2 + (w^2)^2 < R^2 \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обобщить на случай произвольной размерности. Сравнить с результатом задачи 1.6.

11) Поверхность Бельтрами в евклидовом пространстве E^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = R \sin u^1 \cos u^2, \\ x^2 = R \sin u^1 \sin u^2, \\ x^3 = R \ln \mathrm{ctg} \frac{u^1}{2} - \cos u^1, \\ u^1 \in (0, \pi/2), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12) Гиперплоскость пространства Лобачевского L^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = r\sin u^1 \cos u^2, \\ x^2 = r\sin u^1 \sin u^2, \\ x^3 = r\cos u^1, \\ u^1 \in (0, \pi/2), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(x^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(x^3)^2} \end{pmatrix}.$$

13) Орисфера пространства Лобачевского L^3:

$$\Phi : \begin{cases} x^1 = r\sin u^1 \cos u^2, \\ x^2 = r\sin u^1 \sin u^2, \\ x^3 = r + r\cos u^1, \\ u^1 \in (0, \pi/2), u^2 \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad g = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(x^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(x^3)^2} \end{pmatrix}.$$

2. Изменение коэффициентов метрики при замене координат.

1) Найти подходящие замены координат $u \to v \to w$, переводящие друг в друга метрики, полученные в задачах 1.4, 1.5, 1.6.

2) Найти подходящие замены координат $u \to v \to w$, переводящие друг в друга метрики, полученные в задачах 1.8, 1.9, 1.10.

3) Как будет выглядеть метрика псевдосферы, полученная в задаче 1.10, если вместо координат u^1, u^2 ввести координаты $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ по следующим формулам (преобразование Кэли):

$$\begin{cases} u^1 = \dfrac{2R^2\tilde{u}^1}{(\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2 + R)^2}, \\ u^2 = R\dfrac{(\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2 - R^2}{(\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2 + R)^2}, \\ \tilde{u}^1 \in (-\infty, +\infty), u^2 \in (0, +\infty)? \end{cases}$$

4) Как будет выглядеть метрика, полученная в задаче 1.12, если вместо координат u^1, u^2 ввести координаты $\tilde{u}^1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin u^1}{1-\sin u^1}, \tilde{u}^2 = u^2$? Сравнить с результатом задачи 1.8.

5) Как будет выглядеть метрика орисферы, полученная в задаче 1.13, если вместо координат u^1, u^2 ввести координаты $\tilde{u}^1 = \operatorname{tg}\dfrac{u^1}{2}\cos u^2, \tilde{u}^2 = \operatorname{tg}\dfrac{u^1}{2}\sin u^2$? Сравнить с результатом задачи 1.2.

III. Связность. Ковариантные производные.

1. Предположим, что на двумерном многообразии M^2 заданы линейные связности со следующими ненулевыми символами Кристоффеля:

1) $\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1, \Gamma^2_{12} = \dfrac{\cos u^1}{\sin(u^1)}, \Gamma^2_{21} = \dfrac{\cos u^1}{\sin(u^1)}$;

2) $\Gamma^1_{22} = -\text{sh}u^1\text{ch}u^1, \Gamma^2_{12} = \dfrac{\text{ch}u^1}{\text{sh}u^1}, \Gamma^2_{21} = \dfrac{\text{ch}u^1}{\text{sh}u^1}$;

3) $\Gamma^1_{12} = -\dfrac{1}{u^2}, \Gamma^1_{21} = -\dfrac{1}{u^2}, \Gamma^2_{11} = \dfrac{1}{u^2}, \Gamma^2_{22} = -\dfrac{1}{u^2}$;

4) $\Gamma^1_{13} = 1, \Gamma^1_{31} = 1, \Gamma^2_{23} = -1, \Gamma^2_{32} = -1, \Gamma^3_{11} = \mathrm{e}^{-2u^3}, \Gamma^3_{22} = \mathrm{e}^{-2u^3}$.

Для каждой из связностей найти тензор кривизны. Найти тензор кручения и проверить, является ли связность симметрической.

2. Пусть на двумерном многообразии M^2 задана линейная связность из задачи 1.1.

1) Для векторных полей $U = (0,1), V = (u^1, 0), W = (0, u^2)$ и $Y = \left(2(u^1 + u^2 - \dfrac{3\pi}{4}) + 2, -5(u^1 + u^2 - \dfrac{3\pi}{4}) + 8\right)$ вычислить значение ковариантных производных в точке $P \in M^2$ с локальными координатами $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ в направлении вектора $X \in T_P M$ с координатами $(1,1)$.

2) Вдоль кривой $\gamma : u^1 = \phi_0 = const, u^2 = t, t \in [0, 2\pi]$ на M^2 построить параллельные векторные поля со следующими значениями в начальной точке $Q(\phi_0, 0)$: $U_0 = (0,1), V_0 = (1,0), W_0 = (-1,1)$. Какие векторы получаются в $T_{\tilde{Q}}M$ после параллельного перенесения векторов $U_0, V_0, W_0 \in T_Q M$ из точки $Q(t = 0)$ в точку $\tilde{Q}(t = \pi/2)$ вдоль кривой γ? Отождествим точки $Q(t = 0)$ и $\bar{Q}(t = 2\pi)$. Какие векторы получаются в $T_Q M$ после параллельного перенесения векторов $U_0, V_0, W_0 \in T_Q M$ из точки Q в точку $\bar{Q}$ вдоль замкнутой кривой γ? Учитывая линейность связности, записать линейное отображение $L : T_Q M \to T_Q M$, которое индуцируется параллельным перенесением вдоль замкнутой кривой γ (для записи матрицы отображения L использовать канонический базис векторов $\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^1}$ в $T_Q M$). Проанализировать ситуацию в случае $\phi_0 = \pi/2$.

3) Построить геодезическую кривую, выходящую из точки $P(\pi/4, \pi/2)$ в направлении вектора $T = (1,0)$.

3. Пусть на двумерном многообразии M^2 задана линейная связность из задачи 1.3.

1) Для векторных полей $U = (0,1), V = (u^1, 0), W = (0, u^2), Y = (-u^2, u^1)$ вычислить значение ковариантных производных в точке $P \in M^2$ с локальными координатами $(0, \frac{1}{2})$ в направлении вектора $X \in T_P M$ с координатами $(1,1)$.

2) Вдоль кривой $\gamma : u^1 = R\cos t, u^2 = R\sin t, t \in (0, \pi)$ на M^2 построить параллельные векторные поля A, B, C со следующими значениями в начальной точке $Q(t = \pi/4)$: $A_0 = (1,0), B_0 = (0,1), C_0 = (-1,1)$. Какие векторы получаются в $T_{\tilde{Q}}M$ после параллельного переноса векторов $A_0, B_0, C_0 \in T_Q M$ из точки $Q(t = \pi/4)$ в точку $\tilde{Q}(t = 3\pi/4)$ вдоль кривой γ?

3) Вдоль кривой $\bar{\gamma} : u^1 = -\sigma, u^2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $\sigma \in (-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$ на M^2 построить параллельные векторные поля $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ со следующими значениями в начальной точке $Q(\sigma = -\frac{R}{\sqrt{2}})$: $A_0 = (1,0), B_0 = (0,1), C_0 = (-1,1)$. Какие векторы получаются в $T_{\tilde{Q}}M$ после параллельного переноса векторов $A_0, B_0, C_0 \in T_Q M$ из точки Q в точку $\tilde{Q}(\sigma = \frac{R}{\sqrt{2}})$ вдоль кривой $\bar{\gamma}$?

Сравнить результаты параллельных переносов из точки Q в точку $\tilde{Q}$ вдоль γ и вдоль $\bar{\gamma}$.

4) Построить геодезические кривые, выходящие из точки $P(0,1)$ в направлении вектора $T = (1,0)$ и в направлении вектора $S = (0,1)$.

4. Пусть на трехмерном многообразии M^3 задана линейная связность со следующими ненулевыми символами Кристоффеля: $\Gamma^1_{13} = -\frac{1}{u^3}, \Gamma^1_{31} = -\frac{1}{u^3}, \Gamma^2_{23} = -\frac{1}{u^3}, \Gamma^2_{32} = -\frac{1}{u^3}, \Gamma^3_{11} = \frac{1}{u^3}, \Gamma^3_{22} = \frac{1}{u^3}, \Gamma^3_{33} = \frac{1}{u^3}$.

1) Перенести вектор $X \in T_P M$ с координатами $(-1,0,1)$ из точки $P(1,0,1)$ в точку $Q(-1,0,1)$ вдоль кривых $\gamma_1 : u^1 = \sqrt(2)\cos t, u^2 = 0, u^3 = \sqrt(2)\sin t$, $\gamma^2 : u^1 = \hat{t}, u^2 = 0, u^3 = 1$. Сравнить полученные векторы в $T_Q M$.

2) Найти геодезическую кривую, выходящую из точки $K(0,1,1)$ в направлении вектора $Z \in T_K M$ с координатами $(1, 1, -\sqrt{2})$.

5. Линейная связность на многообразии M^2 имеет нулевые символы Кристоффеля в некоторой системе координат u^1, u^2. Как будет задаваться эта линейная связность при переходе к новым координатам v^1, v^2, связанным со старыми координатами формулами $u^1 = v^1 \cos v^2$, $u^2 = v^1 \sin v^2$?

IV. Риманова связность

1. Найти коэффициенты Кристоффеля Γ^k_{ij} римановой связности, тензор римановой кривизны R_{ijkl}, тензор Риччи R_{ij}, скалярную кривизну R_{scal}, секционную кривизну $K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j)$ вдоль координатных двумерных площадок для римановых многообразий со следующими коэффициентами метрического тензора $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$:

1) Евклидова плоскость:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Сфера S^2 радиуса R:

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u^1 \end{pmatrix}.$$

3) Плоскость Лобачевского радиуса R:

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \mathrm{sh}^2 u^1 \end{pmatrix}.$$

4) Плоскость Лобачевского, интерпретация Пуанкаре в верхней полуплоскости:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(u^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(u^2)^2} \end{pmatrix}.$$

5) Плоскость Лобачевского, интерпретация Пуанкаре в единичном круге:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^2} \end{pmatrix}.$$

6) Сфера S^3 радиуса R:

$$\begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u^1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 \end{pmatrix}.$$

7) Пространство Лобачевского, интерпретация Пуанкаре в верхнем полупространстве:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{R^2}{(u^3)^2} \end{pmatrix}.$$

8) Прямое произведение сферы и прямой $S^2 \times R^1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 u^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) Специальные трехмерные геометрии Терстона:

9.1) Sol:

$$\begin{pmatrix} e^{2u^3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2u^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

9.2) Nil:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+(u^1)^2 & -u^1 \\ 0 & -u^1 & 1 \end{pmatrix};$$

9.3) $SL(\tilde{2}, R)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-2u^1} & -e^{-u^1} \\ 0 & -e^{-u^1} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. На сфере S^2 радиуса R (задача 1.2) рассмотрим кривую γ: $u^1 = 0$, $u^2 = t$. Доказать, что γ является геодезической кривой, найти афинный параметр на γ. Найти отронормированные векторные поля ε_1 и ε_2, параллельно переносимые вдоль γ,

3. На плоскости Лобачевского (интерпретация Пуанкаре в верхней полуплоскости, задача 1.4) возьмем две кривые $\gamma_1 : u^1 = \cos t, u^2 = \sin t, t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ и $\gamma_2 : u^1 = -\sigma, u^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, начинающиеся в точке $P(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ и заканчивающиеся в точке $Q(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Перенести векторы $X(-1, 1)$ и $Y(1, 1)$ из точки P в

точку Q вдоль кривых γ_1 и γ_2. Убедиться, что в процессе параллельных переносов длины векторов и угол между ними не изменяются. Сравнить результаты параллельного переноса вдоль γ_1 и γ_2.

4. На плоскости Лобачевского (интерпретация Пуанкаре в верхней полуплоскости, задача 1.4) рассмотрим кривую γ: $u^1 = a + r\cos t$, $u^2 = r\sin t$. Доказать, что γ является геодезической кривой, найти афинный параметр. Найти отронормированные векторные поля ε_1 и ε_2, параллельные вдоль γ,

5. На римановом произведении $S^2 \times R^1$ (задача 1.8) найти геодезические, проведенные из точки P с координатами $(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$ в направлении вектора X с координатами $(0, 0, 1)$, в направлении вектора Y с координатами $(1, 0, 0)$, и в направлении вектора Z с координатами $(1, 0, 1)$.

6. На римановом многообразии Sol из задачи 1.9.1 найти геодезическую, проведенную из точки P с координатами $(1, -1, 3)$ в направлении вектора X с координатами $(0, 0, 2)$.

7. На римановом многообразии Nil из задачи 1.9.2 найти геодезическую, проведенную из точки P с координатами $(0, 0, 0)$ в направлении вектора X с координатами $(1, 0, 1)$.

8. На римановом многообразии $SL(\tilde{2}, R)$ из задачи 1.9.3 найти геодезическую, проведенную из точки P с координатами $(0, 7, 2)$ в направлении вектора X с координатами $(0, 1, 2)$.

9. Доказать, что геодезические на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости (задача 1.4) описываются либо в виде $u^1 = a - r\dfrac{\mathrm{sh}(bt+c)}{\mathrm{ch}(bt+c)}, u^2 = r\dfrac{1}{\mathrm{ch}(bt+c)}$, либо в виде $u^1 = a, u^2 = \mathrm{e}^{bt+c}$. Выяснить, как параметры a, b, c, r определяются заданием точки на геодезической и касательного вектора в этой точке.

10. На плоскости Лобачевского (интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости, задача 1.4) возьмем точку $P(0, h)$. Рассмотрим однопараметрическое семейство геодезических, проходящих через точку P. Для каждой из геодезических найти точки P_1, P_2, находящиеся на расстоянии r от P. Множество таких точек образуют кривую γ – геодезическую окружность плоскости Лобачевского. Записать ее уравнение. Как изображается γ в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости?

11. На плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости (задача 1.4) возьмем геодезическую γ. Через каждую точку P кривой γ проведем ортогональную ей геодезическую и отложим на ней дугу PQ фиксированной длины H. Множество всех таким образом полученных точек Q

представляет собой две кривые – эквидистантами кривой γ. Записать уравнение эквидистант. Как изображаются эквидистантные кривый в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости?

12. Используя преобразование Кэли (задача II.2.3), перейдем от интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости к интерпретации Пуанкаре в единичном круге. Как будут задаваться геодезические, эквидистанты и окружности?

13. На плоскости Лобачевского (интерпретация Пуанкаре в верхней полуплоскости, задача 1.4) найти кривизну k_g линии $u^1 = a + r\cos t$, $u^2 = b + r\sin t$.

V. Поля Якоби

1. На евклидовой плоскости E^2 с метрикой $g = (du^1)^2 + (du^2)^2$ рассмотрим геодезическую линию γ: $u^1 = at+b$, $u^2 = ct+d$. Найти поля Якоби вдоль кривой γ. Показать, что на γ нет сопряженных точек.

2. На сфере S^2 с метрикой $g = R^2\left((du^1)^2 + \cos^2 u^1 (du^2)^2\right)$ рассмотрим геодезическую кривую γ: $u^1 = 0$, $u^2 = t$. Найти поля Якоби вдоль γ. Показать, что для каждой точки $P \in \gamma$ существует сопряженная ей точка $Q \in \gamma$.

3. На плоскости Лобачевского с метрикой $g = \dfrac{1}{(u^2)^2}\left((du^1)^2 + (du^2)^2\right)$ (интерпретация Пуанкаре в верхней полуплоскости) рассмотрим геодезическую кривую γ: $u^1 = a + r\cos t$, $u^2 = r\sin t$. Найти поля Якоби вдоль γ. Показать, что на γ нет сопряженных точек.

4. В трехмерной группе Гейзенберга Nil с метрикой

$$g = (du^1)^2 + (1 + (u^1)^2)(du^2)^2 - 2u^1 du^1 du^2 + (du^3)^2$$

рассмотрим геодезическую линию γ: $u^1 = 0$, $u^2 = 0$, $u^3 = t$. Найти поля Якоби вдоль γ. Показать, что для каждой точки $P \in \gamma$ существует сопряженная ей точка $Q \in \gamma$.

ОТВЕТЫ

I. Длина кривой. Угол между кривыми. Обьем области.

1.1) $2\pi\alpha$, 1.2) α, 1.3) $2\pi\sin\alpha R$, 1.4) $R\alpha$, 1.5) $2\pi\sinh\alpha R$, 1.6) $R\alpha$

1.7) $R\ln 1.\dfrac{(1+\cos\alpha)\sin\beta}{(1+\cos\beta)\sin\alpha}$, 1.8) $R\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$, 1.9) $2\pi\dfrac{r}{\sqrt{b^2-r^2}}R$,

1.10) $\dfrac{R}{c}\sqrt{a^2+b^2}(h_2-h_1)$, 1.11) $2\pi\dfrac{a}{c}R$, 1.12) $R\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$,

1.13) $\sqrt{a^2+c^2}(\beta-\alpha)$, 1.14) $\sqrt{a^2-c^2}(\beta-\alpha)$, 1.15) $2\pi a\sqrt{2}$, 1.16) $4a\sqrt{2}$, 1.17) $\sqrt{2}R\ln\dfrac{(1+\cos\alpha)\sin\beta}{(1+\cos\beta)\sin\alpha}$.

2.1) $\cos\phi=0$, 2.2) $\cos\phi=\dfrac{r_1^2+r_2^2-(a_2-a_1)^2}{2r_1r_2}$, 2.3) $\cos\phi=\left|\dfrac{a_2-a_1}{r_1}\right|$,
2.4) $\cos\phi=0$, 2.5) $\cos\phi=0$.

3) $(u^1-r)^2+(u^2)^2=r^2$, r – параметр; $\cos\alpha u^1+\sin\alpha u^2=0$, α – параметр.

4) $P_\Delta=2R^2\left(\ln(2+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$, $\sum_\Delta=\dfrac{7\pi}{6}$.

5.1) $\dfrac{1}{2}(\beta_1^2-\alpha_1^2)(\beta_2-\alpha_2)$; 5.2) $R^2(\cos\alpha_1-\cos\beta_1)(\beta_2-\alpha_2)$;
5.3) $R^2(\mathrm{ch}\beta_1-\mathrm{ch}\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)$; 5.4) $R^2(b_1-a_1)\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{b_2}\right)$;
5.5) $R^2 2\arccos\dfrac{r_1}{r_2}$; 5.6) $R^2\dfrac{2}{a}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$; 5.7) $2\pi\left(\dfrac{b}{\sqrt{b^2-r^2}}-1\right)R^2$;
5.8) $R^3\left(\dfrac{\beta_1-\alpha_1}{2}-\dfrac{\sin 2\beta_1-\sin 2\alpha_1}{4}\right)(\cos\alpha_2-\cos\beta_2)(\beta_3-\alpha_3)$.

II. Индуцированная метрика

1.1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; 1.2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; 1.3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; 1.4) $\begin{pmatrix}R^2&0\\0&R^2\sin^2 u^1\end{pmatrix}$;

1.5) $\begin{pmatrix}\dfrac{R^2-(v^2)^2}{R^2-(v^1)^2-(v^2)^2}&\dfrac{v^1v^2}{R^2-(v^1)^2-(v^2)^2}\\ \dfrac{v^1v^2}{R^2-(v^1)^2-(v^2)^2}&\dfrac{R^2-(v^1)^2}{R^2-(v^1)^2-(v^2)^2}\end{pmatrix}$;

1.6) $\begin{pmatrix}\dfrac{4R^4}{(R^2+(w^1)^2+(w^2)^2)^2}&0\\0&\dfrac{4R^4}{(R^2+(w^1)^2+(w^2)^2)^2}\end{pmatrix}$;

1.7) $\begin{pmatrix}\hat{R}^2&0\\0&\hat{R}^2\sin^2 u^1\end{pmatrix}$, где $\hat{R}=R\sin\phi_0$;

1.8) $\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\text{sh}^2 u^1 \end{pmatrix}$;

1.9) $\begin{pmatrix} \dfrac{R^2+(v^2)^2}{R^2+(v^1)^2+(v^2)^2} & -\dfrac{v^1v^2}{R^2+(v^1)^2+(v^2)^2} \\ -\dfrac{v^1v^2}{R^2+(v^1)^2+(v^2)^2} & \dfrac{R^2+(v^1)^2}{R^2+(v^1)^2+(v^2)^2} \end{pmatrix}$;

1.10) $\begin{pmatrix} \dfrac{4R^4}{(R^2-(w^1)^2-(w^2)^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{4R^4}{(R^2-(w^1)^2-(w^2)^2)^2} \end{pmatrix}$;

1.11) $\begin{pmatrix} R^2\text{ctg}^2 u^1 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2 u^1 \end{pmatrix}$; 1.12) $\begin{pmatrix} \dfrac{r^2}{\cos^2 u^1} & 0 \\ 0 & \dfrac{r^2\sin^2 u^1}{\cos^2 u^1} \end{pmatrix}$;

1.13) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+\cos u^1)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\cos u^1}{1+\cos u^1} \end{pmatrix}$.

2.1) $v^1 = \dfrac{2R^2w^1}{R^2+(w^1)^2+(w^2)^2}, \quad v^2 = \dfrac{2R^2w^2}{R^2+(w^1)^2+(w^2)^2},$

$$w^1 = R\frac{\cos u^1+1}{\sin u^1}\cos u^2, \quad w^2 = R\frac{\cos u^1+1}{\sin u^1}\sin u^2;$$

2.2) $v^1 = \dfrac{2R^2w^1}{R^2-(w^1)^2-(w^2)^2}, \quad v^2 = \dfrac{2R^2w^2}{R^2-(w^1)^2-(w^2)^2},$

$$w^1 = R\frac{\text{ch}u^1-1}{\text{sh}u^1}\cos u^2, \qquad w^2 = R\frac{\text{ch}u^1-1}{\text{sh}u^1}\sin u^2;$$

2.3) $\begin{pmatrix} \dfrac{R^2}{(\tilde{u}^2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{R^2}{(\tilde{u}^2)^2} \end{pmatrix}$; 2.4) $\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\text{sh}^2\tilde{u}^1 \end{pmatrix}$; 2.5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III. Связность. Ковариантные производные.

1.1) $R_{1212} = \sin^2 u^1$; связность симметрическая.
1.2) $R_{1212} = -\mathrm{sh}^2 u^1$; связность симметрическая.
1.3) $R_{1212} = -\dfrac{1}{(u^2)^4}$; связность симметрическая.
1.4) $R_{1212} = 1, R_{1313} = R_{2323} = -\mathrm{e}^{-2u^3}$; связность симметрическая.

2.1) $\nabla_X U = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\nabla_X V = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\nabla_X W = \left(-\frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{2}\right)$, $\nabla_X Y = (0, 0)$.

2.2) $U = (\sin(\phi_0)\sin(t\cos(\phi_0)), \cos(t\cos(\phi_0)))$,
$V = \left(\cos(t\cos(\phi_0)), -\dfrac{\sin(t\cos(\phi_0))}{\sin(\phi_0)}\right)$, $W = U - V$,

$$L\begin{pmatrix} \cos(2\pi\cos(\phi_0)) & \sin(2\pi\cos(\phi_0))\sin(\phi_0) \\ \dfrac{\sin(2\pi\cos(\phi_0))}{\sin(\phi_0)} & \cos(2\pi\cos(\phi_0)) \end{pmatrix}.$$

2.3) $u^1 = t + \frac{\pi}{4}, u^2 = \frac{\pi}{2}$.

3.1) $\nabla_X U = (-2, 2)$, $\nabla_X V = (1, 1)$, $\nabla_X W = (0, 0)$, $\nabla_X Y = (0, 0)$.

3.2) $A = ((\cos t + \sin t)\sin t, -(\cos t - \sin t)\sin t)$,
$B = ((\cos t - \sin t)\sin t, (\cos t + \sin t)\sin t)$, $C = B - A$.

3.3) $\bar{A} = (\cos(1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\sigma), \sin(1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\sigma))$,
$\bar{B} = (-\sin(1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\sigma), \cos(1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\sigma))$, $\bar{C} = \bar{B} - \bar{A}$.

3.4) $\gamma_T : u^1 = \mathrm{th}t, u^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}t}$; $\gamma_S : u^1 = 0, u^2 = \mathrm{e}^t$.

4.1) Показать, что векторное поле $\tilde{X} = (\cos 2t - 1, 0, \sin 2t)$ является параллельным вдоль кривой γ_1; показать, что векторное поле $\hat{X} = (-\cos(t+1) + \sin(t+1), \cos(t+1) + \sin(t+1))$ является параллельным вдоль кривой γ_2.

4.2) $u^1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2-\sqrt{2})(1-e^{-4t})}{1+(3-2\sqrt{2})e^{-4t}}$, $u^2 = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(2-\sqrt{2})(1-e^{-4t})}{1+(3-2\sqrt{2})e^{-4t}}$,
$u^3 = 2\dfrac{(2-\sqrt{2})e^{-2t}}{1+(3-2\sqrt{2})e^{-4t}}$.

5) $\Gamma^2_{12} = \dfrac{1}{v^1}$, $\Gamma^1_{22} = -v^1$.

IV. Риманова связность.

1.1) $\Gamma^k_{ij}=0,\ R_{ijkl}=0,\ R_{ij}=0,\ R_{scal}=0,\ K_{12}=0.$

1.2) $\Gamma^1_{22}=-\sin u^1\cos u^1, \Gamma^2_{12}=\mathrm{ctg} u^1,\ R_{1212}=R^2\sin^2 u^1,$

$R_{11}=1, R_{22}=\sin^2 u^1,\ R_{scal}=\dfrac{2}{R^2},\ K_{12}=\dfrac{1}{R^2}.$

1.3) $\Gamma^1_{22}=-\mathrm{sh}u^1\mathrm{ch}u^1, \Gamma^2_{12}=\mathrm{cth}u^1,\ R_{1212}=-R^2\mathrm{sh}^2u^1,$

$R_{11}=-1, R_{22}=-\mathrm{sh}^2u^1,\ R_{scal}=-\dfrac{2}{R^2},\ K_{12}=-\dfrac{1}{R^2}.$

1.4) $\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{22}=-\dfrac{1}{u^2}, \Gamma^2_{11}=\dfrac{1}{u^2},\ R_{1212}=-\dfrac{1}{(u^2)^4},$

$R_{11}=-\dfrac{1}{(u^2)^2}, R_{22}=-\dfrac{1}{(u^2)^2},\ R_{scal}=-2,\ K_{12}=-1.$

1.5) $\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}\dfrac{2u^1}{1-(u^1)^2-(u^2)^2},$

$\Gamma^1_{12}=-\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}\dfrac{2u^2}{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ R_{1212}=-\dfrac{16}{1-(u^1)^2-(u^2)^2},$

$R_{11}=R_{22}=-\dfrac{4}{1-(u^1)^2-(u^2)^2},\ R_{scal}=-2,\ K_{12}=-1.$

1.6) $\Gamma^1_{22}=-\sin u^1\cos u^1, \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\mathrm{ctg}u^1, \Gamma^3_{23}=\mathrm{ctg}u^2,$

$\Gamma^1_{33}=-\sin u^1\cos u^1\sin^2 u^2, \Gamma^2_{33}=-\sin u^2\cos u^2,$

$R_{1212}=R^2\sin^2 u^1, R_{1313}=R^2\sin^2 u^1\sin^2 u^2, R_{2323}=R^2\sin^4 u^1\sin^2 u^2,$

$R_{11}=2, R_{22}=2\sin^2 u^1, R_{33}=2\sin^2 u^1\sin^2 u^2,\ R_{scal}=\dfrac{6}{R^2},$

$K_{12}=\dfrac{1}{R^2}, K_{13}=\dfrac{1}{R^2}, K_{23}=\dfrac{1}{R^2}.$

1.7) $\Gamma^1_{13}=\Gamma^2_{23}=\Gamma^3_{33}=-\dfrac{1}{u^3}, \Gamma^3_{11}=\Gamma^3_{22}=\dfrac{1}{u^3},$

$R_{1212}=R_{1313}=R_{2323}=-\dfrac{R^2}{(u^3)^4},$

$R_{11}=R_{22}=R_{33}=-\dfrac{1}{(u^2)^2}, R_{22}=-\dfrac{1}{(u^2)^2},\ R_{scal}=-\dfrac{6}{R^2},$

$K_{12}=K_{13}=K_{23}=-\dfrac{1}{R^2}.$

1.8) $\Gamma^1_{22}=-\sin u^1\cos u^1, \Gamma^2_{12}=\mathrm{ctg}u^1,$

$$R_{1212}=R^2\sin^2 u^1,\ R_{11}=1, R_{22}=\sin^2 u^1,\ R_{scal}=\frac{2}{R^2},$$
$$K_{12}=\frac{1}{R^2}, K_{13}=K_{23}=0.$$

1.9.1) $\Gamma^1_{13}=1, \Gamma^2_{23}=-1, \Gamma^3_{11}=-\mathrm{e}^{2u^3}, \Gamma^3_{22}=\mathrm{e}^{-2u^3}$,
$R_{1212}=1, R_{1313}=-\mathrm{e}^{2u^3}, R_{2323}=-\mathrm{e}^{-2u^3},\ R_{33}=-2,\ R_{scal}=-2,$
$K_{12}=1, K_{13}=-1, K_{23}=-1.$

1.9.2) $\Gamma^1_{22}=-u^1, \Gamma^1_{23}=\frac{1}{2}, \Gamma^2_{12}=\frac{u^1}{2}, \Gamma^2_{13}=-\frac{1}{2}, \Gamma^3_{12}=\frac{1}{2}((u^1)^2-1), \Gamma^3_{13}=-\frac{u^1}{2}$,
$R_{1212}=\frac{1}{4}((u^1)^2-3), R_{1313}=\frac{1}{4}, R_{1213}=-\frac{u^1}{4}, R_{2323}=\frac{1}{4},$
$R_{11}=-\frac{1}{2}, R_{22}=\frac{1}{2}((u^1)^2-1), R_{23}=-\frac{u^1}{2}, R_{33}=\frac{1}{2},\ R_{scal}=-\frac{1}{2},$
$K_{12}=\frac{((u^1)^2-3)}{4((u^1)^2+1)}, K_{13}=K_{23}=\frac{1}{4}.$

1.9.3) $\Gamma^1_{22}=2\mathrm{e}^{-2u^1}, \Gamma^1_{23}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u^1}, \Gamma^2_{12}=-\frac{3}{2}$,
$\Gamma^2_{13}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^1}, \Gamma^3_{12}=-\mathrm{e}^{-u^1}, \Gamma^3_{13}=-\frac{1}{2},$
$R_{1212}=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2u^1}, R_{1313}=\frac{1}{4}, R_{1213}=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-u^1}, R_{2323}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2u^1},$
$R_{11}=\frac{3}{2}, R_{22}=\mathrm{e}^{-2u^1}, R_{23}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u^1}, R_{33}=-\frac{1}{2},\ R_{scal}=\frac{5}{2},$
$K_{12}=-\frac{3}{4}, K_{13}=K_{23}=\frac{1}{4}.$

2. $\varepsilon_1=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial_2},\ \varepsilon_2=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial_1}.$

3. Проверить, что векторные поля $\hat{X}=(-2\sin^2 t, 2\sin t\cos t)$ и $\hat{Y}=(2\sin t\cos t, -2\sin^2 t)$ параллельны вдоль кривой γ_1; проверить, что векторные поля $\tilde{X}=\big(-\sin(1+\sqrt{2}\sigma)-\cos(1+\sqrt{2}\sigma), -\sin(1+\sqrt{2}\sigma)+\cos(1+\sqrt{2}\sigma)\big)$ и $\tilde{Y}=\big(-\sin(1+\sqrt{2}\sigma)+\cos(1+\sqrt{2}\sigma), \sin(1+\sqrt{2}\sigma)+\cos(1+\sqrt{2}\sigma)\big)$ параллельны вдоль кривой γ_2.

4. $\varepsilon_1=r\sin t\left(-\sin t\frac{\partial}{\partial_1}+\cos t\frac{\partial}{\partial_2}\right),\ \varepsilon_2=r\sin t\left(\cos t\frac{\partial}{\partial_1}+\sin t\frac{\partial}{\partial_2}\right).$

5. $\gamma_X: u^1=\frac{\pi}{2}, u^2=0, u^3=t+1;\ \gamma_Y: u^1=t+\frac{\pi}{2}, u^2=0, u^3=1;$
$\gamma_Z: u^1=t+\frac{\pi}{2}, u^2=0, u^3=t+1.$

6. $u^1 = 1, u^2 = -1, u^3 = 2t + 3$

7. $u^1 = \sin t, u^2 = 1 - \cos t, u^3 = \dfrac{3}{2}t - \dfrac{1}{2}\cos t \sin t$

8. $u^1 = 0, u^2 = t + 7, u^3 = 2t + 2$

10. $(u^1)^2 + (u^2 - h\mathrm{ch}r)^2 = h^2\mathrm{sh}^2 R$

11. $u^1 \pm u^2 \mathrm{sh} H = 0$

13. $k_g = \left|\dfrac{b}{r}\right|$

V. Поля Якоби.

1. Поля Якоби: $V = (At+B)\frac{\partial}{\partial u^1} + (Ct+D)\frac{\partial}{\partial u^2}$, где A, B, C, D – произвольные константы.

2. Поля Якоби: $V = (At + B)\varepsilon_1 + \left(C\cos\frac{t}{R} + D\sin\frac{t}{R}\right)\varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 – параллельно переносимые вдоль γ ортонормированные векторные поля (см. задачу IV.2), A, B, C, D – произвольные константы.

3. Поля Якоби: $V = (At + B)\varepsilon_1 + (C\cosh t + D\sinh t)\,\varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 – параллельно переносимые вдоль γ ортонормированные векторные поля (см. задачу IV.4), A, B, C, D – произвольные константы.

4. Поля Якоби:
$$V = (A\sin t + B\cos t + D)\,\frac{\partial}{\partial u^1} + (-A\cos t + B\sin t + E)\,\frac{\partial}{\partial u^2} + (Ct + F)\,\frac{\partial}{\partial u^3},$$
где A, B, C, D, E, F – произвольные константы.

Литература

1. Э.Г.Позняк, Е.В.Шикин *Дифференциальная геометрия. Первое знакомство.* – М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер *Введение в риманову геометрию.* – С.-П.: Наука, 1994.
3. Д.Громолл, В.Клингенберг, В.Мейер *Риманова геометрия "в целом".* – М.: Мир, 1971.
4. П.К.Рашевский *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: Наука, 1967
5. J.M.Lee *Riemannian manifolds.* – Springer, 1997.
6. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко *Современная геометрия. Методы и приложения.* – М.: Наука, 1986.