КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико - математический факультет

ШАПУКОВ Б.Н.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Специальность 010500 — Механика

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

I. ТЕОРИЯ КРИВЫХ.

Лекция 1. Векторные функции.
1.1. Понятие векторной функции. Предел и непрерывность.
1.2. Дифференциал и производные векторных функций.

Лекция 2. Специальные векторные функции.
2.1. Регулярные векторные функции.
2.2. Другие специальные векторные функции.
2.3. Векторные функции скалярного аргумента. Круговые векторные функции.

Лекция 3. Теория кривых в евклидовом пространстве.
3.1. Понятие кривой. Параметризованные кривые.
3.2. Длина дуги и натуральный параметр кривой.
3.3. Касательная прямая кривой.

Лекция 4. Плоские кривые.
4.1. Неявное и приведенное уравнения плоской кривой.
4.2. Касательная и нормаль.
4.3. Особые точки плоской кривой.

Лекция 5. Кривизна плоской кривой.
5.1. Сопровождающий репер кривой.
5.2. Формулы Френе и кривизна плоской кривой.
5.3. Геометрический смысл кривизны. Эволюта.

Лекция 6. 1-параметрические семейства плоских кривых.
6.1. Семейства плоских кривых. Примеры.
6.2. Огибающая однопараметрического семейства.

Лекция 7. Кривые в 3-мерном евклидовом пространстве.
7.1. Уравнения пространственной кривой.
7.2. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость.
7.3. Сопровождающий репер и формулы Френе. Кривизна и кручение.

Лекция 8. Строение пространственной кривой.
8.1. Геометрический смысл кривизны и кручения.
8.2. Кинематический смысл кривизны и кручения.
8.3. Вычисление кривизны и кручения.
8.4. Строение кривой в окрестности данной точки.

II. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Лекция 9. Тензоры в векторном пространстве.
9.1. Понятие тензора. Компоненты тензора и закон их преобразования.

9.2. Основные тензорные операции.

Лекция 10. Тензоры в евклидовом пространстве.
10.1. Опускание и поднятие индекса.
10.2. Дискриминантный тензор.

Лекция 11. Поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве.
11.1. Понятие поверхности. Параметрическое, неявное и приведенное уравнения.
11.2. Пути на поверхности. Координатная сеть и натуральный репер.
11.3. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Лекция 12. Специальные виды поверхностей.
12.1. Поверхности вращения.
12.2. Винтовые поверхности.
12.3. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

Лекция 13. Первая фундаментальная форма поверхности.
13.1. Тензорные поля на поверхности.
13.2. Определение первой фундаментальной формы. Метрический тензор.
13.3. Длина пути на поверхности. Угол между путями.
13.4. Площадь области на поверхности.

Лекция 14. Отображение поверхностей.
14.1. Отображение поверхностей и его дифференциал.
14.2. Изометрия и изгибание поверхностей.
14.3. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

Лекция 15. Деривационные уравнения поверхности.
15.1. Сопровождающий репер и деривационные уравнения поверхности.
15.2. Вторая фундаментальная форма поверхности.
15.3. Оператор Вейнгартена.

Лекция 16. Нормальная кривизна.
16.1. Нормальная кривизна.
16.2. Теорема Менье.
16.3. Главные направления и главные кривизны поверхности.
16.4. Средняя и гауссова кривизны.

Лекция 17. Локальное строение поверхности.
17.1. Формула Эйлера.
17.2. Строение поверхности в окрестности данной точки.
17.3. Теорема Гаусса.

Лекция 18. Абсолютный дифференциал и ковариантные производные.
18.1. Символы Кристоффеля.
18.2. Абсолютный дифференциал векторного поля.
18.3. Ковариантные производные.

Лекция 19. Параллельное перенесение и геодезические пути.
19.1. Параллельное перенесение вектора по поверхности.
19.2. Геодезические пути.
19.3. Геодезическая кривизна пути на поверхности.

Лекция 20. Поверхности постоянной кривизны.
20.1. Полугеодезические координаты на поверхности.
20.2. Поверхности постоянной кривизны.
20.3. Псевдосфера и геометрия Лобачевского.

III. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Лекция 21. Понятие гладкого многообразия.
21.1. Определение гладкого многообразия.
21.2. Касательное и кокасательное пространства.
21.3. Векторные поля и их интегральные пути. Коммутатор векторных полей.

Лекция 22. Ковариантное дифференцирование на многообразиях.
22.1. Тензорные поля на многообразии.
22.2. Ковариантное дифференцирование и связность.
22.3. Параллельное перенесение и геодезические линии.

Лекция 23. Тензор кривизны.
23.1. Тензор кривизны.
23.2. Геометрический смысл тензора кривизны.

Лекция 24. Римановы многообразия.
24.1. Риманова метрика и риманова связность.
24.2. Дифференциальные операторы в теории поля.

Лекция 25. Тензор кривизны римановых пространств.
25.1. Свойства тензора кривизны римановых пространств.
25.2. Пространства нулевой кривизны.

Лекция 26. Интегральные теоремы теории поля.
26.1. Работа и циркуляция векторного поля.
26.2. Поток векторного поля.
26.3. Соленоидальные векторные поля.

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Лекция 27. Алгебра внешних форм.
27.1. Симметрирование и альтернирование тензоров.
27.2. Косое проиведение и внешние формы.

Лекция 28. Интегрирование на многообразиях.
28.1. Внешний дифференциал и его свойства.
28.2. Интегрирование дифференциальных форм.

Лекция 29. Формула Стокса и ее следствия.
29.1. Многообразия с краем.
29.2. Формула Стокса.
29.3. Следствия формулы Стокса.
Лекция 30. Вариационные методы в геометрии.
30.1. Простейшая вариационная задача.
30.2. Экстремальное свойство геодезических.
30.3. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро.

Лекция 31*. Геометрические методы в аналитической механике.
31.1. Вариационные принципы механики. Уравнения Лагранжа.
31.2. Гамильтонова механика и симплектическая геометрия.
31.3. Скобки Пуассона.
31.4. Гамильтоновы потоки и первые интегралы.

Литература

Введение

Настоящий курс лекций “Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа” соответствует государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования по специальности 010500 “Механика”. Для удобства он разбит на четыре раздела.

В содержание настоящих лекций в пределах допустимых норм внесены некоторые изменения. Они объясняются особенностью курсов по механике, читаемых в Казанском государственном университете и направленностью научных исследований. Говоря конкретно, за счет сокращения некоторого материала дополнительно изложены следующие вопросы:
1) Особые точки плоских кривых;
2) Семейства плоских кривых и их огибающие;
3) Отображение поверхностей, в частности их изометрия и изгибание. На этой основе дано понятие о внутренней геометрии поверхности;
4) Мы посчитали целесообразным в основу теории кривизны поверхности положить не вторую квадратичную форму, а ее деривационные уравнения и оператор Вейнгартена;
5) Включены также вопросы, посвященные геометрическим методам лагранжевой и гамильтоновой механики, симплектической геометрии. Впрочем, этот материал не входит в программу курса и предназначен для тех, кто желает познакомиться с приложениями геометрических методов в аналитической механике. Эта лекция омечена звездочкой.

Проф. Шапуков Б.Н.

I. ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Прежде, чем приступать к изучению кривых и поверхностей, мы напомним основные понятия математического анализа, изложив их на языке векторных функций и вводя необходимые обозначения [2], [9].

ЛЕКЦИЯ 1. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Понятие векторной функции. Предел и непрерывность.

Мы будем иметь дело с n-мерными вещественными евклидовыми пространствами $\mathbb{E}^n$. При этом всякая точка $A \in \mathbb{E}^n$ задается радиусом-вектором $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ относительно выбранного начала O.

Определение. *Векторная функция (короче — в. ф), определенная на подмножестве $U \subset \mathbb{E}^m$ со значениями в $\mathbb{E}^n$ — это отображение $\boldsymbol{r} : U \to \mathbb{E}^n$, которое всякому вектору $\boldsymbol{u} \in U$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{u}) \subset \mathbb{E}^n$.*

Для векторных функций применимы обычные алгебраические операции сложения $\mathbf{r}_1(\mathbf{u})+\mathbf{r}_2(\mathbf{u})$ и умножения на скалярную функцию $\lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}(\mathbf{u})$. Скалярное произведении векторных функций $(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u}))$, модуль векторной функции $|\mathbf{r}(\mathbf{u})| = \sqrt{(\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{r}(\mathbf{u}))}$, а в 3-мерном случае также и векторное произведение $[\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})]$ выполняются поточечно.

В евклидовых пространствах мы будем рассматривать стандартную метрическую топологию, задав расстояние между точками формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Напомним некоторые понятия из топологии.

Определение. *Открытый шар в $\mathbb{E}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром $\boldsymbol{x}_0$ — это множество $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon\}$. Оно называется ε-окрестностью точки $\mathbf{x}_0$.*

Определение. *Множество $U \subset \mathbb{E}^n$ называется открытым, если для всякой его точки $\boldsymbol{x}$ существует ε-окрестность, содержащаяся в U. Дополнение открытого множества есть по определению множество замкнутое.*

Определение. *Открытое множество называется связным, если его нельзя представить как объединение непустых, открытых и непересекающихся множеств. Открытое связное множество называют областью.*

Определение. *Окрестностью точки $\boldsymbol{x}_0$ называется всякая область U, содержащая эту точку.*

Пусть в. ф. $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ определена в окрестности точки $\mathbf{u}_0$, кроме, может быть, самой этой точки.

Определение. *Вектор* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{E}^n$ *называется пределом в. ф. и обозначается* $\boldsymbol{c} = \lim\limits_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{u}_0} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$ *, что*

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{c}| < \varepsilon,$$

т.е. для любого шара $B(\mathbf{c}, \varepsilon) \subset \mathbb{E}^n$ найдется шар $B(\mathbf{u}_0, \delta) \subset U$ такой, что его образ принадлежит $B(\mathbf{c}, \varepsilon)$: $\mathbf{r}(B(\mathbf{u}_0, \delta)) \subset B(\mathbf{c}, \varepsilon)$.

Выполняются следующие свойства предела. При $\mathbf{u} \to \mathbf{u}_0$

1) $\lim(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{u})) = \lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}) + \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u})$;
2) $\lim(\lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}(\mathbf{u})) = \lim \lambda(\mathbf{u}) \lim \mathbf{r}(\mathbf{u})$;
3) $\lim \mathbf{c} = \mathbf{c}$;

Отсюда следует, что $\lim(\mathbf{c}\mathbf{r}(\mathbf{u})) = \mathbf{c} \lim \mathbf{r}(\mathbf{u})$. Пределы скалярного и (при $n = 3$) векторного произведения обладают обычными свойствами:

4) $\lim(\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})) = (\lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u}))$;
5) $\lim[\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u})] = [\lim \mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \lim \mathbf{r}_2(\mathbf{u})]$.

Определение. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *, определенная в некоторой окрестности точки* $\boldsymbol{u}_0$ *, называется непрерывной в этой точке, если* $\lim \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{u}_0} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_0)$ *. В. ф. называется непрерывной в области* U *, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

Из перечисленных выше свойств предела следует, что сумма и произведения непрерывных в. ф. суть непрерывные функции.

Определение. *Пусть* $m = n$ *. Отображение* $\boldsymbol{r} : U \to \boldsymbol{r}(U)$ *, определяемое векторной функцией, называется гомеоморфным, если оно взаимно однозначно и в обе стороны непрерывно.*

Пусть $\{\mathbf{p}_\alpha\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — базис пространства $\mathbb{E}^m$ и $\{\mathbf{e}_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — базис пространства $\mathbb{E}^n$. Тогда $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i$. Следовательно, в. ф. может быть представлена в координатах $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = x^i(u^1, \ldots, u^m)\mathbf{e}_i$. Таким образом, задание в.ф. эквивалентно заданию n скалярных функций от m переменных

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m).$$

Заметим, однако, что это координатное представление в.ф. зависит от выбора базисов.

Из свойств предела вытекает

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{u}_0} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{u}_0} x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i.$$

Отсюда получаем следующие свойства:

1) *Координаты предела в. ф. суть пределы ее координат.*

2) *В. ф. непрерывна тогда и только тогда, когда ее координаты суть непрерывные функции.*

1.2. Дифференциал и производные векторных функций.

Рассмотрим значение в. ф. в точке $\mathbf{u}$ и в точках $\mathbf{u}+\mathbf{h}$ некоторой ее окрестности.

Определение. *В. ф. называется дифференцируемой в точке* $\boldsymbol{u}$*, если разность ее значений в этих точках может быть представлена в виде*

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}+\mathbf{h})-\mathbf{r}(\mathbf{u})=d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})+\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h}), \tag{1}$$

где в. ф. $d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})$ является *линейной формой* по $\mathbf{h}$, а вектор $\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h})$ имеет более высокий порядок малости, чем $|\mathbf{h}|$, т. е.

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{0}^1(\mathbf{u},\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|}=0.$$

Линейная форма $d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})$ называется *дифференциалом* данной в. ф. в точке $\mathbf{u}$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Например, дифференциал 2-го порядка определяется соотношением

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}+\mathbf{h})=\mathbf{r}(\mathbf{u})+d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})+\frac{1}{2!}d^2\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h},\mathbf{h})+\mathbf{0}^2(\mathbf{u},\mathbf{h}),$$

где $d^2\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h},\mathbf{h})$ есть *квадратичная форма* по $\mathbf{h}$, а $\mathbf{0}^2(\mathbf{u},\mathbf{h})$ имеет более высокий порядок малости, чем $|\mathbf{h}|^2$.

Определение. *В. ф. называется дифференцируемой класса* C^k*, если существуют ее дифференциалы до* k*-го порядка.*

В дальнейшем мы будем считать, что в. ф. допускают производные любого порядка или, как говорят, являются *гладкими.*

Займемся более подробно дифференциалом первого порядка. Отметим его свойства, которые вытекают из соответствующих свойств предела (аргументы опускаем):

1) $d(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=d\mathbf{r}_1+d\mathbf{r}_2$;
2) $d(\lambda\mathbf{r})=d\lambda\mathbf{r}+\lambda d\mathbf{r}$;
3) $d\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

Обычным образом дифференцируются скалярное и векторное произведения (в последнем случае с сохранением порядка сомножителей):

4) $d(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=(d\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+(\mathbf{r}_1,d\mathbf{r}_2)$;
5) $d[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]=[d\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]+[\mathbf{r}_1,d\mathbf{r}_2]$.

Пусть в. ф. задана в координатах $\mathbf{r}(\mathbf{u})=x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i$, где $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис в $\mathbb{E}^n$. Дифференцируя, получим

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{h})=dx^i(\mathbf{u},\mathbf{h})\mathbf{e}_i. \tag{2}$$

Поэтому *координаты дифференциала в. ф. суть дифффференциалы ее координат.*

Пусть $\{\mathbf{p}_\alpha\}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ — базис пространства $\mathbb{E}^m$ и $\mathbf{h} = h^\alpha \mathbf{p}_\alpha$. Тогда, учитывая линейность дифференциала по $\mathbf{h}$, его координатное представление можно записать так $d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\alpha)h^\alpha$. Коэффициенты этого выражения суть векторные функции, для которых приняты обозначения

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_\alpha) := \partial_\alpha \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}. \tag{3}$$

Они называются *частными производными* в. ф. В силу (2) координаты производных равны $\partial_\alpha \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \partial_\alpha x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i$, так что в итоге

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = h^\alpha \partial_\alpha x^i(\mathbf{u})\mathbf{e}_i. \tag{4}$$

Если, в частности, вектор $\mathbf{h}$ задает фиксированное направление в пространстве, то это выражение называют *производной в направлении вектора* $\mathbf{h}$.

Отмеченные выше свойства дифференциала, очевидно, переносятся на свойства производных. Для этого достаточно в соответствующих равенствах положить $\mathbf{h} = \mathbf{p}_\alpha$. Например, при дифференцировании скалярного произведения имеем

$$\partial_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\partial_\alpha \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_1, \partial_\alpha \mathbf{r}_2).$$

При $n = 3$ аналогичное правило имеем при дифференцировании векторного и смешанного произведений.

ЛЕКЦИЯ 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Регулярные векторные функции.

Пусть $d\mathbf{r}$ — дифференциал векторной функции . Составим из его координат (4) прямоугольную $(m \times n)$-матрицу

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 x^1 & \ldots & \partial_m x^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 x^n & \ldots & \partial_m x^n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Она называется *якобиевой матрицей* векторной функции.

Определение. *В. ф. называется регулярной в точке* $\boldsymbol{u}$*, если ранг* r *ее якобиевой матрицы в этой точке максимален:* $\mathrm{rank} J = \max\{m, n\}$. *В. ф. называется регулярной в области, если она регулярна в каждой точке этой области.*

Точки, в которых ранг в. ф. не достигает максимального значения, называются ее *критическими точками.*

Определение. *Точка* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n$ *называется регулярным значением отображения* $\boldsymbol{r} : U \to \mathbb{E}^n$ *, если она регулярна в каждой точке прообраза* $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{x}) \subset \mathbb{E}^m$.

Пусть в. ф. регулярна в точке $\mathbf{u}_0$. Тогда возможны следующие случаи:

$$1)\, m = n = r; \quad 2)\, m < n,\, r = m; \quad 3)\, m > n,\, r = n.$$

Определение. *Диффеоморфизмом называется отображение* $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *, которое взаимно однозначно (биективно) и гладко вместе со своим обратным отображением* $\boldsymbol{r}^{-1}$.
Другими словами, это гомеоморфизм, гладкий в обе стороны. Ясно, что в этом случае $m = n = r$ при любом выборе точки $\mathbf{u} \in U$. Верно ли обратное? Справедлива

Теорема 1. (Об обратной функции). *Пусть* $m = n$ *и в. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *регулярна в точке* $\boldsymbol{u}_0$ *. Тогда существует такая* ε*-окрестность* B *этой точки, что ограничение отображения на эту окрестность* $\boldsymbol{r}|_B$ *является диффеоморфизмом.*

Если $m = n = r$ в области U , то в силу этой теоремы она определяет диффеоморфное отображение в некоторой ε-окрестности каждой точки этой области, но в каждой из этих окрестностей диффеоморфизмы могут быть разные. Отображение в целом "склеено"из таких диффеоморфизмов и называется *локальным диффеоморфизмом.*

Пусть теперь $m < n$ и в. ф. регулярна в каждой точке области определения. Тогда соответствующее отображение называется *иммерсией* или *погружением*, а множество значений этой функции $\mathbf{r}(u^1, \ldots, u^m) \subset \mathbb{E}^n$ образует некоторое подмножество $M \subset \mathbb{E}^n$, которое называется *подмногообразием.* В дальнейшем мы столкнемся с такой ситуацией при изучении кривых и поверхностей евклидова пространства. В частности, если отображение является гомеоморфизмом на свой образ, то говорят о *вложении* и, соответственно, о *вложенном подмногообразии.*

Рассмотрим случай $m > n$. Если в. ф. регулярна в каждой точке области определения, то отображение называют *субмерсией.*

Теорема 2. (о прообразе регулярного значения) *Пусть* $m > n$ *и* $c \in \mathbb{E}^n$ *— регулярное значение гладкого отображения* $\boldsymbol{r}$*. Тогда прообраз* $\boldsymbol{r}^{-1}(c) \subset \mathbb{E}^m$ *(если он не пуст) является вложенным подмногообразием размерности* $m - n$ *.*

Рассмотрим эту ситуацию в координатах. Мы имеем систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} x^1(u^1,\dots,u^m) & = & c^1, \\ \dots & \dots & \dots \\ x^n(u^1,\dots,u^m) & = & c^n, \end{cases} \tag{6}$$

где $m > n$ и ранг якобиевой матрицы (5) системы равен n для всех $(u^1,\dots,u^n)$, удовлетворяющих этим уравнениям. Тогда в силу теоремы о неявных функциях эту систему можно локально, в некоторой окрестности каждой точки, разрешить относительно n переменных. Каких именно, зависит от положения ненулевого минора в якобиевой матрице. Если, например, этот минор образован n первыми столбцами, то решение имеет вид

$$\begin{cases} u^1 & = & g^1(u^{n+1},\dots,u^m), \\ \dots & \dots & \dots \\ u^n & = & g^n(u^{n+1},\dots,u^m), \end{cases} \tag{7}$$

так что подстановка этих функций в заданную систему обращает ее в тождество.

На этой теореме основано задание подмногообразия системой *неявных уравнений* (6). Система (7) задает *приведенные уравнения* этого подмногообразия.

2.2. Другие специальные векторные функции.

Рассмотрим некоторые специальные в. ф. и найдем их аналитические признаки.

Определение. *Говорят, что в. ф.* $\boldsymbol{r} : U \subset \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$ *имеет постоянный модуль, если* $|\mathbf{r}(\mathbf{u})| = \mathrm{const}$.

Теорема 3. *В. ф. имеет постоянный модуль тогда и только тогда, когда*

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) \equiv 0. \tag{8}$$

Доказательство. Дифференцируя модуль в. ф. $|\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{r},\mathbf{r})}$, получим формулу

$$d|\mathbf{r}| = \frac{(\mathbf{r}, d\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|},$$

откуда и следует доказательство. □

Определение. *В. ф., определенная в области* $U \subset \mathbb{E}^m$, *называется коллинеарной, если она имеет постоянное направление в пространстве.*

Это направление можно задать постоянным единичным вектором $\mathbf{e}$ и тогда мы имеем $\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}$, где $\lambda(\mathbf{u}) \neq 0$ — гладкая скалярная функция.

Теорема 4. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *коллинеарна тогда и только тогда, когда при любом* $\boldsymbol{u} \in U$

$$d\mathbf{r}//\mathbf{r}. \tag{9}$$

В 3-мерном пространстве это условие можно записать с помощью векторного произведения: $[\mathbf{r}, d\mathbf{r}] \equiv 0$.

Доказательство. Дифференцируя тождество $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \equiv \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}$, получим $d\mathbf{r} \equiv d\lambda\mathbf{e}$, откуда следует необходимость условия. Обратно, пусть $\mathrm{d}\mathbf{r}//\mathbf{r}$. Обозначим через $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ единичный вектор их общего направления. Тогда $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \equiv \lambda(\mathbf{u})\mathbf{e}(\mathbf{u})$. Дифференцируя это тождество, получим $d\mathbf{r} \equiv d\lambda\mathbf{e} + \lambda d\mathbf{e}$. Но в силу теоремы (8) $(\mathbf{e}, d\mathbf{e}) \equiv 0$. Поэтому, умножая скалярно это тождество на $d\mathbf{e}$, получим новое тождество $(d\mathbf{r}, d\mathbf{e}) \equiv \lambda(d\mathbf{e})^2$. Здесь, согласно условию теоремы, $d\mathbf{r}$ параллельно $\mathbf{r}$ и, следовательно, $d\mathbf{r} \equiv \mu(\mathbf{u})\mathbf{e}$. Поэтому левая часть второго тождества равна нулю и значит, поскольку $\lambda \neq 0$, имеем $(d\mathbf{e})^2 \equiv 0$. Следовательно, $d\mathbf{e} \equiv 0$ и $\mathbf{e} = \mathrm{const}$. $\square$

Определение. *Векторная функция называется* k-компланарной*, если при любом* $\boldsymbol{u} \in U$ *вектор* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ *параллелен некоторой* k*-плоскости* $L \subset \mathbb{E}^n$.

Следующая теорема обобщает предыдущий результат.

Теорема 5. *В. ф.* $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})$ k*-компланарна тогда и только тогда, когда векторные функции* $\boldsymbol{r}$, $d\boldsymbol{r}$, $\ldots, d^k\boldsymbol{r}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему лишь при $n = 3$. Итак, пусть векторная функция параллельна некоторой 2-плоскости L в евклидовом $\mathbb{E}^3$. Рассмотрим ее нормальный вектор $\mathbf{N}$=const. Тогда по условию теоремы $(\mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{N}) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество, получим $(d\mathbf{r}, \mathbf{N}) \equiv 0$, $(d^2\mathbf{r}, \mathbf{N}) \equiv 0$. Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$, $d^2\mathbf{r}$ линейно зависимы при любом $\mathbf{u} \in U$. Докажем достаточность условия. Если оно выполнено и $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ линейно независимы, то можно записать $d^2\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{r} + \mu(\mathbf{u})d\mathbf{r}$. Рассмотрим в. ф. $\mathbf{N}(\mathbf{u}) = [\mathbf{r}, d\mathbf{r}] \neq 0$. Дифференцируя ее, получим $d\mathbf{N} = [\mathbf{r}, d^2\mathbf{r}] = \mu\mathbf{N}$. В силу (9) это значит, что векторная функция $\mathbf{N}$ имеет постоянное направление, а так как $\mathbf{r}(\mathbf{u}) \perp \mathbf{N}$, то теорема в этом случае доказана. Если же векторы $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$ линейно зависимы, то $d\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{u})\mathbf{r}$ и, значит, векторная функция $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ в силу теоремы (9) имеет постоянное направление в пространстве. $\square$

2.3. Векторные функции скалярного аргумента. Круговые векторные функции.

Рассмотрим, в частности, в. ф. $\mathbf{r} : I = (a, b) \to \mathbb{E}^n$ одного скалярного аргумента, когда $m = 1$. Этот аргумент обозначим через t. В этом случае h также число и дифференциал в. ф. имеет вид $d\mathbf{r}(t, h) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)h$. Поэтому производная, которую мы обозначим штрихом, записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) := \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Якобиева матрица для в. ф. скалярного аргумента состоит из одного столбца и поэтому условие регулярности в. ф. сводится к отличию от нуля производной: $\mathbf{r}' \neq 0$. Рассмотрим в. ф., которым нет аналога в общем случае. Это две *круговые векторные функции.*

Определение. *Первой круговой называется в. ф.* $\boldsymbol{e}(t) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^2$, *которая каждому* $t \in \mathbb{E}^1$ *ставит в соответствие единичный вектор евклидовой плоскости, образующий ориентированный угол* t *с осью* OX *прямоугольных координат. Вторая круговая в. ф. определяется равенством* $\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{e}(t + \frac{\pi}{2})$.

Из этого определения следует, что эти в. ф. являются периодическими с периодом 2π, имеют постоянный модуль, равный единице, и ортогональны: $(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \equiv 0$. Их прямоугольные координаты на плоскости равны

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t), \quad \mathbf{g}(t) = (-\sin t, \cos t). \tag{10}$$

Находя производные, получим

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{g}'(t) = -\mathbf{e}(t).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать круговые в. ф. также и в 3-мерном пространстве. Если при этом круговые в. ф. принадлежат плоскости XOY, то третья координата будет равна нулю. В этом случае обычно рассматривается также единичный вектор $\mathbf{k}$ оси OZ, дополняющий их до правого ортонормированного репера $\{\mathbf{e}, \mathbf{g}, \mathbf{k}\}$. Как и для всякого такого репера, справедливы тождества

$$(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \equiv 0, \ (\mathbf{g}, \mathbf{k}) \equiv 0, \ (\mathbf{k}, \mathbf{e}) \equiv 0,$$

а также тождества

$$[\mathbf{e}, \mathbf{g}] \equiv \mathbf{k}, \ [\mathbf{g}, \mathbf{k}] \equiv \mathbf{e}, \ [\mathbf{k}, \mathbf{e}] \equiv \mathbf{g}.$$

ЛЕКЦИЯ 3. ТЕОРИЯ КРИВЫХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

3.1. Понятие кривой. Параметризованные кривые.

Рассмотрим сначала кривые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ произвольной размерности. Интуитивное представление о том, что такое кривая, дает следующее

Определение. *Подмножество* Γ *евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^n$ *называется кривой, если всякая его точка* $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ *обладает такой* ε*-окрестностью* $B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *в* $\mathbb{E}^n$ *что пересечение* $\Gamma \cap B(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ *гомеоморфно интервалу* $I \in \mathbb{E}$ *евклидовой прямой.*

Другими словами, с топологической точки зрения кривая локально, в окрестности всякой своей точки устроена как отрезок прямой. Однако на практике приходится иметь дело с кривыми в более широком понимании, которые не вмещаются в данное определение.

Примеры:

1) Окружность в целом не гомеоморфна отрезку прямой, но локально, в окрестности всякой своей точки удовлетворяет этому условию.

2) Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, называемые фокусами, расстояние между которыми равно $2a$. Лемниската Бернулли есть множество точек плоскости, произведение расстояний которых до фокусов постоянно и равно a^2. Эта кривая имеет форму восьмерки. Она имеет особую точку самопересечения, в окрестности которой кривая устроена как крест.

Более общим и практически более употребительным является

Определение. *Параметризованной кривой класса* C^k, $(k \geq 1)$ *в евклидовом* $\mathbb{E}^n$ *называется отображение того же класса* $\boldsymbol{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ *интервала вещественной прямой в это пространство.*

Таким образом, параметризованная кривая задается векторной функцией одного скалярного аргумента $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или в координатах $x^i = x^i(t)$. Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями* кривой, а образ $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{E}^n$ — ее *носителем.* Параметризованная кривая называется *регулярной*, если регулярна задающая ее векторная функция, т. е. $\mathbf{r}' \neq 0$. Заметим, что вместе с параметризацией задается и определенная ориентация кривой — направление, в котором параметр возрастает. В аналитической механике параметризованную кривую понимают как траекторию движения точки. При этом параметром обычно является время. Тогда условие регулярности означает, что скорость движения точки нигде не обращается в нуль.

Примеры:
1) В. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t$ задает прямую с опорной точкой $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и направляющим вектором $\mathbf{p} \neq 0$. Векторная функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t^3$ задает тот же носитель — прямую, но так как $\mathbf{r}' = 3\mathbf{p}t^2$, эта параметризация не регулярна при $t = 0$. В. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}t^2$ задает луч с началом $\mathbf{r}_0$. Эта точка является не регулярной и в то же время особой точкой луча.
2) Периодическая в. ф. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{e}(t)$ задает на плоскости окружность с центром $\mathbf{r}_0$ радиуса a. Здесь $\mathbf{r}' = a\mathbf{g}(t) \neq 0$. Уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{e}(nt)$ задает ту же окружность, но скорость по модулю в n раз больше: $\mathbf{r}' = na\mathbf{g}(nt)$.
3) Рассмотрим винтовую линию, лежащую на цилиндре радиуса a в $\mathbb{E}^3$. Она получается вращением точки вокруг оси цилиндра и одновременно ее равномерным переносом вдоль этой оси, пропорциональным углу поворота. Пусть $\omega = \mathrm{const}$ — угловая скорость вращения точки. Тогда $\varphi = \omega t$ есть угол поворота за время t и $v = b\varphi$ – пропорциональная ему линейная скорость. Радиус-вектор точки будет иметь вид

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}, \quad a, b = \mathrm{const}.$$

Это регулярная параметризация.
4) Рассмотрим на евклидовой плоскости кривую, заданную векторной функцией $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin 2t)$. Нетрудно видеть, что эта параметризация регулярна. Кривая лежит внутри единичного квадрата с центром в начале координат и при $0 \leq t \leq 2\pi$ ее точка дважды, при $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$, проходит через начало координат, образуя восьмерку. Начало координат является регулярной, но особой точкой этой кривой.

3.2. Длина дуги и натуральный параметр кривой.

Кривая и параметризованная кривая — это разные понятия. Один и тот же носитель, как мы видели в примерах, может быть получен с помощью разных в. ф., т. е. иметь разные параметрические уравнения. Перейдем от параметра t к другому параметру τ с помощью диффеоморфизма $t = f(\tau)$. Тогда мы получим в. ф. $\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{r}(f(\tau))$ с тем же носителем. Такие параметризации называются *эквивалентными*. Условие регулярности при этом не нарушится. В самом деле,

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{df}{d\tau},$$

а так как $\frac{df}{d\tau} \neq 0$, то и $\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} \neq 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только регулярно параметризованные кривые. Для них существует параметр, обладающий рядом хороших свойств — это длина дуги кривой.

Определение. *Ориентированной длиной дуги параметризованной кривой между точками с параметрами* t_1, t_2 *называется число*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)| dt. \tag{11}$$

Заметим, что это число может быть положительным и отрицательным в зависимости от положения заданных точек.

Выберем на кривой точку $t = t_0$ и за параметр точки $\mathbf{r}(t)$ кривой, принадлежащей окрестности начальной точки, примем ориентированную длину дуги s между ними. Связь между параметрами t и s определяется функцией

$$s = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)| dt = f(t). \tag{12}$$

Эта функция дает замену параметра $t \to s$. Дифференцируя интеграл по верхнему пределу, получим $\frac{df}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| > 0$, так что s определяет регулярную параметризацию кривой и, более того, не изменяет ее ориентацию. Чтобы получить новое параметрическое уравнение, выразим t через $s : t = f^{-1}(s)$. В итоге получим $\mathbf{g}(s) = \mathbf{r}(f^{-1}(s))$, что решает задачу.

Теорема 6. *Длина дуги является инвариантом кривой, не зависит от выбора исходного параметра и зависит лишь от выбора начальной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть наряду с параметром t кривая отнесена к параметру τ и $t = f(\tau)$ — диффеоморфизм. Пусть $t_0 = f(\tau_0)$ и сохраняется ориентация кривой: $\frac{df}{d\tau} > 0$. Тогда $|\mathbf{r}'| = |\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}| = |\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}|\frac{d\tau}{dt}$. Вычисляя длину дуги и сделав в формуле (12) замену параметра, получим

$$s(t) = \int_{f(\tau_0)}^{f(\tau)} \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right| d\tau = s(\tau).$$

Если же заменить начальную точку, то этот праметр измениться на аддитивную постоянную $\bar{s} = s + c$. Это и есть наше утверждение. □

3.3. Касательная прямая кривой.

Рассмотрим на параметризованной кривой регулярную точку $\mathbf{r}(t)$ и в ее окрестности точку $\mathbf{r}(t+h)$. Проведем через них прямую $L(h)$, называемую *секущей прямой*. Ее положение зависит от выбора h.

Определение. *Касательной прямой в данной точке называется предельное положение секущей* $T = \lim_{h\to 0} L(h)$.

Найдем уравнение касательной. Вектор, соединяющий две рассматриваемые точки, равен

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)h + \mathbf{0}(t,h).$$

В пределе, если он существует, это дает направляющий вектор $\mathbf{r}'(t)$. Он называется *касательным вектором кривой* в точке t. Поэтому уравнение касательной прямой в регулярной точке имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{r}'(t), \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{13}$$

Как мы видели, при переходе к другому параметру $\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{df}{d\tau}$. Таким образом, касательный вектор зависит от параметризации кривой, но его направление от параметризации не зависит. Поэтому касательная прямая определена инвариантно, независимо от выбора параметра кривой.

Рассмотрим, в частности, натуральный параметр. Следующее свойство выделяет его среди других.

Теорема 7. *Параметризация кривой является натуральной тогда и только тогда, когда касательный вектор является единичным.*

Доказательство. Для доказательства необходимости продифференцируем формулу (12) по s. Получим $1 = |\dot{\mathbf{r}}(s)|$, где точкой обозначена производная по натуральному параметру. Обратно, пусть параметр t обладает этим свойством: $|\mathbf{r}'|(t) = 1$. Тогда из той же формулы имеем $s = t - t_0$ или $t = t_0 + s$. Это значит, что параметр t отсчитывает длину дуги кривой от начальной точки. В частности, выбрав $t_0 = 0$, получим $t = s$. $\square$

ЛЕКЦИЯ 4. ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ.

4.1. Неявное и приведенное уравнения плоской кривой

Плоскую кривую можно задать параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и если расположить ее в плоскости XY, то в декартовых координатах это уравнение имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{14}$$

Наряду с этим плоскую кривую часто задают *неявным уравнением* $F(x, y) = 0$. При этом функция F должна удовлетворять некоторым условиям, ибо имеет место

Теорема 8. (Уитни) *Для любого замкнутого подмножества $M \subset \mathbb{E}^n$ существует гладкая функция $F(x^1, \ldots, x^n)$ такая, что точка $(x^1, \ldots, x^n)$ принадлежит M тогда и только тогда, когда $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$.*

В связи с этим возникает вопрос: когда неявное уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{15}$$

действительно задает кривую на плоскости?

Теорема 9. *Непустое подмножество $\Gamma = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ есть кривая на плоскости, если: 1) функция F дифференцируемая; 2) В точках этого множества $\mathrm{grad} F\Big|_{\Gamma} \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из теоремы 3. В самом деле, отображение $F : (x, y) \to z = F(x, y)$ дифференцируемо, а его якобиева матрица $J = (F_x, F_y)$ имеет в точках множества $F = 0$ максимально возможный ранг 1. Поэтому это отображение регулярно, а точка $z = 0$ является регулярным значением. Осталось заметить, что $\Gamma = F^{-1}(0)$. $\square$

Поясним по этому случаю теорему о неявных функциях. В силу этой теоремы для каждой точки $(x, y) \in \Gamma$ существует окрестность U, в которой уравнение $F = 0$ локально разрешимо либо относительно x, либо относительно y. Если, например, производная по y отлична от нуля, то имеем $y = f(x) : F(x, f(x)) \equiv 0$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, определенная в некотором интервале I оси X. Такое уравнение называется *приведенным уравнением* кривой. Оно всегда задает кривую с графиком: $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{E}^2\}$, $x \in I$. В самом деле, отображение $x \to (x, f(x))$ непрерывно, а обратное к нему осуществляется с помощью проекции, параллельной оси Y, которая также непрерывна. Если же в окрестности данной точки $F_x \neq 0$, $\square$

Примеры.

1) Рассмотрим окружность $F = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Функция, стоящая в левой части, гладкая с градиентом $\mathrm{grad}F = (2x, 2y)$, который в точках окружности не обращается в нуль. Если $F_y = 2y \neq 0$, то при этом условии, исключающем точки окружности на оси OX, мы имеем решения $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$. Каждое из них определяет график соответствующей функции — полуокружность. С другой стороны, в области $F_x = 2x \neq 0$, исключающей точки окружности $(0, \pm 1)$, кривая может быть представлена в аналогичном виде $x = \pm\sqrt{1-y^2}$.

2) Колебания материальной точки массы $m = 1$ на евклидовой прямой около положения равновесия описывается дифференциальным уравнением $x'' = -\omega x$, $\omega = \mathrm{const} > 0$. Кинетическая и потенциальная энергия точки вычисляются по формулам $T = \frac{x'^2}{2}$, $U = \frac{\omega x^2}{2}$. Поэтому полная энергия равна $E = \frac{1}{2}(\omega x^2 + x'^2)$. Закон движения точки описывается фазовой кривой в плоскости переменных $x, y = x'$, вдоль которой полная энергия постоянна: $E = \mathrm{const}$. Следовательно, кривая имеет неявное уравнение $\omega x^2 + y^2 = \mathrm{const}$. Это эллипсы.

Как связаны параметрическое и неявное уравнения кривой? Если регулярная кривая задана параметрически, то мы получим ее неявное уравнение, исключив параметр t. Например, при $x' \neq 0$ это можно сделать, выразив t через x : $t = t(x)$. Тогда получим $y = y(t(x)) = f(x)$. Это приведенное уравнение является частным случаем неявного $F = f(x) - y = 0$.

Пример. Окружность радиуса a с центром $\mathbf{r}_0$ имеет параметрическое уравнение $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathrm{a}\mathbf{e}(\mathrm{t})$ или в координатах $x = x_0 + a\cos t$, $y = y_0 + a\sin t$. Здесь параметр t легко исключается и мы получим неявное уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.

4.2. Касательная и нормаль.

Уравнение касательной параметризованных кривых мы уже определили: в точке $\mathbf{r}_0$ ее уравнение $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{r}_0'$. Для плоских кривых в точке оно имеет вид

$$X = x_0 + \lambda x_0', \quad Y = y_0 + \lambda y_0'.$$

После исключения параметра λ получим каноническое уравнение касательной

$$\frac{X - x_0}{x_0'} = \frac{Y - y_0}{y_0'}. \tag{16}$$

Если кривая задана приведенным уравнением $y = y(x)$, то поскольку $\frac{y'}{x'} = y'_x$, получим отсюда

$$Y = k(X - x_0) + y_0, \quad k = y'_x(x_0).$$

Прямая, ортогональная касательной в точке кривой, называется *нормалью*. Чтобы получить ее уравнение, надо повернуть касательный вектор на прямой угол. Такой поворот против часовой стрелки можно сделать с помощью оператора поворота, который в прямоугольных координатах имеет матрицу $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда получим вектор нормали, который в данной точке имеет вид $\mathbf{N}_0 = I\mathbf{r}'_0 = (-y'_0, x'_0)$. Поэтому

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \lambda I \mathbf{r}'_0 \,. \tag{17}$$

Отсюда имеем каноническое уравнение нормали

$$\frac{X - x_0}{-y'_0} = \frac{Y - y_0}{x'_0} \,, \tag{18}$$

которое можно записать также в виде

$$Y = -\frac{1}{k}(X - x_0) + y_0 \,, \quad k = y'_x(x_0).$$

Рассмотрим теперь случай, когда кривая задана неявным уравнением. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ — параметризация этой кривой. Подставив эти функции в (15), получим тождество $F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Дифференцируя его, получим новое тождество

$$(\mathrm{grad} F, \mathbf{r}') = F_x \, x'(t) + F_y \, y'(t) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что если в точке кривой (x_0, y_0) градиент $\mathrm{grad} F|_0 \neq 0$, то в ней этот вектор направлен по нормали и поэтому каноническое уравнение нормали имеет вид

$$\frac{X - x_0}{F^0_x} = \frac{Y - y_0}{F^0_y} \,. \tag{19}$$

С другой стороны, с точностью до множителя $x' : y' = -F_y : F_x$. Поэтому уравнение касательной в той же точке получим в виде

$$\frac{X - x_0}{-F^0_y} = \frac{Y - y_0}{F^0_x} \quad \text{или} \quad F^0_x(X - x_0) + F^0_y(Y - y_0) = 0 \,. \tag{20}$$

4.3. Особые точки плоской кривой.

Рассмотрим плоскую кривую, заданную неявным уравнением $F(x, y) = 0$.

Определение. *Особыми называются точки кривой, в которых* $\mathrm{grad}F = 0$.
Другими словами, это точки кривой, в которых отображение $z = F(x, y)$ не регулярно. Таким образом, для нахождения особых точек мы должны рассмотреть систему трех уравнений с двумя неизвестными

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = 0, \tag{21}$$

которая не всегда совместна.

В особой точке найденное выше уравнение касательной не имеет смысла. Однако, это не значит, что ее не существует. Для того, чтобы выяснить ситуацию с касательными, продифференцируем тождество $F_x x'(t) + F_y y'(t) \equiv 0$ еще раз, рассмотрев его затем в особой точке. Учитывая, что в особой точке $F_x^0 = 0$, $F_y^0 = 0$, получим

$$F_{xx}^0 \, {x'_0}^2 + 2F_{xy}^0 \, x'_0 y'_0 + F_{yy}^0 \, {y'_0}^2 = 0.$$

Если в этой точке вторые производные не все обращаются в нуль, то она называется *особой точкой первого порядка*. Тогда для нахождения касательного вектора или, что удобнее, углового коэффициента касательной, мы имеем квадратное уравнение

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 k + F_{yy}^0 k^2 = 0. \tag{22}$$

Наличие касательных зависит от знака его дискриминанта $\Delta = {F_{xy}^0}^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0$. Следовательно, возможно три случая.

1) $\Delta > 0$. В такой особой точке имеется две касательных. Она называется *узловой*.

Пример. Рассмотрим кривую, заданную параметрическим уравнением $x = \cos t$,
$y = \sin 2t$. Это уже знакомая нам "восьмерка". Так как $y = 2\cos t\sqrt{1 - \cos t^2}$, то неявное уравнение этой кривой $4x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$. Находя частные производные, запишем систему уравнений (21)

$$F = 4x^2(1 - x^2) - y^2 = 0, \quad F_x = 8x(1 - 2x^2) = 0, \quad F_y = -2y = 0.$$

Этой системе удовлетворяет только одна точка $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ — начало координат. Вычислим вторые производные:

$$F_{xx} = 8(1 - 6x^2), \quad F_{xy} = 0, \quad F_{yy} = -2\,.$$

Их значения в особой точке равны $\{8,\ 0,\ -2\}$ соответственно, а дискриминант равен $\Delta = 16 > 0$. Как и следовало ожидать, это узловая точка. Решая квадратное уравнение $4 - k^2 = 0$, получим следующие значения угловых коэффициентов касательных: $k_{1,2} = \pm 2$. Следовательно, уравнения касательных в этой особой точке $y = \pm 2x$.

Заметим, что особая точка "восьмерки"при ее параметрическом задании является регулярной. Особая точка проходится при двух значениях параметра: $t = \frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{3\pi}{2}$. Касательный вектор $\mathbf{r}' = (-\sin t, 2\cos 2t)$ при этих значениях параметра равен соответственно $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) = (-1, -2)$ и $\mathbf{r}'(\frac{3\pi}{2}) = (1, -2)$. Это направляющие векторы соответствующих касательных.

2) Если $\Delta < 0$, то квадратное уравнение не имеет вещественных корней. Следовательно, в такой особой точке нет касательных. Это случай *изолированной* особой точки.

Пример. Пусть кривая имеет неявное уравнение $(x-1)(x^2+y^2) = 0$. Она распадается на прямую $x - 1 = 0$ и на не лежащую на ней точку — начало координат. Это изолированная особая точка и в ней нет касательных. В самом деле, проводя вычисления, мы получим квадратное уравнение $1 + k^2 = 0$, которое не имеет вещественных корней.

3) Пусть теперь $\Delta = 0$. Мы имеем кратный корень и только одну касательную, но зато двойную (это отличает ее от обычной касательной). Такая особая точка называется *точкой возврата.* Причина такого названия видна из следующего примера.

Пример. Кривая с неявным уравнением $y^2 = x^3$ называется полукубической параболой. Она имеет две ветви: $y = x\sqrt{x}$ и $y = -x\sqrt{x}$, которые сходятся в начале координат и касаются друг друга в этой точке. Это точка возврата. Вычисления показывают, что в этой точке $\Delta = 0$, а квадратное уравнение имеет вид $k^2 = 0$ с кратным корнем $k = 0$. Поэтому имеем двойную касательную в начале координат – ось X.

Если все вторые производные функции F в особой точке также обращаются в нуль, то надо продифференцировать указанное выше тождество еще раз. Вычислив результат в особой точке, придем к кубическому уравнению для угловых коэффициентов касательных. Если при этом производные третьего порядка не все равны нулю, то мы имеем дело с *особой точкой второго порядка*, в которой может существовать до трех касательных. Вообще, если производные k-го порядка в особой точке все равны нулю, но существуют ненулевые производные $(k+1)$-го порядка, то это *особая точка k-го порядка.*

ЛЕКЦИЯ 5. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

5.1. Сопровождающий репер кривой.

Оказывается, в каждой точке регулярно параметризованной кривой можно построить подвижный, меняющийся от точки к точке, ортонормированный репер. Тогда его движение показывает, как локально устроена кривая в окрестности каждой своей точки.

Для начала мы предположим, что кривая отнесена к натуральному параметру: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Обозначая производные по этому параметру точкой, рассмотрим единичный касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{e}$, направленный в сторону возрастания параметра. Дополним его до ортонормированного репера единичным вектором $\mathbf{n}$ нормали. Как найти этот вектор? Для этого рассмотрим вектор второй производной $\ddot{\mathbf{r}}$. Он называется *вектором кривизны.* Так как вектор $\dot{\mathbf{r}}$ единичный, то вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ ему ортогонален и нам осталось только его пронормировать. Итак, мы построили ортонормированный репер

$$\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \tag{23}$$

который называется *сопровождающим репером* плоской кривой.

Как найти векторы сопровождающего репера, если параметризация кривой произвольная? Проще всего найти единичный касательный вектор $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. Он имеет координаты

$$\mathbf{e} = \frac{(x',\, y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

и направлен в сторону возрастания параметра.

Рассмотрим теперь вектор второй производной $\mathbf{r}''$. Вообще говоря, он не ортогонален касательной и, более того, может оказаться, что в некоторых точках векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ линейно зависимы. Мы предположим, что $[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \neq 0$. При этом условии кривая называется *бирегулярной.* Чтобы получить вектор нормали, надо взять касательный вектор и применить к нему оператор поворота. С точностью до знака $\varepsilon = \pm 1$ получим $\mathbf{N} = \varepsilon(-y', x')$ и тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\varepsilon(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,. \tag{24}$$

Какой выбрать знак? Для этого заметим, что, как видно из формулы $\mathbf{r}'(t+h) - r'(t) = r''(t)|h| + O(t,h)$, вектор $\mathbf{r}''$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. В ту же сторону направим и вектор нормали.

При этом условии скалярное произведение $(\mathbf{N}, \mathbf{r}'') > 0$ или в координатах $\varepsilon(x'y'' - y'x'') > 0$ и, значит, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x'y'' - y'x'')$. Тем самым сопровождающий репер однозначно определен.

Задача. *Для какой кривой во всех ее точках векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ линейно зависимы?*

5.2. Формулы Френе и кривизна плоской кривой.

Посмотрим, как изменяется сопровождающий репер от точки к точке. Для этого отнесем кривую к натуральному параметру и наряду с точкой $\mathbf{r}(s)$ рассмотрим точку $\mathbf{r}(s+h)$ в ее окрестности. Тогда

$$\mathbf{e}(s+h) = \mathbf{e}(s) + \dot{\mathbf{e}}(s)h + \mathbf{0}'^2(s,h), \quad \mathbf{n}(s+h) = \mathbf{n}(s) + \dot{\mathbf{n}}(s)h + \mathbf{0}''^2(s,h),$$

где $\mathbf{0}^2(s,h)$ — векторы второго порядка малости относительно h. Отсюда видно, что изменение сопровождающего репера в главной своей части зависит от первых производных векторов этого репера. При этом $\dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{r}}$ есть вектор кривизны, направленный, как мы видели, по нормали. Поэтому $\dot{\mathbf{e}} = k(s)\mathbf{n}$, где скалярная функция $k(s) = |\ddot{\mathbf{r}}| \geq 0$ называется *кривизной*, а обратная ей величина $R = \frac{1}{k}$ — *радиусом кривизны*. Что касается производной вектора $\mathbf{n}$, то она ортогональна ему и поэтому направлена по касательной. Следовательно, $\dot{\mathbf{n}} = \lambda\mathbf{e}$. Чтобы найти этот множитель, продифференцируем тождество $(\mathbf{e}, \mathbf{n}) \equiv 0$. Получим $k\mathbf{n}^2 + \lambda\mathbf{e}^2 \equiv 0$, откуда $\lambda = -k$. В итоге приходим к следующим соотношениям

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{e}. \tag{25}$$

Они называются *уравнениями Френе*. Таким образом, мы пришли к следующему выводу

Теорема 10. *Движение сопровождающего репера вдоль регулярно параметризованной плоской кривой определяется уравнениями Френе и зависит только от ее кривизны.*

Как вычислить кривизну? Если кривая задана в натуральной параметризации, то, как уже мы видели, $k = |\ddot{\mathbf{r}}|$. Рассмотрим теперь случай, когда кривая отнесена к произвольному параметру: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Заметим, что $|\ddot{\mathbf{r}}| = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|$ и, следовательно, кривизну можно выразить так $k = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|$. Выразим входящие сюда производные по s через производные по произвольному параметру

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t}. \tag{26}$$

Тогда получим $k = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']||\dot{t}|^3$. Но $|\dot{t}| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$ и, следовательно,

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{27}$$

В координатах это дает формулу

$$k(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,. \tag{28}$$

В случае, когда кривая задана приведенным уравнением $y = f(x)$, в качестве параметра выберем x. Тогда получим $x' = 1$, $x'' = 0$ и, следовательно,

$$k(x) = \frac{|y''_x|}{(1 + {y'_x}^2)^{3/2}}\,. \tag{29}$$

Пример. Рассмотрим параболу $y = x^2$. Для вычисления ее кривизны применим формулу (29). Имеем $y'_x = 2x$, $y''_x = 2$ и тогда

$$k(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}\,.$$

Обратим внимание на то, что максимальное значение кривизна параболы достигает при $x = 0$, т. е. в ее вершине.

5.3. Геометрический смысл кривизны. Эволюта.

Чтобы выяснить геометрический смысл кривизны, отнесем кривую к натуральному параметру. Рассмотрим вращение единичного касательного вектора при движении точки по кривой. Отложим для наглядности касательные векторы $\mathbf{e}(s)$ от начала координат. Тогда $\mathbf{e}(s)$ будет описывать дугу окружности S единичного радиуса. Заметим, что s является натуральным параметром заданной кривой, но не окружности. Рассмотрим изменение параметра от значения s к значению $s + h$ и обозначим через φ соответствующий угол поворота. Тогда этот угол является некоторой функцией дуги кривой.

Теорема 11. *Кривизна кривой* Γ *есть модуль скорости поворота ее касательного вектора по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит.*

Доказательство. Рассмотрим вектор

$$\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}(s + h) - \mathbf{e}(s) = \dot{\mathbf{e}}(s)h + \mathbf{O}^1(s, h).$$

Он направлен по хорде окружности S, а его длина с точностью до малых первого порядка равна модулю угла φ, измеренному в радианах: $|\Delta\mathbf{e}| = |\varphi| + \varepsilon$. С другой стороны, $|\Delta\mathbf{e}| = |\dot{\mathbf{e}}(s)||h| + O^2(s, h)$, где O^2 имеет

второй порядок малости по отношению к h. Но в силу первой формулы Френе $|\dot{\mathbf{e}}| = k(s)$ и поэтому $|\Delta\mathbf{e}| = k(s)|h| + O^2(s,h)$. Таким образом, имеем $k(s)|h| = |\varphi| + O^2(s,h)$, откуда, рассматривая предел при $h \to 0$, получим

$$k(s) = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\varphi}{h}\right|,$$

что доказывает утверждение. $\square$

Для того, чтобы наглядно представить изменение кривизны вдоль кривой, рассмотрим множество Γ_1 *центров кривизны* кривой. Так называются точки на ее нормалях со стороны вогнутости, расстояние которых до соответствующей точки кривой равно радиусу кривизны R. В результате получим, некоторую кривую, которая называется *эволютой* заданной кривой. Из определения следует параметрическое уравнение эволюты

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t) + R(t)\mathbf{n}(t).$$

Учитывая формулы (24) и (28), запишем это уравнение в координатах

$$x_1(t) = x(t) - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}, \quad y_1(t) = y(t) + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}. \qquad (30)$$

Пример. Рассмотрим параболу $y = x^2$ с параметризацией $\mathbf{r} = (x, x^2)$. Ее кривизну мы уже подсчитали выше. Радиус кривизны равен $R = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}$. Так как касательный вектор имеет координаты $\mathbf{r}' = (1, 2x)$, то нормальный вектор равен $\mathbf{N} = (-2x, 1)$. Мы выбрали такое его направление, так как $\mathbf{r}'' = (0, 2)$ и $(\mathbf{N}, \mathbf{r}'') = 2 > 0$. Единичный вектор нормали имеет координаты $\mathbf{n} = \frac{(-2x,1)}{\sqrt{1+4x^2}}$. Используя уравнение эволюты $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\mathbf{n}$, получим $x_1 = -4x^3$, $y_1 = 3x^2 + \frac{1}{2}$. Это ее параметрическое уравнение. Исключая x, найдем уравнение эволюты в неявном виде $27x^2 = 16(y - \frac{1}{2})^3$. Это полукубическая парабола.

Задача. *Дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $s \in I$. Рассмотрим гладкое отображение, которое всякой паре чисел (s, λ) прямоугольника $I \times \mathbb{R}$ ставит в соответствие точку $\boldsymbol{r}(s, \lambda) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda\boldsymbol{n}(s)$ на соответствующей нормали этой кривой. Показать, что множество критических точек этого отображения есть эволюта заданной кривой.*

ЛЕКЦИЯ 6. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

6.1. Семейства плоских кривых.

Определение. *Говорят, что на плоскости задано k-параметрическое семейство кривых, если в их уравнение входит k независимых параметров.*

В неявной форме уравнение семейства записывается в виде

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

Будем предполагать, что зависимость функции от параметров гладкая, а сами параметры изменяются в некоторой области допустимых значений. При этом каждому фиксированному набору параметров соответствует определенная кривая этого семейства. Поясним сказанное на примерах.

Примеры.

1) Множество всех прямых на плоскости $y = kx + b$ зависит от двух параметров, принимающих произвольные значения. В частности, множество прямых $y = kx$ образует пучок с центром в начале координат.

2) Множество всех окружностей $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ зависит от трех параметров, а множество окружностей $(x - a)^2 + y^2 = 1$ единичного радиуса с центрами на оси X от одного. Множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = a^2$ зависит также от одного параметра.

6.2. Огибающая 1-параметрического семейства.

В дальнейшем мы будем рассматривать только 1-параметрические семейства

$$F(x, y, a) = 0, \tag{31}$$

где каждому значению параметра $a \in I$ соответствует кривая, возможно с особыми точками.

Определение. *Огибающей 1-параметрического семейства $\{\Gamma(a)\}$ плоских кривых называется кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой этого семейства.*

Точка касания кривой семейства с огибающей называется *характеристической точкой*. Огибающая существует не всегда. Обратимся к приведенным выше примерам. В случае пучка прямых существует лишь одна характеристическая точка, не образующая кривой. У семейства

окружностей с центрами на оси X существует две прямые $y = \pm 1$, огибающие это семейство. У семейства концентрических окружностей огибающей нет. Когда огибающая существует и как ее находить? Укажем признак существования огибающей и способ ее отыскания.

Теорема 12. *Если огибающая 1-параметрического семейства кривых (31) существует, то функции $x = x(a)$, $y = y(a)$, задающие ее параметрические уравнения, являются решением следующей системы двух уравнений с двумя неизвестными*

$$F(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a}(x, y, a) = 0\,. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $F(x, y, a) = 0$ — уравнение семейства. Огибающая, если она существует, состоит из характеристических точек — точек касания. Но каждая такая точка соответствует некоторой кривой семейства и, значит, некоторому значению параметра этого семейства. Поэтому огибающую следует искать в виде $x = x(a)$, $y = y(a)$. Какие условия мы имеем на эти две неизвестные функции? Во-первых, точки огибающей принадлежат кривым семейства, т. е. их координаты должны удовлетворять уравнению семейства при том же значении параметра. Поэтому имеем тождество (условие принадлежности)

$$F(x(a), y(a), a) \equiv 0.$$

Дифференцируя его по параметру a, получим новое тождество

$$F_x(x(a), y(a), a)\frac{dx}{da} + F_y(x(a), y(a), a)\frac{dy}{da} + F_a(x(a), y(a), a) \equiv 0.$$

Здесь $\mathrm{grad}F = (F_x, F_y)$ — нормальный вектор кривой $\Gamma(a)$ семейства, $\mathbf{r}'_a = (\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da})$ — касательный вектор огибающей в той же точке. Второе условие заключается в том, что в характеристических точках эти два вектора должны быть ортогональны (условие касания):

$$(\mathrm{grad}F, \mathbf{r}'_a) = F_x\frac{dx}{da} + F_y\frac{dy}{da} \equiv 0.$$

Следовательно, из предыдущего тождества получаем $F_a(x(a), y(a), a) \equiv 0$. Этим доказано, что функции $x(a), y(a)$ должны удовлетворять системе (32). □

Определение. *Решение системы (32) называется дискриминантным множеством данного семейства.*

Может оказаться, что дискриминантное множество и не представляет собой кривую. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Рассмотрим опять пучок прямых $F = ax - y = 0$. Система (32) имеет вид

$$ax - y = 0, \quad x = 0$$

и имеет решение $x = 0$, $y = 0$. Это центр пучка.

В связи с этим возникает вопрос, что может представлять собой дискриминантное множество и в каком случае оно является огибающей семейства? Ответ получается следующий:

Теорема 13. *Дискриминантное множество* Γ *является огибающей, если в точках этого множества* $\mathrm{grad}F\Big|_{\Gamma} \neq 0$, *множеством особых точек кривых семейства при* $\mathrm{grad}F\Big|_{\Gamma} = 0$ *или вырождается в точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, мы нашли решение системы (32). Подставив его в ее уравнения, получим два тождества. Первое из них $F(x(a), y(a), a) \equiv 0$ продифференцируем по параметру. С учетом второго тождества получим новое тождество

$$(\mathrm{grad}F, \mathbf{r}'_a) = F_x \frac{dx}{da} + F_y \frac{dy}{da} \equiv 0.$$

В каких случаях оно может выполняться? 1) Если в точках дискриминантного множества $\mathrm{grad}F \neq 0$ и $\mathbf{r}'_a \neq 0$, то оно означает ортогональность этих ненулевых векторов и значит мы имеем дело с огибающей; 2) Тождество выполняется в силу того, что при любых значениях параметра a мы имеем $\mathrm{grad}F\Big|_{\Gamma} \equiv 0$. Тогда мы имеем дело с множеством особых точек (п. 4.3); 3) Тождество выполняется в силу того, что $\mathbf{r}'_a = (\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}) \equiv 0$. Тогда $x = c_1$, $y = c_2$ суть константы и мы получаем точку. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что эти случаи могут появляться одновременно в разных комбинациях.

Пример. Рассмотрим семейство кривых $(x-a)^3 - (y-a)^2 = 0$. Они получены из полукубической параболы $y^2 = x^3$ параллельным переносом вдоль биссектрисы $y = x$. Найдем дискриминантное множество. Дифференцируя по параметру a, получим систему

$$(x-a)^3 - (y-a)^2 = 0, \quad 3(x-a)^2 - 2(y-a) = 0.$$

Отсюда получаем $(x-a)^3(1 - \frac{9}{4}(x-a)) = 0$. Таким образом, эта система имеет решения $x = a$, $y = a$ и $x = a + \frac{4}{9}, y = a + \frac{8}{27}$. Это две параллельные прямые с уравнениями $y = x$ и $y = x - \frac{4}{27}$. Нетрудно видеть, что первая из них есть множество особых точек, образованных точками возврата, а вторая — огибающая.

Теорема 14. *Эволюта кривой есть огибающая ее нормалей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана регулярная кривая, заданная уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Тогда ее нормали задаются уравнениями $\rho = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{n}(t)$ или в неявном виде $(\mathbf{r}', (\rho - \mathbf{r}(t)) = 0$. При изменении параметра t это дает нам 1-параметрическое семейство. Дифференцируя по параметру, получим $\mathbf{r}''(\rho - \mathbf{r}) - \mathbf{r}'^2 = 0$. Из этих двух соотношений найдем λ. Из первого мы имеем $\rho - \mathbf{r} = \lambda\mathbf{n}$ и подставляя это во второе, получим $\lambda(\mathbf{r}'', \mathbf{n}) = \mathbf{r}'^2$. Используя оператор поворота I, единичный вектор нормали можно получить из единичного касательного вектора $\mathbf{n} = \frac{I\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. В результате предыдущее равенство принимает вид $\frac{\lambda(\mathbf{r}'', I\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{r}'^2$, откуда $\lambda = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{(I\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} = R$. Но так как для любой пары векторов на плоскости $(I\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, то это выражение дает нам радиус кривизны кривой. В итоге имеем $\rho = \mathbf{r}(t) + R\mathbf{n}(t)$, что доказывает теорему. $\square$

ЛЕКЦИЯ 7. КРИВЫЕ В 3-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

7.1. Уравнения пространственной кривой.

Кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ может быть задана разными способами:

1) Параметрическими уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или в декартовых координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

При регулярной параметризации касательный вектор $\mathbf{r}' = (x', y', z') \neq 0$. В частности, кривая может быть отнесена к натуральному параметру s, который связан с параметром t формулой

$$s = \int_{t_\circ}^{t} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{t_\circ}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Так же, как и для плоских кривых, касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$ в этом случае является единичным и поэтому вектор второй производной $\ddot{\mathbf{r}}$ к нему ортогонален. Он называется *вектором кривизны* кривой.

2) Кривая может быть задана неявными уравнениями

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0. \tag{33}$$

Каждое из этих уравнений задает, вообще говоря, поверхность, а кривая есть пересечение этих поверхностей. Однако, не всегда такая система задает кривую. Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} \tag{34}$$

и применим теорему о неявных функциях.

Теорема 15. *Непустое множество* Γ *решений системы (33) есть регулярно параметризованая кривая в пространстве, если: 1) функции* F, G *гладкие; 2) на этом множестве* $\mathrm{rank} J = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ранг системы максимален, то по теореме о неявных функциях ее можно локально разрешить относительно двух переменных. Рассмотрим, например, окрестность, в которой отличен от нуля минор якобиевой матрицы, образованный двумя последними столбцами: $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда в этой окрестности имеем локальное решение $y = f(x)$, $z = g(x)$. В такой форме уравнение кривой называется *приведенным*. От него легко перейти к параметрическим уравнениям.

Пусть $x = x(t)$ — произвольная гладкая функция, имеющая ненулевую производную $x'(t) \neq 0$. Тогда получаем

$$x = x(t), \quad y = f(x(t)), \quad z = g(x(t)),$$

При этом условие регулярности выполнено. Во многих случаях можно положить просто $x = t$. $\square$

Примеры.

1) Рассмотрим винтовую линию. Пусть кривая расположена на прямом круговом цилиндре радиуса a с осью Z. Если t — время, то угол поворота в радианах $\varphi = \omega t$, а смещение точки вдоль оси с линейной скоростью v равно vt. . Радиус-вектор движущейся точки равен $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$, где $b = \frac{v}{\omega} = \mathrm{const}$. Это регулярная параметризация.

2) Уравнения $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $z - b = 0$ задают сферу и плоскость, ортогональную оси Z. При $b^2 < a^2$ это окружность радиуса $r = \sqrt{a^2 - b^2}$, при $b^2 = a^2$ точка, а если $b^2 > a^2$, имеем пустое множество. Чтобы найти параметрические уравнения окружности, рассмотрим якобиеву матрицу $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь минор, образованный двумя последними столбцами, при $y \neq 0$ отличен от нуля. Поэтому при этом условии систему можно разрешить относительно y и z. В результате получим приведенные уравнения $y = \pm\sqrt{a^2 - b^2 - x^2}$, $z = b$. Положив теперь $x = \sqrt{a^2 - b^2}\cos t$, придем к следующим параметрическим уравнениям

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}\cos t, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2}\sin t, \quad z = b.$$

7.2. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость.

Уравнение касательной прямой ξ: $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + \lambda\mathbf{r}'(t)$ для кривой в 3-пространстве, заданной параметрическим уравнением, имеет в декартовых координатах вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

и имеет смысл в регулярных точках.

Точка параметризованной кривой называется *бирегулярной*, если в этой точке векторы первой и второй производных линейно независимы: $[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \neq 0$. Тогда в пучке плоскостей, проходящих через касательную прямую, одна определяется однозначно.

Определение. *Соприкасающейся плоскостью кривой в данной ее точке называется плоскость, содержащая вектор кривизны.*

Обозначим ее Π. Таким образом, если кривая отнесена к натуральному параметру, то векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ являются ее направляющими векторами и уравнение этой плоскости легко записать. Как находить соприкасающуюся плоскость, если кривая задана в произвольной параметризации? Для этого нам понадобится

Теорема 16. *При любой параметризации вектор второй производной $\boldsymbol{r}''$ принадлежит соприкасающейся плоскости.*

Доказательство вытекает из формул

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}s', \quad \mathbf{r}'' = \ddot{\mathbf{r}}(s')^2 + \dot{\mathbf{r}}s''$$

Вторая из них показывает, что вектор $\mathbf{r}''$ есть линейная комбинация орта касательного вектора и вектора кривизны. Значит, он лежит в соприкасающейся плоскости. $\square$

Запишем уравнение соприкасающейся плоскости. Для этого надо вычислить ее нормальный вектор $\mathbf{B}(t) = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Он называется *вектором бинормали* кривой, а прямая B, проходящая через точку кривой в его направлении – *бинормалью.* Уравнение плоскости Π запишется в виде $(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t), \mathbf{B}) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда кривая задана неявными уравнениями (33). Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ суть параметрические уравнения этой кривой. Тогда мы имеем два тождества: $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$ и $G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя их, получим два новых тождества

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' \equiv 0, \quad G_x x' + G_y y' + G_z z' \equiv 0.$$

Из них следует, что векторы $\mathbf{N}_1 = \mathrm{grad} F$ и $\mathbf{N}_2 = \mathrm{grad} G$ ортогональны кривой в ее точках (они ортогональны к соответствующим поверхностям) и поэтому касательный вектор кривой с точностью до множителя равен $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, а его координаты — это миноры якобиевой матрицы (34).

Пример. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$ в точке $\varphi = 0$. Эта точка имеет координаты $\mathbf{r}_0 = (a, 0, 0)$. Векторы первой и второй производной равны

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{g}(\varphi) + b\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'' = -a\mathbf{e}(\varphi)$$

и в данной точке имеют координаты $\mathbf{r}'_0 = (0, a, b)$, $\mathbf{r}''_0 = (-a, 0, 0)$. Следовательно, вектор бинормали равен $\mathbf{B}_0 = (0, -ab, a^2)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид $by - az = 0$.

Задача. *Докажите, что плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.*

7.3. Сопровождающий репер и формулы Френе. Кривизна и кручение.

Пусть параметризованная кривая Γ бирегулярна. Как и в случае плоской кривой, мы однозначно свяжем с каждой ее точкой ортонормированный репер с началом в этой точке. Его движение вдоль кривой даст нам информацию о том, как кривая устроена локально, в окрестности данной точки.

Для этого отнесем кривую сначала к натуральной параметризации. В качестве первого вектора возьмем единичный касательный вектор $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}$. Рассмотрим теперь вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$. Напомним, что он ортогонален касательной, по определению лежит в соприкасающейся плоскости и для бирегулярной кривой отличен от нуля. Нормируя его, получим второй единичный вектор $\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}$. Для того, чтобы завершить построение, рассмотрим ортогональный к ним орт бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{e}, \mathbf{n}]$. Репер $\{\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ является ортонормированным и имеет правую ориентацию. Он называется *сопровождающим репером* кривой.

Пусть теперь кривая отнесена к произвольной параметризации: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Рассмотрим касательный вектор $\mathbf{r}'$. Он направлен в сторону возрастания параметра, но не единичный. Чтобы получить единичный вектор, надо касательный вектор пронормировать: $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$. Далее, так как кривая по условию бирегулярна, то векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ не параллельны и образуют базис соприкасающейся плоскости. К ней ортогонален вектор бинормали $\mathbf{B} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Его орт дает нам третий вектор ортонормированного репера $\mathbf{b}$. Завершая построение, мы возьмем $\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{e}]$. В итоге получим репер правой ориентации. Итак,

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{e}], \quad \mathbf{b} = \frac{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']}{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}. \tag{35}$$

Тем самым наше построение завершено.

Аналогами координатных осей построенного репера являются три прямые. Кроме касательной прямой ξ мы имеем *главную нормаль* η, проходящую в направлении вектора $\mathbf{N}$ (она, следовательно, лежит в соприкасающейся плоскости) и *бинормаль* ζ, проходящую в направлении вектора $\mathbf{B}$. Она ортогональна соприкасающейся плоскости. Кроме того имеется три плоскости — аналоги координатных плоскостей. Одна из них Π — соприкасающаяся. Две другие, ортогональные соответственно касательной прямой и главной нормали, называются *нормальной плоскостью* и *спрямляющей плоскостью*. Нетрудно записать уравнения этих плоскостей.

Приступим к изучению движения сопровождающего репера вдоль кривой. Для этого отнесем кривую к натуральному параметру. Пусть центр репера смещается из точки $\mathbf{r}(s)$ в точку $\mathbf{r}(s+h)$. Рассматривая плоские кривые, мы уже видели, что с точностью до малых первого порядка положение векторов репера в этой точке определяется их первыми производными. Найдем координаты производных $\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}$ относительно исходного репера. Производная $\dot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{r}}$ есть вектор кривизны, имеющий направление главной нормали. Поэтому $\dot{\mathbf{e}} = k(s)\mathbf{n}$. Здесь $k(s)$ — неотрицательная функция, называемая *кривизной*. Вычислим теперь производную орта бинормали $\dot{\mathbf{b}}$. С одной стороны, эта производная ортогональна вектору $\mathbf{b}$. С другой, дифференцируя тождество $\mathbf{b} = [\mathbf{e}, \mathbf{n}]$, получим

$$\dot{\mathbf{b}} = [\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{n}] + [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}] = [k\mathbf{n}, \mathbf{n}] + [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}] = [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{n}}].$$

Следовательно, эта производная ортогональна также касательному вектору и поэтому имеет направление главной нормали. Значит, $\dot{\mathbf{b}} = -q\mathbf{n}$. Функция $q(s)$ называется *кручением кривой*. Теперь мы можем вычислить производную вектора $\mathbf{n}$:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d}{ds}[\mathbf{b}, \mathbf{e}] = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{e}] + [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{e}}] = [-q\mathbf{n}, \mathbf{e}] + [\mathbf{b}, k\mathbf{n}] = -k\mathbf{e} + q\mathbf{b}.$$

Итак, мы получили следующий результат:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \frac{d\mathbf{e}}{ds} & = & & k(s)\mathbf{n}, & \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} & = & -k(s)\mathbf{e} & & +q(s)\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} & = & & -q(s)\mathbf{n}. & \end{array} \right. \tag{36}$$

Это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые называются *уравнениями Френе*. Из теории таких систем известно, что если заданы начальные условия, то в некоторой окрестности начальной точки $s = 0$ существует единственное решение $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$. Таким образом, можно сформулировать такой вывод:

Теорема 17. *Движение сопровождающего репера пространственной кривой определяется уравнениями Френе и зависит только от ее кривизны и кручения.*

Теперь мы можем ответить на вопрос, при каком условии пространственная кривая является плоской? Ответ на него дает следующая

Теорема 18. *Кривая* Γ *является плоской тогда и только тогда, когда ее кручение равно нулю.*

Доказательство. Пусть кривая с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ плоская, т. е. ее носитель принадлежит некоторой плоскости Π. Тогда векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ лежат в этой же плоскости и, следовательно,

эта плоскость является соприкасающейся плоскостью кривой. Отсюда следует, что единичный вектор бинормали, ортогональный плоскости Π, постоянен и его производная равна нулю. Но тогда из третьего уравнения Френе вытекает $q\mathbf{n} = 0$, что равносильно $q = 0$.

Обратно, пусть $q = 0$. Из того же уравнения Френе следует $\dot{\mathbf{b}} = 0$ и поэтому $\mathbf{b} = \mathrm{const}$. Рассмотрим тождество $(\mathbf{b}, \mathbf{r}'(t)) \equiv 0$. Интегрируя его, получим $(\mathbf{b}, \mathbf{r}(t)) + c \equiv 0$, где c — постоянная интегрирования. Это новое тождество означает, что радиус-вектор кривой удовлетворяет уравнению плоскости $(\mathbf{b}, \mathbf{r}) + c \equiv 0$ и, следовательно, кривая является плоской. $\square$

ЛЕКЦИЯ 8. СТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ.

8.1. Геометрический смысл кривизны и кручения.

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл кривизны, рассмотрим первое уравнение Френе и поступим таким же образом, как и в случае плоских кривых. Мы имеем $k(s) = |\frac{d\mathbf{e}}{ds}|$. По определению производной $\dot{\mathbf{e}} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{|h|}(\mathbf{e}(s+h) - \mathbf{e}(s))$, так что $k(s) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|\triangle \mathbf{e}|}{|h|}$. Но так как векторная функция $\mathbf{e}(s)$ имеет единичный модуль, то выражение в числителе с точностью до малых второго порядка можно заменить на угол поворота этого вектора при его движении по кривой. В результате получим $k(s) = \lim\limits_{h\to 0} |\frac{\varphi}{h}|$. Таким образом, как и для плоских кривых, справедлива

Теорема 19. *Кривизна кривой есть предел отношения модуля скорости поворота ее касательного вектора по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит.*

Аналогичным образом устанавливается и геометрический смысл кручения. Он вытекает из третьего уравнения Френе. Обозначим через ϕ угол поворота вектора бинормали $\mathbf{b}$ на дуге h. Тогда справедлива

Теорема 20. *Абсолютная величина кручения кривой есть предел отношения модуля скорости поворота ее вектора бинормали по отношению к дуге, на которой этот поворот происходит:* $|\omega| = \lim\limits_{h\to 0} |\frac{\phi}{h}|$.

Доказательство аналогично.

8.2. Кинематический смысл кривизны и кручения.

Рассмотрим параметризованную кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ как траекторию движения точки. При этом параметр t имеет смысл времени. Будем рассматривать сопровождающий репер как твердое тело, которое движется вдоль кривой. При этом мы будем считать, что центр репера движется равномерно с единичной скоростью $v = |\mathbf{r}'| = 1$, так что t является натуральным параметром. Но всякое движение репера в пространстве состоит из переноса его центра и вращения. Перенеся репер из точки $\mathbf{r}(s+h)$ параллельно в исходную точку $\mathbf{r}(s)$, рассмотрим затем его вращение вокруг этой точки. Только это вращение будет сейчас представлять для нас интерес. Как известно из кинематики, в каждый момент времени оно представляет собой вращение вокруг некоторой мгновенной оси с вектором угловой скорости $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Обозначим через $\vec{\rho}$

радиус-вектор произвольной "вмороженной"точки твердого тела относительно центра вращения $\mathbf{r}(s)$. Тогда ее линейная скорость, как известно из механики твердого тела, равна $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{\rho}]$. В частности, для точек с радиусами-векторами $\mathbf{e} = (1,0,0)$, $\mathbf{n} = (0,1,0)$ и $\mathbf{b} = (0,0,1)$ получим

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{e}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{e}] = (0, \omega_3, -\omega_2), \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{n}] = (-\omega_3, 0, \omega_1), \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = [\vec{\omega}, \mathbf{b}] = (\omega_2, -\omega_1, 0). \end{cases}$$

Сравнивая эти формулы с уравнениями Френе (36), получим $k\mathbf{n} = [\vec{\omega}, \mathbf{e}]$, $-k\mathbf{e} + q\mathbf{b} = [\vec{\omega}, \mathbf{n}]$, $q\mathbf{n} = [\vec{\omega}, \mathbf{b}]$. Отсюда придем к выводу, что $\omega_1 = q$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = k$. Таким образом, вектор угловой скорости равен $\vec{\omega} = q\mathbf{e} + k\mathbf{b}$. Он принадлежит спрямляющей плоскости и называется *вектором Дарбу.*

8.3. Вычисление кривизны и кручения.

Для вычисления кривизны и кручения кривой вернемся к уравнениям Френе. Из них мы имеем $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}, \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}$. Нам понадобится еще третья производная радиуса-вектора

$$\dddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}(k\mathbf{n}) = -q^2\mathbf{e} + \dot{k}\mathbf{n} + kq\mathbf{b}\,.$$

Подсчитаем векторное и смешанное произведения

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{e}, k\mathbf{n}] = k\mathbf{b}, \quad (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (k\mathbf{b}, \dddot{\mathbf{r}}) = k^2 q.$$

Отсюда следует, что

$$k(s) = |[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|\,, \quad q(s) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]^2}\,. \tag{37}$$

Пусть теперь кривая задана в произвольной параметризации: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Выразим производные по натуральному параметру через производные по t. Получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t}, \quad \dddot{r} = \mathbf{r}'''(\dot{t})^3 + 3\mathbf{r}''\dot{t}\ddot{t} + \mathbf{r}'\dddot{t}\,,$$

откуда

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''](\dot{t})^3, \quad (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')(\dot{t})^6.$$

Подставляя эти выражения в формулы (37), получим

$$k = |[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|\dot{t}|^3, \quad q = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2}\,.$$

Осталось найти $|\dot{t}|$. Но так как $|\dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{r}'||\dot{t}|$, то $|\dot{t}| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$. Итак, окончательно имеем

$$k(t) = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}, \quad q(t) = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', r'']^2}. \tag{38}$$

8.4. Строение кривой в окрестности данной точки.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выяснить, каким образом кривизна и кручение влияют на локальное строение кривой в окрестности данной точки. Отнесем кривую Γ к натуральному параметру и рассмотрим на ней точку $s = 0$. Сопровождающий репер определяет в этой точке прямоугольную систему координат (x, y, z) с направляющими ортами $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ соответственно. Разложим векторную функцию $\mathbf{r}(s)$ в окрестности начальной точки в ряд Тейлора. С точностью до малых третьего порядка

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + (\dot{\mathbf{r}}(0))s + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{r}}(0))s^2 + \frac{1}{3!}(\dddot{\mathbf{r}}(0))s^3.$$

Но из формул Френе мы имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}, \ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}, \dddot{\mathbf{r}} = -k^2\mathbf{e} + \dot{k}\mathbf{n} + kq\mathbf{b}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее разложение и полагая $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e} + y(s)\mathbf{n} + z(s)\mathbf{b}$, получим

$$x = s - \frac{1}{6}k^2s^3, y = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{6}\dot{k}s^3, z = \frac{1}{6}kqs^3 \tag{39}$$

Это прямоугольные координаты векторной функции $\mathbf{r}(s)$ относительно сопровождающего репера в точке $s = 0$. Здесь k и q суть значения кривизны и кручения в начальной точке. Ограничиваясь лишь первыми членами, будем иметь

$$x = s, y = \frac{1}{2}ks^2, z = \frac{1}{6}kqs^3.$$

Это уравнения аппроксимируют параметрические уравнения нашей кривой в окрестности начальной точки. Для того, чтобы понять, как ведет себя кривая, рассмотрим ее проекции на координатные плоскости.

1) Проекция на соприкасающуюся плоскость $\{x, y\}$ имеет вид

$$x = s, y = \frac{1}{2}ks^2.$$

Исключая параметр, получим уравнение параболы $y = \frac{1}{2}kx^2$. Так как $k \geq 0$, то своей вогнутостью она обращена в сторону вектора главной нормали $\mathbf{n}$, а степень этой вогнутости пропорциональна кривизне.

2) Проекция на нормальную плоскость $\{y, z\}$ имеет параметрические уравнения

$$y = \frac{1}{2}ks^2\,, z = \frac{1}{6}kqs^3\,.$$

После исключения параметра получим полукубическую параболу $z^2 = \frac{q^2}{6k}y^3$. Так как $\frac{q^2}{6k} > 0$, то ее ветви обращены в положительную сторону главной нормали.

3) Рассмотрим, наконец, проекцию на спрямляющую плоскость $\{x, z\}$

$$x = s\,, z = \frac{1}{6}kqs^3.$$

Это кубическая парабола с приведенным уравнением $z = \frac{1}{6}kqx^3$. Ее расположение на плоскости зависит от знака кручения: при $q > 0$ она проходит через 1-й и 3-й квадранты, а при $q < 0$ через 2-й и 4-й.

Теперь можно сделать вывод о поведении кривой в целом. Для этого вернемся к уравнениям (39) и рассмотрим сначала случай, когда кручение кривой положительно: $q > 0$. Тогда при переходе от отрицательных к положительным значениям параметра знаки координат меняются следующим образом

	x	y	z
s<0	—	+	—
s>0	+	+	+

Отсюда видно, что в окрестности начальной точки кривая имеет форму правого винта.

Рассмотрим теперь случай, когда кручение кривой отрицательно. Тогда при переходе от отрицательных к положительным значениям параметра знаки координат меняются так

	x	y	z
s<0	—	+	+
s>0	+	+	—

Здесь знак координаты z изменился на противоположный, т. е. произошло зеркальное отражение относительно соприкасающейся плоскости. В результате в окрестности начальной точки кривая имеет форму левого винта.

II. **ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Лекция 9. ТЕНЗОРЫ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

9.1. Понятие тензора. Компоненты тензора и закон их преобразования.

Прежде, чем начать изучение теории поверхностей, а затем и теории многообразий, нам необходимо познакомимся с тензорами и с основными тензорными операциями. Начнем с тензоров частного вида — ковариантных тензоров.

Определение.*Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— векторное пространство размерности* m *. Ковариантным тензором валентности* q *на* $\boldsymbol{V}$*, где* $q \geq 0$ *— целое неотрицательное число, называется полилинейная функция* $T = T(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ *от* q *векторных аргументов.*

Таким образом, на каждом наборе векторов $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$ мы получаем некоторое число. Полилинейность этой функции означает, что она линейна по каждому аргументу. При $q = 0$ тензор по определению является числом (скаляром).

Вследствие полилинейности тензор достаточно задать на базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства $\mathbf{V}$. Значения тензора на наборе базисных векторов

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_q} = T(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}), \quad (1 \leq i_s \leq m) \tag{1}$$

называются *компонентами тензора* в этом базисе. Это m^q чисел. Тогда его значения на произвольных аргументах равны

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q) = T(a_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, a_q^{i_q}\mathbf{e}_{i_q}) = T_{i_1 \ldots i_q} a_1^{i_1} \ldots a_q^{i_q}\,.$$

Здесь всюду по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до m (правило Эйнштейна). При этом надо иметь ввиду, что если мы выберем другой базис, векторы которого обозначим штрихованными индексами $\mathbf{e}_{i'}$, то изменятся и компоненты тензора. Найдем закон их преобразования. Пусть $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$, где $\det(A^i_{i'}) \neq 0$. Тогда, используя полилинейность тензора, получим

$$T_{i'_1 \ldots i'_q} = T_{i_1 \ldots i_q} A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_q}_{i'_q}\,. \tag{2}$$

Такой закон преобразования совокупности чисел называется *тензорным*. Векторное пространство $\mathbf{V}$, а значит и компоненты тензора, в дальнейшем будут считаться вещественными.

Примеры.

1) Если $q = 1$, мы имеем линейную форму $T(\mathbf{a}) = T_i a^i$. Она называется также *ковектором*. Закон преобразования его компонент $T_{i'} = T_i A^i_{i'}$. Обратим внимание на то, что он отличен от закона преобразования координат вектора.

2) При $q = 2$ имеем билинейную форму $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = T_{ij} a^i b^j$. Примером является скалярное произведение векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Этот тензор называется *метрическим* и в координатах представляется в виде $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij} a^i b^j$. Он обладает свойствами симметрии, невырожденности матрицы (g_{ij}) и положительной определенности соответствующей квадратичной формы.

Нам понадобится и более общее понятие тензора. Для этого наряду с $\mathbf{V}$ рассмотрим *сопряженное* векторное (ковекторное) пространство $\mathbf{V}^*$. Напомним, что оно образовано множеством всех линейных форм на $\mathbf{V}$ (ковекторов) с линейными операциями

$$(\xi + \eta)(\mathbf{a}) = \xi(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{a}), \quad (\lambda\xi)(\mathbf{a}) = \lambda\xi(\mathbf{a}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

и имеет ту же самую размерность m. Если $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис в $\mathbf{V}$, то базис сопряженного пространства (кобазис) образован линейными формами $\{\mathbf{e}^i\}$, номера которых будем

обозначать верхними индексами. Выберем его так, чтобы выполнялось *условие сопряженности* $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Разложение всякой линейной формы по кобазису $\xi = \xi_i \mathbf{e}^i$ дает ее компоненты $\xi_i = \xi(\mathbf{e}_i)$, а значение на любом векторе равно

$$\xi(\mathbf{a}) = \xi(a^i \mathbf{e}_i) = \xi_i a^i. \tag{3}$$

Определение. *Тензором валентности* (p, q) *на* $\boldsymbol{V}$ *называется полилинейная функция* $T = T(\xi_1, \ldots, \xi_p, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ *от* p *ковекторных и* q *векторных аргументов.*

В частности, тензор валентности $(p, 0)$ называется *контравариантным.* В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением, например, тензоров валентности $(1, 2)$.

Если разложить аргументы тензора по базисам соответствующих пространств, то в силу его полилинейности получим

$$T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = T^i_{jk} \xi_i a^j b^k\,. \tag{4}$$

Компоненты этого тензора

$$T^i_{jk} = T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \tag{5}$$

суть его значения на базисных элементах.

Для того, чтобы получить закон преобразования этих компонент при переходе к другому базису, следует иметь ввиду, что одновременно с преобразованием $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$ базиса в $\mathbf{V}$ преобразуется и сопряженный базис $\mathbf{e}^{i'} = A^{i'}_i \mathbf{e}^i$ с помощью обратной матрицы $A^{-1} = (A^{i'}_i)$ (мы различаем эти матрицы положением штрихованного индекса). Действительно, пусть при этом преобразовании $\mathbf{e}^{i'} = B^{i'}_i \mathbf{e}^i$. Из условия сопряженности преобразованных базисов $\mathbf{e}^{i'}(\mathbf{e}_{j'}) = \delta^{i'}_{j'}$ имеем

$$B^{i'}_i \mathbf{e}^i (A^j_{j'} e_j) = B^{i'}_i A^j_{j'} \delta^i_j = B^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'},$$

т. е. $BA = E$, откуда и следует, что $B = A^{-1}$. Тогда из (5) получим следующий закон преобразования компонент тензора

$$T^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_i T^i_{jk} A^j_{j'} A^k_{k'}. \tag{6}$$

Отсюда вытекает *основное свойство тензора*:

Теорема 1. *Если компоненты тензора равны нулю в каком либо базисе, то они равны нулю и в любом другом базисе.*

Рассмотрим ковариантные или контравариантные тензоры.

Определение. *Тензор называется симметричным, если при транспозиции любой пары своих аргументов (индексов) он не изменяется и кососимметричным, если он изменяет свой знак.*

Тензор может быть симметричным или кососимметричным не по всем аргументам, а лишь по некоторой их части. Условия симметрии или косой симметрии снижают число *существенных* компонент тензора. Так называются компоненты, не равные тождественно нулю и определенные с точностью до знака.

Примеры.

1) Тензор валентности $(1, 1)$ имеет вид $T(\xi, \mathbf{a}) = T^i_j \xi_i a^j$. Его можно отождествить с *линейным оператором* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ следующим образом: $T(\xi, \mathbf{a}) = \xi(A\mathbf{a})$. Этот оператор в выбранном базисе имеет матрицу (T^i_j), составленную из компонент этого тензора.

2) В частности, тензор $\delta(\xi, \mathbf{a}) = \xi(\mathbf{a})$ соответствует тождественному оператору с единичной матрицей $E = (\delta_i^j)$. Он называется *тензором Кронекера.* Его компоненты δ_j^i равны единице или нулю, в зависимости от того, совпадают или различны его индексы. Отсюда вытекает важное свойство *поглощения* этого тензора при свертывании с другим тензором. Например, $T_{jk}^i \delta_m^k = T_{jm}^i$.

3) Смешанное произведение векторов $\varepsilon = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в 3-мерном евклидовом пространстве линейно по всем своим сомножителям и поэтому есть тензор валентности $(0, 3)$. Это кососимметричный тензор, ибо при любой транспозиции векторов он изменяет знак. Этот тензор имеет только одну существенную компоненту $\varepsilon_{123} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

9.2. Основные тензорные операции.

Существует ряд операций с тензорами, приводящих снова к тензорным величинам. Простейшими среди них являются две линейные операции.

1) *Сложение тензоров.* Пусть T и S — тензоры одинаковой валентности, например $p = 1$, $q = 2$. Их сумма определяется формулой

$$(T + S)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Легко видеть, что $T+S$ есть тензор той же валентности. В координатах это выглядит так

$$(T + S)_{ij}^k = T_{ij}^k + S_{ij}^k .$$

2) *Умножение тензора на число* определяется формулой

$$(\lambda T)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

или в координатах

$$(\lambda T)_{ij}^k = \lambda T_{ij}^k .$$

Это тензор той же валентности. Эти две операции обладают обычными свойствами линейных операций.

3) *Умножение тензоров.* Пусть T — тензор валентности (p_1, q_1) и S — тензор валентности (p_2, q_2). Перемножая их как функции, получим новую функцию $T \otimes S$ (знак тензорного умножения) от p_1+p_2 ковекторных и q_1+q_2 векторных аргументов. Например,

$$(T \otimes S)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \eta, \mathbf{c}) = T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) S(\eta, \mathbf{c}).$$

Нетрудно видеть, что эта функция обладает свойством линейности по всем своим аргументам и, следовательно, является тензором. Подставляя сюда базисные векторы, мы увидим, что в координатах дело сводится к перемножению координат этих тензоров

$$K_{ijk}^{lm} = T_{ij}^l S_k^m .$$

Очевидно, тензорное произведение линейно по каждому сомножителю и ассоциативно: $(T \otimes S) \otimes K = T \otimes (S \otimes K)$. Но оно не коммутативно, поскольку тензор $S \otimes T$ имеет другое расположение аргументов. В частности, если S — скаляр, то получим уже рассмотренную выше вторую линейную операцию.

4) *Свертывание тензора.* Эта операция применяется к смешанным тензорам, которые имеют оба типа аргументов. Выберем какую либо пару из них, подставим вместо этих аргументов базисные векторы и просуммируем по их номерам. Например, для тензора $T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$S(\mathbf{b}) = T(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_k, \mathbf{b}).$$

Вследствие произвольности вектора $\mathbf{b}$ получим в координатах

$$S_j = T^k_{kj}$$

(не забудем, что здесь по повторяющемуся индексу идет суммирование). В общем случае получим полилинейную функцию от $q-1$ векторных и $p-1$ ковекторных аргументов, которая обозначается символом $S = \mathrm{tr}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}\mathrm{T}$, где указаны номера тех аргументов, по которым произведено свертывание.

Теорема 2. *S есть тензор валентности $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. S есть функция, полилинейная по оставшимся аргументам, но в нее входят базисные векторы и надо доказать, что ее значения не зависят от выбора базиса. Перейдем к новому базису. В нашем примере получим

$$S'(\mathbf{b}) = T(\mathbf{e}^{k'}, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{b}) = T(A^{k'}_i \mathbf{e}^i, A^j_{k'}\mathbf{e}_j, \mathbf{b}) = \delta^j_k T(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j, \mathbf{b}) = T(e^k, \mathbf{e}_k, \mathbf{b}) = S(\mathbf{b}).$$

В общем случае выкладки аналогичны. □

В практических вычислениях свертывание часто комбинируется с умножением тензоров. Например,

$$\mathrm{tr}^1_3 : \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\mathrm{S}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\mathrm{S}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{k}}\,.$$

Пример. Пусть $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — линейный оператор. Как мы видели, его можно рассматривать как тензор валентности $(1,1)$ с матрицей (A^i_j). Его свертывание $\mathrm{tr}A = A^i_i$ приводит к тензору нулевой валентности, т. е. к числу, которое называется *следом* линейного оператора.

Задача. *Покажите, что свертывание перестановочно с линейными операциями.*

Лекция 10. ТЕНЗОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Опускание и поднятие индекса.

Евклидово векторное пространство $\mathbb{E} = \mathbb{E}^m$ характеризуется тем, что в нем задано скалярное произведение $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — симметричный и невырожденный тензор второй валентности с компонентами $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Это обстоятельство позволяет определить линейный изоморфизм векторного пространства $\mathbb{E}$ на сопряженное ему ковекторное пространство $\mathbb{E}^*$ следующим образом. Каждому вектору $\mathbf{a}$ поставим в соответствие линейную форму (ковектор) $\xi_{\mathbf{a}} = \varphi(\mathbf{a})$, значение которой на произвольном векторе $\mathbf{b}$ равно

$$\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{7}$$

Теорема 3. *Отображение* $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ *является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность этого отображения очевидна в силу линейности по $\mathbf{a}$ скалярного произведения. Более того, если $\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ при произвольном $\mathbf{b}$, откуда $\mathbf{a} = 0$. Поэтому отображение биективно и, следовательно, является линейным изоморфизмом. Этот изоморфизм позволяет определить в $\mathbb{E}^*$ скалярное произведение: если $\xi = \varphi(\mathbf{a})$ и $\eta = \varphi(\mathbf{b})$ – два ковектора, то положим

$$(\varphi(\mathbf{a}), \varphi(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

так что $\mathbb{E}^*$ превращается в евклидово векторное пространство, изометричное исходному. □

Теорема 4. *Если* $\{\boldsymbol{e}_i\}$ *и* $\{\boldsymbol{e}^i\}$ *— сопряженные базисы в* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{E}^*$, *то* $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = g_{ij}\boldsymbol{e}^j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим образы базисных векторов $\mathbf{e}_i$ — ковекторы $\varphi(\mathbf{e}_i)$. Разложив их по базису сопряженного пространства, получим $\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_{ij}\mathbf{e}^j$. По определению $\lambda_{ij}\mathbf{e}^j(\mathbf{b}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{b})$. Положив здесь $\mathbf{b} = \mathbf{e}_k$ и учитывая сопряженность базисов, получим $\lambda_{ik} = g_{ik}$, что доказывает утверждение. □

Запишем отображение φ в координатах, положив в формуле (7) $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$. Получим $\xi(\mathbf{e}_j) = \xi_j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j) = g_{ij}a^i$. Координаты ковектора ξ обычно обозначают той же буквой, что и соответствующий ему вектор, но с нижним индексом. При этом соглашении наше отображение запишется в виде

$$a_j = g_{ij}a^i. \tag{8}$$

По этой причине рассматриваемый изоморфизм $\mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ называют *опусканием индекса.* Для того, чтобы записать обратное отображение $\mathbf{a} = \varphi^{-1}(\xi)$, надо разрешить систему (8) относительно координат a^i. Делается это следующим стандартным образом. Рассмотрим матрицу (g^{ij}), обратную к матрице метрического тензора, обозначив ее элементы верхними индексами. Так как $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, то умножая равенство (8) на компоненты g^{jk} и производя затем свертывание, получим

$$a^k = a_j g^{jk}. \tag{9}$$

Это отображение называется *поднятием индекса.*

Операции опускания и поднятия индекса естественным образом обобщаются на произвольные тензоры. Покажем это на примере тензора $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \xi)$ валентности $(1, 2)$. Пусть ковектору ξ соответствует вектор $\mathbf{c}$: $\xi_{\mathbf{c}} = \varphi(\mathbf{c})$. Подставив, получим функцию $T^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varphi(\mathbf{c}))$, которая полилинейна по всем своим векторным аргументам и, следовательно, является ковариантным тензором валентности $(0, 3)$.

Компоненты этого тензора обозначают той же буквой, делая различие лишь в расположении индексов

$$T_{ijk} = T^*(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, g_{ks}\mathbf{e}^s) = g_{ks}T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^s) = g_{ks}T_{ij}^{\cdot\cdot\,s}\,.$$

Таким образом, произошло опускание третьего индекса.

10.2. Дискриминантный тензор.

Сначала о некоторых свойствах кососимметричных тензоров.

Теорема 5. *Если аргументы кососимметричного тензора линейно зависимы, то он обращается в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала частный случай, когда какая-то пара аргументов кососимметричного тензора $T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q)$ совпадает, например $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Тогда, сделав их транспозицию, получим $T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots) = -T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots)$ и, следовательно, $T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \dots) = 0$. Пусть теперь аргументы кососимметричного тензора линейно зависимы и $\mathbf{a}_q = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda^{q-1}\mathbf{a}_{q-1}$. Тогда

$$T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q) = \lambda^1 T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_1) + \dots + \lambda^{q-1}T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_{q-1}).$$

Но каждое из этих слагаемых равно нулю, так как содержит пару совпадающих аргументов. □

Следствие. *Всякий кососимметричный тензор валентности $q > m$ равен нулю.*

Рассмотрим кососимметрический тензор $\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ максимальной валентности $q = m$. Он имеет только одну существенную компоненту $\varepsilon_{12\dots m} = \varepsilon(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$. Все остальные ненулевые компоненты $\varepsilon_{i_1\dots i_m}$ либо с ней совпадают, если подстановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ четная, либо отличаются от нее знаком, если она нечетная. Другими словами, $\varepsilon_{12\dots m}$ является единственной существенной компонентой эого тензора. Отсюда следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \sum_\pi \varepsilon_{i_1\dots i_m} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_n} = \varepsilon_{1\dots m}\det(a_j^i).$$

Выберем теперь существенную компоненту этого тензора так, чтобы она была равна ориентированному объему m-мерного параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$. Он положителен или отрицателен в зависимости от ориентации этого базиса. Но, как известно, квадрат этого объема равен определителю Грама

$$\varepsilon_{12\dots m}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1^2 & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_m) & \dots & (\mathbf{e}_m^2) \end{vmatrix} = g\,.$$

Таким образом, значение тензора на заданной системе m векторов равно

$$\varepsilon(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \sqrt{g}\,\det(a_j^i). \tag{10}$$

Он называется *дискриминантным тензором* евклидова пространства. Если же система координат прямоугольная, то $g = 1$. В частности, в 3-мерном евклидовом пространстве (10) есть смешанное произведение векторов. В этом случае в декартовых координатах он имеет существенную компоненту $\varepsilon_{123} = \sqrt{g}$.

Аналогично определяется дискриминантный тензор $\varepsilon(\xi_1, \dots \xi_m)$ на сопряженном пространстве. Это контравариантный тензор с компонентами $\varepsilon^{i_1 \dots i_m}$. Его единственная существенная компонента выражается через дискриминант метрического тензора следующим образом $\varepsilon^{1 \dots n} = \frac{1}{\sqrt{g}}$.

Задачи.

1) Покажите, что относительно определенного в теореме 1 скалярного произведения пространства $\mathbb{E}^*$ $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij}$;

2) Проверьте, что существенная компонента дискриминантного тензора $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ пространства $\mathbb{E}^*$ равна $\varepsilon^{1 \dots n} = \det(g^{ij}) = \frac{1}{\sqrt{g}}$.

ЛЕКЦИЯ 11. ПОВЕРХНОСТИ В 3-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

11.1. Понятие поверхности. Параметрическое, неявное и приведенное уравнения.

Определение. *Подмножество M в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ называется поверхностью, если всякая его точка $A \in M$ обладает такой ε-окрестностью $B(A,\varepsilon)$, что пересечение $M \cap B(A,\varepsilon)$ гомеоморфно некоторой области $Q \in \mathbb{R}^2$ вещественной плоскости.*

Таким образом, с топологической точки зрения поверхность локально устроена как кусок плоскости.

Примеры.

1) Сфера в некоторой ε-окрестности любой своей точки устроена как кусок плоскости. В самом деле, проекция этой окрестности из центра сферы на касательную плоскость в этой точке осуществляет указанный в определении гомеоморфизм.

2) Наоборот, конус в смысле данного определения поверхностью не является. Его вершина есть особая точка, любая окрестность которой не удовлетворяет указанному условию.

Более общим и наиболее употребительным является следующее

Определение. *Параметризованной поверхностью класса C^k в евклидовом $\mathbb{E}^3$ называется C^k-отображение $\boldsymbol{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3$ области вещественной плоскости в это пространство.*

Образ $\mathbf{r}(U) \subset \mathbb{E}^3$ называется *носителем* поверхности. Таким образом, параметризованная поверхность задается векторной функцией двух скалярных аргументов $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in U$ или в координатах

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2). \tag{11}$$

Мы часто будем применять также обозначения $u^1 = u, u^2 = v$. Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями* поверхности, а переменные u^i *криволинейными координатами*. Точка параметризованной поверхности называется *регулярной*, если в этой точке регулярна задающая ее векторная функция. Напомним, это означает, что ранг якобиевой матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 x & \partial_1 y & \partial_1 z \\ \partial_2 x & \partial_2 y & \partial_2 z \end{pmatrix} \tag{12}$$

равен двум. Как мы увидим, это условие гарантирует, что в окрестности регулярных точек поверхность диффеоморфна некоторой области на плоскости.

Следует иметь ввиду, что один и тот же носитель или разные области поверхности могут быть заданы разными параметрическими уравнениями. Тогда возникают преобразования криволинейных координат, определяемые гладкими функциями $u' = f(u,v)$, $v' = g(u,v)$ с ненулевым якобианом.

Пример. Найдем параметрические уравнения сферы радиуса a. Выбрав прямоугольные координаты с началом в центре сферы, радиус-вектор $\mathbf{r} = \vec{OA}$ ее произвольной точки A разложим на две составляющие: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + z\mathbf{k}$, где $\mathbf{r}_1$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{r}$ на плоскость XY. Пусть $0 \le \varphi < 2\pi$ — ориентированный угол, образуемый осью X с вектором $\mathbf{r}_1$ (долгота). Тогда его можно записать в виде $\mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{e}(\varphi)$ и, следовательно, $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Если ввести ориентированный угол θ, образуемый вектором $\mathbf{r}$ с плоскостью XY, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (широта), то получим

$\lambda = a\cos\theta$, $z = a\sin\theta$. В итоге мы нашли следующее параметрическое уравнение сферы

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k}).$$

Углы θ и φ называются географическими координатами на сфере. Полученная векторная функция не всюду регулярна: ранг якобиевой матрицы

$$J = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

падает при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Это северный и южный полюсы сферы. Таким образом, найденная нами параметризация регулярна лишь в области на сфере, получаемой после исключения этих двух диаметрально противоположных точек.

Поверхность можно задать также уравнением вида

$$F(x,y,z) = 0, \tag{13}$$

которое называется *неявным уравнением* поверхности. Однако, такое уравнение не всегда задает поверхность.

Теорема 6. *Непустое подмножество* $M = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ *евклидова пространства есть поверхность, если: 1) Функция* F *дифференцируема; 2) В точках этого множества* $\mathrm{gradF}\Big|_{\mathrm{M}} \neq 0$.

Доказательство следует из теоремы о неявнх функциях. В силу заданных условий якобиева матрица $J = (F_x, F_y, F_z)$ имеет в точках множества, удовлетворяющих уравнению $F = 0$, максимальный ранг, равный единице. По теореме о неявной функции для каждой его точки существует окрестность, в которой уравнение $F = 0$ локально разрешимо относительно одной из переменных. Если, например, отлична от нуля производная F_z, это уравнение можно (локально) разрешить относительно переменной z. Тогда получим $z = f(x,y) : F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$, где $f(x,y)$ — дифференцируемая функция, определенная в некоторой области U плоскости XY. Такое уравнение называется *приведенным уравнением* поверхности. Оно всегда задает поверхность с носителем $\Gamma = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{E}^3\}$, $(x,y) \in U$. Гомеоморфизм на область U задается ортогональной проекцией на плоскость XY. $\square$

От приведенного уравнения уже просто перейти к параметрическому. Нужно координаты x и y задать как произвольные гладкие функции двух параметров u, v с ненулевым якобианом. Тогда получим

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = f(x(u,v), y(u,v)).$$

Иногда достаточно положить $x = u$, $y = v$.

Пример.

Сфера имеет неявное уравнение $F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Градиент этой функции равен $\mathrm{grad}F = (2x, 2y, 2z)$ и на сфере нигде не обращается в нуль. Рассмотрим, например, подмножество точек сферы, в которых $z \neq 0$. Это подмножество исключает точки экватора и состоит из двух областей — верхней ($z > 0$) и нижней ($z < 0$) полусфер. Разрешая уравнение относительно z, получим $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Если мы положим $x = a\cos\theta\cos\varphi$, $y = a\cos\theta\sin\varphi$, то тогда $z = a\sin\theta$. Это уже знакомые нам параметрические уравнения сферы в географических координатах.

11.2. Пути на поверхности. Координатная сеть и натуральный репер.

Вернемся к регулярно параметризованной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, где переменные u, v пробегают область $U \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим регулярную кривую γ в этой области с параметрическими уравнениями

$$u = u(t),\ v = v(t). \tag{14}$$

На поверхности ей соответствует параметризованная кривая Γ с радиусом-вектором

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \tag{15}$$

Таким образом, мы получили параметризованную кривую на поверхности, которую, чтобы подчеркнуть ее принадлежность поверхности, будем называть *путем*. Уравнения (14) его вполне определяют и мы будем называть их, в отличие от (15), *внутренними уравнениями* этого пути.

В частности, рассмотрим в области U 1-параметрическое семейство параллельных прямых $v = c_2 = \mathrm{const}$. На поверхности получим 1-параметрическое семейство путей с уравнениями $\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u, c_2)$. Аналогично, семейству $u = c_1 = \mathrm{const}$ соответствует 1-параметрическое семейство путей с уравнениями $\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(c_1, v)$. Эти семейства, вдоль которых изменяется только одна криволинейная координата, называются *координатными линиями*. В совокупности они образуют так называемую *координатную сеть*.

Пример. Рассмотрим сферу и ее параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k}).$$

Пути, для которых постоянна долгота ($\varphi = c_2$) образуют на ней 1-параметрическое семейство меридианов с уравнениями $\mathbf{r}(\theta) = a(\cos\theta\mathbf{e}(c_2) + \sin\theta\mathbf{k})$, а кривые постоянной широты ($\theta = c_1$) – 1-параметрическое семейство параллелей, уравнения которых $\mathbf{r}(\varphi) = a(\cos c_1\mathbf{e}(\varphi) + \sin c_1\mathbf{k})$. Эти пути образуют на сфере географическую сеть. Она соответствует декартовой сети прямоугольника $0 \le \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ на плоскости. Обратим внимание на то, что в северном и южном полюсах, которые при этой параметризации не являются регулярными точками, правильность географической сети нарушается.

11.3. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Определение. *Вектор $\boldsymbol{a}$ называется касательным вектором поверхности в точке $A \in M$, если он является касательным вектором некоторого пути $\boldsymbol{p}(t)$ на поверхности, проходящего через эту точку: $\boldsymbol{p}'_A = \boldsymbol{a}$.*

Возникает вопрос: что представляет собой множество таких векторов в данной точке поверхности? Справедлива

Теорема 7. *Если точка A параметризованной поверхности регулярна, то множество всех касательных векторов в этой точке есть 2-мерное векторное пространство T_AM.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный гладкий путь Γ, проходящий через заданную точку A поверхности $\mathbf{r}(u, v)$. Параметрическое уравнение пути имеет вид $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, где $u(0) = u$, $v(0) = v$, а касательный вектор равен $\mathbf{a}_A = \mathbf{r}_i \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} = \mathbf{r}_1 u' + \mathbf{r}_2 v'$, где производные вычислены в этой же точке. Отсюда следует, что он является линейной комбинацией двух векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, которые в регулярной точке линейно независимы. Действительно, поскольку $\mathbf{r}_1 = (x_u, y_u, z_u), \mathbf{r}_2 =$

(x_v, y_v, z_v), то условие их линейной независимости равносильно независимости строк якобиевой матрицы (12). Это значит, что векторы $\mathbf{a}$ принадлежат 2-мерному векторному пространству. Пусть теперь $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{r}_1 + \mu\mathbf{r}_2$ — произвольный вектор этого пространства. Тогда существует путь, касательным вектором которого он является. Например, путь с внутренними уравнениями $u(t) = u + \lambda t$, $v(t) = v + \mu t$. Таким образом, касательные векторы путей, проходящих через заданную точку, образуют векторное пространство T_AM размерности два с базисом $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$. $\square$

Определение. *T_AM называется касательным векторным пространством в точке $A \in M$, а его базис $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ — натуральным базисом в этой точке. Плоскость, проходящая через данную точку с направляющим пространством T_AM, называется касательной плоскостью поверхности в точке A.*

Обычно касательная плоскость обозначается тем же символом T_AM. Векторы натурального базиса вместе с точкой A образуют *натуральный репер* и имеют простой смысл: в силу своего определения они являются касательными векторами координатных линий, проходящих через данную точку. Прямая, проходящая через данную точку и ортогональная касательной плоскости называется *нормалью поверхности* в этой точке.

Найдем уравнения касательной плоскости. Вектор нормали ортогонален векторам натурального репера и поэтому $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$. Его компоненты (N_1, N_2, N_3) есть миноры второго порядка матрицы (12). Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $\mathbf{r}(u, v)$ имеет вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v), \mathbf{N}) = 0 \tag{16}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Зная вектор $\mathbf{N}$, несложно записать и уравнение нормали.

Рассмотрим случай, когда поверхность задана неявным уравнением.

Теорема 8. *Нормальный вектор поверхности с неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$ есть градиент $\mathrm{grad}F$, вычисленный в данной точке этой поверхности.*

Доказательство. Пусть (x, y, z) — координаты точки на поверхности и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ — проходящий через нее при $t = 0$ регулярно параметризованный путь. Имеем тождество $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя его, получим новое тождество

$$(\mathrm{grad}F, \mathbf{r}') = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0.$$

Рассмотрим его при $t = 0$. Пусть в этой точке $\mathrm{grad}F \neq 0$. Тогда полученное равенство означает, что вектор $\mathrm{grad}F = (F_x, F_y, F_z)$ ортогонален касательному вектору пути в этой точке. Но в силу произвольности выбора такого пути этот вектор ортогонален касательной плоскости и, следовательно, является нормальным вектором поверхности. Уравнение касательной плоскости тогда имеет вид $(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v), \mathrm{grad}F) = 0$ или в координатах

$$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0. \tag{17}$$

Если же в данной точке $\mathrm{grad}F = 0$, касательная плоскость становится неопределенной. Такие точки называются *особыми точками* поверхности и в дальнейшем мы будем исключать их из рассмотрения.

ЛЕКЦИЯ 12. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

12.1. Поверхности вращения.

Рассмотрим некоторые специальные виды поверхностей.

Определение. *Поверхность вращения — это поверхность, образованная вращением кривой вокруг некоторой оси.*

Для простоты кривую Γ выберем плоскую, а ось вращения выберем в плоскости этой кривой. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат и пусть осью вращения является ось Z, а кривая расположена в плоскости ξZ, где ξ — ось, принадлежащая плоскости XY. Единичные векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}$ осей ξ и Z вместе с началом координат образуют ортонормированный репер. Всякая линия, принадлежащая этой плоскости, имеет параметрическое уравнение $\mathbf{r}(t) = \xi(t)\mathbf{e} + \mathrm{z(t)}\mathbf{k}$. Будем теперь вращать эту плоскость вокруг оси Z. Тогда вектор $\mathbf{k}$ не изменится, а из вектора $\mathbf{e}$ получим первую круговую векторную функцию $\mathbf{e}(\varphi)$. В результате

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = \xi(t)\mathbf{e}(\varphi) + z(t)\mathbf{k}. \tag{18}$$

Это и есть параметрическое уравнение поверхности вращения. В координатах

$$x = \xi(t)\cos\varphi,\ y = \xi(t)\sin\varphi,\ z = z(t).$$

Пути $\varphi = c_2$ называются *меридианами*. Они получаются в результате вращения исходной кривой. Пути $t = c_2$ — это окружности с центром на оси Z. Они являются траекториями точек исходной кривой при ее вращении и называются *параллелями* поверхности вращения. Отметим, что полученная координатная сеть является ортогональной. Из уравнений поверхности следует $x^2 + y^2 = \xi^2(t)$. Значит, радиусы параллелей равны $|\xi(t)|$. Исключая параметр t, получим неявное уравнение поверхности вращения в виде $F(x^2 + y^2, z) = 0$.

Примеры.

1) В плоскости ξZ рассмотрим окружность радиуса a с центром в начале координат. Ее параметрические уравнения $\xi = a\cos t$, $z = a\sin t$. При вращении вокруг оси Z получим уже знакомую нам сферу с параметрическим уравнением $\mathbf{r}(t,\varphi) = a(\cos t\mathbf{e}(\varphi) + \sin t\mathbf{k})$, где t, φ — географические координаты.

2) Обобщим предыдущий пример. В плоскости ξZ рассмотрим окружность радиуса a, но с центром в точке $(b, 0)$. Ее параметрические уравнения $\xi = b + a\cos t$, $z = a\sin t$. В результате вращения вокруг оси Z получим тор

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = (b + a\cos t)\mathbf{e}(\varphi) + a\sin t\mathbf{k}.$$

12.2. Винтовые поверхности.

Определение. *Винтовыми называются поверхности, полученные вращением плоской кривой* Γ *вокруг оси, расположенной в ее плоскости, и одновременным переносом этой кривой вдоль той же оси со скоростью, пропорциональной углу поворота.*

Таким образом, поверхность образована в результате винтового движения заданной кривой, откуда и происходит название поверхности. Для того, чтобы получить ее параметрическое уравнение, мы опять зададим исходную кривую Γ в плоскости ξZ с ортонормированным репером $\{\mathbf{e}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{r}(t) = \xi(t)\mathbf{e} + z(t)\mathbf{k}$. Тогда при вращении вектор $\mathbf{e}$ порождает первую круговую векторную функцию $\mathbf{e}(\varphi)$, а в результате переноса вдоль оси Z функция $z(t)$ заменится на функцию $z(t) + a\varphi$, получив

приращение на слагаемое, пропорциональное углу поворота. При этом коэффициент $a = \text{const}$ есть отношение линейной скорости переноса и угловой скорости вращения. В результате получим следующее параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \xi(t)\mathbf{e}(\varphi) + (z(t) + a\varphi)\mathbf{k}\,. \tag{19}$$

В координатах

$$x = \xi(t)\cos\varphi,\ y = \xi(t)\sin\varphi,\ z = z(t) + a\varphi.$$

В этом случае координатная сеть уже не ортогональна. Пути $\varphi = c_2$ — это последовательные положения исходной кривой, а пути $t = c_1$ образованы траекториями ее точек. Это винтовые линии. Отметим, что при $a = 0$ снова получаем поверхность вращения.

Пример. В плоскости XZ зададим прямую с уравнением $x(t) = t$, $z(t) = 0$. Это ось X. При ее винтовом движении получается поверхность, называемая *геликоидом.* Его уравнение

$$\mathbf{r} = t\mathbf{e}(\varphi) + a\varphi\mathbf{k}\,.$$

Координатная сеть состоит из прямолинейных образующих $\varphi = c_2$ и винтовых линий $t = c_1$.

12.3. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

Определение. *Линейчатой называется поверхность, образованная движением прямой (образующей), скользящей по заданной кривой (направляющей).*

Для того, чтобы получить ее уравнение, зададим параметризованную кривую (направляющую) $\Gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и пусть $\mathbf{a}(t)$ — единичный вектор, задающий в точках этой кривой направление прямолинейных образующих. Тогда уравнение линейчатой поверхности запишется как 1-параметрическое семейство прямых, параметризованное параметром t

$$\mathbf{R}(t, v) = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}(t). \tag{20}$$

Здесь $-\infty < v < \infty$ — параметр образующих.

Примеры.

1) Пусть направляющей линией является прямая. По ней с постоянной скоростью v скользит ортогональная к ней образующая, вращаясь вокруг направляющей с постоянной угловой скоростью ω. В результате образуется линейчатая поверхность. Найдем ее уравнение. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы направляющей была ось Z, а начальное положение образующей совпадало с осью X. За время t прямая повернется на угол $\varphi = \omega t$ и будет иметь направление вектора $\mathbf{e}(\varphi)$, а точка ее пересечения с осью Z определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t) = vt\mathbf{k} = b\varphi\mathbf{k}$, где $b = \frac{v}{\omega}$. Согласно уравнению (20) получим $\mathbf{R} = v\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$. Нетрудно видеть, что эта поверхность является геликоидом.

2) Другими примерами линейчатых поверхностей являются цилиндрические и конические поверхности, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Как известно из аналитической геометрии, две последних несут на себе два 1-параметрических семейства прямолинейных образующих.

Определение. *Линейчатая поверхность называется развертывающейся, если ее касательная плоскость постоянна вдоль образующих.*

Найдем условие, выделяющее этот класс поверхностей среди линейчатых. Из уравнения (20) вычислим производные $\mathbf{R}_t = \mathbf{r}'(t) + v\mathbf{a}'(t)$, $\mathbf{R}_v = \mathbf{a}(t)$. Следовательно, нормальный вектор поверхности равен

$$\mathbf{N} = [\mathbf{R}_t, \mathbf{R}_v] = [\mathbf{r}'(t), \mathbf{a}(t)] + v[\mathbf{a}'(t), \mathbf{a}(t)].$$

При движении точки вдоль образующей линейчатой поверхности, когда $t = \text{const}$, этот вектор зависит только от v. В силу теоремы о коллинеарных векторных функциях (лекц. 2) он сохраняет постоянное направление тогда и только тогда, когда $[\mathbf{N}, \mathbf{N}_v] = 0$. Вычислим это векторное произведение

$$[\mathbf{N}, \mathbf{N}_v] = [[\mathbf{r}', \mathbf{a}], [\mathbf{a}', \mathbf{a}]] = \mathbf{a}(\mathbf{r}', \mathbf{a}', \mathbf{a}).$$

Отсюда следует

Теорема 9. *Для того, чтобы линейчатая поверхность (20) была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение* $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') = 0$.

Из определения развертывающейся поверхности следует, что множество ее касательных плоскостей зависит не от двух, как обычно, а только от одного параметра t. Другими словами, такая поверхность есть огибающая 1-параметрического семейства плоскостей. Можно доказать, что и обратно, огибающей всякого 1-параметрического семейства плоскостей, если она существует, является развертывающаяся поверхность.

Известна классификация развертывающихся поверхностей [2]. Их три типа. В самом деле, будем искать огибающую Γ 1-параметрического семейства ее прямолинейных образующих. Эта огибающая определяется так же, как и на плоскости. Если она существует, то называется *ребром возврата* поверхности. В этом случае поверхность образована множеством касательных прямых пространственной кривой Γ и называется *поверхностью касательных*. В этом случае уравнение этой поверхности имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{r}'(t)$. Во-вторых, может случиться, что ребро возврата вырождается в точку и тогда мы имеем дело с конической поверхностью. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \text{const}$, вследствие чего уравнение конуса имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + v\mathbf{a}(t)$. Наконец, можно показать, что если ребра возврата не существует, то $\mathbf{a} = \text{const}$ и, следовательно, образующие поверхности параллельны. Это цилиндрическая поверхность с уравнением $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}$. Легко видеть, что во всех трех перечисленных случаях условие доказанной теоремы выполнено.

ЛЕКЦИЯ 13. ПЕРВАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

13.1. Тензорные поля на поверхности.

Пусть задана повехность M. Говоря о тензорных полях на поверхности, мы начнем с более простого случая.

Определение. *Векторным полем на поверхности M (или в области $U \subset M$) называется отображение, которое каждой точке $A \in M$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{a}_A \in T_A M$ в касательной плоскости этой точки.*

Если на поверхности заданы криволинейные координаты, то в каждой ее точке определен натуральный репер $\{\mathbf{r}_i\}$, $(i = 1, 2)$ и тогда векторное поле можно записать в виде $\mathbf{a} = a^i(u^1, u^2)\mathbf{r}_i$. Оно определяется, следовательно, двумя функциями $a^i(u^1, u^2)$ – компонентами векторного поля. Векторное поле называется *гладким*, если эти функции гладкие.

Определение. *Интегральным путем или траекторией векторного поля называется путь $\Gamma : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$, касательные векторы которого в точках пути совпадают с векторами этого поля*: $\mathbf{p}' = \mathbf{a}\Big|_\Gamma$.

В координатах

$$\frac{du^i}{dt} = a^i(u^k(t)). \tag{21}$$

Таким образом, нахождение интегральных путей на поверхности сводится к интегрированию системы (21) двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В силу теоремы Коши через каждую точку $A \in M$ поверхности проходит единственный интегральный путь векторного поля, определенный в некотором максимальном интервале (a, b).

На практике способом отыскания решений часто является нахождение первых интегралов системы (21), т. е. таких функций $F(u, v)$, которые постоянны вдоль интегральных линий: $F(u(t), v(t)) = \text{const}$. В этом случае интегральные пути могут быть определены неявными уравнениями, задающими 1-параметрическое семейство $F(u, v) = \text{const}$.

Аналогичным образом определяются тензорные поля на поверхности. Для этого наряду с касательными плоскостями надо рассмотреть кокасательные плоскости T^*M.

Определение. *Тензорное поле валентности на поверхности M есть отображение $A \in M \to F_A(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q,)$, которое всякой ее точке ставит в соответствие тензор с аргументами из касательной и кокасательной плоскостей.*

В координатах тензорное поле задается своими компонентами — набором m^{p+q} функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах. Например, при $p = 1, q = 2$

$$F^i_{jk}(u, v) = F_A(\mathbf{e}^i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k),$$

где ковекторы $\mathbf{e}^i$ образуют репер, сопряженный натуральному реперу $\{\mathbf{r}_j\}$. Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. При переходе к другой параметризации компоненты тензорного поля изменяются тензорному закону

$$F^{i'}_{j'k'}(u'v') = f^{i'}_i F^i_{jk}(u, v) f^j_{j'} f^k_{k'},$$

где $f^{i'}_i(u^k) = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ и $f^i_{i'}(u^{k'}) = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$ — элементы якобивой матрицы преобразования и обратной к ней. Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат. Этот факт имеет принципиально важное значение.

Для тензорных полей выполнимы все те алгебраические операции, которые мы рассмотрели ранее: сложение и умножение тензорных полей, свертывание, поднятие и опускание индексов. Все они выполняются поточечно. Более того тензорное поле можно умножить на функцию, поскольку в каждой точке эта операция сводится к умножению на число.

13.2. Определение первой фундаментальной формы.

Для каждой пары касательных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_A M$ поверхности M рассмотрим их скалярное произведение. Пусть в натуральном репере $\mathbf{a} = a^i(u,v)\mathbf{r}_i$, $\mathbf{b} = b^i(u,v)\mathbf{r}_i$. Тогда скалярное произведение равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i\mathbf{r}_i, b^j\mathbf{r}_j) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)a^i b^j,$$

где идет двойное суммирование. Это симметричная билинейная форма

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij}a^i b^j, \tag{22}$$

которая называется *первой фундаментальной формой* или *метрическим тензором* поверхности. В силу билинейности скалярного произведения это симметричное ковариантное тензорное поле второй валентности. Его компоненты $g_{ij}(u,v) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ суть гладкие функции точки, которые при преобразовании координат на поверхности изменяются по тензорному закону

$$g_{i'j'}(u^{k'}) = g_{ij}(u^k)f^i_{i'}f^j_{j'}, \quad f^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

Если положить $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, то получим *первую квадратичную форму.* Так как для всякого ненулевого вектора скалярный квадрат $\mathbf{a}^2 = g_{ij}a^i a^j > 0$, то эта форма является, кроме того,положительно определенной и как следствие этого ее определитель $g = \det(g_{ij}) > 0$.

Первую квадратичную форму записывают также в другом виде. Если мы рассмотрим дифференциалы $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i$ и вычислим их скалярный квадрат, то получим [2]

$$d\mathbf{r}^2 = g_{ij}du^i du^j. \tag{23}$$

Связь с предыдущим выражением устанавливается выражением для дифференциала (лекц. 1): $d\mathbf{r}(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_i a^i$.

Как найти первую фундаментальную форму, если поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$? Для этого надо записать это уравнение в приведенной форме $z = f(x,y)$, а затем перейти к параметрическому виду: $\mathbf{r} = (x, y, f(x,y))$. Тогда имеем $\mathbf{r}_1 = (1, 0, f'_x)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 1, f'_y)$ и поэтому ее коэффициенты равны

$$g_{11} = 1 + (f'_x)^2,\ g_{12} = f'_x f'_y,\ g_{22} = 1 + (f'_y)^2.$$

Примеры.

1) Особенно простой вид первая фундаментальная форма принимает на плоскости. Если выбрать прямоугольные координаты, то $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и тогда $d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2$. Матрица $G = (g_{ij})$ является единичной. Выберем теперь полярные координаты, в которых $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\theta)$. В этом случае $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}(\theta) + r\mathbf{g}(\theta)d\theta$. Тогда имеем $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ и, таким образом, $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$.

2) Рассмотрим сферу радиуса a с центром в начале координат. Ее уравнение в географических координатах имеет вид

$$\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k}).$$

Вычисляя частные производные, получим

$$\mathbf{r}_1 = a(-\sin\theta\mathbf{e}(\varphi) + \cos\theta\mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_2 = a\cos\theta\mathbf{g}(\varphi).$$

Тогда

$$g_{11} = a^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = a^2\cos^2\theta$$

и, следовательно,

$$d\mathbf{r}^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2)\,.$$

Знание первой фундаментальной формы дает возможность решать на поверхности задачи, связанные с измерениями, не выходя в 3-мерное пространство. Этот факт, доказанный Гауссом, имеет принципиальное значение. Рассмотрим некоторые из таких задач.

13.3. Длина пути на поверхности и угол между путями.

Пусть на параметризованной поверхности задан путь Γ своими внутренними уравнениями $u^i = u^i(t)$. Подставляя их в уравнение поверхности, получим параметрическое уравнение этого пути в пространстве $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$. Как нам известно, длина дуги вычисляется по формуле (лекц. 3)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{p}'(t)|dt\,.$$

Но $\mathbf{p}' = \mathbf{r}_i\frac{du^i}{dt}$ и, следовательно,

$$\mathbf{p}'^2 = g_{ij}(u^k(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\,.$$

В результате получим

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t))u^{i\prime}u^{j\prime}}dt\,. \tag{24}$$

Итак, вычисление длины пути на поверхности может быть произведено только с помощью первой фундаментальной формы.

Пример. Пусть известно, что некоторая поверхность имеет первую квадратичную форму $d\mathbf{r}^2 = a^2du^2 + dv^2$, $a = \text{const}$ и на ней задан путь с внутренним уравнением $v = bu$, $(b = \text{const})$. Подсчитаем длину его дуги в пределах $0 \le t \le 2\pi$. Запишем сначала параметрические уравнения пути, выбрав u за параметр: $u = t$, $v = bt$. Тогда вдоль пути имеем $d\mathbf{r}^2 = (a^2 + b^2)dt^2$, откуда согласно формуле (24) получим

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Рассмотренная здесь первая фундаментальная форма реализуется, например, на поверхности прямого кругового цилиндра с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(v) + u\mathbf{k}$. Действительно, так как $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{g}(v), \mathbf{r}_2 = \mathbf{k}$, то $g_{11} = a^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$. Это коэффициенты приведенной выше квадратичной формы, а заданный путь есть винтовая линия этого цилиндра.

Следующая задача — об измерении углов на поверхности. Пусть Γ_1, Γ_2 — два пути на поверхности, заданные внутренними уравнениями $u^i = u_1^i(t)$ и $u^i = u_2^i(\tau)$. Тогда радиусы-векторы этих путей равны

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{r}(u_1^1(t), u_1^2(t))\,, \quad \mathbf{p}_2(\tau) = \mathbf{r}(u_2^1(\tau), u_2^2(\tau))\,.$$

Предположим, что эти пути пересекаются в точке $A : u_1^i(t) = u_2^i(\tau)$. Из этих двух уравнений, если они имеют решение, мы можем найти значения параметров t и τ, соответствующие точке пересечения, а значит и саму эту точку.

Определение. *Угол между путями на поверхности — это угол между их касательными векторами в точке пересечения.*
Косинус этого угла равен

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2')}{|\mathbf{p}_1'||\mathbf{p}_2'|}\Big|_A ,$$

где производные вычислены в точке пересечения. Запишем это выражение в координатах. Так как $\mathbf{p}_1' = \mathbf{r}_i \frac{du_1^i}{dt}$ и аналогично $\mathbf{p}_2' = \mathbf{r}_i \frac{du_2^i}{d\tau}$, скалярное произведение этих двух векторов в точке (u^i) равно

$$(\mathbf{p}_1', \mathbf{p}_2') = g_{ij} \frac{du_1^i}{dt} \frac{du_2^j}{d\tau} .$$

В результате получим формулу

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} {u'}_1^i {u'}_2^j}{\sqrt{g_{ij} {u'}_1^i {u'}_1^j} \sqrt{g_{ij} {u'}_2^i {u'}_2^j}}\Big|_A , \tag{25}$$

где производные берутся по соответствующим параметрам. Мы видим, что здесь опять используются только внутренние уравнения путей и коэффициенты первой фундаментальной формы.

Пример. Вернемся к рассмотренному выше примеру поверхности с первой фундаментальной формой $d\mathbf{r}^2 = a^2 du^2 + dv^2$ и найдем угол, который путь $u_1 = t$, $v_1 = bt$ образует с координатными линиями $u_2 = c, v_2 = \tau$, $c = \mathrm{const}$. Например, в случае цилиндра это винтовая линия и прямолинейные образующие. Точка пересечения имеет координаты (c, bc). Вычисляя производные, получим ${u'}_1 = 1$, ${v'}_1 = b$, ${u'}_2 = 0, {v'}_2 = 1$. Тогда формула (25) дает следующий результат: $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким образом, искомый угол не зависит от выбора константы c, а только от формы винтовой линии.

13.4. Площадь области на поверхности.

Пусть задана параметризованная поверхность и на ней рассматривается некоторая область $Q \subset M$, ограниченная кусочно-гладким замкнутым путем Γ. Вычислим площадь этой области [2]. Разобьем эту область конечной сетью координатных путей $u_\alpha = \mathrm{const}$, $(\alpha = 1, \dots m)$ и $v_\beta = \mathrm{const}$, $(\beta = 1, \dots n)$ на малые криволинейные параллелограммы. Рассмотрим один из них $Q_{\alpha\beta}$ с вершинами

$$(u_\alpha, v_\beta),\ (u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta),\ (u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta),\ (u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta)$$

и подсчитаем его площадь $\Delta\sigma_{\alpha\beta}$. Для этого рассмотрим радиусы-векторы этих точек и их разности

$$\mathbf{r}(u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta) - \mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta) = \mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha + \mathbf{0}_2' ,$$
$$\mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta) - \mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta) = \mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta + \mathbf{0}_2'' ,$$

где $\mathbf{0}_2'$, $\mathbf{0}_2''$ — малые второго порядка. Векторы $\mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha$ и $\mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta$ касаются координатных линий и образуют плоский параллелограмм в касательной плоскости точки (u_α, v_β). Его площадь мы можем подсчитать с помощью векторного произведения. Площадь исходного параллелограмма отличается от нее на малые третьего порядка

$$\Delta\sigma_{\alpha\beta} = |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|\Delta u_\alpha \Delta v_\beta + \mathbf{0}_3 .$$

Составим интегральную сумму и перейдем к пределу при $\Delta u_\alpha \to 0, \Delta u_\beta \to 0$

$$\sigma = \lim \sum_{\alpha,\beta} \{ |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| \Delta u_\alpha \Delta v_\beta + \mathbf{0}_3 \} \, .$$

Если этот предел существует, то он дает двойной интеграл по рассматриваемой области

$$\sigma = \int_Q |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| du dv \, .$$

Займемся теперь подынтегральным выражением. Так как

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]^2 = \mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 \sin^2\theta = \mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12},$$

то окончательно имеем

$$\sigma = \int_Q \sqrt{g} \, du dv \, , \quad g = \det(g_{ij}). \tag{26}$$

Полученный результат показывает, что эта задача измерения опять решается с помощью лишь первой фундаментальной формы.

Пример. Подсчитаем площадь сферического сектора, ограниченного парой меридианов, например, $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_\circ$. Мы уже установили, что для сферы радиуса a в географических координатах

$$g_{11} = a^2, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = a^2 \cos^2\theta$$

и, следовательно, $g = a^4 \cos^2\theta$. Тогда

$$\sigma = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi_\circ} \cos\theta d\theta d\varphi \, .$$

Вычисляя, получим $\sigma = 2a^2 \varphi_\circ$. В частности, площадь всей сферы равна $\sigma = 4\pi a^2$.

ЛЕКЦИЯ 14. ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

14.1. Отображение поверхностей и его дифференциал.

Пусть M и M^* — две гладкие регулярно параметризованные поверхности в евклидовом пространстве с уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(u^*, v^*).$$

Всякое отображение $f : M \to M^*$ точке $(u, v) \in M$ ставит в соответствие точку $(u^*, v^*) \in M^*$ и локально, в выбранных параметризациях записывается в виде (далее мы применяем индексные обозначения $u = u^1, v = u^2$)

$$f : u^{*i} = f^i(u^j). \tag{27}$$

Отображение f называется гладким, если гладки представляющие его функции $f^i(u^1, u^2)$.

Задача. *Покажите, что гладкость отображения не зависит от выбора параметризаций поверхностей.*

Примеры.

1) *Стереографическим* называется отображение сферы S^2 с фиксированной точкой (полюсом) $N \in S^2$, которое всякой точке сферы $A \neq N$ ставит в соответствие точку пересечения прямой NA с плоскостью π , не проходящей через полюс. Выберем для простоты сферу единичного радиуса с центром в начале координат, полюс $N(0, 0, 1)$ на оси Z и в качестве плоскости π плоскость XY . Тогда для точки $A(x, y, z)$ сферы имеем $\overrightarrow{NA} = (x, y, z - 1)$, а уравнение прямой NA имеет вид $X = (t + 1)x$, $Y = (t + 1)y$, $Z = z + t(z - 1)$. Точка ее пересечения с плоскостью $Z = 0$ соответствует значению параметра $t = \frac{z}{1-z}$ и имеет координаты $X = \frac{x}{1-z}$, $Y = \frac{y}{1-z}$. Учитывая, что точка A принадлежит сфере и выбирая на ней, например, географические координаты, получим

$$X = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{1 - \sin\theta}, \quad Y = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{1 - \sin\theta}\,.$$

В области $S^2 \setminus N$ отображение $(\theta, \varphi) \to (X, Y)$ является диффеоморфизмом.

2) Рассмотрим гладкую регулярно параметризованную поверхность M и сферу единичного радиуса. В точке $A \in M$ рассмотрим единичный вектор нормали $\mathbf{m}$ и поставим этой точке в соответствие точку сферы $A^* \in S^2$, определяемую радиусом-вектором $\mathbf{m}$. Мы получим гладкое отображение $M \to S^2$, определяемое формулой

$$\mathbf{m}(u.v) = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|}\,.$$

Оно называется *сферическим отображением* поверхности M . Например, 1-полостному гиперболоиду вращения соответствует на сфере полоса, ограниченная двумя параллелями, симметричными относительно экваториальной плоскости. Ширина этой полосы зависит, как легко видеть, от асимптотического конуса гиперболоида. Другой пример — сферическое отображение цилиндрической поверхности имеет своим образом кривую на сфере, поскольку в этом случае вектор $\mathbf{m}$, не изменяясь вдоль прямолинейных образующих цилиндра, зависит лишь от одного параметра. Такая же картина имеет место и для любой развертывающейся поверхности.

Справедлива

Теорема 10. *Со всяким гладким отображением (27) связано линейное отображение касательных пространств в соответствующих точках* $df : T_A M \to T_{A^*} M^*$, *матрицей которого относительно натуральных реперов является якобиева матрица*

$$(f^i_j) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \partial_2 f^1 \\ \partial_1 f^2 & \partial_2 f^2 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Оно называется *дифференциалом* данного отображения.

Доказательство. Рассмотрим на поверхности M точку $A(u^i)$ и проходящий через нее при $t = 0$ гладкий путь Γ с внутренними уравнениями $u^i = u^i(t)$. Его радиус-вектор $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u^i(t))$. В этой точке он имеет касательный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{p}'(0)$, который в натуральном репере имеет координаты $a^i = (\frac{du^i}{dt})(0)$. В результате отображения мы получим на M^* путь $\Gamma^* : \mathbf{p}^*(t) = f(\mathbf{p}(t))$, который в точке $t = 0$ имеет касательный вектор $\mathbf{a}^* = \mathbf{p}^{*\prime}(0)$. Таким образом, получаем отображение касательных пространств $df : T_A M \to T_{f(A)} M^*$, при котором всякому вектору $\mathbf{a} \in T_A M$ соответствует вектор $\mathbf{a}^* = df(\mathbf{a})$. Запишем его в координатах. Дифференцируя по t соотношение между путями и полагая затем $t = 0$, получим

$$a^{*i} = \frac{df^i(u^j(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f^i}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}\Big|_{|t=0} = f^i_j(u,v)a^j.$$

Это искомое линейное отображение касательных пространств. □

Отображение f называется *регулярным*, если якобиева матрица имеет максимальный ранг $r = 2$. В этом случае отображения df касательных пространств являются линейными изоморфизмами. Тогда в силу теоремы об обратной функции для каждой точки существует окрестность U, в которой отображение f_U является диффеоморфизмом. Поэтому регулярные отображения поверхностей являются *локальными диффеоморфизмами.*

Теорема 11. *Если отображение регулярно, то в окрестностях соответствующих точек параметризации поверхностей можно выбрать так, чтобы соответствующие точки имели одинаковые координаты. Тогда локально отображение запишется в виде:* $f_U : u^{*i} = u^i$.

Такие координаты называются *согласованными с отображением.*

Доказательство. Пусть в координатах, определенных в окрестностях $U \subset M$ и $f(U) \subset M^*$, отображение имеет вид $f_U : u^{*i} = f^i(u^j)$. Выберем в окрестности U поверхности M новые координаты $\tilde{u}^i = f^i(u^j)$. Тогда в этих координатах отображение запишется в виде $u^{*i} = \tilde{u}^i$. □

14.2. Изометрия и изгибание поверхностей.

Пусть f — диффеоморфизм поверхности M на поверхность M^*.

Определение. *Диффеоморфизм* $f : M \to M^*$ *называется изометрией, если его дифференциал* $df : T_A M \to T_{f(A)} M^*$ *сохраняет скалярное произведение:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b})), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_A M. \tag{29}$$

При локальном диффеоморфизме говорят о локальной изометрии.

Теорема 12. *Диффеоморфизм является изометрией тогда и только тогда, когда компоненты метрических тензоров в координатах, согласованных с отображением, совпадают:* $g_{ij}(u,v) = g^*_{ij}(u,v)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем соотношение (29) в координатах

$$g_{ij}a^i b^j = g^*_{km} f^k_i f^m_j a^i b^j \,,$$

откуда в силу произвольности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$g_{ij}(u^s) = g^*_{km}(u^{*s}) f^k_i f^m_j .$$

Выберем теперь на поверхностях согласованные с отображением координаты, в которых $f : u^{*i} = u^i$. Тогда якобиева матрица диффеоморфизма становится единичной и ее компоненты $f^i_k = \delta^i_k$. Наше равенство принимает вид $g_{ij}(u^s) = g^*_{ij}(u^s)$. Достаточность этого признака очевидна. □

В дальнейшем, если не оговорено противное, при рассмотрении диффеоморфизмов и, в частности, изометрий мы будем использовать согласованные координаты. Следующая теорема дает геометрическую характеристику изометрии.

Теорема 13. *Диффеоморфизм является изометрией тогда и только тогда, когда равны длины дуг соответствующих путей:* $s = s^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поверхности изометричны и отнесены к согласованным координатам. Тогда соответствующие пути имеют одинаковые уравнения $u^i = u^i(t)$, а поскольку их метрические тензоры в этих координатах совпадают, то длины дуг соответствующих путей вычисляются по одной и той же формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t))u^{i\prime}u^{j\prime}}\, dt.$$

Следовательно, они равны. Обратно, пусть соответствующие при отображении дуги путей равны: $s = s^*$, т. е. при одинаковых пределах

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t))u^{i\prime}u^{j\prime}}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g^*_{ij}(u^k(t))u^{i\prime}u^{j\prime}}dt.$$

Тогда в силу произвольности этих пределов подынтегральные выражения равны, а в силу произвольности в выборе путей и, следовательно, функций $u^k(t)$, равны и компоненты метрических тензоров. Согласно теореме (12) это означает, что поверхности изометричны. □

Частным случаем изометрии является *изгибание поверхности*. Это ее такая гладкая деформация, при которой сохраняются длины дуг путей на поверхности. Аналитически изгибание задают формулой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, \lambda)$, где векторная функция гладко зависит от некоторого параметра λ .

Определение. *Две поверхности называются* наложимыми*, если существует изгибание одной поверхности на другую.*

Из теоремы (13) следует, что наложимые поверхности изометричны и, значит, их первые фундаментальные формы совпадают. Обратное верно лишь локально. Например, сфера в целом не допускает изгибания, хотя локально это возможно.

Пример. Рассмотрим прямой круговой цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ и на нем область, определенную неравенствами $x > 0$, $y > 0$, $0 < z < 1$. Параметризуем цилиндр уравнением $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{e}(\varphi) + v\mathbf{k}$. Для заданной области параметры изменяются в пределах $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 1$. В этих координатах первая квадратичная форма цилиндра имеет вид $d\bar{\mathbf{r}}^2 = d\varphi^2 + dv^2$. С другой стороны, рассмотрим плоскость, которая в прямоугольных координатах имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и первую квадратичную форму $d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2$. Отсюда видно, что отображение, задаваемое равенствами $x = \varphi$, $y = v$ является изометрией рассматриваемой области цилиндра на прямоугольную

область $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$ плоскости. Значит, эти поверхности изометричны. Более того, очевидно, цилиндр наложим на плоскость.

Возникает вопрос, какие вообще поверхности наложимы на плоскость? Оказывается, имеет место [2]

Теорема 14. *Поверхность наложима на плоскость тогда и только тогда, когда она является развертывающейся.*

К этому классу поверхностей относятся цилиндрические и конические поверхности, а также поверхности касательных пространственной кривой. Утверждение теоремы мы оставим без доказательства.

14.3. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

К.Ф. Гаусс в 1828 г. среди всех свойств поверхности выделил те, которые зависят только от ее первой фундаментальной формы. Совокупность таких свойств образуют ее *внутреннюю геометрию*. Отсюда следует, что изометричные (в частности, наложимые) поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию. В частности, внутренняя геометрия поверхности не изменяется при ее изгибании. Например, внутренняя геометрия развертывающихся поверхностей (и только их!) совпадает с внутренней геометрии плоскости.

Учитывая полученные нами результаты, отметим некоторые из свойств, принадлежащих внутренней геометрии поверхности.
1) Длина дуги пути на поверхности.
2) Угол между двумя путями в точке их пересечения.
3) Площадь области на поверхности, ограниченной кусочно-гладким замкнутым путем.

В дальнейшем мы найдем и другие свойства поверхности, которые относятся к ее внутренней геометрии.

Лекция 15. ДЕРИВАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

15.1. Сопровождающий репер и деривационные уравнения поверхности.

Изучая бирегулярные кривые в евклидовом пространстве, мы присоединяли к каждой точке кривой сопровождающий репер и, изучая его движение вдоль кривой, выяснили, что строение кривой в окрестности данной точки определяется двумя функциями — кривизной и кручением. Аналогичный метод мы применим и в случае поверхности. Пусть $M : \mathbf{r} = r(u^i)$ — регулярно параметризованная поверхность. Начнем с определения сопровождающего репера.

Определение. *Сопровождающим репером поверхности в точке* $\boldsymbol{r}(u^1, u^2) \in M$ *называется репер* $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{m}\}$, *где* $\boldsymbol{r}_i = \partial_i \boldsymbol{r}$ *— векторы натурального репера касательной плоскости в этой точке,* $\boldsymbol{m}$ *— единичный вектор нормали.*

Напомним, что вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ направлен по нормали к поверхности и поэтому

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{\sqrt{g}}\,.$$

При смещении из точки $\mathbf{r}(u^i)$ в точку $\mathbf{r}'(u^i + h^i)$ сопровождающий репер изменяется в соответствии со строением поверхности в окрестности исходной точки. Так как

$$\mathbf{r}_j(u^k + h^k) = \mathbf{r}_j(u^k) + h^i \partial_i \mathbf{r}_j(u^k) + \mathbf{0}_2'\,, \quad \mathbf{m}(u^k + h^k) = \mathbf{m}(u^k) + h^i \partial_i \mathbf{m}(u^k) + \mathbf{0}_2''\,,$$

то главной своей части это изменение определяется первыми производными $\partial_i \mathbf{r}_j$ и $\partial_i \mathbf{m}$ векторов сопровождающего репера по криволинейным координатам. Разлагая их в линейные комбинации по векторам исходного репера, получим соотношения, которые называются *деривационными уравнениями* поверхности

$$\begin{array}{llllll} a) & \partial_i \mathbf{r}_j & = & \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k & + & h_{ij}\mathbf{m}\,, \\ b) & \partial_i \mathbf{m} & = & -W_i^k \mathbf{r}_k\,. & & \end{array} \tag{30}$$

Здесь мы учли, что нормальный вектор $\mathbf{m}$ единичный. Поэтому его дифференциал, а значит и производные ортогональны к нему и лежат в касательной плоскости. Коэффициенты этих уравнений — функции криволинейных координат (u^1, u^2). Задача состоит в том, чтобы найти эти коэффициенты и выяснить их геометрический смысл.

15.2. Вторая фундаментальная форма поверхности.

Займемся сначала первой серией уравнений. Заметим, что так как $\partial_i \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ij}$ суть вторые частные производные радиуса-вектора поверхности, они симметричны по индексам ij. Следовательно, симметричны по этим индексам и коэффициенты, стоящие в правой части уравнений: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, $h_{ij} = h_{ji}$. Умножая их скалярно на единичный вектор нормали и учитывая, что $(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}) = 0$, получим

$$h_{ij} = (\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij}) = -(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j). \tag{31}$$

Эти коэффициенты определяют на поверхности симметричную билинейную форму

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h_{ij} a^i b^j, \tag{32}$$

которая называется *второй фундаментальной формой* поверхности. Эта форма представляет собой симметричное дважды ковариантное тензорное поле на поверхности с

компонентами $h_{ij}(u,v)$, которые при переходе к другой параметризации преобразуются по тензорному закону. Наряду с (32) рассматривают также *вторую квадратичную форму* поверхности $h(\mathbf{a},\mathbf{a})$, которую часто записывают в виде $\varphi_2 = h_{ij}du^i du^j$.

Примеры.

1) Для плоскости нормальный вектор $\mathbf{m} = \mathrm{const}$. Поэтому $h_{ij} = -(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = 0$.

2) Найдем вторую квадратичную форму геликоида $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + av\mathbf{k}$. Нам понадобятся производные первого и второго порядка радиуса-вектора. Имеем

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}(v), \quad \mathbf{r}_2 = u\mathbf{g}(v) + a\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{11} = 0, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{g}(v), \quad \mathbf{r}_{22} = -u\mathbf{e}(v).$$

Так как $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = u\mathbf{k} - a\mathbf{g}$, то единичный вектор нормали равен

$$\mathbf{m} = \frac{u\mathbf{k} - a\mathbf{g}}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

Вычисляя коэффициенты (31), получим

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}, \quad h_{22} = 0.$$

Следовательно, вторая кадратичная форма геликоида имеет вид

$$\varphi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

15.3. Оператор Вейнгартена.

Рассмотрим теперь уравнения (b) системы (30). Если умножить их скалярно на векторы $\mathbf{r}_j$, получим

$$(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = -W_i^s g_{sj}.$$

Но согласно формуле (31) $(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = -(\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij}) = -h_{ij}$. Поэтому

$$h_{ij} = W_i^s g_{sj}. \tag{33}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов W_i^k уравнений (30b) мы получили систему линейных уравнений. Свертывая их с компонентами g^{jm} тензора, обратного к метрическому, и учитывая, что $g_{sj}g^{jm} = \delta_s^m$, разрешим эту систему относительно коэффициентов W_j^i

$$W_i^k = g^{kj}h_{ij}. \tag{34}$$

Эти коэффициенты определяют в касательной плоскости каждой точки поверхности некоторый линейный оператор $\tilde{\mathbf{a}} = W\mathbf{a}$: $\tilde{a}^i = W_j^i a^j$, который называется *оператором Вейнгартена.* Нетрудно видеть, что это тензор валентности $(1,1)$. Для того, чтобы установить его свойства, рассмотрим вторую фундаментальную форму (32) и подставим туда ее коэффициенты из (33). Получим $h_{ij}a^i b^j = g_{sj}W_i^s a^i b^j$ или

$$h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (W\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{35}$$

Это значит, что W является линейным оператором, *присоединенным* ко второй фундаментальной форме.

Теорема 15. *Оператор Вейнгартена является самосопряженным*:

$$(W\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, W\mathbf{b}), \quad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_{\mathbf{r}}M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это его свойство является непосредственным следствием симметрии первой и второй фундаментальных форм. Действительно, из (35) при любом выборе касательных векторов имеем

$$(W\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{b},\mathbf{a}) = (W\mathbf{b},\mathbf{a}) = (\mathbf{a},W\mathbf{b}). \quad \square$$

Выясним, как он действует на векторы касательной плоскости. Для этого вторую билинейную форму (32), используя выражения (31) для ее коэффициетов, запишем в виде

$$h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (W\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(a^i\partial_i\mathbf{m},\mathbf{b}) = -(d\mathbf{m}(\mathbf{a}),\mathbf{b}).$$

Отсюда, учитывая произвольность в выборе вектора $\mathbf{b}$, получим

$$W\mathbf{a} = -d\mathbf{m}(\mathbf{a}) = -a^i\partial_i\mathbf{m}. \tag{36}$$

Это, взятая с противоположным знаком, производная единичного вектора нормали в направлении вектора $\mathbf{a} \in T_AM$. Итак, оператор Вейнгартена преобразует всякий вектор $\mathbf{a} \in T_AM$ в вектор $-d\mathbf{m}(\mathbf{a}) \in T_AM$, который в силу условия $|\mathbf{m}| = 1$, снова принадлежит касательной плоскости.

Что касается трехиндексных коэффициентов уравнений (a), то мы отложим их рассмотрение до лекции 18.

Примеры.

1) Для сферы радиуса R $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}}{R}$, а его дифференциал равен $d\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{r}}{R}$. Следовательно, для всякого вектора $\mathbf{a}$ касательной плоскости $W\mathbf{a} = -\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{a})}{R}$, а так как $d\mathbf{r}(\mathbf{a}) = a^i\mathbf{r}_i = \mathbf{a}$, то $W\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{a}}{R}$. Это гомотетия второго рода.

2) Рассмотрим геликоид $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + av\mathbf{k}$, $a = \mathrm{const}$. Его единичный вектор нормали мы уже нашли в п. 15.2, пр.2: $\mathbf{m} = \frac{u\mathbf{k}-a\mathbf{g}}{\sqrt{u^2+a^2}}$. Вычислим его производные

$$\partial_1\mathbf{m} = \frac{au\mathbf{g}(v) + a^2\mathbf{k}}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a\mathbf{r}_2}{(u^2+a^2)^{3/2}}, \quad \partial_2\mathbf{m} = \frac{a\mathbf{e}(v)}{(u^2+a^2)^{1/2}} = \frac{a\mathbf{r}_1}{(u^2+a^2)^{1/2}}.$$

Тогда из деривационных уравнений следует, что

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} \\ -\frac{a}{(u^2+a^2)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лекция 16. НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА

16.1. Нормальная кривизна.

Пусть Γ — бирегулярный путь на поверхности, $u^i = u^i(s)$ — его внутренние уравнения, отнесенные к натуральному параметру, и $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$ — радиус-вектор этого пути. Касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$ лежит в касательной плоскости $T_A M$. Рассмотрим вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}} = k(s)\mathbf{n}$. Как мы знаем, вместе с касательным вектором он определяет соприкасающуюся плоскость Π пути (п. 7.2). Изучим вопрос о взаимном расположении соприкасающейся и касательной плоскостей в точках пути и выясним, как это влияет на его свойства.

Определение. *Нормальной кривизной пути на поверхности называется ортогональная проекция его вектора кривизны на нормаль к поверхности*: $k_n = \mathrm{pr}_{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{r}}$. Следовательно, эта проекция равна

$$k_n = (\mathbf{m}, \ddot{\mathbf{r}}). \tag{37}$$

Обратная величина $R_n = \frac{1}{k_n}$ называется *радиусом нормальной кривизны.*

Найдем формулу для вычисления нормальной кривизны в координатах. Имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i \dot{u}^i, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}_i\ddot{u}^i.$$

Тогда из (37), учитывая, что $(\mathbf{m}, \mathbf{r}_i) = 0$, получим

$$k_n = (\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij})\dot{u}^i\dot{u}^j = h_{ij}(u^k)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}. \tag{38}$$

Из полученных формул вытекает важный вывод: *нормальная кривизна зависит лишь от точки поверхности и направления касательной в этой точке.* Значит, все пути, проходящие через ту же точку и имеющие общую касательную имеют одну и ту же нормальную кривизну. Поэтому, отвлекаясь от исходного пути, мы можем в данной точке задать произвольный единичный вектор в касательной плоскости $\mathbf{e} \in T_A M$ и тогда

$$k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}, \mathbf{e}). \tag{39}$$

Эта формула задает значения нормальной кривизны в данной точке в зависимости от направления в касательной плоскости.

16.2. Теорема Менье.

Итак, все пути, проходящие через данную точку в заданном направлении имеют одну и ту же нормальную кривизну. Мы можем ограничиться лишь плоскими путями. Последние получим так. Возьмем прямую в касательной плоскости $T_A M$, проходящую через точку A с направляющим вектором $\mathbf{e}$ и рассмотрим пучок плоскостей $\{\Pi\}$, осью которого является данная прямая. Пересекая ими поверхность, получим пучок плоских путей $\{\Gamma\}$, для которых секущие плоскости являются соприкасающимися. Все эти сечения имеют одну и ту же нормальную кривизну (39). Среди них выделим *нормальное сечение* Π_0, проходящее через нормаль к поверхности. Оно содержит векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{m}$, причем для определенности ориентируем поверхность так, чтобы вектор нормали $\mathbf{m}$ был направлен в сторону вогнутости сечения и тогда он совпадет с единичным вектором $\mathbf{n}$ главной нормали пути Γ_0.

С другой стороны, каждое плоское сечение имеют некоторую кривизну $k(s) > 0$ в точке A и соответствующий центр кривизны. Для того, чтобы установить связь

между величинами k_n и k, рассмотрим два сечения — одно из них нормальное, а другое наклонное к нему под некоторым углом. Тогда справедлива

Теорема 16. (Менье) *Ортогональная проекция центра кривизны нормального сечения поверхности на плоскость наклонного сечения с той же касательной есть центр кривизны этого наклонного сечения.*

Доказательство. Обозначим через θ угол между нормальным и наклонным сечениями. Это угол между их главными нормалями, т. е. между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Значит, $\cos\theta = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$. По определению нормальной кривизны $k_n = (\mathbf{m}, \ddot{r}) = k(s)(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = k(s)\cos\theta$. Итак, связь между кривизной и нормальной кривизной аналитически определяется формулой

$$k_n = k(s)\cos\theta. \tag{40}$$

Переписав ее в терминах радиусов кривизны, получим $R = R_n \cos\theta$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Эта теорема имеет простой геометрический смысл.

Следствие. *Центры кривизны пучка плоских сечений поверхности с общей касательной расположены на окружности в их общей нормальной плоскости, которая своим диаметром имеет отрезок между точкой поверхности и центром кривизны нормального сечения. Следовательно, длина этого диаметра равна* $|R_n|$.

16.3. Главные направления и главные кривизны поверхности.

В лекции 15 был определен оператор Вейнгартена (36) — линейный оператор, действующий в касательных плоскостях поверхности.

Определение. *Главными направлениями поверхности в данной точке называются главные направления оператора Вейнгартена.*

Как известно, главные направления любого линейного оператора задаются его собственными векторами, которые определяются условием

$$W\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \tag{41}$$

или в координатах $W^i_k p^k = \lambda p^i$. Следовательно, для нахождения координат собственных векторов мы имеем систему линейных однородных уравнений

$$(W^i_k - \lambda\delta^i_k)p^k = 0, \tag{42}$$

где δ^i_k — символы Кронекера. Эта система имеет ненулевое решение лишь тогда, когда ее определитель нулевой, т. е. при условии

$$\begin{vmatrix} W^1_1 - \lambda & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили характеристическое уравнение для нахождения собственных значений оператора W, при которых существует ненулевое решение $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$ однородной системы (42). Раскрывая определитель, запишем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \tag{43}$$

Пусть $\lambda = k_1$ и $\lambda = k_2$ корни этого уравнения. Они называются *главными кривизнами* поверхности. Важно отметить, что так как оператор Вейнгартена самосопряженный, главные кривизны а значит и отвечающие им собственные векторы всегда вещественны. Каждой из главных кривизн соответствует по крайней мере один собственный вектор $\mathbf{p}$ оператора W — решение системы (42).

Рассмотрим случаи, которые здесь могут представиться.

1) $k_1 \neq k_2$. В этом случае собственные векторы ортогональны. Действительно, так как оператор Вейнгартена самосопряженный, то $(W\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1, W\mathbf{p}_2)$. Отсюда следует $(k_1 - k_2)(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$ и поэтому $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$.

2) $k_1 = k_2 \neq 0$. Этот случай возникает, если в данной точке поверхности $K = H^2$. Такая точка называется *сферической* или *омбилической*, а любое направление в ней является главным. В самом деле, пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ — два линейно независимых собственных вектора, соответствующих главной кривизне $k = k_1 = k_2$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$ в касательной плоскости этой точки. Тогда $W\mathbf{a} = k(\alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2) = k\mathbf{a}$, т. е. оператор Вейнгартена является гомотетией касательной плоскости.

3) Если одна из главных кривизн равна нулю, то соответствующий собственный вектор удовлетворяет условию $W\mathbf{p} = 0$. Задаваемое им направление называется *асимптотическими*. В этом случае мы имеем $(W\mathbf{p}, \mathbf{p}) = h(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$.

4) Если же $k_1 = k_2 = 0$, то $W(\mathbf{a}) = -d\mathbf{m}(\mathbf{a}) = 0$ для любого вектора $\mathbf{a} \in T_A M$ и, значит, $\mathbf{m} = \mathrm{const}$. Следовательно, поверхность является либо плоскостью, либо частью плоскости.

Примеры.

1) Рассматривая оператор Вейнгартена на сфере (лекц. 15, пр. 1), мы видели, что на ней в каждой точке реализуется второй случай. Обратно, можно показать, что если в *каждой* точке поверхности ненулевые главные кривизны совпадают, то эта поверхность есть либо сфера, либо область сферы.

2) Для геликоида матрицу оператора Вейнгартена мы уже вычислили (лекц. 15, пр. 2)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} \\ -\frac{a}{(u^2+a^2)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - \frac{a^2}{(u^2+a^2)} = 0$. Значит, главные кривизны равны $k_{1,2} = \pm\frac{a}{u^2+a^2}$.

16.4. Средняя и гауссова кривизны.

Обратимся теперь к коэффициентам характеристического уравнения (43). По теореме Виета $2H = k_1 + k_2$, $K = k_1 k_2$. С другой стороны, эти коэффициенты можно вычислить непосредственно через компоненты оператора Вейнгартена

$$2H = \mathrm{tr}W = W_1^1 + W_2^2, \quad K = \det W. \tag{44}$$

Величина $2H$ называется *средней кривизной*, а K — *гауссовой* или *полной кривизной* поверхности.

Гауссову, среднюю и главные кривизны можно найти непосредственно с помощью первой и второй фундаментальных форм. Связь между оператором Вейнгартена и второй фундаментальной формой определяется формулой (35). Если поэтому вектор $\mathbf{a}$ имеет главное направление, то в силу (41)

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Запишем это условие в координатах и учтем, что оно должно выполняться при любом выборе вектора $\mathbf{b}$. В результате получим систему двух линейных однородных уравнений для координат вектора $\mathbf{a}$

$$(h_{ij} - \lambda g_{ij})a^i = 0. \tag{45}$$

Поскольку эта система должна иметь ненулевое решение, имеем

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{12} - \lambda g_{12} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{46}$$

Мы снова получили характеристическое уравнение для нахождения главных кривизн. После раскрытия определителя и приведения полученного квадратного уравнения к каноническому виду (43) найдем

$$K = \frac{h}{g}\,, \quad 2H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{g}\,. \tag{47}$$

Обратим внимание на то, что так как $g = \det(g_{ij}) > 0$, знак определителя $h = \det(h_{ij})$ второй фундаментальной формы совпадает со знаком гауссовой кривизны.

Выражение для средней кривизны можно записать более компактно, если учесть, что матрица, обратная к матрице 1-й фундаментальной формы имеет вид

$$(g^{ij}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$2H = g^{ij}h_{ij}.$$

Поверхности, для которых средняя кривизна равна нулю, называются *минимальными.* Такое название они получили потому, что из всех поверхностей, натянутых на данный замкнутый контур Γ в пространстве, минимальные поверхности имеют наименьшую площадь. Другими словами, функционал площади

$$\sigma = \int_Q \sqrt{g}\,dudv\,, \quad g = \det(g_{ij}),$$

где Q — область, ограниченная контуром Γ, для минимальной поверхности достигает своего минимального значения. Такие поверхности вследствие сил поверхностного натяжения реализуются, например, в виде мыльных пленок.

Примеры.

1) Покажем, что *всякая развертывающаяся поверхность имеет нулевую гауссову кривизну.* Действительно, всякая развертывающаяся поверхность имеет уравнение $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}(t)$, где — орт $\mathbf{a}$ прямолинейных образующих должен удовлетворять условию $(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$ (лекц. 12, теор. 9). В силу формулы (47) нам достаточно показать, что дискриминант второй билинейной формы $h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0$. Имеем

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{r}' + v\mathbf{a}', \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{a}, \quad \mathbf{R}_{tt} = \mathbf{r}'' + v\mathbf{a}'', \quad \mathbf{R}_{tv} = \mathbf{a}', \quad \mathbf{R}_{vv} = 0\,.$$

Единичный вектор нормали равен $\mathbf{m} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}([\mathbf{r}', \mathbf{a}] + v[\mathbf{a}', \mathbf{a}])$. Отсюда $h_{22} = 0$ и поэтому $h = -h_{12}^2$. Следовательно, нужно подсчитать только коэффициент h_{12}. Имеем $h_{12} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$. Поэтому $h = 0$ и, следовательно, $K = 0$.

2) Для рассмотренного в п. 16.3, пр. 2 геликоида средняя кривизна $2H = k_1 + k_2 = 0$, гауссова кривизна $K = k_1k_2 = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$. Таким образом, это минимальная поверхность отрицательной гауссовой кривизны.

Лекция 17. ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

17.1. Теорема Эйлера.

Теорема Эйлера устанавливает зависимость нормальной кривизны поверхности от главных кривизн. Ориентируем поверхность так, чтобы тройка векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}\}$ имела правую ориентацию.

Теорема 17. (Эйлера) *Нормальная кривизна в произвольном направлении выражается через главные кривизны и угол, который это направление образует с первым главным направлением, по формуле*

$$k_n(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В заданной точке регулярной поверхности рассмотрим ортонормированный репер $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, где $\mathbf{e}_i$ — орты главных направлений. Тогда орт любого направления можно задать вектором $\mathbf{e} = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$, образующим угол φ с первым главным направлением. Рассмотрим нормальную кривизну в этом направлении: $k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}, \mathbf{e})$. Учитывая разложение вектора $\mathbf{e}$ по ортам главных направлений, билинейность второй фундаментальной формы и ее симметрию, получим

$$k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)\cos^2\varphi + 2h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\cos\varphi\sin\varphi + h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)\sin^2\varphi.$$

Здесь по определению второй фундаментальной формы и главных направлений

$$h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (W\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = k_1\mathbf{e}_1^2 = k_1,$$
$$h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (W\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = k_2\mathbf{e}_2^2 = k_2,$$
$$h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (W\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = k_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,$$

откуда и следует формула Эйлера. □

Следствие. *Главные кривизны поверхности суть значения нормальной кривизны в главных направлениях.*

Действительно, из формулы Эйлера главные кривизны получаются при значениях угла $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, соответствующих первому и второму главным направлениям.

17.2. Строение поверхности в окрестности данной точки.

Формула Эйлера позволит нам разобраться в том, как устроена поверхность локально, в окрестности данной точки. Для этого рассмотрим пучок плоскостей $\Pi(\varphi)$, осью которого является нормаль поверхности. Здесь, как и выше, φ — ориентированный угол, который эта плоскость образует с первым главным направлением. Плоскости этого пучка определяют нормальные сечения поверхности, для которых эти плоскости являются соприкасающимися. Рассмотрим вектор кривизны этих сечений и напомним, что он всегда направлен в сторону вогнутости сечения. В любом случае $\ddot{\mathbf{r}} = \varepsilon k\mathbf{m}$, где $\varepsilon = +1$, если по отношению к нормали сечение вогнутое и $\varepsilon = -1$, если оно выпуклое. Обратимся теперь к формуле Эйлера и рассмотрим различные случаи.

1) Пусть гауссова кривизна поверхности в данной точке $K > 0$. Так как $K = k_1k_2$, то в этом случае главные кривизны имеют одинаковый знак. Пусть для определенности $k_1 = \frac{1}{a^2} > 0$ и $k_2 = \frac{1}{b^2} > 0$ (случай, когда они обе отрицательны, приводит к аналогичному результату). Тогда формула Эйлера примет вид

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

Таким образом, в любом направлении $k_n(\mathbf{e}) > 0$. Асимптотических направлений нет. Такая точка называется *точкой эллиптического типа.* Так как в этом случае $k_n = (\mathbf{m}, \ddot{\mathbf{r}}) = \varepsilon k \mathbf{m}^2 > 0$, то $\varepsilon = 1$ и, значит, все нормальные сечения вогнуты в сторону нормали. Это говорит о том, что в окрестности эллиптической точки поверхность имеет чашеобразное строение.

2) Пусть в рассматриваемой точке $K < 0$. Главные кривизны имеют разный знак. Положив для определенности $k_1 = \frac{1}{a^2} > 0$, $k_2 = -\frac{1}{b^2} < 0$, получим

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

Значит, нормальная кривизна может иметь разный знак и обращается в нуль при двух значениях угла: $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$. Следовательно, имеется два различных асимптотических направления. Эти два направления разбивают все нормальные сечения на выпуклые и вогнутые по отношению к выбранному направлению нормали. Значит, в окрестности данной точки поверхность имеет седлообразное строение. Это *точка гиперболического типа.*

3) Рассмотрим случай, когда $K = k_1 k_2 = 0$. Пусть только одна из главных кривизн обращается в нуль, например $k_2 = 0$. Положим $k_1 = \frac{1}{a^2}$. Тогда по формуле Эйлера $k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} \geq 0$. Мы имеем лишь одно асимптотическое направление при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Одновременно оно является и главным. Все нормальные сечения вогнуты в сторону нормали, кроме одного — асимптотического. Говорят, что точка имеет *параболический тип.*

4) Если обе главные кривизны равны нулю, то $k_n(\mathbf{e}) \equiv 0$. Каждое направление в данной точке является асимптотическим и главным одновременно. Такая точка называется *точкой уплощения.* Из таких точек состоит плоскость.

17.3. Теорема Гаусса.

Особо важное значение в теории поверхностей имеет гауссова кривизна в силу следующей теоремы, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 18. (Гаусса) *Гауссова кривизна поверхности может быть выражена через коэффициенты только первой фундаментальной формы и их частные производные первого и второго порядка*:

$$K = K(g_{ij},\, \partial_k g_{ij},\, \partial_{km} g_{ij}).$$

Таким образом, гауссова кривизна принадлежит внутренней геометрии поверхности. Аналитически это выражение довольно сложное и мы приведем его лишь для случая, когда координатная сеть на поверхности ортогональная и, следовательно, $g_{12} = 0$. Положив $g_{11} = A^2$, $g_{22} = B^2$, имеем

$$K = -\frac{1}{AB}\Big\{\Big(\frac{B_u}{A}\Big)_u + \Big(\frac{A_v}{B}\Big)_v\Big\}. \tag{48}$$

Следствие. *Если поверхности изометричны, то они имеют (в соответствующих координатах) одну и ту же гауссову кривизну.*

Примеры.

1) Для плоскости $\mathbf{m} = \text{const}$ и поэтому оператор Вейнгартена $W = 0$. Следовательно, ее гауссова кривизна $K = 0$. Такую же кривизну, как мы видели, имеют все развертывающиеся поверхности. Позже будет доказано, что они изометричны плоскости (или ее части).

2) Рассмотрим сферу радиуса $a : \mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})$. Ее первая квадратичная форма найдена в п. 13.2, пр. 2, а компоненты метрического тензора в географических координатах имеют вид $g_{11} = a^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = a^2\cos^2\theta$. Поэтому $A = a$, $B = a\cos\theta$ и по формуле (48) получим $K = \frac{1}{a^2}$. Таким образом, сфера — это поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны.

3) Из поверхностей второго порядка эллипсоид (в частности, сфера), двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид имеют положительную гауссову кривизну. Поверхности отрицательной кривизны — 1-полостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Цилиндры и конус второго порядка являются развертывающимися поверхностями и потому, как уже было сказано, имеют нулевую гауссову кривизну..

4) Тор есть поверхность, образованная вращением окружности радиуса a , центр которой удален от оси вращения на расстоянии $b > a$ (п. 12.1, пр. 2). Его параметрическое уравнение $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a\cos\theta + b)\mathbf{e}(\varphi) + b\sin\theta\mathbf{k}$. Найдем первую фундаментальную форму. Имеем

$$\mathbf{r}_1 = a(-\sin\theta\mathbf{e}(\varphi) + \cos\theta\mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_2 = (a\cos\theta + b)\mathbf{g}(\varphi),$$

откуда

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = (a\cos\theta + b)^2.$$

Так как координатная сеть ортогональна, то мы можем вычислить гауссову кривизну тора, используя формулу (48). Учитывая, что в рассматриваемом примере $A = a$, $B = a\cos\theta + b > 0$, получим

$$K = \frac{\cos\theta}{a(a\cos\theta + b)} .$$

Так как $a\cos\theta + b > 0$, знак гауссовой кривизны зависит лишь от знака $\cos\theta$, откуда следует, что она положительна при $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, отрицательна при $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ и обращается в нуль при $\pm\frac{\pi}{2}$. Следовательно, на торе имеются точки всех трех типов: эллиптические — это его внешняя область, гиперболические, образующие внутреннюю область и параболические, которые разделяют эти области двумя окружностями.

Лекция 18. АБСОЛЮТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ И КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

18.1. Символы Кристоффеля.

Рассмотрим теперь деривационные уравнения (30) (лекц. 15) и займемся нахождением коэффициентов Γ_{ij}^k. Умножим эти уравнения скалярно на векторы натурального репера $\mathbf{r}_k$. Учтем их ортогональность вектору нормали и то, что $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_k) = g_{sk}$ — компоненты первой фундаментальной формы. Тогда получим

$$(\mathbf{r}_k, \partial_i \mathbf{r}_j) = \Gamma_{ij}^s g_{sk}.$$

Приведем эти уравнения к несколько другому виду. Если продифференцировать скалярные произведения $(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) = g_{kj}$ с помощью оператора частного дифференцирования $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, получим

$$(\partial_i \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_k, \partial_i \mathbf{r}_j) = \partial_i g_{kj}\,.$$

Таким образом,

$$\Gamma_{ik}^s\, g_{sj} + \Gamma_{ij}^s\, g_{sk} = \partial_i\, g_{kj}\,. \tag{49}$$

Покажем, что эта линейная система имеет единственное решение и найдем его. Делается это так. Перепишем уравнения (49) еще дважды, сделав циклическую перестановку нижних индексов: $ijk \to jki \to kij$. В результате получим

$$\Gamma_{ji}^s\, g_{sk} + \Gamma_{jk}^s\, g_{si} = \partial_j\, g_{ik}\,,$$

$$\Gamma_{kj}^s\, g_{si} + \Gamma_{ki}^s\, g_{sj} = \partial_k\, g_{ji}\,.$$

Сложим все эти три соотношения со знаками $+-+$. С учетом симметрии коэффициентов g_{ij} и Γ_{ij}^s по нижним индексам, придем к уравнениям

$$2\Gamma_{ik}^s g_{sj} = \partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}\,.$$

Осталось сделать последний шаг, выразив отсюда коэффициенты Γ_{ik}^s. Заметим, что в этих уравнениях идет суммирование по повторяющемуся индексу $s = 1, 2$. Рассмотрим матрицу (g^{ij}), обратную к матрице (g_{ij}). Их компоненты связаны соотношением $g_{sj} g^{jm} = \delta_s^m$. Если поэтому свернуть полученные уравнения с g^{jm}, то получим следующий результат

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \tag{50}$$

Эти коэффициенты называются *символами Кристоффеля*. Как видим, они выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их частные производные первого порядка.

Примеры.

1) Первая квадратичная форма плоскости в произвольных декартовых координатах $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеет постоянные коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, e_j) = \mathrm{const}$. Поэтому все символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^m = 0$.

2) Точки той же плоскости, отнесенной к полярным координатам, имеют радиус-вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\theta)$. Тогда $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}(\theta) + r\mathbf{g}(\theta)d\theta$. Следовательно ее первая квадратичная форма имеет вид $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ с коэффициентами $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = r^2$,

(здесь $u^1 = r, u^2 = \theta$). Подсчитаем символы Кристоффеля этой метрики. Из частных производных отлична от нуля лишь одна: $\partial_1 g_{22} = 2r$. Компоненты обратной матрицы равны $g^{11} = 1, g^{12} = 0, g^{22} = \frac{1}{r^2}$. Поэтому отличны от нуля лишь

$$\Gamma^1_{22} = -r,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

18.2. Абсолютный дифференциал векторного поля.

Параллельное перенесение вектора в евклидовом пространстве имеет абсолютный характер в том смысле, что оно не зависит от пути перенесения. Аналитически оно определяется условием $d\mathbf{a} = 0$. На поверхности такое перенесение невозможно. Нашей целью является определить аналог такого перенесения. Для этого нам нужно определить понятие дифференциала векторного поля.

В лекции 13 мы видели, что определение алгебраических операций с тензорными полями на поверхности непосредственно переносится из тензорной алгебры и не встречает никаких затруднений. Иначе обстоит дело с их дифференцированием. Пусть на поверхности задано векторное поле $\mathbf{a} = a^i \mathbf{r}_i$. Тогда его дифференциал $d\mathbf{a}$ уже не принадлежит, вообще говоря, касательной плоскости и, значит, не является векторным полем на поверхности. В самом деле, мы имеем $d\mathbf{a} = da^j \mathbf{r}_j + a^j d\mathbf{r}_j$. Но в силу деривационных уравнений (30)

$$d\mathbf{r}_j = \partial_i \mathbf{r}_j du^i = (\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + h_{ij}\mathbf{m})du^i\,,$$

откуда

$$d\mathbf{a} = (da^k + \Gamma^k_{ij} du^i a^j)\mathbf{r}_k + h_{ij} du^i a^j \mathbf{m}.$$

Как видим, здесь кроме касательной присутствует также нормальная составляющая дифференциала. Поэтому естественным является следующее обобщение этого понятия

Определение. *Абсолютным дифференциалом векторного поля на поверхности называется оператор* ∇, *который всякому гладкому векторному полю* $\boldsymbol{a}$ *на поверхности ставит в соответствие векторное поле*

$$\nabla\mathbf{a} = \mathrm{pr}_T d\mathbf{a}\,. \tag{51}$$

Здесь pr_T означает ортогональную проекцию на касательную плоскость. Отсюда вытекает, что в координатах

$$\nabla\mathbf{a} = (da^k + \Gamma^k_{ij} du^i a^j)\mathbf{r}_k\,. \tag{52}$$

Теорема 19. *Абсолютный дифференциал векторного поля есть линейный дифференциальный оператор: для любой пары гладких векторных полей* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *и гладкой функции* F *на* M:

1) $\nabla(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\nabla\mathbf{a} + \mu\nabla\mathbf{b}$, $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
2) $\nabla(F\mathbf{a}) = f\nabla\mathbf{a} + dF\mathbf{a}$.

Доказательство. Эти свойства вытекают непосредственно из аналогичных свойств обычного дифференциала и свойств ортогональной проекции, которая является линейным отображением:

$$\nabla(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_T d(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\mathrm{pr}_T d(\mathbf{a}) + \mu\mathrm{pr}_T d(\mathbf{b}) = \lambda\nabla\mathbf{a} + \mu\nabla\mathbf{b},$$

$$\nabla(F\mathbf{a}) = \mathrm{pr}_T d(F\mathbf{a}) = \mathrm{pr}_T(dF\mathbf{a} + Fd\mathbf{a}) = dF\mathbf{a} + F\mathrm{pr}_T\mathbf{a} = dF\mathbf{a} + F\nabla\mathbf{a}. \quad \square$$

18.3. Ковариантные производные.

Если на поверхности задано векторное поле $\mathbf{h}(u^i)$, то дифференциалы функций в формуле (52) можно вычислить в направлении этого поля. Учитывая, что $da^k(\mathbf{h}) = h^i\partial_i a^k$ и $du^i(\mathbf{h}) = h^i$, получим векторное поле

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a} = h^i(\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij}a^j)\mathbf{r}_k \tag{53}$$

с координатами

$$\nabla_{\mathbf{h}}a^k = h^i(\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij}a^j) := h^i\nabla_i a^k. \tag{54}$$

Определение. *Дифференциальный оператор* $\nabla_{\boldsymbol{h}}$ *называется ковариантной производной в направлении векторного поля* $\boldsymbol{h}$.

Свойства абсолютного дифференциала, приведенные в теореме (19), справедливы и для ковариантных производных. Заметим также, что оператор (54) линейно зависит от $\mathbf{h}$:

$$\nabla_{f\mathbf{h}_1+g\mathbf{h}_2}\mathbf{a} = f\nabla_{\mathbf{h}_1}\mathbf{a} + g\nabla_{\mathbf{h}_2}\mathbf{a}.$$

В частности, ковариантные производные в направлении векторов натурального репера $\mathbf{r}_i = (\delta^k_i)$, т. е. в направлении координатных линий, сводятся к выражениям

$$\nabla_i a^k = \partial_i a^k + \Gamma^k_{ij}a^j),$$

которые являются аналогами частных производных.

Лекция 19. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПУТИ.

19.1. Параллельное перенесение вектора по поверхности.

Определим теперь параллельное перенесение на поверхности следующим образом. Пусть $\Gamma(t)$ — путь на поверхности M и $u^i = u^i(t)$ — его внутренние уравнения. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}(t)$ в точках этого пути: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(u^i(t))$ и расссмотрим его ковариантную производную в направлении касательного вектора $\mathbf{h} : h^j = \frac{du^j}{dt}$. Учитывая определение ковариантной производной (53), получим

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = \mathrm{pr}_T \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \Big(\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(u^s(t))\frac{du^i}{dt}a^j(t)\Big)\mathbf{r}_k\,. \tag{55}$$

Определение. *Дифференциальный оператор* $\frac{\nabla}{dt}$ *называется ковариантной производной вдоль пути* Γ .

Определение. *Векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *называется параллельным вдоль заданного пути* Γ *, если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю*:

$$\frac{\nabla a^k}{dt} = \frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(u^s(t))\frac{du^i}{dt}a^j(t) = 0\,. \tag{56}$$

Установим некоторые свойства параллельного перенесения. Мы увидим, что оно обладает важнейшими свойствами обычного перенесения в евклидовом пространстве.

Теорема 20. *Пусть* A *и* B *— две точки поверхности, соединенные кусочно-гладким путем* Γ *, и в точке* A *задан вектор* $\boldsymbol{a} \in T_AM$ *. Тогда в точке* B *существует единственный вектор* $\boldsymbol{b}$ *, параллельный данному.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть путь $\Gamma(t)$ задан уравнениями $u^k = u^k(t)$ и $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = B$. Рассмотрим систему (56) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $a^k(t)$. Мы имеем начальное условие: в точке A задан вектор $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}$. Тогда согласно теореме Коши существует единственное решение этой системы, продолжаемое до значения $t = 1$. Положив $\mathbf{b} = \mathbf{a}(1)$, получим доказательство теоремы. □

Доказанное означает, что вдоль заданного пути определены отображения касательных пространств $P(0,t) : T_AM \to T_{A(t)}M$ для любого $0 \le t \le 1$, при котором исходному вектору $\mathbf{a}$ сопоставляется вектор $\mathbf{a}(t)$. При этом теорема справедлива и для кусочно гладкого пути. В самом деле, если имеется особая точка, то получив в ней вектор, параллельный данному, мы можем продолжить процесс параллельного перенесения, приняв этот вектор в качестве начального.

Теорема 21. *Параллельное перенесение* $P(\Gamma) : T_AM \to T_BM$ *является линейным изоморфизмом касательных пространств вдоль заданного пути.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность отображения $P(0,1)$ следует из того, что система (56) линейна и поэтому ее решение линейно зависит от начального вектора. Более того, это отображение биективно, поскольку оно обратимо: параллельное перенесение $P(1,0)$ вдоль пути $\Gamma^{-1}(t) = \Gamma(1-t)$ обратно рассмотренному. □

Теорема 22. (Риччи) *Отображение касательных пространств при параллельном перенесении является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что это означает сохранение скалярного произведения векторов. Пусть $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ — два векторных поля, параллельных

вдоль пути Γ: $\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = 0$, $\frac{\nabla \mathbf{b}}{dt} = 0$. Рассмотрим их скалярное произведение — функцию $f(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$. Дифференцируя ее, получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = \Big(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big) + \Big(\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt}\Big).$$

Производные векторных полей разложим на касательную и нормальную составляющие. Тогда

$$\Big(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big) = \Big(\mathrm{pr}_T \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathrm{pr}_N \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\mathrm{pr}_T \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) + \Big(\mathrm{pr}_N \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\mathrm{pr}_T \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big)$$

и аналогично

$$\Big(\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt}\Big) = \Big(\mathbf{a}(t), \frac{\nabla \mathbf{b}}{dt}\Big).$$

В итоге имеем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = \Big(\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) + \Big(\mathbf{a}, \frac{\nabla \mathbf{b}}{dt}\Big) = 0.$$

Это доказывает теорему. □

Следствие. *При параллельном перенесении сохраняется модуль вектора и угол между векторами.*

Пример. Рассмотрим геликоид $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + v\mathbf{k}$ и на нем винтовую линию Γ: $u = 1, v = t$. В точке $A(1, 0)$ этой линии при $t = 0$ зададим вектор $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$ и будем переносить его параллельно вдоль винтовой линии. Так как компоненты метрического тензора геликоида равны $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = 1 + u^2$, то имеем следующие ненулевые символы Кристоффеля этой поверхности $\Gamma^1_{22} = -u, \Gamma^2_{12} = \frac{u}{u^2+1}$. Вдоль заданной винтовой линии $\Gamma^1_{22} = -1, \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}$. Тогда система (56) принимает вид

$$\frac{da^1}{dt} - a^2 = 0 \quad \frac{da^2}{dt} + \frac{1}{2}a^1 = 0,$$

откуда

$$\frac{d^2a^1}{dt^2} + \frac{1}{2}a^1 = 0.$$

Поэтому имеем общее решение

$$a^1(t) = c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad a^2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-c_1 \sin\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \cos\frac{t}{\sqrt{2}}\Big).$$

Учитывая начальное условие, получим следующие значения констант интегрирования: $c_1 = a^1, c_2 = a^2$.

19.2. Геодезические пути.

Прямые линии на плоскости обладают характерным для них свойством: их направляющий вектор переносится вдоль них параллельно. Это свойство мы положим в снову при определении следующих замечательных линий на поверхности:

Определение. *Гладкий путь на поверхности называется геодезическим, если его единичный касательный вектор параллелен вдоль этого пути.*

Отнесем геодезический путь Γ к натуральному параметру. Тогда $a^k = \frac{du^k}{ds}$ — координаты его единичного касательного векторного поля. В силу формулы (55) ковариантная производная этого поля вдоль Γ равна

$$\frac{\nabla a^k}{ds} = \frac{da^k}{ds} + a^j(s)\Gamma^k_{ij}(u^m(s))\frac{du^i}{ds}.$$

Поэтому условие его параллельности вдоль этого пути имеет вид

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}(u^s(s))\,\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds} = 0. \tag{57}$$

Это система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Так как в эти уравнения входят только символы Кристоффеля, которые выражаются через метрический тензор поверхности, мы получаем важный вывод: *понятие геодезического пути на поверхности относится к ее внутренней геометрии.*

Дифференциальные уравнения геодезических (57), исключив параметр s, можно свести к одному уравнению. Для этого будем искать уравнение геодезической в *приведенном* виде $v = v(u)$. Тогда при $\dot u \neq 0$, учитывая, что $\frac{ds}{du} = \frac{1}{\dot u}$, имеем

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot v}{\dot u}, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{\ddot v\dot u - \dot v\ddot u}{(\dot u)^3}.$$

Распишем уравнения геодезических подробнее, полагая $u^1 = u, u^2 = v$:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1_{11}(\frac{du}{ds})^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}(\frac{dv}{ds})^2 &= 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11}(\frac{du}{ds})^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}(\frac{dv}{ds})^2 &= 0. \end{cases}$$

Тогда после некоторых выкладок получим

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\Big(\frac{dv}{du}\Big)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\Big(\frac{dv}{du}\Big)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11}. \tag{58}$$

Кроме того, следует иметь ввиду, что мы отбросили случай $\dot u = 0$, т. е решение $u = \mathrm{const}$.

Теорема 23. *Через всякую точку регулярно параметризованной поверхности в каждом заданном направлении проходит единственный геодезический путь.*

Доказательство. Согласно теореме Коши о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида (58), при задании начальных условий $v(u_0) = c_1, \frac{dv}{du}(u_0) = c_2$ существует единственное решение $v = v(u)$, определенное в некоторой окрестности $|u - c_1| < \varepsilon$. Это и доказывает теорему. $\square$.

Следствие. *Множество всех геодезических путей на поверхности зависит от двух параметров.*

Полезно заметить, что таким же свойством обладает и множество всех прямых на плоскости.

Пример. Рассмотрим прямой круговой цилиндр $\mathbf{r}(\varphi, z) = a\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Коэффициенты его первой фундаментальной формы $g_{11} = a^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$ постоянны. Поэтому все символы Кристоффеля в этих координатах равны нулю. Уравнение (58) принимает вид $\frac{d^2z}{d\varphi^2} = 0$ с решением $z = c_1\varphi + c_2$. Подставив найденную функцию в уравнение цилиндра, получим

$$\mathbf{r}(\varphi) = a\mathbf{e}(\varphi) + (c_1\varphi + c_2)\mathbf{k}.$$

Это винтовые линии. Кроме того, геодезическими цилиндра являются прямолинейные образующие $\varphi = \mathrm{const}$.

Как мы, цилиндрические поверхности наложимы на плоскость и их внутренние геометрии совпадают. При наложении прямого кругового цилиндра на плоскость по формулам $x = a\varphi, z = z$ винтовым линиям соответствуют прямые с уравнениями $z(x) = \frac{c_1}{a}x + c_2$.

19.3. Геодезическая кривизна пути на поверхности.

Пусть $\Gamma : u^i = u^i(s)$ — путь на поверхности M, отнесенный к натуральному параметру и $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$ — его радиус-вектор. Вектор первой производной $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}$ является единичным касательным вектором и поэтому всегда принадлежит касательной плоскости точки $\mathbf{r}(s)$. Рассмотрим вторую производную — вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$ этого пути.

Определение. *Геодезической кривизной пути* Γ *на поверхности* M *называется модуль проекции его вектора кривизны на касательную плоскость в соответствующей точке:*

$$k_g = |\mathrm{pr}_T \ddot{\mathbf{r}}|. \tag{59}$$

Для того, чтобы получить эффективную формулу для вычисления геодезической кривизны, рассмотрим единичный вектор $\mathbf{a} = [\mathbf{m}, \dot{\mathbf{r}}]$. Он лежит в касательной плоскости, дополняя единичные векторы нормали $\mathbf{m}$ и касательной $\dot{\mathbf{r}}$ до правого ортонормированного репера. Тогда $k_g = |\mathrm{pr}_{\mathbf{a}} \ddot{\mathbf{r}}| = |(\mathbf{a}, \ddot{\mathbf{r}})|$ и, таким образом, получаем формулу

$$k_g = |(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})|\,. \tag{60}$$

Как вычислить геодезическую кривизну, если путь Γ задан в произвольной параметризации $\mathbf{r}(t)$? Для этого используем формулы перехода от натурального параметра к произвольному

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t},$$

откуда $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''](\dot{t})^3$ и, следовательно, $k_g = |(\mathbf{m}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')||\dot{t}|^3$. Но $|\dot{t}| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$ и, таким образом,

$$k_g = \frac{|(\mathbf{m}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')|}{|\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{61}$$

Докажем теперь еще одно свойство геодезических путей.

Теорема 24. *Путь* Γ *на поверхности является* геодезическим *тогда и только тогда, когда его геодезическая кривизна равна нулю*: $k_g = 0$.

Доказательство. Пусть геодезическая кривизна пути на поверхности (59) равна нулю

$$\mathrm{pr}_T \ddot{\mathbf{r}} = 0. \tag{62}$$

Запишем это равенство в координатах. Так как $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$, то

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i \dot{u}^i, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}_i\ddot{u}^i.$$

Но в силу деривационных уравнений (30)

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + h_{ij}\mathbf{m}.$$

Поэтому вектор второй производной принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{r}_k + (h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{m}\,.$$

Здесь первое слагаемое — касательная, а второе — нормальная составляюшая этого вектора. Следовательно, при обращении геодезической кривизны в нуль имеем

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}(u^m(s))\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0. \tag{63}$$

Но это есть как раз система уравнений (57), определяющая геодезические пути. Обратное, очевидно, также справедливо. □

Из формулы (62) непосредственно вытекает, что геодезические пути на поверхности обладают следующими свойствами:
1) Вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$ в каждой точке геодезического пути направлен по нормали к поверхности. Действительно, из $\mathrm{pr}_T\ddot{\mathbf{r}} = 0$ следует $\ddot{\mathbf{r}} = \lambda\mathbf{m}$;
2) Соприкасающаяся плоскость геодезического пути в каждой его точке ортогональна касательной плоскости поверхности — она проходит через вектор нормали $\mathbf{m}$;
3) Кривизна геодезического пути равна модулю его нормальной кривизны: $k = |k_n|$. В самом деле, проекция вектора кривизны на нормаль к поверхности является нормальной кривизной k_n всякого пути. Но $|\ddot{\mathbf{r}}| = k$ есть кривизна кривой. Следовательно, между всеми этими кривизнами имеется простое соотношение $k_n^2 + k_g^2 = k^2$, откуда и вытекает утверждение.
4) Всякая прямая на поверхности является геодезической, так как в этом случае вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}} = 0$.

Пример. Рассмотрим плоские сечения сферы диаметральными плоскостями — большие окружности. Как и для всякой плоской кривой, эти плоскости являются соприкасающимися плоскостями сечений. А так как в каждой точке они содержат нормаль сферы, то эти сечения являются ее геодезическими путями.

Лекция 20. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

20.1. Полугеодезические координаты на поверхности. Геодезические пути на поверхности можно использовать для того, чтобы ввести в некоторой ее области специальные *полугеодезические* координаты, в которых вычисления и формулы существенно упрощаются. В этой лекции мы используем их для того, чтобы дать локальное описание поверхностей постоянной гауссовой кривизны.

Определение. *Координатная сеть на поверхности M называется полугеодезической, если она образована 1-параметрическим семейством геодезических путей и их ортогональными траекториями.*

Для того, чтобы построить полугеодезическую систему координат, выберем на поверхности произвольную точку O (начало) и проведем через нее какой-нибудь геодезический путь β (база). Отложим на β от точки O ориентированную дугу s и через ее конец проведем геодезический путь в направлении, ортогональном базе. В результате получим 1-параметрическое семейство геодезических $\{\Gamma_s\}$. Отнесем их к натуральному параметру u, который будем отсчитывать от базы. Рассмотрим теперь ортогональные траектории этого семейства, вдоль которых будем изменять другой параметр v. В частности, при $u = 0$ мы имеем базу, на которой, как уже было сказано, параметр v выбран натуральным.

Теорема 25. *В полугеодезических координатах первая квадратичная форма поверхности имеет вид*

$$d\mathbf{r}^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу ортогональности сети коэффициент $g_{12} = 0$, поэтому первая квадратичная форма должна иметь вид

$$d\mathbf{r}^2 = g_{11}du^2 + g_{22}dv^2 ,$$

где $g_{11} > 0, g_{22} > 0$ — положительные функции от u, v. Рассмотрим далее 1-параметрическое семейство геодезических. Отнесенные к натуральному параметру, они имеют уравнения (63)

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0 , \quad \ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0 . \tag{64}$$

По условию эти уравнения должны удовлетворяться при $v = \mathrm{const}$ и $u = s$. После подстановки этих значений в уравнения геодезических получим $\Gamma^1_{11} = 0$, $\Gamma^2_{11} = 0$. Учитывая выражения для символов Кристоффеля, отсюда получаем следующие условия на метрику

$$2\Gamma^1_{11} = g^{11}\partial_1 g_{11} = 0, \quad 2\Gamma^2_{11} = -g^{22}\partial_2 g_{11} = 0 .$$

Это значит, что $g_{11} = c^2 = \mathrm{const}$ и тогда $d\mathbf{r}^2 = c^2du^2 + g_{22}dv^2$. Но вдоль геодезических $v = \mathrm{const}$ мы имеем $u = s$. Следовательно, $d\mathbf{r}^2 = c^2ds^2$ и поэтому $c^2 = 1$. Вследствие этого $d\mathbf{r}^2 = du^2 + g_{22}dv^2$. Осталось положить $g_{22} = B^2$. $\square$

Следствие. *Любые две ортогональные траектории полугеодезических координат отсекают на путях геодезического семейства $\{\Gamma_s\}$ дуги равной длины.*

В самом деле, вдоль геодезических $v = \mathrm{const}$ и $ds = du$. Длина дуги любой из них, заключенная между двумя ортогональными траекториями, равна $s = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$. Таким образом, она не зависит от v и, следовательно, от выбора геодезической.

Примеры.

1) Простейшим примером полугедезических координат являются прямоугольные координаты на плоскости. Здесь оба семейства координатных линий образовано прямыми — геодезическими плоскости. Другим примером таких координат на плоскости

являются полярные координаты. Здесь мы имеем пучок прямых (геодезических) и их ортогональные траектории — окружности.

2) Используя предыдущий пример, легко построить полугеодезические координаты на развертывающихся поверхностях. Полугедезическая сеть соответствует сети прямоугольных или полярных координат при их наложении на плоскость.

3) Менее тривиальным примером служат географические координаты на сфере. В самом деле, меридианы сферы образуют 1-параметрическое семейство ее больших окружностей — геодезических, а параллели являются ортогональными траекториями этого семейства. Базой этих координат является экватор.

20.2. Поверхности постоянной кривизны.

Мы займемся сейчас замечательным классом поверхностей, сыгравшим в истории математики важную роль.

Определение. *Поверхность M называется поверхностью постоянной кривизны, если ее гауссова кривизна постоянна:* $K = \mathrm{const}$.

Нашей целью является найти первые фундаментальные формы таких поверхностей и тем самым дать их полную классификацию с точки зрения внутренней геометрии. Имеет место

Теорема 26. *Первая квадратичная форма всякой поверхности постоянной кривизны может быть приведена к одному из трех следующих канонических видов:*

$$\begin{array}{llll} 1. & K = & 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + dv^2\,; \\ 2. & K = & \frac{1}{a^2} > 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}dv^2\,; \\ 3. & K = & -\frac{1}{a^2} < 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\frac{u}{a}dv^2\,. \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С этой целью выберем на поверхности полугеодезические координаты. Тогда ее первая квадратичная форма в соответствии с теоремой (25) примет вид $d\mathbf{r}^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2$. Рассмотрим гауссову кривизну поверхности. Так как система координат ортогональная, то она может быть вычислена по формуле (48), лекц. 17

$$K = -\frac{1}{AB}\Big\{\Big(\frac{B_u}{A}\Big)_u + \Big(\frac{A_v}{B}\Big)_v\Big\}.$$

Так как $A = 1$, то отсюда $K = -\frac{B_{uu}}{B}$. Таким образом, для нахождения функции $B(u,v)$ имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$B_{uu} + KB = 0,$$

где по условию $K = \mathrm{const}$. По существу, это обыкновенное дифференциальное уравнение, поскольку координата v не участвует в дифференцировании и поэтому входит сюда лишь как параметр. Как известно из теории дифференциальных уравнений, в зависимости от знака коэффициента K его общее решение имеет вид

1) $K = 0$, (параболический тип): $B = c_1(v) + c_2(v)u$;

2) $K = \frac{1}{a^2} > 0$, (эллиптический тип): $B = c_1(v)\cos\frac{u}{a} + c_2(v)\sin\frac{u}{a}$;

3) $K = -\frac{1}{a^2} < 0$, (гиперболический тип): $B = c_1(v)\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a} + c_2(v)\,\mathrm{sh}\,\frac{u}{a}$.

Для определения функций $c_1(v), c_2(v)$ надо принять во внимание начальные условия. При $u = 0$ имеем $B(0,v) = c_1(v)$. Так как для базы параметр v натуральный, то при $u = 0$ должно быть $v = s$. Но при этом условии $d\mathbf{r}^2 = B(0,v)ds^2$, а так как $d\mathbf{r}^2 = ds^2$, то $B(0,v) = \pm 1$ и, следовательно, $c_1(v) = \pm 1$. Учтем, кроме того, что база β является геодезической и, значит, уравнения (64) должны удовлетворяться при $u = 0$. Это возможно при $\Gamma^1_{22} = 0$, откуда $\partial_1 g_{22} = 0$ и поэтому $\partial_u B(u,v)|_{u=0} = 0$.

Отсюда следует, что во всех рассматриваемых случаях $c_2(v) = 0$. Кроме того, мы выбираем $c_1(v) = 1$ из соображений положительной определенности первой квадратичной формы. В итоге это дает доказательство теоремы. $\square$

Следствие. *Для того, чтобы две поверхности постоянной кривизны были локально изометричны, необходимо и достаточно, чтобы их гауссовы кривизны совпадали.*

До сих пор мы имели только необходимость этого условия. Оно имеет место для любых изометричных поверхностей и вытекает из теоремы Гаусса (лекция 17). Но если поверхности имеют одинаковую постоянную гауссову кривизну, то по доказанной теореме их первые квадратичные формы могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду, а значит, они локально изометричны.

20.3. Псевдосфера и геометрия Лобачевского.

Рассмотрим теперь вопрос о реальном существовании поверхностей с найденными выше метриками. Он очевиден для метрик нулевой и положительной постоянной гауссовой кривизны. Поверхностями с такой кривизной являются в первом случае развертывающиеся поверхности, в частности, плоскость, а во втором — сферы или область на сфере (п. 17.3, пр. 2). Что касается поверхностей постоянной отрицательной кривизны, то вопрос о существовании таких поверхностей остается пока открытым. Другими словами, надо доказать, что поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, на которых реализуются найденные выше метрики, действительно существуют. Будем искать пример среди поверхностей вращения.

Определение. *Трактрисой называется плоская кривая, которая обладает тем свойством, что отрезок ее касательной между точкой касания и точкой пересечения с некоторой прямой — базой трактрисы, имеет постоянную длину.*

Для вывода ее уравнения мы предположим, что кривая находится в плоскости XZ, а базой является ось Z. Длину отрезка AC касательной обозначим через a, а угол, который он образует с осью OZ через t. Будем искать уравнение кривой в параметрическом виде, приняв за параметр этот угол. Тогда абсцисса точки A равна $x = a\sin t$, а угловой коэффициент касательной $\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} t$. Отсюда $dz = \operatorname{ctg} t\, dx = \frac{a\cos^2 t}{\sin t} dt$. Интегрируя, получим при начальном условии $z(\frac{\pi}{2}) = 0$ параметрические уравнения трактрисы в виде

$$x(t) = a\sin t, \quad z(t) = a(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}), \quad 0 < t \le \frac{\pi}{2}.$$

Будем теперь вращать трактрису вокруг оси Z. Используя результаты п. 12.1, получим поверхность вращения $\mathbf{r}(t,\varphi) = x(t)\mathbf{e}(\varphi) + z(t)\mathbf{k}$ с уравнением

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = a[\sin t\mathbf{e}(\varphi) + (\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2})]\mathbf{k},$$

которая называется *псевдосферой*.

Теорема 27. *Псевдосфера есть поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Доказательство. Подсчитаем коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности. Они равны

$$g_{11} = x'(t)^2 + z'(t)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = x(t)^2.$$

Вычисляя производные, получим

$$x'(t) = a\cos t, \quad z'(t) = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}\,,$$

откуда

$$g_{11} = a^2 \operatorname{ctg}^2 t, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 t$$

и, значит, $A = a\operatorname{ctg} t$, $B = a\sin t$. Так как координатная сеть на поверхности ортогональна, то для вычисления гауссовой кривизны можно применит формулу (48). Обратим внимание на то, что коэффициенты A, B не зависят от φ. Поэтому эта формула упрощается

$$K = -\frac{1}{AB}\Big(\frac{B_t}{A}\Big)_t\,.$$

В результате получим $K = -\frac{1}{a^2}$. Это доказывает наше утверждение. $\square$

Псевдосфера сыграла важную роль в истории геометрии. В 1868 г. итальянский математик Бельтрами, изучая поверхности постоянной кривизны, обнаружил, что внутренняя геометрия псевдосферы совпадает с планиметрией Лобачевского. Так была найдена первая модель этой неевклидовой геометрии и тем самым доказана ее логическая непротиворечивость. В частности, было показано, что если на псевдосфере рассмотреть любой треугольник, сторонами которого являются отрезки геодезических, то сумма его внутренних углов будет меньше π. Как известно, это свойство равносильно выполнению аксиомы параллельности в форме Лобачевского.

III. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Лекция 21. ПОНЯТИЕ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

21.1. Определение гладкого многообразия.

Многообразия являются широким многомерным обобщением понятия поверхности, в частности, ее внутренней геометрии.

Определение. *Связное топологическое пространство M называется m-мерным вещественным многообразием, если для всякой его точки $\boldsymbol{x} \in M$ существует окрестность U, гомеоморфная области вещественного пространства $\mathbb{R}^m$.*

Замечание. Если вместо $\mathbb{R}^m$ взять комплексное пространство $\mathbb{C}^m$, то получим m-мерное *комплексное многообразие.*

Итак, m-мерное многообразие локально устроено как область в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ указанный гомеоморфизм. Пара (U, φ) называется *картой.* Всякой точке $\mathbf{x} \in (U, \varphi)$ соответствует набор вещественных чисел $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^m)$, которые называются *координатами этой точки* в заданной карте. Изменяя только одну координату, мы получим на многообразии *координатные линии*, образующие в совокупности *координатную сеть* карты. Все многообразие покрывается набором таких карт — *атласом* $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\}$.

Данное выше определение многообразия является слишком общим. Рассмотрим более специальный класс *гладких* многообразий , которые определяются следующим образом. Всякая точка попадает, вообще говоря, в зону действия нескольких карт и если сравнивать ее координаты x^i и $x^{i'}$ в двух разных картах (U, φ) и (V, ψ), то возникает преобразование в $\mathbb{R}^m$: $f = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$, которое в общем случае является гомеоморфным и называется *переходной функцией.* Она задает преобразование координат и имеет вид $x^{i'} = f^{i'}(x^j)$.

Определение. *Многообразие называется гладким, если существует такой атлас, что для каждой пары карт этого атласа переходные функции являются гладкими.*

Определение. *Гладкое многообразие называется ориентируемым, если на нем существует атлас, для которого все функции перехода имеют положительный якобиан*

$$J = \det\Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\Big) > 0.$$

Отсюда следует, что на ориентируемом многообразии может существовать лишь две ориентации. Если выбрана одна из них, то многообразие называется *ориентированным.*

Определение. *Гладкое многообразие N называется подмногообразием (или поверхностью) в M, если задано гладкое отображение $F : N \to M$, которое является вложением.*

Это значит, что это отображение является 1) регулярным и 2) гомеоморфизмом на свой образ (лекц. 1). Локально, в координатах подмногообразие задается уравнениями

$$x^i = F^i(u^1, \ldots, u^n) \quad n < m.$$

При этом первое условие означает, что ранг якобиевой матрицы $J = (\frac{\partial x^i}{\partial u^a})$ равен n на подмногообразии, а второе — атлас подмногообразия эквивалентен *индуцированному* атласу, образованному картами $(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha \circ F)$. При $n = m - 1$ подмногообразие называется гиперповерхностью.

Примеры.

1) Арифметическое $\mathbb{R}^m$, евклидово $\mathbb{E}^m$ и аффинные пространства A^m являются тривиальными примерами ориентируемых гладких многообразий. Выбрав репер $\{O, \mathbf{e}_i\}$, мы можем покрыть их одной картой с координатами $(x^1, \ldots, x^m)$: $x = x^i \mathbf{e}_i$. Выбор репера задает и определенную ориентацию пространства. Ту же ориентацию задают все реперы $\mathbf{e}_{i'} = f^i_{i'} \mathbf{e}_i$, для которых $\det(f^i_{i'}) > 0$. Таким образом, множество всех реперов разбивается на два класса — правые и левые.

2) Сферы $S^m \subset E^{m+1}$ являются нетривиальными примерами гладких ориентируемых многообразий. Они покрываются минимум двумя картами. В качестве координатных окрестностей можно выбрать две области, получаемые выкалыванием сначала одной точки, а затем ей диаметрально противоположной — северным и южным полюсами, а в качестве координатных гомеоморфизмов φ и ψ — стереографические проекции с полюсами в этих точках на экваториальную плоскость (при $m = 2$ см. п. 14.1). В этом случае преобразование координат представляет собой инверсию. Она является гладким преобразованием с положительным якобианом.

3) Конечно, существуют и неориентируемые многообразия. Примерами могут служить лист Мебиуса, проективные пространства четной размерности. Доказательство этих свойств непросто.

4) В приложениях часто возникают подмногообразия, заданные системой неявных уравнений

$$F^1(x^1, \ldots, x^m) = 0, \ \ldots, F^n(x^1, \ldots, x^m) = 0, \quad m > n. \tag{1}$$

Здесь функции $F^i(x)$ предполагаются гладкими и независимыми. Это значит, что в окрестности каждой точки подмногообразия ранг якобиевой матрицы $(\partial_i F^\alpha)$ максимален и равен n. Другими словами, подмногообразие задается как полный прообраз нуля при отображении $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, регулярном в нуле: $M = F^{-1}(0)$ (лекц. 1, теор. 3). Пусть в окрестности какой-либо точки отличен от нуля минор, образованный столбцами с номерами $i_1, \ldots, i_k$. Тогда по теореме о неявных функциях эту систему можно локально разрешить относительно переменных $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$, а остальные $m-n$ переменных принять в качестве криволинейных координат. В итоге такими координатными окрестностями можно покрыть все многообразие и описать его локальными приведенными уравнениями. Его размерность равна $m - n$.

В аналитической механике уравнения (1), задающие многообразие, обычно появляются как уравнения связей, наложенные на лагранжевы переменные.

21.2. Касательное и кокасательное пространства.

Понятие касательного векторного пространства поверхности, которое мы рассмотрели в лекции 11, обобщается следующим образом. Рассмотрим на многообразии M гладкий путь $\Gamma : I = (a, b) \to M$, проходящий через точку $x = \Gamma(t_0)$. В карте (U, φ) он имеет параметрические уравнения $x^i = x^i(t)$. Набор первых производных $a^i = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0}$, вычисленных в заданной точке, дает нам m чисел. При преобразовании координат они изменяются по векторному закону

$$a^{i'} = f^{i'}_i(x) \frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=t_0} = f^{i'}_i(x) a^i, \quad f^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Это свойство дает основание называть эти числа компонентами *касательного вектора* $\mathbf{a}_x$ пути в точке x.

Рассмотрим множество T_xM всех касательных векторов в этой точке. Определив на этом множестве обычным образом операции сложения $\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x = (a^i + b^i)$ и умножения на число $\lambda\mathbf{a}_x = (\lambda a^i)$, получим векторное пространство, которое называется *касательным векторным пространством* многообразия в точке x. Можно доказать, что оно имеет ту же размерность, что и данное многообразие.

Отождествим вектор с линейным дифференциальным оператором, который обозначим той же буквой

$$\mathbf{a}_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} := a^i \partial_i \,. \tag{3}$$

При этом оператор ∂_i имеет компоненты $(0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ и поэтому отождествляется с касательным вектором к i-ой координатной линии. В совокупности они образуют базис касательного пространства $\{\partial_i\}$, а вместе с точкой x — репер $\{x, \partial_i\}$ в этой точке x. Этот репер однозначно связан с выбранной картой и в отличие от других называется *натуральным репером.*

Построим сопряженное с ним векторное пространство. Для этого в точке x рассмотрим дифференциал гладкой функции $F : U \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности этой точки

$$dF_x = \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{4}$$

Это линейная форма в точке x, определяющая линейное отображение $T_xM \to \mathbb{R}$: всякому вектору $\mathbf{a}_x$ в этой точке она ставит в соответствие число

$$dF_x(\mathbf{a}_x) = a^i \partial_i F = \mathbf{a}_x(F). \tag{5}$$

Множество всех таких линейных форм образует сопряженное векторное пространство с линейными операциями

$$dF_x + dG_x = d(F+G)_x\,, \quad \lambda dF_x = d(\lambda F)_x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Оно называется *кокасательным векторным пространством* в точке x и обозначается T_x^*M. Элементы пространства T_x^*M называются ковариантными векторами или, короче, *ковекторами* в точке x. Основанием для этого является ковекторный закон преобразования их компонент — значений градиента $a_i = (\partial_i F)_x$, вычисленных в точке x. В самом деле, при переходе к другой карте мы имеем

$$a_{i'} = f^i_{i'}(x)\, a_i, \quad f^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,. \tag{6}$$

Это закон преобразования ковектора.

Из (4) следует, что дифференциалы координатных функций dx^i образуют базис кокасательного пространства. Совокупность $\{x, dx^i\}$ называют *натуральным корепером* в точке x. Легко видеть, что натуральные репер и корепер сопряжены. Действительно, вследствие формулы (5) $dx^i(\partial_j) = \partial_j x^i = \delta^i_j$.

21.3. Векторные поля и их интегральные пути. Коммутатор векторных полей.

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение. *Векторным полем на многообразии называется отображение, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{a}_x \in T_xM$ в этой точке.*

В координатах векторное поле имеет вид $\mathbf{a} = a^i(x)\partial_i$ и, следовательно, задается m функциями $a^i(x^1, \ldots, x^m)$. Векторное поле называется *гладким*, если эти функции гладкие.

Определение. *Интегральным путем или траекторией векторного поля называется параметризованная кривая* $\Gamma : x = x(t)$, *касательные векторы которой в точках пути совпадают с векторами этого поля*:

$$\frac{dx^i}{dt} = a^i(x^k(t))\,. \tag{7}$$

Таким образом, нахождение интегральных путей сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В силу теоремы Коши через каждую точку $x \in M$ многообразия проходит единственный интегральный путь векторного поля, определенный в некотором интервале. Векторное поле называется *полным*, если решение определено на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. В дальнейшем для простоты будем рассматривать только полные векторные поля.

На практике способом отыскания решений часто является нахождение первых интегралов системы (7), т. е. таких функций $F(x)$, которые постоянны вдоль интегральных линий: $F(x(t)) = \mathrm{const}$. Это значит, что интегральные пути лежат на гиперповерхностях $F(x) = \mathrm{const}$. Поэтому знание интеграла позволяет понизить число уравнений системы (7) на единицу, поскольку сводит дело к отысканию искомых путей на гиперповерхностях $F(x^1, \ldots, x^m) = \mathrm{const}$ — многообразиях на единицу меньшей размерности. Если удалось найти $m-1$ независимых интегралов, то система $F_1(x) = c_1, \ldots F_{m-1}(x) = c_{m-1}$ дает нам неявные уравнения искомых интегральных путей. Следующая теорема хорошо известна

Теорема. *Функция* $F(x)$ *является первым интегралом системы (7) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a}(F) = a^i(x)\partial_i F = 0$.

С векторным полем связано такое важное понятие как *поток*. Пусть $x \in M$ — произвольная точка многообразия и $x(t) = \varphi_t(x)$ — проходящий через нее интегральный путь векторного поля — решение системы (7).

Определение. *1-параметрическое семейство преобразований* $\varphi_t : M \to M$, *определяемое формулой*

$$\varphi_t : x \to \varphi_t(x), \quad t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

называется потоком векторного поля.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{a}$ *— векторное поле и* φ_t *— соответствующий поток. Тогда*

1) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$,
2) *Отображения* φ_t *являются диффеоморфизмами.*

Доказательство. Фиксируем некоторое значение s и рассмотрим решение системы (7) с начальным условием $x(s) : \varphi_t(x(s)) = \varphi_t \circ \varphi_s(x)$. С другой стороны, $x(t) = \varphi_{t+s}(x)$ также является, очевидно, решением системы (7) с начальным условием $x(0) = \varphi_s(x)$. Тогда первое свойство следует из единственности решения при заданном начальном условии. Так как, кроме того, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, то положив $t + s = 0$, получим $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$ и, следовательно, обратные преобразования существуют и также гладкие. $\square$

Обратно, если на многообразии задан поток своими преобразованиями $x(t) = \varphi_t(x)$, то находя касательные векторы к его траекториям $a^i(x) = \frac{dx^i}{dt}\big|_{t=0}$, мы получим векторное поле, порождающее этот поток. Таким образом, между гладкими векторными полями и их потоками существует биективное соответствие.

Указанные в теореме свойства потока говорят о том, что семейство $\varphi_t(x)$ образует группу. Ее называют *1-параметрической группой*, порожденной векторным полем.

Пример. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ в прямоугольных координатах задано векторное поле $\mathbf{a}(x,y,z)=(-y,x,1)$. Интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x,\quad \frac{dz}{dt}=1\,,$$

при начальном условии $x(0)=x$, $y(0)=y$, $z(0)=z$, получим преобразования

$$x(t)=x\cos t-y\sin t,\quad y(t)=x\sin t+y\cos t,\quad z(t)=z+t\,.$$

Интегральные пути этого потока образуют 2-параметрическое семейство винтовых линий.

Рассмотрим множество $\mathfrak{X}(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M с операциями сложения $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и умножения на функции $F(x)\mathbf{a}$ (в частности, на числа). Эти операции выполняются поточечно. Определим на множестве $\mathfrak{X}(M)$ еще одну операцию. Для этого рассмотрим сначала понятие *композиции* векторных полей. Будем рассматривать векторные поля как линейные дифференциальные операторы. Если $F(x)$ — гладкая функция на M, то $\mathbf{a}(F)=a^i(x)\partial_i F$ есть также гладкая функция на M. Другими словами, всякое векторное поле определяет преобразование $\mathbf{a}:\mathfrak{F}(M)\to\mathfrak{F}(M)$ в кольце гладких функций. Следовательно, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два векторных поля, то можно построить композицию $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}(F)=\mathbf{a}(\mathbf{b}(F))$ соответствующих преобразований

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}(F)=(a^i\partial_i b^j)\partial_j F+a^i b^j\partial_i\partial_j F\,.$$

Отсюда видно, что композиция не является векторным полем. Но *коммутатор (или скобка)* векторных полей

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{a}\circ\mathbf{b}-\mathbf{b}\circ\mathbf{a} \tag{9}$$

есть снова векторное поле. Действительно, его координатное выражение имеет вид

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]F=(a^i\partial_i b^j-b^i\partial_i a^j)\partial_j F. \tag{10}$$

Следовательно, это векторное поле имеет компоненты

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]^j=a^i\partial_i b^j-b^i\partial_i a^j.$$

Теорема 2. *Коммутатор обладает следующими свойствами:*
1) Он кососимметричен: $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]$ *;*
2) Он $\mathbb{R}$*-линеен по каждому сомножителю, например:* $[\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+\mu[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ *;*
3) Выполняется тождество Якоби: $[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}]+[[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\boldsymbol{b}]+[[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}]=0$.

Доказательство. Первые два свойства очевидны. Третье проверяется непосредственными вычислениями с использованием формулы (10). □

Выполнение этих свойств означает, что $\mathfrak{F}$-модуль $\mathfrak{X}(M)$ как векторное пространство является (бесконечномерной) *алгеброй Ли*.

Пример. Векторные поля на плоскости $\mathbf{a}=\partial_x$ (поток — переносы прараллельно оси X) и $\mathbf{b}=-y\partial_x+x\partial_y$ (поток — вращения вокруг начала координат) имеют коммутатор $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\partial_y$. Его поток — переносы параллельно оси Y.

Задача. Докажите, что если $f(x),g(x)$ — гладкие функции, то

$$[f\mathbf{a},g\mathbf{b}]=fg[\mathbf{a},\mathbf{b}]+f\mathbf{a}(g)\mathbf{b}-g\mathbf{b}(f)\mathbf{a}\,.$$

Лекция 22. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ

22.1. Тензорные поля на многообразии.

Теперь уже несложно понять, что такое тензорное поле на гладком многообразии. В каждой точке мы имеем касательное и сопряженное ему кокасательное векторные пространства. Следовательно, естественным является следующее

Определение. *Тензорное поле валентности* (p,q) *в области* $Q \subset M$ *гладкого многообразия есть отображение, которое всякой точке многообразия ставит в соответствие тензор* $x \to F_x(\alpha^1,\dots,\alpha^p,\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_q,)$ *с аргументами из касательного и кокасательного пространств.*

В координатах тензорное поле задается своими компонентами. Это набор m^{p+q} функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах касательного и кокасательного пространств

$$F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x) = F_x(dx^{i_1},\dots,dx^{i_p},\partial_{j_1},\dots,\partial_{j_q}).$$

Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. Из результатов лекции 9 следует, что при переходе к другой карте $(U',x^{i'})$ компоненты тензорного поля изменяются по закону

$$F^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}(x') = f^{i'_1}_{i_1}\dots f^{i'_p}_{i_p}\,F^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x) f^{j_1}_{j'_1}\dots f^{j_q}_{j'_q}\,, \tag{11}$$

где $f^{i'}_i(x) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ и $f^i_{i'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ — элементы якобивой матрицы преобразования и обратной к ней. Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат.

Для тензорных полей выполнимы все те алгебраические операции, которые мы рассмотрели ранее. Рассмотрим примеры тензорных полей.

Скалярное поле на многообразии — это отображение $F : M \to \mathbb{R}$. По определению оно считается тензорным полем нулевой валентности. В координатах скалярное поле задается функцией $F(x^1,\dots,x^m)$. Точки многообразия, в которых градиент $\mathrm{grad}F = 0$, называются *особыми точками скалярного поля.* Точки многообразия, в которых скалярное поле принимает постоянное значение $F(x) = \mathrm{const}$, образуют *гиперповерхности уровня.* Эти поверхности образуют 1-параметрическое семейство.

В предыдущей лекции мы уже рассматривали *векторные поля.* Напомним, что если задано векторное поле $\mathbf{a}$ и скалярное поле, то поле $\mathbf{a}$ действует на него как дифференциальный оператор по формуле

$$\mathbf{a}(F) = a^i\partial_i F(x)\,,$$

так что в результате получаем новое скалярное поле. Нетрудно проверить рассматривая законы преобразования, что эта функция определена инвариантно, независимо от выбора координат.

Ковекторное поле $\xi(x) : x \to T^*_xM$ задается ковектором в каждой точке многообразия. Для того, чтобы выяснить его геометрический смысл, рассмотрим в какой-либо точке x множество векторов, которые обращают в нуль линейную форму ξ_x:

$$\xi(\mathbf{a}) = \xi_1 a^1 + \dots + \xi_m a^m = 0.$$

Это уравнение гиперплоскости $\Pi_x^{m-1} \subset T_xM$ в касательном пространстве этой точки. Следовательно, ковекторное поле в каждой точке многообразия задает гиперплоскость. В итоге мы получаем на многообразии $(m-1)$-мерное *распределение* — поле гиперплоскостей.

22.2. Ковариантное дифференцирование и связность.

В лекции 18 было введено понятие ковариантной производной векторного поля на поверхности и затем с ее помощью определено понятие параллельного перенесения вектора вдоль заданного пути на поверхности. При этом существенно использовалось то обстоятельство, что поверхность расположена в евклидовом пространстве. Рассматривая теперь гладкое многообразие M как самостоятельный объект, мы не имеем этой возможности. Поэтому установленные ранее свойства ковариантной производной мы возьмем в качестве ее определения.

Пусть $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии M и $\mathbf{h}$ — заданное векторное поле.

Определение. *Ковариантной производной в направлении $\boldsymbol{h}$ называется дифференциальный оператор $\nabla_{\boldsymbol{h}}$, который всякому векторному полю $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{X}(M)$ ставит в соответствие векторное поле $\nabla_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{a}$ и удовлетворяет условиям:*

$$1)\nabla_{\mathbf{h}}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a} + \mu\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{b}\,, \quad \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}; \tag{12}$$

$$2)\ \nabla_{\mathbf{h}}(f\mathbf{a}) = f\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a} + (\mathbf{h}f)\mathbf{a}\,, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(M); \tag{13}$$

$$3)\ \nabla_{f\mathbf{h}_1+g\mathbf{h}_2}\mathbf{a} = f\nabla_{\mathbf{h}_1}\mathbf{a} + g\nabla_{\mathbf{h}_2}\mathbf{a} \quad \forall f, g \in \mathfrak{F}(M). \tag{14}$$

Многообразие, на котором задана операция ковариантного дифференцирования, обозначается (M, ∇).

Пусть (U, x^i) — карта на (M, ∇) и $\{\partial_i\}$ — натуральный репер. Введем для упрощения записи обозначение $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ и положим

$$\nabla_i\,\partial_j = \Gamma_{ij}^k(x)\partial_k\,. \tag{15}$$

Это *деривационные уравнения поля натуральных реперов*. С помощью этой формулы ковариантную производную можно вычислить в координатах. Пусть $\mathbf{a} = a^j(x)\partial_j$. Тогда, учитывая свойства (12) – (14), получим векторное поле $\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}$ с компонентами

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{a}^k = h^i(\partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j)\,. \tag{16}$$

В частности, при ковариантном дифференцировании в направлении координатных линий

$$\nabla_i a^k = \partial_i a^k + \Gamma_{ij}^k a^j\,. \tag{17}$$

Эти формулы знакомы нам по лекции 18. Таким образом, задание операции ковариантного дифференцирования эквивалентно заданию в каждой карте совокупности функций $\Gamma_{ij}^k(x)$. Эти функций называются *компонентами линейной связности* относительно заданной карты.

Следует, однако, иметь ввиду, что при переходе к другим координатам компоненты связности, как это видно непосредственно из формулы (15), изменятся. Выясним, как эти компоненты преобразуются при замене координат $x^i = f^i(x^{i'})$ на пересечении $(U, x^i) \cap (U', x^{i'})$ двух карт.

Теорема 3. *При переходе от одних координат к другим компоненты линейной связности преобразуются по следующему закону*

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}(x') = f_k^{k'}(\Gamma_{ij}^k(x) f_{i'}^i f_{j'}^j + f_{i'j'}^k), \tag{18}$$

где

$$f^i_{i'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,,\ f^k_{i'j'}(x') = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\,,\ f^{k'}_k(x) = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (**??**), в карте $(U', x^{i'})$ имеем формулу $\nabla_{i'}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}(x')\partial_{k'}$, в которой нужно сделать замену $\partial_{i'} = f^i_{i'}(x')\partial_i$. Используя свойства ковариантной производной, после некоторой цепочки вычислений получим

$$\nabla_{i'}\partial_{j'} = \Gamma^{k'}_{i'j'}f^k_{k'}\partial_k = \nabla_{\partial_{i'}}(f^j_{j'}\partial_j) = f^j_{j'}\nabla_{i'}\partial_j + \partial_{i'}f^j_{j'}\partial_j = f^j_{j'}\nabla_{(f^i_{i'}\partial_i)}\partial_j + f^k_{i'j'}\partial_k =$$

$$f^i_{i'}f^j_{j'}\nabla_{\partial_i}\partial_j + f^k_{i'j'}\partial_k = (f^i_{i'}f^j_{j'}\Gamma^k_{ij} + f^k_{i'j'})\partial_k,$$

откуда после свертывания с $f^{m'}_k$ приходим к утверждению теоремы. □

Формула (18) показывает, что *компоненты связности не образуют тензорного поля.* В частности, их обращение в нуль не имеет инвариантного характера. В дальнейшем нам будет нужен только случай, когда компоненты связности симметричны по нижним индексам: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Операция ковариантного дифференцирования может быть применена и к тензорным полям любой валентности. Для этого в дополнение к условиям (12), (13) и (14) введем еще три:

1) Ковариантная производная скалярного поля совпадает с обычной производной этого поля в заданном направлении:

$$\nabla_{\mathbf{h}}F = \mathbf{h}(F);$$

2) Для любой пары тензорных полей T, S

$$\nabla_{\mathbf{h}}(T\otimes S) = \nabla_{\mathbf{h}}T\otimes S + T\otimes\nabla_{\mathbf{h}}S\,.$$

3) Ковариантное дифференцирование перестановочно со свертыванием:

$$\nabla_{\mathbf{h}}\circ\mathrm{tr} = \mathrm{tr}\circ\nabla_{\mathbf{h}}.$$

Нам понадобятся также деривационные уравнения поля натуральных кореперов $\{dx^i\}$, двойственные уравнениям (15). Покажем, что они имеют вид

$$\nabla_i dx^k = -\Gamma^k_{ij}dx^j\,. \tag{19}$$

В самом деле, дифференцируя ковариантно условие сопряженности базисов $dx^k(\partial_j) = \delta^k_j$, получим $\nabla_i dx^k(\partial_j) + dx^k\nabla_i\partial_j = 0$. Учитывая (15), отсюда найдем $\nabla_i dx^k(\partial_j) = -\Gamma^k_{ij}$, откуда и следует формула (19).

Рассмотрим теперь ковекторное поле $\xi = \xi_k(x)dx^k$. Принимая во внимание свойства (12) и (13), будем иметь

$$(\nabla_i\xi) = (\partial_i\xi_k)dx^k + \xi_k\nabla_i dx^k = (\partial_i\xi_k)dx^k - \xi_k\Gamma^k_{ij}dx^j$$

и, следовательно, имеем следующий аналог формулы (16)

$$\nabla_i\xi_j = \partial_i\xi_j - \Gamma^k_{ij}\xi_k\,. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь тензорное поле валентности $(1,2)$. Пусть $T = T^i_{jk}(x)\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^k$ — разложение этого тензора по векторам натуральных репера и корепера. Учитывая деривационные уравнения (15) и (19), получим

$$\nabla_k T = (\partial_k T^i_{jm})\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + T^i_{jm}(\nabla_k\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + \partial_i\otimes\nabla_k dx^j\otimes dx^m + \partial_i\otimes dx^j\otimes\nabla_k dx^m) =$$

$$(\partial_k T^i_{jk})\partial_i\otimes dx^j\otimes dx^m + T^i_{jm}(\Gamma^s_{ki}\partial_s\otimes dx^j\otimes dx^m - \partial_i\otimes\Gamma^j_{ks}dx^s\otimes dx^m - \partial_i\otimes\partial_j\otimes\Gamma^m_{ks}dx^s)\,,$$

так что в итоге имеем тензорное поле с компонентами

$$\nabla_k T^i_{jm} = \partial_k T^i_{jm} + T^s_{jm}\Gamma^i_{ks} - T^i_{sm}\Gamma^s_{kj} - T^i_{js}\Gamma^s_{km}\,. \tag{21}$$

Для тензорных полей произвольной валентности формула получается аналогично.

22.3. Параллельное перенесение и геодезические линии.

Параллельное перенесение вектора вдоль заданного пути $\Gamma : x = x(t)$ на многообразии (M, ∇), снабженном ковариантным дифференцированием, мы можем определить так же, как и на поверхности. Для этого используем формулу для ковариантной производной (16), ограничив ее на точки заданного пути с касательным вектором $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Тогда она принимает вид

$$\frac{\nabla a^k}{dt} = \Big(\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(x)\Big)\partial_k\,.$$

Определение. *Векторное поле $\boldsymbol{a}(x)$ называется параллельным вдоль заданного пути, если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю*:

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0\,. \tag{22}$$

Имеют место свойства параллельного перенесения, доказательство которых аналогично тем, которые были даны в лекции 19:

Теорема 4. *Пусть в начальной точке $A(t=0)$ кусочно гладкого пути $\Gamma : x = x(t)$ задан вектор $\boldsymbol{a} \in T_A M$. Тогда во всякой точке этого пути существует единственный вектор, параллельный данному.*

Теорема 5. *Параллельное перенесение $P(0,t) : T_0M \to T_tM$ есть линейный изоморфизм касательных пространств.*

Заметим, что вместе с этим определен линейный изоморфизм кокасательных пространства $P^*(0,t) : T^*_tM \to T^*_0M$. Вследствие этого становится возможным параллельное перенесение тензорных полей любой валентности. Условием этого является обращение в нуль ковариантной производной вдоль заданной кривой $x = x(t)$, когда $\mathbf{h} = (\frac{dx^i}{dt})$. Например, из формулы (21) следует, что для тензорного поля валентности $(1,2)$

$$\frac{\nabla T^i_{jm}}{dt} = \frac{dT^i_{jm}}{dt} + (T^s_{jm}\Gamma^i_{ks} - T^i_{sm}\Gamma^s_{kj} - T^i_{js}\Gamma^s_{km})\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Определение. *Гладкий путь Γ на многообразии называется геодезическим, если при некотором каноническом выборе параметра его касательное векторное поле $\boldsymbol{h} = (\frac{dx^k}{dt})$ параллельно вдоль Γ.*

Из (22) сразу вытекает, что функции $x^k = x^k(t)$ должны удовлетворять системе ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} = 0\,. \tag{23}$$

Теорема 6. *Для всякой точки $x \in M$ и всякого вектора $\boldsymbol{a}_x \in T_xM$ в этой точке существует единственный геодезический путь $\Gamma : x = x(t)$ такой, что $x(0) = x$, $\frac{dx}{dt}(0) = \boldsymbol{a}_x$.*

Доказательство такое же, как и в теории поверхностей (лекция 19).

Лекция 23. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

23.1. Тензор кривизны.

Как мы видели в лекции 15, гауссова кривизна поверхности $K(u,v)$, характеризующая отклонение ее внутренней геометрии от геометрии плоскости, задается одной функцией. Следует ожидать, что отклонение геометрии m-мерного риманова многообразия (M,g) от геометрии евклидова пространства характеризуется некоторым множеством функций. В этой лекции мы покажем, что эти функции являются компонентами 4-валентного тензора, называемого тензором кривизны. Мы получим его компоненты сначала формально, а затем выясним геометрический смысл этого тензора.

Для этого рассмотрим деривационные уравнения многообразия (M,∇), полученные в лекции 23

$$\nabla_j\,\partial_m = \Gamma^k_{jm}(x)\partial_k \tag{24}$$

и вычислим вторую ковариантную производную. Принимая во внимание свойства ковариантных производных, получим

$$\nabla_i(\nabla_j\partial_m) = \partial_i\Gamma^k_{jm}\partial_k + \Gamma^k_{jm}\nabla_i\partial_k = (\partial_i\Gamma^k_{jm} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm})\partial_k\,.$$

Поменяв местами индексы i и j, получим аналогичное выражение

$$\nabla_j(\nabla_i\partial_m) = \partial_j\Gamma^k_{im}\partial_k + \Gamma^k_{im}\nabla_j\partial_k = (\partial_j\Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im})\partial_k\,.$$

Рассмотрим их разность

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\partial_m = R^k_{mij}(x)\partial_k\,, \tag{25}$$

где

$$R^k_{mij}(x) = \partial_i\Gamma^k_{jm} - \partial_j\Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im} \tag{26}$$

являются компонентами тензора валентности $(1,3)$, который называется *тензором кривизны пространства* (M,∇). Таким образом, с формальной точки зрения тензор кривизны характеризует неперестановочность ковариантных производных.

Теорема 7. *Компоненты тензора кривизны обладают следующими свойствами симметрии*

$$R^k_{mij} = -R^k_{mji}, \quad R^k_{mij} + R^k_{ijm} + R^k_{jmi} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Косая симметрия компонент тензора кривизны по последней паре индексов следует непосредственно из их определения (25). Менее очевидно второе свойство. Для его доказательства запишем равенство (25) трижды, делая циклическую перестановку нижних индексов $i \to j \to m \to i$

$$\nabla_i\nabla_j\partial_m - \nabla_j\nabla_i\partial_m = R^k_{mij}(x)\partial_k,$$

$$\nabla_j\nabla_m\partial_i - \nabla_m\nabla_j\partial_i = R^k_{ijm}(x)\partial_k,$$

$$\nabla_m\nabla_i\partial_j - \nabla_i\nabla_m\partial_j = R^k_{jmi}(x)\partial_k\,.$$

Сложим эти равенства, учитывая, что для симметричных компонент связности вследствие (24) $\nabla_i\partial_j = \nabla_j\partial_i$. Тогда в левой части все члены сократятся и мы получим второе свойство. $\square$

С тензором кривизны связан *оператор кривизны*, который определяется следующим образом. Выберем в многообразии (M,∇) два линейно независимых векторных поля $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$, определяющих в каждой точке 2-мерную плоскость.

Определение. *Оператором кривизны* $R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ *называется отображение, которое при заданных векторных полях* $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ *всякому векторному полю* $\boldsymbol{a}(x)\in\mathfrak{X}M$ *ставит в соответствие векторное поле* $R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\boldsymbol{a}$ *по формуле*

$$R(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{a}=\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a}-\nabla_{\mathbf{q}}\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{a}-\nabla_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}\mathbf{a}. \tag{27}$$

Покажем, что этот оператор определяется тензором кривизны. Для этого запишем его в координатах. Пусть $\mathbf{p}=p^i\partial_i$, $\mathbf{q}=q^j\partial_j$ и $\mathbf{a}=a^k\partial_k$. Начнем с первого слагаемого:

$$\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}a^k=p^i\{\partial_i(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a})^k+\Gamma^k_{im}(\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{a})^m\}=p^i\{\partial_i[q^j(\nabla_j a^k)+\Gamma^k_{im}[q^j(\partial_j a^m+\Gamma^m_{js}a^s)]\}=$$
$$p^i\partial_i q^j(\nabla_j a^k)+p^iq^j(\partial_i\partial_j a^k+\partial_i\Gamma^k_{js}a^s+\Gamma^k_{js}\partial_i a^s+\Gamma^k_{im}\partial_j a^m+\Gamma^k_{im}\Gamma^m_{js}a^s).$$

Второе слагаемое имеет аналогичное выражение, надо лишь поменять местами поля $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. После вычитания сократятся вторые члены в силу симметрии вторых частных производных, а также четвертый с пятым и пятый с четвертым членами соответственно. В результате, учитывая формулу (39) для тензора кривизны, а также формулу для коммутатора векторных полей (лекция 22), получим

$$\nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{q}}a^k-\nabla_{\mathbf{q}}\nabla_{\mathbf{p}}a^k=R^k_{sij}a^sp^iq^j+[\mathbf{p},\mathbf{q}]^j\nabla_j a^k.$$

Учитывая, что последний член этого выражения есть $\nabla_{[\mathbf{p},\mathbf{q}]}\mathbf{a}^k$, получим в итоге следующее выражение для оператора кривизны

$$R(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{a}=R^k_{sij}a^sp^iq^j\partial_k. \tag{28}$$

В частности, для векторов натурального репера $\mathbf{p}=\partial_i$, $\mathbf{q}=\partial_j$ будем иметь

$$R(\partial_i,\partial_j)\mathbf{a}=R^k_{sij}a^s\partial_k\,,\quad(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)a^k=R^k_{sij}a^s\,.$$

23.2. Геометрический смысл тензора кривизны.

Как мы видели в лекции 23, параллельное перенесение определяет линейный изоморфизм касательных пространства $P(x,t):T_xM\to T_{x(t)}M$ вдоль пути перенесения. Для выяснения геометрического смысла тензора кривизны нам понадобится

Лемма. *Компоненты оператора параллельного перенесения* $P(x,t):T_xM\to T_{x(t)}M$ *вдоль пути* $x(t)$ *с начальной точкой* $x(0)=x$ *и с начальным касательным вектором* $\boldsymbol{p}=(\frac{dx^i}{dt}(0))$ *с точностью до малых первого порядка относительно параметра* t *равны*

$$P^k_j(x,t)=\delta^k_j-t\Gamma^k_{ij}(x)p^i. \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условием параллельного перенесения вектора $\mathbf{a}$ вдоль пути $x=x(t)$ с начальной точкой $x=x(0)$ является равенство (лекция 23)

$$\frac{da^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t)=0\,. \tag{30}$$

Будем искать решение этой системы ОДУ в виде степенного ряда по параметру t с начальным значением $a^k(0)=a^k$. Ограничиваясь учетом малых лишь первого порядка, имеем

$$a^k(t)=a^k+t\frac{da^k(t)}{dt}(0)+\dots$$

Значение производной в начальной точке из условия параллельного перенесения равно $\frac{da^k(t)}{dt}(0)=-\Gamma^k_{ij}(x)p^ia^j$, откуда

$$a^k(t)=(\delta^k_j-\Gamma^k_{ij}(x)p^i)a^j\,,$$

что доказывает лемму. $\square$

Для того, чтобы выяснить геометрический смысл тензора кривизны, рассмотрим некоторую точку $x \in (M, \nabla)$ и проходящую через нее 2-мерную поверхность с параметрическими уравнениями $x^k = x^k(u, v)$. Векторы с координатами $p^i(x) = \partial_u x^i$ и $q^i(x) = \partial_v x^i$ образуют в этой точке натуральный репер этой поверхности и определяют ее касательную 2-плоскость $L \in T_x M$. Рассмотрим на этой поверхности петлю γ с началом и концом в точке $x = x(0) = x(1)$. При параллельном перенесении вдоль петли мы получим линейно изоморфное отображение исходного касательного пространства на себя, т. е. невырожденный линейный оператор $P(\gamma) : T_x M \to T_x M$. Оказывается, что в главной своей части он определяется оператором кривизны $R(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и, конечно, выбранной петлей.

Однако, для упрощения вычислений лучше поступить следующим образом. В качестве петли рассмотрим принадлежащий поверхности малый криволинейный параллелограм, образованный координатными линиями, вершины которого имеют координаты $x(u, v)$, $x_1(u+t, v)$, $x_2(u, v+t)$, $x_3(u+t, v+t)$. Паралельное перенесение вектора $\mathbf{a}$ вдоль пути $\gamma_1 = x x_1 x_3$ порождает линейный изоморфизм $P(\gamma_1) : T_x M \to T_{x_3} M$ касательных пространств. Аналогичное отображение $P(\gamma_2)$ возникает при его перенесении вдоль пути $\gamma_2 = x x_2 x_3$. В результате в точке x_3 получим два вектора: $\mathbf{a}_3'$ и $\mathbf{a}_3''$. Оказывается, что разность $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}_3'' - \mathbf{a}_3'$ в главной своей части определяется тензором кривизны и, естественно, выбранным параллелограмом. Точнее, с точностью до малых второго порядка справедлива формула

$$\Delta\mathbf{a}^k = t^2 R^k_{mij}(x) F^{ij}(x) a^m\,, \tag{31}$$

где $F^{ij} = p^i q^j - p^j q^i$ — кососимметричный тензор, называемый *бивектором.*

Докажем эту формулу. Согласно лемме, в точке x_1 мы получим вектор $\mathbf{a}_1 = P(x, t)\mathbf{a}$. Аналогичным образом, перенося начальный вектор по v-линии, получим в точке x_2 вектор $\mathbf{a}_2 = Q(x, t)\mathbf{a}$, где оператор $Q(x, t)$ аналогичен (29), но определяется вектором $\mathbf{q}$

$$Q^k_j(x, t) = \delta^k_j - t\Gamma^k_{ij}(x) q^i. \tag{32}$$

Далее, перенося параллельно вектор $\mathbf{a}_1$ из точки x в точку x_3 вдоль координатной v-линии, получим вектор $\mathbf{a}_3' = Q(x_1, t)\mathbf{a}_1$. Аналогично, перенося параллельно вдоль u-линии вектор $\mathbf{a}_2$ из точки x_2 в ту же точку x_3, получим вектор $\mathbf{a}_3'' = P(x_2, t)\mathbf{a}_2$. Их разность равна

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}_3'' - \mathbf{a}_3' = (P(x_2, t)Q(x, t) - Q(x_1, t)P(x, t))\mathbf{a}.$$

Учитывая, что в первом приближении $x^i_1 = x^i + p^i(x)t$ и $x^i_2 = x^i + q^i(x)t$, получаем

$$P(x_2, t) = P(x, t) + t q^s \partial_s P(x, t), \quad Q(x_1, t) = Q(x, t) + t p^s \partial_s Q(x, t).$$

Поэтому выражение в скобках равно

$$P(x, t)Q(x, t) - Q(x, t)P(x, t) + t(q^i(x)\partial_i P(x, t)Q(x, t) - p^i(x)\partial_i Q(x, t)P(x, t)).$$

Вычислим его в координатах. Имеем

$$P^k_s Q^s_m = (\delta^k_s - t\Gamma^k_{is} p^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm} q^j) = \delta^k_m - t(\Gamma^k_{im} p^i + \Gamma^k_{jm} q^j) + t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} p^i q^j)$$

и аналогично

$$Q^k_s P^s_m = (\delta^k_s - t\Gamma^k_{is} q^i)(\delta^s_m - t\Gamma^s_{jm} p^j) = \delta^k_m - t(\Gamma^k_{im} q^i + \Gamma^k_{jm} p^j) + t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} q^i p^j).$$

Следовательно, после очевидных сокращений

$$P^k_s Q^s_m - Q^k_s P^s_m = t^2(\Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im}) p^i q^j.$$

Далее

$$\partial_i P^k_s = -t(\partial_i \Gamma^k_{js} p^j + \Gamma^k_{js} \partial_i p^j), \quad \partial_i Q^s_m = -t(\partial_i \Gamma^s_{jm} q^j + \Gamma^s_{jm} \partial_i q^j).$$

Поэтому, пренебрегая членами, содержащими t^3, получим

$$t(q^i(x)\partial_i P^k_s Q^s_m = -t^2 q^i(\partial_i \Gamma^k_{jm} p^j + \Gamma^k_{jm} \partial_i p^j)$$

и аналогично

$$t(p^i(x)\partial_i Q^k_s P^s_m = -t^2 p^i(\partial_i \Gamma^k_{jm} q^j + \Gamma^k_{im} \partial_i q^j).$$

Вычисляя разность этих двух выражений, следует иметь ввиду, что векторные поля $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, являясь операторами частных производных, коммутируют друг с другом, т. е. (лекция 22)

$$[\mathbf{p}, \mathbf{q}]^j = p^i \partial_i q^j - q^i \partial_i p^j = 0.$$

Следовательно, заменяя индексы суммирования во втором члене, получим

$$t((q^i(x)\partial_i P^k_s Q^s_m - p^i(x)\partial_i Q^k_s P^s_m) = t^2(\partial_i \Gamma^k_{jm} - \partial_j \Gamma^k_{im}) p^i q^j.$$

В итоге мы приходим к формуле

$$\Delta \mathbf{a}^k = t^2 R^k_{mij}(x) p^i q^j(x) a^m,$$

которая вследствие косой симметрии тензора кривизны по индексам i, j эквивалентна формуле (31). $\square$

Лекция 24. РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ.

24.1. Риманова метрика и риманова связность.

Теория гладких многообразий есть многомерное обобщение теории поверхностей, точнее ее внутренней геометрии. Но мы пока не имеем способа измерения рассматриваемых величин, т. е *метрики.* В теории поверхностей она в виде первой фундаментальной формы возникала естественным образом из евклидова пространства. В теории многомерных многообразий ее определил Б.Риман в 1854 г.

Определение. *Римановой метрикой на многообразии* M *называется симметричное тензорное поле* g *валентности (0,2) такое, что квадратичная форма* $\boldsymbol{a}^2 = g(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ *является положительно определенной.* Многообразие, снабженное римановой метрикой называется римановым и обозначается (M, g).

Итак, мы определили полную аналогию первой фундаментальной формы поверхности и многие понятия римановой геометрии представляют собой просто многомерное обобщение ее внутренней геометрии.

Поле g называется *метрическим тензором* пространства, а его значение на паре векторных полей $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ их *скалярным произведением.* Таким образом, если многообразие риманово, то касательное векторное пространство каждой его точки является евклидовым. Если заменить условие положительной определенности поля g более слабым условием невырожденности, то касательные пространства станут псевдоевклидовыми и мы придем к понятию псевдоримановой метрики и псевдориманова многообразия. Интерес к таким многообразиям возник в связи с общей теорией относительности: физическое пространство-время этой теории 4-мерно и имеет псевдориманову метрику сигнатуры $(+ + + -)$.

Пусть (U, φ) — некоторая карта на многообразии и $\{\partial_i\}$ — соответствующее поле натуральных реперов. Тогда метрический тензор имеет компоненты $g_{ij}(x) = (\partial_i, \partial_j)$, а скалярное произведение имеет вид $(\mathbf{a}, \mathbf{b})(x) = g_{ij}(x)a^i(x)b^j(x)$. Отметим, что в силу условия положительной определенности определитель матрицы метрического тензора $\det(g_{ij}) > 0$. Так как он невырожденный, то в каждой точке определен линейный изоморфизм $T_A M \to T_A^* M$ касательных пространств на кокасательные, который векторному полю $\mathbf{a}(x)$ ставит в соответствие ковекторное поле в той же точке $\xi_{\mathbf{a}}(x)$ по формуле (7) лекц. 10: $\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. При координатной записи удобно вектор и соответствующий ему ковектор обозначать одной и той же буквой, различая их лишь положением индекса. Благодаря этому соглашению в координатах это отображение выражается простой формулой $a_i(x) = g_{ij}(x)a^j(x)$ и называется *опусканием индекса.* Более того, этот изоморфизм является изометрией, если определить скалярное произведение ковекторных полей формулой $(\xi_{\mathbf{a}}, \eta_{\mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Обратное отображение имеет вид $a^i(x) = g^{ij}(x)a_j(x)$ и называется *поднятием индекса.* По этой причине в римановой геометрии векторы и ковекторы часто отождествляют и говорят, например, о векторном поле с ковариантными компонентами.

Имея метрический тензор, мы так же, как на поверхности, можем определить угол между векторными полями, модуль векторного поля, а также ориентированную длину дуги пути $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ формулой $s = \int |\mathbf{x}'(t)|dt$ или в координатах

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t))x'^i(t)x'^j(t)}\, dt.$$

Определим еще понятие объема. Пусть в римановом пространстве задан компакт $Q \in (M, g)$, ограниченный кусочно-гладкой гиперповерхностью. Предположим сначала, что Q покрывается одной картой.

Определение. *Ориентируемым объемом области* $Q \in (M, g)$ *называется число*

$$V(Q) = \int\limits_Q \cdots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdots dx^n\,.$$

Эта формула является многомерным обобщением той формулы, которая была получена в лекции 13 для вычисления площади на поверхности евклидова пространства, и выводится она аналогичным образом. Заметим, что под знаком интеграла стоит существенная компонента $\varepsilon_{12\ldots n} = \sqrt{g(x)}$ дискриминантного тензора (п. 10.2). В силу компактности Q можно покрыть конечным числом карт. В этом случае дело сведется к суммированию конечного числа интегралов. Поробнее вопрос об интегрировании мы рассмотрим в разделе IV.

Как ведет себя метрика риманова пространства при параллельном перенесении? Это зависит от того, какую связность мы зададим на многообразии. Оказывается, справедлива

Теорема 8. (Риччи) *Существует единственная симметричная связность такая, что при параллельном перенесении векторов по любому пути сохраняется их скалярное произведение.*

Это условие означает, что линейный изоморфизм касательных пространств при параллельном перенесении является *изометрией*. Такая связность называется *римановой*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть при параллельном перенесении векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вдоль любого пути $x = x(t)$, т. е. при условиях

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}a^j(t) = 0, \quad \frac{db^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(x(t))\frac{dx^i}{dt}b^j(t) = 0$$

сохраняется скалярное произведение этих векторов — функция $f(t) = g_{ij}(t)a^i(t)b^j(t)$ и, следовательно, $\frac{df}{dt} = 0$. Дифференцируя это тождество и учитывая условие параллельного перенесения, после несложных выкладок получим

$$\frac{df}{dt} = (\partial_k g_{ij} - \Gamma^s_{ki}g_{sj} - \Gamma^s_{kj})a^i b^j \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Заметим, что выражения в скобках есть ковариантные производные метрического тензора. Принимая во внимание произвольность в выборе векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и пути, отсюда получим систему алгебраических уравнений

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k\, g_{ij} - \Gamma^s_{ki}\, g_{sj} - \Gamma^s_{kj}\, g_{is} = 0$$

для компонент связности. Эта система знакома нам по лекции 18. Как там показано, она имеет единственное решение — символы Кристоффеля

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}). \quad \square \tag{33}$$

Следствие. *Если связность риманова, то при параллельном перенесении сохраняется угол между векторами и длина вектора.*

В частности, при параллельном перенесении вектора вдоль геодезического пути сохраняется угол между вектором и единичным касательным вектором геодезической. Действительно, последний переносится параллельно по определению.

24.2. Дифференциальные операторы в теории поля.

Наличие метрического тензора в римановом многообразии (M, g) вносит некоторые особенности при работе с тензорными полями, рассмотренными в лекц. 22. Как мы уже отмечали, в (M, g) существует изометрия $T_x(M) \to T_x^*(M)$ между касательными и кокасательными пространствами в каждой точке, которая осуществляется с помощью опускания и поднятия индекса. Аналогичную операцию можно делать и с тензорными полями произвольной валентности (п. 10.1).

Рассмотрим некоторые тензорные поля в римановом пространстве, образуемые с помощью ковариантных производных. Пусть задано скалярное поле $F(x)$. Его ковариантные производные совпадают с частными: $\nabla_i F = \partial_i F$. В итоге, судя по закону преобразования, получили ковекторное поле $\xi = \mathrm{grad} F$, называемое *градиентом поля* F. При этом поле $F(x)$ называется его *потенциалом.* Подняв индекс, получим векторное поле $\mathbf{a}^i = g^{ij}\nabla_j F$ — контравариантные компоненты градиента. Возникает вопрос, всякое ли ковекторное поле является градиентом некоторого скалярного поля? Ответ оказывается отрицательным. Имеет место

Теорема 9. *Для того, чтобы ковекторное поле ξ, заданное в области $U \subset (M, g)$ было потенциальным, необходимо, а в односвязной области и достаточно, чтобы выполялось условие*

$$\nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i = 0. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано ковекторное поле ξ. Если оно потенциально, то должна существовать функция $F(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (**??**)

$$\frac{\partial F}{\partial x^j} = \xi_j(x^1, \ldots, x^m).$$

Найдем условие, при котором решение F существует (условие интегрируемости). Подставив его в уравнение, получим тождество. Дифференцируя его ковариантно, получим $\nabla_i \partial_j F \equiv \nabla_i \xi_j$ или подробнее

$$\partial_i \partial_j F - \Gamma_{ij}^k \partial_k F \equiv \nabla_i \xi_j$$

Здесь левая часть симметрична относительно индексов i, j. Поэтому должна быть симметрична и правая. Отсюда получаем условие (34). Пусть теперь это условие выпонено. Тогда $dF = \xi_i dx^i$ есть полный дифференциал. Выберем некоторую точку и путь $\Gamma : x = x(t)$, соединяющий ее с произвольной точкой x заданной области. Тогда, как известно из анализа, если область односвязна, функция

$$F(x) = \int_\Gamma \xi_i(x) dx^i$$

не зависит от пути интегрирования и, следовательно, определяется однозначно. $\square$

Пусть, далее, задано векторное поле $\mathbf{a}$ с компонентами $a^i(x)$. Ковариантные производные $\nabla_j a^i$ образуют тензорное поле валентности $(1, 1)$. Его след есть скалярное поле

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \nabla_i a^i, \tag{35}$$

которое называется *дивергенцией векторного поля* $\mathbf{a}$.

Нетрудно проверить следующие свойства этого дифференциального оператора:

$$1)\, \mathrm{Div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{Div}\mathbf{a} + \mathrm{Div}\mathbf{b}; \quad 2)\, \mathrm{Div}(f(x)\mathbf{a}) = f(x)\mathrm{Div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad} f(x), \mathbf{a}).$$

В частности, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то это число можно вынести за знак дивергенции.

Если поле $\mathbf{a}$ потенциально, т.е. $\mathbf{a}^i = g^{ij}\nabla_j F$, то вследствие ковариантного постоянства метрического тензора его дивергенция принимае следующий вид

$$\triangle = g^{ij}\nabla_i\nabla_j F.$$

Это *оператор Лапласа.*

Определение. *Если дивергенция векторного поля равна нулю, то оно называется соленоидальным.*

Найдем развернутое выражение формулы (35) в координатах, позволяющее не находить символы Кристоффеля и поэтому удобное при вычислениях. Из формулы для ковариантных производных имеем

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_i a^i + \Gamma^i_{ik} a^k\,.$$

Вычислим величины Γ^i_{ik}. Для этого рассмотрим объем параллелепипеда $V(x) = \varepsilon(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \sqrt{g}$, где $g = \det(g_{ij})$, построенного на векторах натурального репера. Он равен компоненте $\varepsilon_{12\ldots n}$ дискриминантного тензора. Изменение этого объема при смещении точки x характеризуется частными производными

$$\partial_k V = \varepsilon(\partial_k\partial_1, \ldots, \partial_n) + \cdots + \varepsilon(\partial_1, \ldots, \partial_k\partial_n).$$

Используя деривационные уравнения, получим $\partial_k V = \Gamma^i_{ik} V$ и, следовательно, $\Gamma^i_{ik} = \partial_k \ln\sqrt{g}$, . Таким образом, в итоге имеем

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_i a^i + a^k\partial_k \ln\sqrt{g}\,.$$

Пример. Вычислим дивергенцию векторного поля на плоскости в полярных координатах: $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\varphi)$. Так как $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$, то $g = r^2$. Получим

$$\mathrm{Div}\mathbf{a} = \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + \frac{1}{r}a^1.$$

Рассмотрим теперь ковариантные компоненты a_j векторного поля и ковариантные производные $\nabla_i a_j$. Это тензорное поле валентности $(0,2)$. Разложим его на симметричный и кососимметричный тензоры: $\nabla_i a_j = \nabla_{(i}a_{j)} + \nabla_{[i}a_{j]}$. Первый из них называется *тензором деформации.* Что касается кососимметричного тензора $w_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i a_j - \nabla_j a_i)$, то силу симметрии по нижним индексам символов Кристоффеля его можно выразить только через частные производные

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i a_j - \partial_j a_i). \tag{36}$$

Он называется *тензором вращения* векторного поля. Это выражение нам уже встречалось в формуле (34). С помощью этого тензора теорему (8) можно сформулировать следующим образом: *Для того, чтобы векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *было потенциально, необходимо, а в случае односвязной области и достаточно, чтобы его тензор вращения был равен нулю.*

Рассмотрим этот тензор в 3-мерном пространстве. Заметим, что в этом случае он имеет только три существенные компоненты: w_{23}, w_{31}, w_{12}. Но столько же компонент имеет и векторное поле. Биективное соответствие между ними мы запишем с помощью дискриминантного тензора

$$w^k = \varepsilon^{ijk} w_{ij} = \varepsilon^{ijk}\partial_i a_j. \tag{37}$$

При $n = 3$, как мы знаем из лекц. 11, он имеет единственную существенную компоненту $\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}}$. Итак, мы получили векторное поле, присоединенное к полю $\mathbf{a}$,

которое называется *ротацией* поля $\mathbf{a}$ и обозначается $\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{a}$. Согласно (37) координаты ротации равны равны

$$w^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2), \quad w^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3), \quad w^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1).$$

Если к тому же пространство евклидово, а координаты прямоугольные, то $g = 1$ и мы получаем формулу

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Из (37) вытекают следующие свойства ротации:

$$1)\, \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}; \quad 2)\, \operatorname{rot}(f(x)\mathbf{a}) = f(x)\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad} f(x), \mathbf{a}].$$

В частности, если $\lambda \in \mathbb{R}$, то этот числовой множитель можно выносить за знак ротации.

Лекция 25. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

25.1. Свойства тензора кривизны римановых пространств.

Если многообразие риманово, то его тензор кривизны обладает рядом дополнительных свойств.

Теорема 10. *Тензор кривизны риманова пространства полностью определяется его метрическим тензором.*

Доказательство. Из формулы

$$R^k_{mij}(x) = \partial_i \Gamma^k_{jm} - \partial_j \Gamma^k_{im} + \Gamma^k_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^k_{js}\Gamma^s_{im} \tag{39}$$

следует, что компоненты тензора кривизны вычисляются через компоненты связности и их частные производные. Но в случае риманова пространства эти компоненты суть символы Кристоффеля, которые определяются через компоненты метрического тензора и их частные производные первого порядка

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}). \tag{40}$$

Отсюда следует, что компоненты тензора кривизны есть некоторые функции компонент метрического тензора и их частных производных до второго порядка. □

Как мы уже отмечали в предыдущей лекции, в силу (39) компоненты тензора кривизны кососимметричны по последней паре индексов. Покажем, что в случае риманова пространства он обладает дополнительными свойствами симметрии. Для этого, опустив верхний индекс с помощью метрического тензора, рассмотрим ковариантные компоненты этого тензора $R_{kmij} = g_{ks} R^s_{mij}$.

Теорема 11. *В римановом пространстве ковариантные компоненты тензора кривизны не изменяются при перестановке первой и второй пары индексов и кососимметричны по первой паре*

$$R_{kmij} = R_{ijkm}, \quad R_{kmij} = -R_{mkij}\,.$$

Доказательство. Докажем сначала первое из этих свойств. Для этого обратимся к формуле (39), из которой имеем

$$R_{kmij} = g_{kr}(\partial_i \Gamma^r_{jm} - \partial_j \Gamma^r_{im} + \Gamma^r_{is}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^r_{js}\Gamma^s_{im})\,.$$

Введем компоненты

$$\Gamma_{kjm} = g_{kr}\Gamma^r_{jm} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{mk} + \partial_m g_{jk} - \partial_k g_{jm}), \tag{41}$$

полученные из символов Кристоффеля опусканием верхнего индекса. Дифференцируя их, получим

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \partial_i \Gamma_{kjm} - \partial_i g_{ks}\Gamma^s_{jm}\,.$$

Но для римановой связности $\nabla_i g_{ks} = 0$ и поэтому $\partial_i g_{ks} = g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is}$. Следовательно,

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \partial_i \Gamma_{kjm} - (g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is})\Gamma^s_{jm}\,,$$

что с учетом (41) дает

$$g_{kr}\partial_i \Gamma^r_{jm} = \frac{1}{2}(\partial^2_{ij} g_{km} + \partial^2_{im} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jm}) - (g_{rs}\Gamma^r_{ik} + g_{kr}\Gamma^r_{is})\Gamma^s_{jm}\,.$$

Меняя местами индексы i, j, получим аналогичное соотношение. В результате их подстановки в ковариантные компоненты тензора кривизны после очевидных сокращений получим

$$R_{kmij} = \frac{1}{2}(\partial^2_{im} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jm} - \partial^2_{jm} g_{ik} + \partial^2_{jk} g_{im}) - g_{rs}(\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^r_{im}\Gamma^s_{jk}) \tag{42}$$

(здесь в последнем члене мы поменяли местами индексы суммирования r, s). Из этой формулы непосредственно видны искомые свойства симметрии компонент тензора кривизны. Впрочем, второе свойство является простым следствием первого. $\square$

Свойства симметрии тензора кривизны значительно уменьшают число его существенных компонент. Можно показать, что их число равно $N = \frac{m^2(m^2-1)}{12}$. Это более, чем в 12 раз меньше числа компонент 4-валентного тензора, не обладающего симметриями. Это обстоятельство имеет важное практическое значение, существенно сокращая вычисления.

25.2. Пространства нулевой кривизны.

Для того, чтобы прояснить роль тензора кривизны в геометрии многообразий со связностью, рассмотрим многообразия, в которых он равен нулю.

Теорема 12. *Для того, чтобы многообразие (M, ∇) с симметричной связностью было локально аффинным, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть многообразие аффинное или является областью аффинного пространства. Введем в нем декартовы координаты $(O, \mathbf{e}_i)$. Здесь $\partial_i = \mathbf{e}_i = \text{const}$ и поэтому, как следует из деривационных уравнений, в этой системе координат $\Gamma^k_{ij} = 0$. Тогда тензор кривизны $R^k_{mij} = 0$. Заметим, что это равенство, в отличие от предыдущего, имеет тензорный характер и поэтому имеет место в любой системе координат этого пространства.

Докажем достаточность этого условия. Пусть (M, ∇) — многообразие нулевой кривизны. Покажем, что тогда в области $U \subset M$ с координатами (x^i) можно ввести декартовы координаты $(x^{i'})$. Это значит, что существуют гладкие функции $x^{i'} = f^{i'}(x)$, определяющие преобразование к искомым координатам. При этом преобразовании компоненты связности преобразуются по формуле (нам удобно выразить данные компоненты через штрихованные)

$$\Gamma^k_{ij}(x) = f^k_{k'}(\Gamma^{k'}_{i'j'} f^{i'}_i f^{j'}_j + \partial_i f^{k'}_j)\,.$$

Но в декартовых координатах, если они существуют, должно быть $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$ и, следовательно, искомые функции должны удовлетворять условию $\Gamma^k_{ij}(x) = f^k_{k'}\partial_i f^{k'}_j$. Таким образом, мы получаем для них следующую систему дифференциальных уравнений

$$a)\ \frac{\partial f^{i'}(x)}{\partial x^i} = f^{i'}_i(x), \quad b)\ \frac{\partial f^{i'}_i(x)}{\partial x^j} = f^{i'}_k(x)\Gamma^k_{ij}(x) \tag{43}$$

относительно $m^2 + m$ неизвестных функций $f^{i'}(x), f^{i'}_i(x)$, где $\det(f^{i'}_i) \neq 0$.

Эта система имеет решение лишь тогда, когда выполняются условия интегрируемости: так как левые части уравнений есть градиенты искомых функций, то градинтными должны быть и правые части. Рассмотрим сначала уравнения (a) и вычислим вторые частные производные $\partial^2_{ij} f^{i'} = \partial_j f^{i'}_i = f^{i'}_k(x)\Gamma^k_{ij}$. Здесь симетричны по индексам дифференцирования как левые, так и правые части, т. е. условия интегрируемости

удовлетворяются. Рассмотрим уравнения (b). Для каждого номера i' набор функций $f_i^{i'}(x) = \partial_i f^{i'}(x)$ будем рассматривать как компоненты ковектора-градиента и поэтому эти уравнения можно записать в виде $\nabla_j f_i^{i'} = 0$. Дифференцируя их ковариантно еще раз, получим $\nabla_k \nabla_j f_i^{i'} = 0$, откуда $(\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) f_i^{i'} = R_{ikj}^s f_s^{i'} = 0$. В силу невырожденности якобиевой матрицы $f_s^{i'}$ получим $R_{ikj}^s = 0$. Значит, поскольку это условие предполагается выполненным, рассматриваемая система имеет решение. Тем самым существование декартовых координат в рассматриваемой области доказано. $\square$

Следствие. *Параллельное перенесение в односвязном многообразии* (M, ∇) *не зависит от пути перенесения тогда и только тогда, когда это многообразие локально аффинное.*

Это утверждение вытекает из формулы $\Delta a^k = t^2 R_{sij}^k(x) F^{ij}(x) a^s$ (лекция 25) и доказанной теоремы. Пояснения требует лишь необходимость условия. Если при любом выборе исходной точки, 2-мерной поверхности и путей перенесения $\Delta a^k = 0$, то в силу произвольности в выборе исходного вектора $\mathbf{a}$, бивектора F^{ij} и параметра t получим, что тензор кривизны равен нулю. Следует лишь проследить, чтобы пути охватывали односвязную область.

Все сказанное относится, конечно и к римановым пространствам. В этом случае доказанная теорема может быть уточнена следующим образом.

Теорема 13. *Для того, чтобы риманово многообразие* (M, g) *было локально евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был равен нулю.*

Для доказательства следует лишь заметить, что в декартовых координатах компоненты метрического тензора пространства $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathrm{const}$ и обращение в нуль символов Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k = 0$ является следствием этого свойства.

Лекция 26. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой лекции мы приводим интегральные теоремы теории векторного поля в 3-мерном евклидовом пространстве и их механическую и гидродинамическую интерпретацию. Общая теория интегрирования на гладких многообразиях будет рассмотрена в следующем разделе.

26.1. Работа и циркуляция векторного поля.

Пусть $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ — две точки 3-мерного евклидова пространства $\mathbf{a}$ — вектор силы. Из элементарной механики известно, что его работа на отрезке $[A, B]$ вычисляется с помощью скалярного произведения $W = (\mathbf{a}, \vec{AB}) = (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Рассмотрим теперь кусочно гладкую параметризованную кривую $\Gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ и разобьем ее на n малых дуг точками $\mathbf{r}(t_\alpha)$, отвечающими значениям параметра $a = t_\circ < t_1 < \cdots < t_n = b$. Рассмотрим векторы-хорды $\triangle\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{\alpha-1}$, $(\alpha = 1, \ldots n)$ и векторы $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}(\xi_\alpha)$, равные значению поля в произвольно выбранной точке $\xi_\alpha \in [t_{\alpha-1}, t_\alpha]$. Тогда элементарная работа вектора $\mathbf{a}_\alpha$ на отрезке $[\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_{\alpha-1}]$ выражается числом $W_\alpha = (\mathbf{a}_\alpha, \triangle\mathbf{r}_\alpha)$, а на всей ломаной числом $W_n = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, когда $\max|\triangle\mathbf{r}_\alpha| \to 0$, получим криволинейный интеграл

$$W(\Gamma) = \int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_\Gamma a_i du^i. \tag{44}$$

Например, в прямоугольных координатах общепринятых обозначениях $\mathbf{a} = (P, Q, R)$

$$W(\Gamma) = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz\,.$$

Интеграл (44) называется *работой* поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой Γ. Если учесть, что $u^i = u^i(t)$, то дело сведется к вычислению интеграла Римана

$$W(\Gamma) = \int_a^b (\mathbf{a}(t), \mathbf{r}'(t)) dt\,.$$

При вычислении работы следует учитывать, что:
1) При изменении направления параметризации кривой работа изменяет свой знак на противоположный: $W(-\Gamma) = -W(\Gamma)$;
2) При разбиении кривой $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ $W(\Gamma_1 + \Gamma_2) = W(\Gamma_1) + W(\Gamma_2)$;
3) Работа поля не зависит от параметризации кривой.

Пример. Вычислим работу поля $\mathbf{a} = (-y, x, 0)$, заданного в прямоугольных координатах, вдоль одного витка винтовой линии $\mathbf{r} = R\mathbf{e}(t) + bt\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$. Вдоль нее поле имеет компоненты $\mathbf{a} = (-R\sin t, R\cos t, 0)$, то есть $\mathbf{a} = R\mathbf{g}(t)$. С другой стороны, $\mathbf{r}' = R\mathbf{g}(t) + b\mathbf{k}$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{r}') = R^2$. Интегрируя, получим $W(\Gamma) = 2\pi R^2$.

Определение. *Работа векторного поля вдоль замкнутой кривой C (по контуру) называется циркуляцией*

$$W(C) = \oint_C (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \tag{45}$$

С помощью циркуляции можно дать следующую характеристику потенциальным векторным полям. Пусть область задания поля односвязна.

Теорема 14. *Векторное поле в односвязной области потенциально тогда и только тогда, когда его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если поле потенциально, то его ковариантные компоненты $a_i = \partial_i F$. Тогда $(\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \partial_i F dx^i = dF$ есть полный дифференциал и в случае, когда контур охватывает односвязную область, $\oint_C dF = 0$. Обратно, если интеграл (45) по любому замкнутому контуру равен нулю, то подинтегральное выражение есть дифференциал некоторой функции F и, следовательно, $a_i = \partial_i F$. $\square$

Теорема 15. *Векторное поле в односвязной области потенциально тогда и только тогда, когда его работа вдоль пути, соединяющего две данные точки A и B, не зависит от выбора этого пути.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два пути, соединяющие A с B. Рассмотрим замкнутый контур $C = \Gamma_1 - \Gamma_2$. По предыдущей теореме равенство нулю циркуляции поля по контуру C есть необходимое и достаточное условие его потенциальности. Тогда имеем

$$W(C) = W(\Gamma_1 - \Gamma_2) = W(\Gamma_1) - W(\Gamma_2) = 0. \quad \square$$

По доказанному, число

$$W(A, B) = \int_\Gamma dF = F(B) - F(A)$$

зависит только от выбора точек и называется *разностью потенциалов*.

Пример. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = -\frac{e}{r^3}\mathbf{r}$, $r \neq 0$, заданное в сферических координатах (r, θ, φ). Такое поле создается электрическим зарядом величины e, помещенным в полюс этих координат. Так как $\mathbf{r} = r(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})$, то $\mathbf{a} = -\frac{e}{r^2}(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})$ и, как нетрудно видеть, имеет компоненты $\mathbf{a} = (-\frac{e}{r^2}, 0, 0)$. Оно потенциально с потенциалом $F = \frac{e}{r}$. Следовательно, работа этого поля определяется лишь положением точек и равна разности потенциалов $W(A_\circ, A) = e(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\circ})$.

26.2. Поток векторного поля.

Понятие потока векторного поля возникает из следующего гидродинамического примера. Рассмотрим в 3-мерном пространстве параллелограмм, построенный на паре не параллельных векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Тогда количество жидкости, протекающее через эту площадку за единицу времени со скоростью $\mathbf{a}$ равно ориентированному объему паралллелепипеда, построенного на этих векторах, т. е. смешанному произведению $Q = (\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$. Если σ — площадь параллелограмма, а $\mathbf{m}$ — единичный вектор его нормали такой, что тройка $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m}$ правая, то $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \sigma\mathbf{m}$ и смешанное произведение можно записать в виде $Q = (\mathbf{a}, \mathbf{m})\sigma$.

Пусть теперь $K \subset M$ — область ориентированной поверхности с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой. Сетью координатных линий $u_\alpha = c_\alpha$, $v_\beta = c_\beta$ разобьем ее на малые криволинейные 4-угольники и обозначим через $\mathbf{a}_{\alpha\beta}$ значение вектора скорости в произвольно выбранной его точке. Каждый из 4-угольников, отбрасывая малые второго порядка, заменим параллелограммом в касательной плоскости точки (u_α, v_β), построенном на векторах $\mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha$ и $\mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta$ (см. лекцию 11). Его площадь обозначим через $\triangle\sigma_{\alpha\beta}$, а орт нормального вектора через $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$. Тогда, согласно сказанному выше, элементарный поток жидкости через площадку $\triangle\sigma_{\alpha\beta}$ равен $\triangle Q_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}_{\alpha\beta}, \mathbf{m}_{\alpha\beta})\triangle\sigma_{\alpha\beta}$. Суммируя их по всей области и переходя к пределу, получим интеграл

$$Q(U) = \iint_K (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma. \tag{46}$$

Он называется *потоком* векторного поля через область K. Если поверхность замкнута, то вектор нормали направляют обычно во внешнюю сторону.

Имеют место следующие свойства потока:
1) Изменение ориентации области $(K \to -K)$ равносильно изменению направлению вектора $\mathbf{m}$. Поэтому поток изменяет свой знак на противоположный;
2) Если $K = K_1 + K_2$ есть разбиение области, то $Q(K_1 + K_2) = Q(K_1) + Q(K_2)$;
3) Поток не зависит от выбора параметризации поверхности.

В прямоугольных координатах формула (46) упрощается. Рассмотрим направляющие косинусы нормали $\mathbf{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда

$$Q = \int\int_K (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma\,.$$

Если принять во внимание, что $d\sigma\cos\alpha = dydz, \quad d\sigma\cos\beta = dzdx, \quad d\sigma\cos\gamma = dxdy$, то поток запишется в следующем виде

$$Q = \int\int_K Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,.$$

Пример. Подсчитаем в прямоугольных координатах поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ радиусов-векторов через полную поверхность кругового цилиндра радиуса R и высоты h. Пусть ось цилиндра совпадает с осью Z и $0 \le z \le h$. Разобьем поверхность на три области: нижнее и верхнее основания K_1, K_2 и на боковую поверхность K_3.

1) На нижнем основании, лежащем в плоскости XY, $\mathbf{a} = (x, y, 0)$. Вектор нормали $\mathbf{m} = -\mathbf{k}$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$ и $Q_1 = 0$.

2) На верхнем основании $\mathbf{r} = (x, y, h)$, $\mathbf{m} = \mathbf{k}$. Следовательно, $(\mathbf{r}, \mathbf{m}) = h$ и $Q_2 = \int\int_{K_3} hd\sigma = \pi R^2 h$.

3) Уравнение боковой поверхности $\mathbf{r} = R\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{m} = \mathbf{e}(\varphi)$. Поэтому $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = (\mathbf{r}, \mathbf{m}) = R$. Учитывая, что $g_{11} = R^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$, и значит $g = R^2$ имеем $d\sigma = Rd\varphi dz$. Следовательно, $Q_3 = \int_0^{2\pi}\int_0^h R^2 d\varphi dz = 2\pi R^2 h$. В итоге получим $Q = 3\pi R^2 h$.

26.3. Соленоидальные векторные поля.

Напомним (лекция 24), что векторное поле называется *соленоидальным*, если его дивергенция равна нулю.

Теорема 16. *Векторное поле соленоидально тогда и только тогда, когда его поток через любую замкнутую поверхность, ограничивающую односвязную область, равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость сразу следует из теоремы Гаусса-Остроградского. Для того, чтобы доказать достаточность, рассмотрим некоторую точку A в области определения поля и односвязную окрестность этой точки, ограниченную поверхностью M (например, сферой). Рассмотрим формулу Гаусса-Остроградского и применим к ее правой части теорему о среднем значении. Получим

$$\iint_M (\mathbf{a}, \mathbf{m})d\sigma = (\operatorname{Div}\mathbf{a})_B V\,,$$

где B — некоторая точка из рассматриваемой окрестности. $\square$

Разделив на объем V окрестности и переходя к пределу при $V \to 0$ (и тогда $B \to A$), т. е. стягивая эту окрестность к точке A, получим

$$\mathrm{Div}_A(\mathbf{a}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_M (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma}{V}. \tag{47}$$

Эта формула (47) выясняет смысл значения дивергенции в данной точке. С точки зрения теории сплошных сред дивергенцию в зависимости от ее знака можно трактовать как меру увеличения или уменьшения объема среды в оерестности данной точки. Если $\mathrm{Div}\mathbf{a} = 0$, среда называется несжимаемой.

Другое отличительное свойство соленоидального поля состоит в следующем. Рассмотрим замкнутый контур Γ, трансверсальный к траекториям поля. Это означает, что он ни в одной точке не касается траекторий. Для простоты контур выберем плоским. Проведем через его точки траектории поля. Образованная этими кривыми фигура называется *векторной трубкой.* Тогда имеет место

Теорема 17. *Поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки постоянен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим часть векторной трубки, ограниченную двумя плоскими сечениями. Получилась замкнутая поверхность M, состоящая из трех частей: двух оснований K_1, K_2 (в порядке возрастания параметра) и боковой поверхности K_3. По предыдущей теореме поток $\iint_K (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma = 0$, причем нормальный вектор $\mathbf{m}$ всюду направлен во внешнюю сторону поверхности. Тогда

$$\iint_{K_1} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma + \iint_{K_2} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma + \iint_{K_3} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma = 0.$$

Так как векторы поля касаются траекторий, на боковой поверхности $\mathbf{a} \perp \mathbf{m}$ и поэтому последний интеграл равен нулю. Что касается первого интеграла, заменим вектор $\mathbf{m}$ на $-\mathbf{m}$, изменив ориентацию сечения K_1. Тогда

$$I = \iint_{-K_1} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma = \iint_{K_2} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma.$$

Это равенство доказывает утверждение. $\square$

Величина I называется *мощностью* трубки.

Теорема 18. *Для того чтобы векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось ротацией некоторого векторного поля:* $\mathbf{a} = \mathrm{rot}\mathbf{b}$.

Поле $\mathbf{b}$ называется *векторным потенциалом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность этого утверждения следует из простой проверки того, что $\mathrm{Div}\mathrm{rot}\,\mathbf{a} \equiv 0$. Действительно, в прямоугольных координатах

$$\partial_1(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) + \partial_2(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) + \partial_3(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \equiv 0.$$

Обратно, пусть $\mathrm{Div}\mathbf{a} = 0$. Докажем существование векторного потенциала $\mathbf{b}$. Для этого выберем в области V прямоугольные координаты. Тогда компоненты искомого поля должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_2 b_3 - \partial_3 b_2 = a^1, \quad \partial_3 b_1 - \partial_1 b_3 = a^2, \quad \partial_1 b_2 - \partial_2 b_1 = a^3.$$

Будем искать частное решение этой системы, наложив на искомые функции дополнительное ограничение, например $b^3 = 0$. Это можно сделать в силу того, что если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ — два решения и, следовательно, $\mathrm{rot}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{b}' = \mathbf{a}$, то $\mathrm{rot}\,(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) = 0$

и, значит, поле $\mathbf{b}' - \mathbf{b}$ потенциально: $\mathbf{b}' - \mathbf{b} = \mathrm{grad} F$. Другими словами, векторный потенциал определяется с точностью до градиентного слагаемого: $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathrm{grad} F$.

Вследствие этого условия система уравнений упрощается и примет вид (мы заменяем индексные обозначения прямоугольных координат обычными)

$$\partial_z b^2 = -a^1, \quad \partial_z b^1 = a^2, \quad \partial_x b^2 - \partial_y b^1 = a^3.$$

Интегрируя первые два уравнения, получим

$$b^1 = \int a^2 dz + c^1(x,y), \quad b^2 = -\int a^1 dz + c^2(x,y)\,,$$

где $c^1(x,y)$, $c^2(x,y)$ — произвольные функции. Подставим это в третье уравнение

$$-\partial_x \int a^1 dz - \partial_y \int a^2 dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3.$$

Так как интегрирование ведется по переменной z, то дифференцирование по x и y можно провести под знаком интеграла

$$-\int (\partial_x a^1 + \partial_y a^2) dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3.$$

Так как поле $\mathbf{a}$ соленоидально, то это можно записать так $\int \partial_z a^3 dz + \partial_x c^2 - \partial_y c^1 = a^3$. Проинтегрировав первое слагаемое, получим

$$\int \partial_z a^3 dz = a^3 + \varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ — произвольная гладкая функция. В итоге

$$\partial_y c^1 - \partial_x c^2 = \varphi(x,y).$$

Таким образом, мы свели дело к одному дифференциальному уравнению с двумя переменными. Оно всегда имеет решение. Достаточно, например, взять $c^2(y)$ и тогда $c^1 = \int \varphi(x,y) dy + \psi(x)$. Тем самым существование поля $\mathbf{b}$ доказано. $\square$

Задача. Докажите, что в области, не содержащей особых точек, потенциальное векторное поле не имеет замкнутых траекторий.

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Лекция 27. АЛГЕБРА ВНЕШНИХ ФОРМ.

27.1. Симметрирование и альтернирование тензоров.

Прежде, чем идти дальше, познакомимся еще с двумя тензорными операциями. Мы рассматриваем n-мерное векторное пространство $\mathbb{V}$ и на нем ковариантные тензоры $F = F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_q)$.

1) *Симметрирование.* Пусть F — ковариантный тензор валентности $q \geq 2$ и S_q — группа подстановок из q элементов. В ней $q\,!$ подстановок. Действие подстановки $s \in S_q$ на тензор определим формулой

$$(sF)(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q) = F(\mathbf{a}_{s(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{s(q)}).$$

Мы получили тензор с другим порядком аргументов. Операция симметрирования тензора определяется следующим образом

$$\mathrm{Sym(F)} = \frac{1}{\mathrm{q}\,!} \sum_{\mathrm{s} \in \mathrm{S_q}} \mathrm{sF}.$$

При координатной записи симметрирование обозначается круглыми скобками

$$F_{(i_1 \ldots i_q)} = \frac{1}{q\,!} \sum_{s \in S_q} F_{i_{s(1)} \ldots i_{s(q)}}.$$

В результате симметрирования мы получаем *симметричный тензор*, т. е. тензор, который не изменяется при любой перестановке своих аргументов (индексов).

Пример. Пусть F ковариантный тензор второй валентности. Группа S_2 содержит лишь две подстановки — тождественную и транспозицию. В этом случае

$$\mathrm{Sym(F)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathrm{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathrm{F}(\mathbf{b}, \mathbf{a}))$$

или в координатах

$$F_{(ij)} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}).$$

В результате мы получаем симметричный тензор.

2) *Альтернирование.* Пусть F — ковариантный тензор валентности $2 \leq q \leq m$. Операция альтернирования определяется формулой

$$\mathrm{Alt(F)} = \frac{1}{\mathrm{q}\,!} \sum_{\mathrm{s} \in \mathrm{S_q}} \mathrm{sgn(s)sF},$$

где $\mathrm{sgn}(s) = \pm 1$ — знак подстановки s в зависимости от ее четности или нечетности. При координатной записи альтернирование обозначается квадратными скобками

$$F_{[i_1 \ldots i_q]} = \frac{1}{q\,!} \sum_{s \in S_q} \mathrm{sgn}(s) F_{i_{s(1)} \ldots i_{s(q)}}.$$

В результате мы получаем *кососимметричный* тензор, т. е. тензор, который изменяет свой знак при транспозиции любой пары аргументов (индексов). Полезно заметить, что $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$, т. е. оператор альтернирования является идемпотентным. Он проектирует пространство T_q^0 ковариантных тензоров на подпространство Λ_q кососимметричных тензоров. Вследствие этого, если тензор $F_{i_1 \ldots i_q}$ кососимметричен, то альтернирование его не изменяет: $F_{[i_1 \ldots i_q]} = F_{i_1 \ldots i_q}$.

Аналогично операции симметрирования и альтернирования применяются к контравариантным тензорам.

Пример. Пусть F ковариантный тензор второй валентности. В этом случае

$$\mathrm{Alt(F)}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathrm{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) - \mathrm{F}(\mathbf{b},\mathbf{a}))$$

или в координатах

$$F_{[}ij] = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji})\,.$$

Симметрирование и альтернирование могут применяться и к произвольному тензору по части однотипных аргументов (индексов) — ковариантных или контравариантных. При этом индексы, не участвующие в этих операциях, отделяются вертикальными чертами. Например,

$$F^s_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(F^s_{ijk} + F^s_{kji})\,.$$

Задача. Запишите результат симметрирования и альтернирования тензора $F(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ третьей валентности.

27.2. Косое произведение и внешние формы.

В этом разделе мы подробнее познакомимся с кососимметричными тензорами. Простейшими из них являются так называемые косые произведения. Пусть α и β — две линейные формы. Образуем их тензорное произведение $\alpha\otimes\beta$ и затем выполним удвоенное альтернирование. В результате получим *косое произведение* линейных форм

$$\omega = \alpha\wedge\beta = 2\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\,.$$

Ее значение на аргументах равно

$$\alpha\wedge\beta\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a})\beta(\mathbf{b}) - \alpha(\mathbf{b})\beta(\mathbf{a})\,. \tag{1}$$

Выбирая в качестве аргументов базисные векторы $\mathbf{a}=\mathbf{e}_i, \mathbf{b}=\mathbf{e}_j$, найдем компоненты этой 2-формы

$$\omega_{ij} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}\,.$$

Вследствие косой симметрии этих компонент здесь достаточно считать, что $i<j$. Это C^2_m миноров 2-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{pmatrix}\,.$$

Понятие косого произведения можно определить и для q линейных форм $\alpha^1,\dots,\alpha^q$. Для этого надо взять их тензорное произведение, проальтернировать и умножить на $q\,!$. Мы получим кососимметричный тензор, значение которого на аргументах равно

$$\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^q(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q) = q\,!\,\mathrm{Alt}(\alpha^1(\mathbf{a}_1)\cdots\alpha^{\mathrm{q}}(\mathbf{a}_{\mathrm{q}}))\,. \tag{2}$$

Положив здесь $\mathbf{a}_1=\mathbf{e}_{i_1},\dots\mathbf{a}_q=\mathbf{e}_{i_q}$, $i_1<\dots<i_q$, получим существенные компоненты косого произведения

$$\omega_{i_1\dots i_q} = q\,!\,\alpha^1_{[i_1}\dots\alpha^q_{i_q]} = \begin{vmatrix} \alpha^1_{i_1} & \dots & \alpha^1_{iq} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^q_{i_1} & \dots & \alpha^q_{i_q} \end{vmatrix}\,.$$

Это C^q_m миноров q-го порядка $(q\times m)$-матрицы, составленной из координат данных линейных форм.

Теорема 1. *Всякий кососимметричный тензор валентности q может быть разложен в линейную комбинацию косых произведений q базисных линейных форм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим координатное выражение этого тензора

$$\omega(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q)=\omega_{i_1\dots i_q}a_1^{i_1}\dots a_q^{i_q}\,.$$

Напомним, что координаты всякого вектора есть значения сопряженного базиса на этом векторе: $a^i=\mathbf{e}^i(\mathbf{a})$. Поэтому это выражение можно записать в виде

$$\omega(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q)=\omega_{i_1\dots i_q}\mathbf{e}^{i_1}(\mathbf{a}_1)\dots\mathbf{e}^{i_q}(\mathbf{a}_q)\,.$$

Учитывая кососимметричность тензора и сделанное выше замечание по поводу идемпотентности оператора альтернирования, эту формулу можно записать также в виде

$$\omega(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q)=\omega_{[i_1\dots i_q]}\mathbf{e}^{i_1}(\mathbf{a}_1)\dots\mathbf{e}^{i_q}(\mathbf{a}_q)=\omega_{i_1\dots i_q}\mathbf{e}^{[i_1}(\mathbf{a}_1)\dots\mathbf{e}^{i_q]}(\mathbf{a}_q)\,,$$

откуда в силу формулы (2) получим

$$\omega=\frac{1}{q\,!}\,\omega_{i_1\dots i_q}\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i_q}. \tag{3}$$

Таким образом, указанное разложение найдено. $\square$

Эту формулу записывают также в несколько другом виде, производя суммирование только по возрастающим последовательностям индексов $i_1<i_2<\dots<i_q$ (суммирование по сочетаниям). Обозначая такое суммирование символом $\sum\limits_*$ и учитывая подобные члены, получим

$$\omega=\sum_*\omega_{i_1\dots i_q}\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i_q}. \tag{4}$$

Число слагаемых в этой сумме равно C_m^q.

Теорема 2. *Косые произведения $\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{e}^{i_q}$, $\quad i_1<i_2<\dots<i_q$ образуют базис в пространстве Λ_q кососимметричных q-тензоров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся для простоты случаем $q=2$. Тогда для всякого кососимметричного тензора второй валентности в силу (4) имеем $\omega=\sum_*\omega_{ij}\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j$. Поэтому достаточно доказать, что косые произведения $\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j$, $i<j$ линейно независимы. Предположим, что $\sum_*\lambda_{ij}\mathbf{e}^i\wedge\mathbf{e}^j=0$, т. е. для любой пары векторов $\sum_*\lambda_{ij}(\mathbf{e}^i(\mathbf{a})\mathbf{e}^j(\mathbf{b})-\mathbf{e}^i(\mathbf{b})\mathbf{e}^j(\mathbf{a}))=0$. Выбирая здесь $\mathbf{a}=\mathbf{e}_k$, $\mathbf{b}=\mathbf{e}_s$, получим $\sum_*\lambda_{ij}(\delta_k^i\delta_s^j-\delta_s^i\delta_k^j)=\lambda_{ks}-\lambda_{sk}=2\lambda_{ks}=0$. $\square$

Кососимметричный тензор, записанный в виде (3), называют *внешней формой степени q*.

Посмотрим, как преобразуется базис $\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i_q}$ пространства Λ_q, если изменяется базис пространства $\mathbb{V}$ $\mathbf{e}_{i'}=A_{i'}^i\mathbf{e}_i$ и автоматически сопряженный ему кобазис $\mathbf{e}^{i'}=A_i^{i'}\mathbf{e}^i$. Вследствие линейности косого произведения по своим сомножителям

$$\mathbf{e}^{i'_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i'_q}=A_{i_1}^{i'_1}\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge A_{i_q}^{i'_q}\mathbf{e}^{i_q}=q!A_{i_1}^{[i'_1}\dots A_{i_q}^{i'_q]}\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i_q}\,.$$

Здесь

$$A_{i_1\dots i_q}^{i'_1\dots i'_q}=q!A_{i_1}^{[i'_1}\dots A_{i_q}^{i'_q]}=\begin{vmatrix}A_{i_1}^{i'_1} & \dots & A_{iq}^{i'_1}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{i_1}^{i'_q} & \dots & A_{i_q}^{i'_q}\end{vmatrix}\,,\quad i_1<\dots<i_q$$

есть миноры q-го порядка матрицы преобразования A. В результате получим

$$\mathbf{e}^{i'_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i'_q}=\sum_*A_{i_1\dots i_q}^{i'_1\dots i'_q}\mathbf{e}^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathbf{e}^{i_q}\,. \tag{5}$$

В частности, для внешних форм максимальной степени $q = m$

$$\mathbf{e}^{1'} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{n'} = \det A\, \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n, \quad A = (A_i^{i'}). \tag{6}$$

Аналогично рассматриваются косые произведения векторов $\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p$ и контравариантные внешние формы $\omega(\alpha^1, \dots \alpha^p)$. Для них имеет место координатная запись, аналогичная (4)

$$\omega = \sum_{*} \omega^{i_1 \dots i_q} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}.$$

Наконец, понятие косого произведения может быть определено для форм любой степени. Пусть заданы p-форма θ и q-форма ω. Перемножив их, получим тензор $\theta \otimes \omega$ валентности $p + q$, значение которого на аргументах равно

$$\theta \otimes \omega(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_p, \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_q) = \theta(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_p)\omega(\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_q).$$

Он кососимметричен как по первой, так и по второй группе аргументов, но в целом кососимметричным тензором не является. Поэтому, чтобы получить внешнюю форму, его надо проальтернировать с соответствующим множителем (см. (2)). В результате получим $(p + q)$-форму

$$\theta \wedge \omega(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_p, \mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_q) = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \mathrm{Alt}(\theta(\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_p)\omega(\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_q)). \tag{7}$$

Лекция 28. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА МНОГООБРАЗИЯХ.

28.1. Внешний дифференциал и его свойства

В дальнейшем мы будем рассматривать внешние формы на многообразии. Так как в этом случае натуральный корепер в каждой точке $x \in M$ образован линейными формами $\{dx^i\}$, то их координатная запись имеет вид

$$\omega = \sum_{*} \omega_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \tag{8}$$

Линейные операции с тензорными полями, а также умножение на функции имеют место и для внешних форм. Поэтому внешние q-формы на многообразии образуют подмодуль $\Lambda_q M$ в модуле $T^0_q M$ всех тензорных полей той же валентности. В их число целесообразно включить также скалярные поля как формы нулевой степени и линейные формы. Более того, множество всех внешних форм на многообразии относительно операции косого произведения образуют (бесконечномерную) алгебру.

Кроме алгебраических операций на множестве внешних форм можно ввести также операцию дифференцирования.

Определение. *Внешним дифференциалом называется дифференциальный оператор d, который всякой внешней q-форме ω ставит в соответствие внешнюю форму $d\omega$ степени $q+1$ и обладает следующими свойствами:*

1) *Внешний дифференциал функции dF совпадает с обычным дифференциалом;*
2) *Для внеших форм одинаковой степени* $d(\omega^1 + \omega^2) = d\omega^1 + d\omega^2$;
3) *Если ω^1 — p-форма, то* $d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^p \omega^1 \wedge d\omega^2$;
4) $d(d\omega) = 0$.

Пусть, в частности, $\omega^1 = F(x)$ — функция ($p = 0$). Тогда из первого и третьего свойств получим

$$d(F\omega) = dF \wedge \omega + F d\omega. \tag{9}$$

Выбрав на многообразии некоторую координатную окрестность, запишем этот оператор в координатах. Рассмотрим сначала скалярное поле $F(x)$. Тогда $dF = \partial_i F dx^i$. Это линейная дифференциальная форма — градиент функции F. Пусть далее $\omega = \omega_i dx^i$ — линейная форма. В соответствии с формулой (9) $d\omega = d\omega_i \wedge dx^i + \omega_i d(dx^i)$, а так как $d(dx^i) = 0$, то

$$d\omega = d\omega_i \wedge dx^i. \tag{10}$$

Это 2-форма — сумма косых произведений двух линейных форм.

Рассмотрим теперь внешнюю форму произвольной степени. Из (8), учитывая, что $d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}) = 0$, получим

$$d\omega = \sum_{*} d\omega_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}. \tag{11}$$

Это внешняя форма $(q+1)$-й степени.

Примеры.

1) Рассмотрим линейную форму на плоскости $\mathbb{R}^2$ $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Тогда

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (\partial_x P dx + \partial_y P dy) \wedge dx + (\partial_x Q dx + \partial_y Q dy) \wedge dy.$$

Учитывая, что $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$ и $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, получим

$$d\omega = (\partial_x Q - \partial_y P) dx \wedge dy.$$

2) Пусть задана 2-форма $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^3$. Вычисляя ее внешний дифференциал, получим

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R) dx \wedge dy \wedge dz,$$

т. е. форму третьей степени.

28.2. Интегрирование дифференциальных форм.

Пусть на компактном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей задана непрерывная функция $f(x) = f(x^1, \ldots, x^m)$. Тогда, как известно, определен m-кратный интеграл $I = \int\limits_D f(x) dx^1 \cdots dx^m$. Его знак зависит от выбора ориентации пространства и при замене ориентации знак интеграла изменяется на противоположный.

Перейдем от одной системы координат к другой, т. е. сделаем замену переменных $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^m)$. Тогда, как известно, подинтегральное выражение изменится следующим образом

$$\int\limits_D f(x) dx^1 \cdots dx^m = \int\limits_{D'} f(x(y)) |J(y)| \, dy^1 \cdots dy^m,$$

где $J(y) = \det(\frac{\partial x^i}{\partial y^j})$ — якобиан преобразования, а D' — область определения новых координат. Эта формула показывает, что интегрируется на самом деле не функция, а некоторый геометрический объект, значения которого зависят от выбора системы координат. По сути дела, интегрируется внешняя m-форма

$$I = \int\limits_D f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \quad \text{где} \quad f(x) = \omega_{1\ldots m}(x).$$

В самом деле, из тензорного закона преобразования следует, что

$$\omega_{1\ldots m}(x) = J_1^{i'_1} \cdots J_m^{i'_m} \omega_{i'_1 \ldots i'_m}(x') = J^{-1} \omega_{1'\ldots m'}(x').$$

Если, к тому же, учесть, что при преобразовании координат (см. лекцию 27, формулу (6))

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m = J dx'^1 \wedge \cdots \wedge dx'^m,$$

то мы видим, что подинтегральное выражение остается инвариантным.

Эти соображения подсказывают, как определить интеграл на гладком многообразии. Пусть M — m-мерное гладкое ориентированное многообразие, на котором задана внешняя форма ω степени m, определенная на компактном носителе $K \subset M$. Рассмотрим на многообразии счетный или конечный атлас, покрывающий K. Рассмотрим далее разбиение этого носителя на попарно не пересекающиеся измеримые множества $\{U_\alpha\}$, каждое из которых, во-первых, содержится в некоторой карте атласа с координатами (x^i_α) и, во-вторых, пересекается с конечным числом других карт. Эта конструкция, которую можно вполне строго обосновать, называется *разбиением единицы, подчиненным заданному покрытию*. На каждом U_α форма ω имеет вид $\omega_\alpha = f_\alpha dx^1_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^m_\alpha$, где $f_\alpha = \omega_{1\ldots m}(x_\alpha)$ и имеет смысл рассмотреть интеграл $I_\alpha = \int\limits_{U_\alpha} \omega_\alpha$. Теперь положим

$$\int\limits_M \omega = \sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \omega_\alpha \,. \tag{12}$$

В каждой точке это конечная сумма. Оказывается, что этот интеграл не зависит ни от выбора исходного атласа карт, ни от выбора разбиения.

Пример. Примером внешней m-формы в римановом пространстве является дискриминантный тензор $\varepsilon = \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, где $g = \det(g_{ij})$. Результат интегрирования этого тензора по ограниченной области Q в предположении, что она покрывается одной картой, есть объем этой области (см. лекцию 24)

$$V(Q) = \int\limits_Q \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m .$$

В общем случае применяют технику разбиения единицы.

Аналогичным образом определяется интеграл на n-мерном подмногообразии $N \subset M$. Пусть в некоторой карте оно задано уравнениями $x^i = F^i(u^1, \dots, u^n)$, $n < m$.

Теорема 3. Пусть $\omega = \sum\limits_* \omega_{i_1 \dots i_n}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ — внешняя n-форма на многообразии M и $\omega_{|N}$ — ее ограничение на подмногообразие. Тогда на этом подмногообразии индуцируется внешняя n-форма

$$\theta = g(u)\, du^1 \wedge \dots \wedge du^n, \quad \text{где} \quad g(u) = \sum_* J^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_1 \dots i_n}(x(u)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В выражение для формы ω надо подставить функции, определяющие вложение. Так как $dx^{i_1} = J^{i_1}_{a_1} du^{a_1}, \dots, dx^{i_n} = J^{i_n}_{a_n} du^{a_n}$, где $J^i_a = \frac{\partial F^i}{\partial u^a}$ — элементы якобиевой матрицы, то имеем

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = J^{i_1}_{a_1} \cdots J^{i_n}_{a_n} du^{a_1} \wedge \dots \wedge du^{a_n} .$$

Здесь суммирование по индексам $a_1, \dots, a_n$ идет независимо друг от друга. Сделаем перестановку сомножителей косых произведений, учитывая их кососимметричность, расположив их в порядке возрастания индексов. Подведя подобные члены, получим

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = n! J^{i_1}_{[1} \cdots J^{i_n}_{n]} du^1 \wedge \dots \wedge du^n = J^{i_1 \dots i_n} du^1 \wedge \dots \wedge du^n ,$$

где $J^{i_1 \dots i_n}(u)$ — миноры n-го порядка якобиевой матрицы (J^i_a), образованные строками с номерами $i_1 < \dots < i_n$. В итоге имеем $g(u) = \sum\limits_* J^{i_1 \dots i_n} \omega_{i_1 \dots i_n}$. $\square$

Лекция 29. ФОРМУЛА СТОКСА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ.

29.1. Многообразия с краем.

В дальнейшем нам понадобится понятие *многообразия с краем.* Рассмотрим типовой пример. Пусть в $\mathbb{R}^m$ задана гиперплоскость $\mathbb{R}^{m-1}$ уравнением $x^m = 0$. Точки $x = (x^1, \dots, x^{m-1}, x^m)$, для которых $x^m \geq 0$ задают полупространство $\mathbb{R}^m_+$, для которого эта гиперплоскость является краем (границей).

Определение. *Топологическое многообразие M называется гладким многообразием с краем, если существует атлас карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ с координатными гомеоморфизмами $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U)_\alpha \subset \mathbb{R}^n_+$ такой, что функции перехода $f_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ являются гладкими в $\mathbb{R}^n_+$.*

Таким образом, в любой карте координата $x^m_\alpha \geq 0$. Точки, для которых $x^m_\alpha > 0$ называются *внутренними*, а точки, для которых $x^m_\alpha = 0$ — *граничными.* Множество граничных точек ∂M называется *краем* или *границей* многообразия M. В частности, если многообразие без края, то оно содержит только внутренние точки.

Следующие два утверждения мы примем без доказательства.

Теорема 4. *Край ∂M есть гладкое подмногообразие размерности $m-1$.*

Поясним лишь, что структура гладкого многообразия на ∂M определяется индуцированным атласом, образованным картами $(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)$, где $\bar{U}_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, а отображения $\bar{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha\big|_{\partial M}$ суть ограничения гомеоморфизмов φ_α на край.

Теорема 5. *Если многообразие с краем ориентируемо, то край ∂M является ориентируемым многообразием.*

При этом ориентация на ∂M, определяемая индуцированным атласом, называется *согласованной* с ориентацией многообразия M.

Примеры.

1) Простейшим примером многообразия с краем является уже упомянутое выше полупространство $\mathbb{R}^m_+$. Оно покрывается одной картой с координатами $(x^1, \dots, x^m)$, $x^m \geq 0$. Ориентацию этого пространства можно задать m-формой $\omega = \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^m$. Базис пространства $\{\mathbf{e}_i\}$ назовем *правым*, если значение m-формы на этом базисе $\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) > 0$ и *левым*, если это значение отрицательно. Так как при преобразовании базиса $\mathbf{e}^{1'} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{m'} = \det A\, \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^m$, то при $\det A > 0$ оно не изменяет ориентацию пространства. Выберем правую ориентацию и пусть $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}\}$ — базис границы $\mathbb{R}^{m-1}$. Дополним его до базиса пространства вектором нормали $\mathbf{n}$, направленным в полупространство $\mathbb{R}^m_+$. Тогда ориентация границы будет согласована с ориентацией полупространства, если $\omega(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{n}) > 0$.

2) Рассмотрим круг $B^2 \subset \mathbb{E}^2$, его граница — окружность S^1. Ориентируем круг, выбрав правый ортонормированный репер $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ в его центре. В точке окружности репер задается одним вектором $\mathbf{e}$, направленным по касательной. Если мы направим вектор $\mathbf{e}$ против часовой стрелки, а нормальный вектор $\mathbf{n}$ внутрь окружности, то получим ее ориентацию, согласованную с ориентацией круга.

29.2. Формула Стокса.

Теперь мы приведем формулу, обобщающую многие интегральные формулы математического анализа.

Теорема 6. (Стокса) *Пусть M — m-мерное ориентированное многообразий с краем ∂M, ориентация которого согласована с ориентацией многообразия, ω — внешняя дифференциальная форма степени $n-1$ с компактным носителем. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = (-1)^m \int\limits_{\partial M} \omega. \tag{13}$$

Н а б р о с о к д о к а з а т е л ь с т в а. Во-первых, имея ввиду формулу (5) лекции 28, теорему достаточно доказать лишь в случае, когда компактный носитель формы принадлежит одной карте (U, φ). Тогда в координатном представлении получим форму в $\mathbb{R}^m_+$ с краем $\mathbb{R}^{m-1}$. Во-вторых, так как ω есть линейная комбинация косых произведений, то в силу аддитивности интеграла достаточно рассмотреть случай, когда эта форма имеет одночленный вид

$$\omega = F(x^1, \ldots, x^m) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Тогда $d\omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial F}{\partial x^k} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ и далее следует рассмотреть два случая: $k < m$ и $k = m$. В первом случае, поскольку $dx^m = 0$, ограничение формы ω на край $\mathbb{R}^{m-1}$ равно нулю. Поэтому имеем $\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega = 0$. После несложных вычислений тот же результат получается и слева: $\int\limits_{\mathbb{R}^+} d\omega = 0$. В случае, когда $k = m$, форма имеет вид $\omega = F(x^1, \ldots, x^m) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}$. Тогда интеграл по границе равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} F(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}.$$

С другой стороны, дифференцируя форму ω, получим

$$d\omega = (-1)^{m-1} \frac{\partial F(x)}{\partial x^m}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} \wedge dx^m.$$

Тогда, выделяя интегрирование по переменной m, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+} d\omega = (-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} \int_0^\infty \frac{\partial F(x)}{\partial x^m} dx^m =$$

$$(-1)^{m-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} F(x)\big|_{x^m=0}^{x^m=\infty} = (-1)^m \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} F(x^1, \ldots, x^{m-1}, 0)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1},$$

что доказывает теорему.

29.3. Следствия формулы Стокса.

I. *Формула Грина.*

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ область K, ограниченную гладкой замкнутой кривой $\Gamma : x = x(t), y = y(t)$ без самопересечений. Ориентацию границы согласуем с правой ориентацией плоскости, считая, что при возрастании параметра t обход контура совершается против часовой стрелки, в то время как нормаль направлена внутрь области. Пусть $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ — линейная форма в $\mathbb{R}^2$. Интеграл этой формы вдоль границы равен

$$\int_\Gamma \omega = \oint_\Gamma \Big(P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t) \frac{dy}{dt} \Big)\, dt.$$

С другой стороны, согласно формуле Стокса, он равен

$$\int\limits_K d\omega = \int\limits_K dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \int\limits_K \Big(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy.$$

Таким образом мы получили формулу Грина

$$\oint_\Gamma (Pdx + Qdy) = \int\limits_K \Big(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy. \tag{14}$$

II. *Классическая формула Стокса.*

Рассмотрим линейную форму $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим 2-мерную поверхность $M : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ и на ней компактную область K, ограниченную гладкой замкнутой кривой Γ без самопересечений. Тогда вдоль кривой

$$\oint_\Gamma \omega = \oint_\Gamma (P(x,y,z)\frac{dx}{dt} + Q(x,y,z)\frac{dy}{dt} + R(x,y,z)\frac{dz}{dt})dt.$$

Внешний дифференциал формы ω равен

$$d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy.$$

Таким образом, общая формула Стокса сводится к

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint\limits_K (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy, \tag{15}$$

где первый интеграл вычисляется вдоль кривой Γ, а второй вдоль поверхности.

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ эту формулу можно записать в другом виде. В прямоугольных координатах коэффициенты формы ω можно отождествить с компонентами векторного поля $\mathbf{a}(P,Q,R)$, а коэффициенты внешнего дифференциала с компонентами ротации этого поля (лекция 24). Тогда формула Стокса принимает вид

$$\oint_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_K (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{m})d\sigma,$$

где интеграл слева называется *циркуляцией* векторного поля. Эта формула имеет следующую гидродинамическую интерпретацию: *циркуляция векторного поля по контуру, ограничивающему область ориентированной поверхности, равна потоку ротации поля через эту область.*

Формула Грина является частным случаем этой формулы. Здесь векторное поле имеет компоненты $\mathbf{a}(P,Q)$, его ротация одну компоненту $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, а вектор нормали равен $\mathbf{m}(0,0,1)$.

III. *Формула Гаусса-Остроградского.*

Пусть Γ — замкнутая поверхность в $\mathbb{R}^3$, ограничивающая область K и

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

— внешняя форма второй степени. Тогда

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dx \wedge dy \wedge dz.$$

В итоге формула Стокса сводится к формуле Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{\Gamma} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = -\int\limits_{K} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dx \wedge dy \wedge dz. \qquad (16)$$

Следует иметь ввиду, что в классической формуле Гаусса-Остроградского ориентация области K противоположная: она задается правым репером касательной плоскости и вектором нормали, направленным во внешнюю область. При такой ориентации знак минус в формуле (16) следует заменить на плюс.

В 3-мерном евклидовом пространстве в прямоугольных координатах эта формула может быть записана в виде

$$\iint_{\Gamma} (\mathbf{a}, \mathbf{m}) d\sigma = \iiint_{K} \mathrm{Div}\mathbf{a}\, dV$$

и имеет простую гидродинамическую интерпретацию: *поток векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции поля по области, ограниченной этой поверхностью.*

Пример. Подсчитаем поток векторного поля $\mathbf{r} = (x, y, z)$ радиусов-векторов через полную поверхность кругового цилиндра радиуса R и высоты h. Согласно формуле Гаусса-Остроградского, этот поток равен интегральной дивергенции этого поля по области, ограниченной цилиндром. Но дивергенция заданного поля равна $\mathbf{r} = 3$. Получим $Q = 3\iiint_K dV = 3\pi R^2 h$, ибо объем цилиндра $\pi R^2 h$.

Лекция 30. Вариационные методы в геометрии.

30.1. Простейшая вариационная задача

Напомним постановку вариационной задачи и метод ее решения. Рассмотрим множество $\mathfrak{F}(U)$ гладких функций $f(x)$, определенных в области $U \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей ∂U. Заметим, что это бесконечномерное линейное пространство. Предположим, что на нем определена некоторая топология, которая обычно задается с помощью некоторой нормы.

Определение. *Функционалом*, заданным в пространстве $\mathfrak{F}(U)$ называется непрерывное отображение $J : \mathfrak{F}(U) \to \mathbb{R}$.
Таким образом, всякой гладкой функции, определенной в области U ставится в соответствие число. Это обобщает понятие функции. Здесь точками области определения являются функции $f(x)$. По аналогии с задачей нахождения стационарных точек обычных функций ставится задача нахождения стационарных точек заданного функционала — точек пространства $\mathfrak{F}(U)$, в которых он достигает экстремальных значений. Что это означает? Рассмотрим *возмущающую* функцию $h(x) \in \mathfrak{F}(U)$, которая на границе равна нулю: $h(\partial U) = 0$. Сместимся в точку $f + \varepsilon h$ и рассмотрим *вариацию* функционала $\delta J = J(f + \varepsilon h) - J(f)$. Аналогом производной является предел (если, конечно, он существует)

$$\frac{\delta J}{\partial h} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(J(f + \varepsilon h) - J(f)),$$

называемый *вариационной прозводной*.

Определение. *Функция $f_0(t)$ называется стационарной для функционала $J(f)$, если его вариационная производная в точке $f_0(t)$ для любого возмущения равна нулю.*

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с так называемой *простейшей вариационной задачей*. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$ вещественной прямой, пространство $\mathfrak{F}(I)$ гладких функций $\gamma(t) = (x^i(t))$, $i = 1, \ldots, m$ на этом отрезке и функционал

$$J(\gamma) = \int_0^1 L(x^i(t), q'^i(t), t)dt, \quad q'^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Здесь L — заданная функция от указанных $2m+1$ переменных, называемая *лагранжианом*. Ищутся функции $x^i(t)$, принимающие на концах отрезка I заданные значения $x^i(0) = a^i$, $x^i(1) = b^i$ и дающие экстремальное значение этому интегралу. Другими словами, в $\mathbb{R}^m$ с заданным лагранжианом $L(x, q')$ среди всех гладких путей $\{\gamma\}$, соединяющих две заданные точки $A(a^i)$ и $B(b^i)$ ищется путь (параметризованная кривая), дающий интегралу экстремальное значение. Метод решения этой задачи определяется следующей теоремой.

Теорема 7. Для того, чтобы функции $x^i(t)$ определяли экстремум интеграла $J(\gamma)$, необходимо, чтобы они удовлетворяли уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{17}$$

Это система m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $x^i(t)$. Более того, если мы ищем не путь, а кривую как геометрический объект, то для того, чтобы значение интеграла не зависело от выбора параметризации, необходимо и достаточно, чтобы лагранжиан был функцией, однородной первой степени по производным: $L(x^i, \lambda q'^i) = \lambda L(x^i, q'^i)$.

30.2. Экстремальное свойство геодезических

Проиллюстрируем сказанное выше на примере. Рассмотрим риманово многообразие (M, g). Как мы видели в лекции 22, геодезические пути играют ту же роль, что и прямые в евклидовом пространстве — вдоль них единичный касательный вектор параллелен. Но, как известно, прямые евклидова пространства обладают еще одним важным свойством: их отрезки являются кратчайшими среди всех путей, соединяющих две данные точки. Покажем, что геодезические пути риманова пространства с некоторой оговоркой также обладают этим свойством.

Теорема 8. Геодезические риманова пространства являются линиями минимальной длины среди всех путей, соединяющих две достаточно близкие точки $A, B \in U$ односвязной области.

Доказательство. Поскольку речь идет о длине пути, в качестве функционала возьмем интеграл с лагранжианом (лекция 24)

$$L = \sqrt{g_{ij}(x^s(t))q'^i(t)q'^j(t)}, \quad q'^i = \frac{dx^i}{dt}$$

и запишем уравнения Эйлера. Обратим внимание на то, что лагранжиан не зависит явно от параметра t. Вычислим производные

$$\frac{\partial L}{\partial q'^i} = \frac{1}{2L}\frac{\partial L^2}{\partial q'^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2L}\frac{\partial L^2}{\partial x^i}.$$

Для упрощения вычислений выберем на искомом пути натуральный параметр, для которого $L = 1$. Обозначая, как и раньше, производную по этому параметру точкой, получим уравнения Эйлера в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L^2}{\partial x^i} = 0.$$

Это значит, что при таком выборе параметра экстремали с лагранжианами L и L^2 совпадают. Далее имеем

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^{\,i}} = 2g_{ij}\dot{x}^{\,j}, \quad \frac{\partial L^2}{\partial x^i} = \partial_i g_{kj}\dot{x}^{\,k}\dot{x}^{\,j}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^{\,i}}\right) = 2(\partial_k g_{ij}\dot{x}^{\,k}\dot{x}^{\,j} + g_{ij}\dot{x}^{\,j})$$

и уравнения Эйлера принимают вид

$$g_{ij}\ddot{x}^{\,j} + (\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\partial_i g_{kj})\dot{x}^{\,k}\dot{x}^{\,j} = 0.$$

Так как матрица метрического тензора (g_{ij}) невырожденная, то эти уравнения можно разрешить относительно вторых производных. Для этого свернем это уравнение с компонентами обратного тензора g^{ki}. Получим

$$\ddot{x}^{\,k} + g^{ks}(\partial_i g_{js} - \frac{1}{2}\partial_s g_{ij})\dot{x}^{\,i}\dot{x}^{\,j} = 0.$$

Так как член $\partial_i g_{js}$ входит в это выражение симметрично по индексам ij, то его можно представить в виде $\frac{1}{2}(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is})$. В итоге получим

$$\ddot{x}^{\,k} + \Gamma^k_{ij}(x)\dot{x}^{\,i}\dot{x}^{\,j} = 0. \tag{18}$$

Это и есть дифференциальные уравнения геодезических путей риманова многообразия с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, отнесенные к каноническому параметру.

Замечание. Близость точек A, B области, указанная в условии теоремы, существенна. В противном случае, как показывает пример сферы, дуга геодезической,

соединяющей точки, может быть не только наименьшей, но и наибольшей, либо решение задачи может быть не единственным, если точки A, B сферы диаметрально противоположны.

30.3. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро.

Рассмотрим движение по инерции материальной точки единичной массы по поверхности вращения. Уравнение этой поверхности запишем в виде $\mathbf{r}(\varphi, z) = \rho(z)(\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k})$. Здесь φ – угол вращения, $\rho(z) > 0$ – радиус параллели на высоте z. Система криволинейных координат $u^1 = \varphi, u^2 = z$ на поверхности ортогональная, матрица метрического тензора имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho_z^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому кинетическая энергия точки равна $T = \frac{1}{2}q'^2 = \frac{1}{2}[\rho^2\dot{\varphi}^2 + (\rho_z^2 + 1)\dot{z}^2]$. Найдем уравнения геодезических. При отсутствии потенциальных сил уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^i}\Big) - \frac{\partial T}{\partial u^i} = 0.$$

Запишем эти уравнения подробнее. Иммеем

$$\frac{\partial T}{\partial u^i} = (0, \rho\dot{\varphi}^2 + \rho_{zz}\dot{z}^2), \quad \Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^i}\Big) = (\rho^2\dot{\varphi}, (\rho_z^2+1)\dot{z}), \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^i}\Big) = (\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \frac{d}{dt}((\rho_z^2+1)\dot{z}))\,.$$

Следовательно, уравнения движения точки имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0, \quad \frac{d}{dt}((\rho_z^2 + 1)\dot{z}) - \rho\dot{\varphi}^2 - \rho_{zz}\dot{z}^2 = 0\,.$$

Первое из них дает первый интеграл $\rho^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$. Выясним его геометрический смысл. Обозначим через α угол между вектором скорости $\dot{\mathbf{r}}$ движущейся точки и касательным вектором к меридиану $\mathbf{r}_z$. Положим $v = |\dot{\mathbf{r}}|$. Тогда в силу ортогональности координатной сети

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_\varphi)}{|\dot{\mathbf{r}}||\mathbf{r}_\varphi|} = \frac{g_{11}\dot{\varphi}}{v\sqrt{g_{11}}} = \frac{\rho\dot{\varphi}}{v}\,,$$

откуда $\rho\dot{\varphi} = v\sin\alpha$. Так как $\rho^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$, то $\rho v\sin\alpha = \mathrm{const}$, а поскольку $T = \frac{1}{2}v^2 = \mathrm{const}$ является интегралом консервативной системы, то скорость движения точки $v = \mathrm{const}$ и, следовательно, мы приходим к выводу

Теорема Клеро. *При движении точки по поверхности вращения произведение ее расстояния до оси вращения на синус угла между касательной и меридианом есть величина постоянная*

$$\rho\sin\alpha = \mathrm{const}.$$

Этот результат дает возможность дать качественное поведение геодезических путей на поверхностях вращения. Так как $|\sin\alpha| \le 1$, то $\rho \ge \rho_0\sin\alpha_0$. При этом наклон орбиты к меридиану увеличивается при уменьшении радиуса ρ и достигнув наименьшего значения $\rho = \rho_0\sin\alpha_0$, орбита возвращается в область с большим значением ρ. Разумеется, чтобы получить более точное поведение геодезических, надо проинтегрировать еще второе уравнение – это ОДУ второго порядка.

Пример. На прямом круговом цилиндре $\rho = \mathrm{const}$ и мы получаем $\sin\alpha = \mathrm{const}$. Это винтовые линии.

Лекция 31. Геометрические методы в аналитической механике.

31.1. Вариационные принципы механики. Уравнения Лагранжа.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ систему N материальных точек с радиусами-векторами $\mathbf{r}_\sigma$ и массами m_σ, $\sigma = 1, \dots, N$. Пусть на эти точки действуют силы $\mathbf{F}_\sigma(\mathbf{r}_\sigma)$, под действием которых точки системы движутся по кривым $\mathbf{r}_\sigma = \mathbf{r}_\sigma(t)$, параметризованным временем. Если бы движение системы было свободным, то траектории точек мы нашли бы, интегрируя уравнения Ньютона $m_\sigma \mathbf{r}''_\sigma = \mathbf{F}_\sigma$. Однако, как правило, на положение точек наложены *связи*, которые аналитически выражаются независимыми уравнениями

$$f^s(r_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad s = 1, \dots, k < N.$$

Эти уравнения с геометрической точки зрения представляют собой неявные уравнения поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{3N} = \mathbb{E}^3 \times \dots \times \mathbb{E}^3$ (N сомножителей) с декартовыми координатами $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma)$, положение которой меняется со временем. Следовательно, движение системы под действием заданных сил можно представить как движение точки $\mathbf{r} = (r_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ в подвижном многообразии $M(t)$ размерности $m = 3N - k$. Это многообразие называется *лагранжевым*, а его размерность — *числом степеней свободы* системы. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что связи не зависят от времени являются *идеальными.*

Теперь нужно подправить уравнения Ньютона. Введем дополнительные силы $\mathbf{R}_\sigma$, называемые *силами реакции связей* и положим $m_\sigma \mathbf{r}''_\sigma = \mathbf{F}_\sigma + \mathbf{R}_\sigma$. Как следует из равенств $\mathbf{r}_\sigma(t+h) - \mathbf{r}_\sigma(t) = \delta\mathbf{r}_\sigma(t,h) + \mathbf{0}_\sigma(t,h)$, возможные перемещения системы, совместные с наложенными связями, в главной своей части характеризуются векторами $\delta\mathbf{r}_\sigma(t,h) = (\frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial h})_{h=0} h$, линейно зависящими от h. Они называются *виртуальными перемещениями.* Следовательно, δ — это аналог дифференциала. Что касается остальных членов, то они содержат величины второго порядка малости по h. Теперь мы можем сформулировать основной принцип классической механики. Предварительно напомним, что работа силы $\mathbf{F}$ на отрезке $\overrightarrow{AB}$ выражается скалярным произведением $W = (\mathbf{F}, \overrightarrow{AB})$.

Принцип Даламбера. *Сумма работ сил реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю:* $\sum\limits_{\sigma=1}^{N} (\mathbf{R}_\sigma, \delta\mathbf{r}_\sigma) = 0$ т. е.

$$\sum_{\sigma=1}^{N} (m_\sigma \mathbf{r}''_\sigma - \mathbf{F}_\sigma, \delta\mathbf{r}_\sigma) = 0.$$

Введем в области $U \subset M$ многообразия M *лагранжевы координаты* (q^i), $i = 1, \dots, m$, так что в области U оно имеет параметризацию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^m)$. Тогда движение механической системы описывается путем $q^i = q^i(t)$ в этом многообразии, а из принципа Даламбера после некоторых выкладок следует, что уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial q'^i}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = F_i, \quad (i = 1, \dots, m), \tag{19}$$

где кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2} m_\sigma (\mathbf{r}'_\sigma)^2$ есть сумма кинетических энергий ее точек. Так как $\mathbf{r}'_\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}$ и $T > 0$, то в лагранжевых координатах она принимает вид положительно определенной квадратичной формы относительно *обобщенных*

скоростей $q'^i = \frac{dq^i}{dt}$

$$T(q,q') = \frac{1}{2}a_{ij}(q)q'^i q'^j \tag{20}$$

и поэтому $\det(a_{ij}) > 0$, а

$$F_i = \sum_{\sigma=1}^{N}\Big(\mathbf{F}_\sigma, \frac{\partial \mathbf{r}_\sigma}{\partial q^i}\Big) = F_i(q,t)$$

— ковариантные компоненты *обобщенной силы*, которые явно зависят от времени. Уравнения (19) называются *уравнениями Лагранжа*. Это система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача состоит в том, чтобы при заданных начальных условиях $q^i(0) = a^i$, $q'^i(0) = b^i$ найти решение $q^i = q^i(t)$ уравнений (19) в многообразии M и тем самым найти движение системы.

Уравнения Лагранжа были получены им в 1788 г. Вместе с тем были заложены и основы аналитической механики. Сделаем два упрощающих предположения.

Определение. *Обобщенная сила называется потенциальной, если существует силовая функция $V(q,t)$ такая, что $F_i = -\Big(\frac{\partial V}{\partial q^i}\Big)$.*

Если ввести *функцию Лагранжа* $L(q,q',t) = T(q,q') - V(q,t)$, то

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{\partial T}{\partial q^i} + F_i, \quad \frac{\partial L}{\partial q'^i} = \frac{\partial T}{\partial q'^i}$$

и уравнения Лагранжа (19) сводятся к уравнениям Эйлера (лекция 29).

Определение. *Потенциальная механическая система называется консервативной, если ее силовая функция $V(q)$ не зависит от времени.*

Теорема 9. Пусть механическая система консервативна. Тогда полная энергия $E = T + V$ системы постоянна вдоль интегральных путей уравнений Лагранжа (т.е. является первым интегралом движения).

Это значит, что пути $q^i = q^i(t)$, изображающие движение системы, принадлежат гиперповерхностям $E = \mathrm{const}$.

Уравнения Эйлера, как мы видели, получены на основе вариационного принципа с помощью некоторого лагранжиана. Оказывается, решения уравнений Лагранжа в случае консервативной системы представляют собой геодезические пути некоторого риманова многообразия. Справедлива следующая

Теорема 10. Интегральные линии консервативной системы являются геодезическими путями риманова многообразия с метрикой

$$ds^2 = 2(E - T)a_{ij}(q)dq^i dq^j\,.$$

Как обстоит дело в общем случае, когда система не консервативна? Рассмотрим механическую систему с потенциальной обобщенной силой, лагранжиан $L(q,q')$ и функционал (лекция 29)

$$J(\gamma) = \int_0^1 L(q^i(t), q'^i(t))dt\,.$$

Гамильтон в 1835 г. вместо принципа Даламбера положил в основу аналитической механики с самого начала вариационный принцип:

Принцип Гамильтона. *Для пути γ действительного движения системы с лагранжианом $L(q,q')$ вариация функционала $\delta J = 0$.*

Как мы видели в лекции 29, в этом случае решение вариационной задачи и, следовательно, уранения движения системы удовлетворяет уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{21}$$

В этом случае интерпретация движения механической системы вдоль экстремальных путей в рамках римановой геометрии оказывается невозможной. Для этого нужно ввести более общую *финслерову* геометрию (1918 г.). Метрика в этой геометрии задается с помощью лагранжиана $ds = L(q, q')dt$. Запишем уравнения Эйлера в развернутом виде. Так как

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'^i} = \frac{\partial L}{\partial q^j}q'^j + \frac{\partial^2 L}{\partial q'^i \partial q'^j}q''^j = \frac{\partial L}{\partial q^j}q'^j + \frac{\partial^2 T}{\partial q'^i \partial q'^j}q''^j\,,$$

то, учитывая (20), получим

$$a_{ij}q''^j + \Gamma^i(q, q') = 0,$$

где Γ^i — сумма членов, не содержащих обобщенных ускорений q''^j. Но так как $\det(a_{ij}) \neq 0$, то эти уравнения можно разрешить относительно вторых производных. В результате получим уравнения Эйлера в виде

$$q''^i + \Gamma^i(q, q') = 0.$$

Стандартным приемом их можно свести к системе $2m$ обыкновенных дифференциальных уравнений на $2m$-мерном многообразии переменных (q^i, q'^j). Это значит, что движение системы можно представить с помощью экстремальных путей в многообразии размерности $2m$, состоящем из элементов "точка+скорость" с координатами (q^i, q'^j). Многообразие $T(M)$ таких элементов представляет собой дизъюнктное объединение касательных пространств $T(M) = \cup T_q M$ многообразия M и называется *касательным расслоением* многообразия M.

31.2. Гамильтонова механика и симплектическая геометрия.

Кроме уже упомянутого выше принципа Гамильтон сделал в области аналитической механики еще одно важное нововведение, приведя основные уравнения движения – уравнения Эйлера, к новому виду, используя так называемое *преобразование Лежандра*. Для этого, во-первых, вместо обобщенных скоростей q'^i введем новые переменные,

$$p_i = \frac{\partial L(q, q')}{\partial q'^i}\,, \tag{22}$$

называемые *импульсами*. Во-вторых, введем функцию

$$H = p_i q'^i - L(q, q'). \tag{23}$$

Наконец, разрешив уравнения (22) относительно скоростей и выразив их через импульсы, подставим результат в (23). В результате получим функцию

$$H = H(q^i, p_j, t), \tag{24}$$

которая называется *функцией Гамильтона*. Заменим, что условием локальной разрешимости уравнений (22) относительно переменных q'^i является отличие от нуля гессиана $\det\left(\frac{\partial^2 L(q,q')}{\partial q'^i \partial q'^j}\right) \neq 0$.

Что мы получили в итоге? Уравнения Эйлера принимают теперь вид $\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$, а дифференцируя (23) по переменным p_i, получаем $q'^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Учитывая, что в силу (23) $\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$, получаем систему $2m$ ОДУ первого порядка

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{25}$$

которые называются *каноническими уравнениями Гамильтона.*

Процедура перехода от уравнений Эйлера к уравнениям Гамильтона обратима. Если задан гамильтониан, то мы определяем обобщенные скорости $q'^i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}$, подставляем их в функцию $L = p_i q'^i - H$ и получаем лагранжиан $L = L(q, q')$.Нетрудно видеть, что в силу уравнений Гамильтона эта функция удовлетворяет уравнениям Эйлера. Это говорит о том, что уравнения Гамильтона вполне эквивалентны уравнениям Эйлера.

Рассмотрим, в частности, случай консервативной системы, когда гамильтониан не зависит явно от времени. Тогда, дифференцируя функцию $H = H(q, p)$, получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}.$$

В силу уравнений Гамильтона (25) $\frac{dH}{dt} = 0$ и, следовательно, $H = \mathrm{const}$. Этот результат придает функции H (в случае консервативной системы) физический смысл *полной энергии* и вполне аналогичен теореме 1.

Обратим теперь внимание на то, что многообразия, на которых рассматриваются уравнения Эйлера и уравнения Гамильтона, устроены принципиально различно. Так как обобшенная скорость $q' = (\frac{dq^i}{dt})$ есть векторная величина, то множество пар "точка+скорость" (q, q') образует, как уже говорилось, *касательное расслоение* над многообразием M. Это гладкое многообразин расмерности $2m$. С другой стороны, импульс $p = (p_i)$ является, как нетрудно проверить, ковекторной величиной, а множество пар "точка+импульс" $x = (q, p)$ образует *кокасательное расслоение* над многообразием M — дизъюнктное объдинение кокасательных пространств $T^*M = \cup T^*_q M$, $q \in M$. В механике оно называется *фазовым пространством* и является гладким многообразием той же размерности $2m$. Дифференциалы (dq^i, dp_j) образуют в каждой точке этого многообразия натуральный репер. Его существенной особенностью является то, что оно обладает так называемой *симплектической структурой.* Это внешняя 2-форма – косое произведение

$$\omega = dp_i \wedge dq^i \tag{26}$$

на пространстве кокасательного расслоения. Она замкнута – ее внешний дифференциал равен нулю: $d\omega = 0$. Более того, форма ω точная, поскольку сама является внешним дифференциалом линейной формы $\alpha = p_i dq^i$: $\omega = d\alpha$.

Если ввести кососимметричную невырожденную матрицу

$$(\omega_{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

и обозначить $p_i = q^{m+i}$, то 2-форму (26) можно записать в виде билинейной формы $\omega = \omega_{AB} q^A q^B$ с матрицей (27). Здесь большие индексы принимают две группы значений: $i, m + j$. Пусть (ω^{AB}) – обратная матрица, определенная равенством $\omega^{AC}\omega_{CB} = \delta^A_B$. Тогда невырожденный тензор, подобно метрическому тензору, можно

использовать для перехода от ковекторных полей на многообразии T^*M к векторным и обратно, что выражается в поднятии и опускании соответствующих индексов

$$\xi_A = \omega_{AB} X^B, \quad X^A = \omega^{AB} \xi_B.$$

Гладкие многообразия, на которых задана невырожденная замкнутая кососимметричная 2-форма ω, называются *симплектическими* и обозначаются (M, ω). С помощью ω на них может быть определено *кососкалярное произведение* $< U, V) >= \omega_{AB} U^A V^B = - < V, U >$. Это некоторые аналоги римановых многообразий, однако их свойства далеко не аналогичны римановым. Например, симплектические многообразия всегда ориентируемы и могут иметь только четную размерность. Но самое существенное отличие заключается в следующем. Как известно любая (псевдо)риманова метрика в *данной фиксированной точке* может быть приведена к каноническому виду, однако это нельзя, вообще говоря, сделать в окрестности. Этому мешает тензор кривизны. Этого можно добиться лишь в случае, когда тензор кривизны равен нулю и, следовательно, (псевдо)риманово многообразие является локально (псевдо)евклидовым (лекция 25). В противоположность этому в симплектических многообразиях имеет место замечательная

Теорема Дарбу. *Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие размерности $2m$ и $x \in (M, \omega)$. Тогда в некоторой окрестности этой точки можно выбрать такую систему координат $(q^1, \ldots, q^m, p_1, \ldots, p_m)$, в которой $\omega = \sum\limits_{i=1}^{m} dp_i \wedge dq^i$.*

Формула (26) означает, что кокасательные расслоения относятся к классу симплектических многообразий. Однако, многие из формулируемых далее результатов справедливы для любых симплектических многообразий.

Рассмотрим на многообразии T^*M функцию Гамильтона $H(q, p)$ и ее дифференциал $dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j$. Мы получили 1-форму или, что то же самое, ковекторное поле, координатами которого являются градиенты функции H: $dH = (\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_j})$. Соответствующее ему векторное поле называют *косым градиентом* функции H. Оно имеет компоненты

$$V = \mathrm{sgrad} H = \Big(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big). \tag{28}$$

и называется *гамильтоновым векторным полем* (короче г.в.полем) на фазовом пространстве. При этом функция H называется *производящей функцией* г.в.поля.

Задача.Покажите, что $(\mathrm{sgrad} F)^A = \omega^{AB} \frac{\partial F}{\partial q^B}$ — стандартная операция по поднятию индекса компонент градиента.

31.3. Скобки Пуассона.

Как показывают дифференциальные уравнения (25), которые теперь можно записать в более компактном виде: $\frac{dx}{dt} = \mathrm{sgrad} H$, движение механической системы происходит по интегральным путям г.в. поля. Таким образом, решение задач гамильтоновой механики в значительной степени сводится к изучению свойств гамильтоновых векторных полей и производящих их функций. Займемся их изучением.

Определение. *Скобкой Пуассона $\{F, G\}$ пары гладких функций на симплектическом многообразии (M, ω) называется функция, определенная равенством*

$$\{F, G\} = - < \mathrm{sgrad} F, \mathrm{sgrad} G >= -\omega^{AB} \frac{\partial F}{\partial q^A} \frac{\partial G}{\partial q^B}.$$

Если учесть, что в канонических координатах $x = (q, p)$ обратная матрица (ω^{AB}) лишь знаком отличается от исходной, то в этих координатах скобка Пуассона вычисляется по формуле

$$\{F, G\} = \sum_i \Big(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big).$$

Несколько следующих результатов имеют технический характер и мы приводим их без доказательства.

Теорема 3. *Скобка Пуассона задает структуру (бесконечномерной) алгебры Ли на множестве всех гладких функций на симплектическом многообразии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о заключается в проверке трех аксиом алгебры Ли:

1) Кососимметричность скобки: $\{F, G\} = -\{G, F\}$;

2) $\mathbb{R}$-линейность по сомножителям;

3) Тождество Якоби: $\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$.

Первые два очевидны. Провека третьего требует некоторых вычислений.

Совершенно анадогично доказывается

Теорема 4. *Гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру Ли $h \subset \mathfrak{X}(T^*M)$ в алгебре всех гладких векторных полей на пространстве кокасательного расслоения.*

Доказательство аналогично. Следующий результат уточняет эту теорему:

Теорема 5. *Для любых гладких функций на симплектическом многообразии*

$$[\mathrm{sgrad}F, \mathrm{sgrad}G] = \mathrm{sgrad}\{F, G\}.$$

Это значит, что коммутатор двух г.в.п., порожденных функциями F и G есть г.в.п., порожденное скобкой Пуассона этих функций. Другими словами, отображение $H \to \mathrm{sgrad}H$ является гооморфизмом алгебр Ли. Ядро этого гомоморфизма образовано локально постоянными функциями. Действительно, если $\mathrm{sgrad}H = 0$, то $\mathrm{grad}H = 0$ и поэтому локально $H = \mathrm{const}$. Если же многообразие связно, то значение константы одно и то же на всем многообразии и потому $\mathrm{Ker}(\mathrm{sgrad}) = \mathbb{R}$.

31.4. Гамильтоновы потоки и первые интегралы.

Обратимся теперь к потокам φ_t (лекция 21), порождаемым г.в. полями. Это решения уравнений Гамильтона (25), для получения которых надо задать начальное условие — точку (q_0, p_0). Напомним, что множество диффеморфизмов φ_t образует 1-параметрическую группу. Она называется *гамильтоновым фазовым потоком с функцией Гамильтона* H. Вообще говоря, это решение существует лишь в некотором интервале времени (a, b) и тогда г.в. поле называется *локально гамильтоновым.* Но, как и ранее, мы будем для простоты предполагать, что оно существует на всей временной оси, т.е. г.в. поле является полным.

Теорема 6.*Гамильтонов фазовый поток сохраняет симплектичекую структуру пространства T^*M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = (q, p) \in T^*M$, $x(t) = \varphi_t(x)$ – фазовый поток, порожденный векторным полем (28) и $\omega_{x(t)}$ – значение симплектической 2-формы в точке $x(t)$. Тогда в исходной точке x мы можем рассмотреть ее естественной значение ω_x, а также взаимный образ $(\varphi_t^*\omega)_x$, полученный преобразованием группы. Следовательно, 2-форма инвариантна относительно потока, если эти два значения совпадают при любом выборе точки x. Аналитически это можно выразить следующим образом. Рассмотрим разность $(\varphi_t^*\omega)_x - \omega_x$ и предел

$$Ł_V\omega = \lim \frac{1}{t}(\varphi_t^*\omega)_x - \omega_x),$$

который называется *производной Ли* 2-формы относительно потока $\varphi_t(x)$, порожденного векторным полем V. Кстати говоря, аналогично определяется понятие производной Ли и для любого тензорного поля. Из сказанного выше следует, что 2-форма локально инвариантна относительно потока, порождаемого векторным полем, тогда и только тогда, когда ее производная Ли равна нулю. В координатах производная Ли выражается следующим образом

$$Ł\omega_{AB} = V^C \partial_C \omega_{AB} + \omega_{CB}\partial_A V^C + \omega_{AC}\partial_B V^C. \tag{29}$$

Нам осталось вычислить это выражение, учитывая компоненты гамильтонова векторного поля (28), вид матрицы (27) и то, что первый член в силу ее постоянства в канонических координатах будет равен нулю. Например, для значений индексов $A = i, B = m + j$ имеем $Ł\omega_{ij+m} = \omega_{k,j+m}\partial_i V^k + \omega_{i,m+k}\partial_{m+j}V^k$. Так как согласно (27) $\omega_{k,j+m} = \delta_{km}, \omega_{i,m+k} = \delta_{ik}$, то получим $Ł\omega_{ij+m} = \frac{\partial}{\partial q^i}(\frac{\partial H}{\partial p_j}) - \frac{\partial}{\partial p_j}(\frac{\partial H}{\partial q^i}) = 0$. Остальные компоненты вычисляются аналогично. В результате $Ł\omega_{AB} = 0$. $\square$

Теорема 7. *Функция $F(q,p)$ является интегралом уравнений Гамильтона (25) тогда и только тогда, когда скобка Пуассона $\{H,F\} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, (лекция 21), что функция является интегралом системы (25) или, что то же самое, векторного поля (28), если $V(F) = \mathrm{sgrad}(H)F = 0$. Но согласно (28), в натуральном поле реперов это поле имеет вид

$$\mathrm{sgrad}(H) = \sum_i \Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big).$$

Поэтому условие инвариантности функции F при действии потока выражается условием $\mathrm{sgrad}(H)F = \sum\limits_i \Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big) = \{F,H\} = 0$. $\square$

Следствие. *В частности, гамильтониан H всегда является первым интегралом системы (25).*

Теорема 8. Если функции F и G являются первыми интегралами уравнений Гамильтона, то их скобка Пуассона $\{F,G\}$ — также первый интеграл.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предыдущей теореме, функции F, G являются первыми интегралами при условиях $\{F,H\} = 0$, $\{G,H\} = 0$. Из тождества Якоби (теорема 3) тогда следует $\{\{F,G\},H\} = 0$. По теореме 7 это означает, что $\{F,G\}$ — первый интеграл. $\square$

Таким образом, рассматривая скобки Пуассона уже найденных интегралов, мы можем получать новые интегралы гамильтоновой системы. Правда, они могут оказаться функционально зависимыми с уже найденными. Задача состоит в том, чтобы найти максимальное число функционально независимых интегралов. Пусть это будут функции $F_1(q,p), \ldots, F_k(q,p)$. Тогда интегральные пути гамильтоновой системы принадлежат подмногообразиям $M_c \subset M$ с неявными уравнениями $F_1(q,p) = \mathbf{c}_1, \ldots, F_k(q,p) = \mathbf{c}_k$, $c_s = \mathrm{const}$. Ясно, что они инвариантны относительно потока $\mathrm{sgrad}H$. Тем самым задача сводится к рассмотрению системы на многообразии меньшей размерности $2m - k$. При некоторых дополнительных условиях по поводу поведения решений можно дать более определенный ответ.

Определение. *Говорят, что функции F, G находятся в инволюции, если скобка Пуассона $\{F,G\}$ обращается в нуль.*

Следующий результат мы приводим без доказательства.

Теорема Лиувилля. *Пусть на $2m$-мерном симплектическом многообразии (M,ω)*

задана система m *функций* $F_1(q,p),\dots,F_m(q,p)$ *, попарно находящихся в инволюции:* $\{F_i,F_j\}=0$ *,* $i,j=1,\dots,m$ *. Предположим, что на подмногообразии* M_c *функции* F_i *независимы. Тогда, если подмногообразие* M_c *компактно и связно, то оно диффеоморфно* m*-мерному тору* T^m *, а фазовый поток* $\mathrm{sgrad}H$ *определяет на* M_c *условно периодическое движение.*

Последнее означает, что на торе могут быть введены угловые координаты $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$, в которых движение системы описывается уравнением $\varphi(t)=\varphi(0)+\omega t$. Величина $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_m)=\mathrm{const}$ называется *частотой* условно периодического движения.

Эта теорема допускает обобщение, при котором рассматривается произвольное число функций $F_1(q,p),\dots,F_k(q,p)$, линейная оболочка которых является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона: $\{F_i,F_j\}=\sum\limits_{s=1}^{k}C_{ij}^sF_s$. Теорема Лиувилля получается при $k=m$ и $C_{ij}^s=0$, т.е. алгебра функций коммутативна.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ:

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии* – М.: изд. МГУ. – 1980.
2. Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии* – М.: ГИФМЛ. – 1958.
3. *Дифференциальная геометрия* (под ред. Феденко А.С.) – Минск: Изд. БГУ. – 1982.
4. *Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии* (под ред. Воднева В.Т.) – Минск: Изд. "Вышэйшая школа". – 1970.
5. *Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии* (Малахальцев М.А., Фомин В.Е. и др., ред. Шапуков Б.Н.) – Казань: Изд. КГУ. – 1993.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения* – М.: Наука. – 1979.
7. Рашевский П.К. *Курс дифференциальной геометрии* – М.: ГИТТЛ. – 1956.
8. Борисович Ю.Г. и др. *Введение в топологию* – М.: Изд. "Высшая школа". – 1995.