1 Вектор-функция скалярного аргумента

1. Найти производные по t от следующих функций:

$$a)\ \vec r^{\,2} \qquad b)\ \sqrt{\vec r^{\,2}} \qquad c)\ \vec r^{\,\prime} \times \vec r^{\,\prime\prime}$$
$$d)\ (\vec r^{\,\prime}, \vec r^{\,\prime\prime}, \vec r^{\,\prime\prime\prime}); \quad e)\ (\vec r^{\,\prime} \times \vec r^{\,\prime\prime}) \times \vec r^{\,\prime\prime\prime} \quad f)\ \sqrt{(\vec r \times \vec r^{\,\prime})^2},$$

   где $\vec r = \vec r(t)$

2. Можно ли утверждать,что
   а) $|\vec r^{\,\prime}| = |\vec r\,|^{\prime}$;
   б) $< \vec r, \vec r^{\,\prime} >= |\vec r| \cdot |\vec r|^{\prime}$.

3. Доказать, что если производная вектор-функции $\vec r = \vec r(t)$ равна нулю при всех t из некоторого промежутка, то $\vec r = const$ в этом промежутке. Верно ли обратное утверждение?

4. Доказать,что если в некотором интервале $|\vec r| = const$, то $\vec r \perp \vec r^{\,\prime}$. Верно ли обратное?

5. Для того чтобы вектор $\vec r(t)$ имел постоянное направление, необходимо и достаточно, чтобы в интервале изменения t $\vec r(t)$ и $\vec r^{\,\prime}(t)$ были коллиниарны. Доказать.

6. Для того чтобы вектор $\vec r(t)$ был параллелен неизменной плоскости, необходимо и достаточно,чтобы в интервале изменения t выполнялось условие $(\vec r, \vec r^{\prime}, \vec r^{\prime\prime}) = 0$. Доказать.

7. Вектор-функция $\vec r = \vec r\,(t)$ определена на сигменте $[t_1, t_2]$ иимеет на нем непрерывные производные $\vec r^{\prime}, \vec r^{\prime\prime}, \vec r^{\prime\prime\prime}$, которые при всех $t \in [t_1, t_2]$ компланарны,но $\vec r^{\prime} \nparallel \vec r^{\prime\prime}$ Доказать, что годограф вектор-функции $\vec r = \vec r(t)$ есть плоская линия. Верно ли обратное?

8. Доказать, что если на некотором сегменте $[t_1, t_2]$ вектор-функция $\vec r(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\vec r^{\prime}$, причем $\vec r \nparallel \vec r^{\prime}$,но $\vec r^{\prime} \neq 0$ и $\vec r \neq 0$, то годограф вектор-функции $\vec r = \vec r(t)$ есть отрезок прямой линии.

9. Докозать, что если на некотором сегменте $[t_1, t_2]$ вектор-функция $\vec r = \vec r(t)$ непрерывна вместе с производными $\vec r^{\prime}$ и $\vec r^{\prime\prime}$, которые отличны от нуля и коллинеарны при всех $t \in [t_1, t_2]$, то годографом вектор-функции $\vec r = \vec r(t)$ является отрезок прямой линии.

10. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r_{\,1} t + \vec r_{\,2} t^2,$$

    где $\vec r, \vec r_1, \vec r_2$-постоянные векторы , есть парабола , если векторы $\vec r_1$ и $\vec r_2$ не коллинеарны. Что будет в случае коллинеарности векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$?

11. Доказать, что годограф вектор-функции

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r_{\,1} \cos t + \vec r_2 \sin t$$

    есть элипс, если $\vec r_1$ и $\vec r_2$ неколлинеарны. Что будет в случае их коллинеарности?

12. Доказать что годограф вектор-функции

$$\vec r = \vec r_0 + \vec r_{\,1} \operatorname{ch} t + \vec r_{\,2} \operatorname{sh} t$$

    есть гипербола, если векторы $\vec r_{\,1}$ и $\vec r_{\,2}$ не коллинеарны.

13. Дифференциальное уравнение движения материальной точки есть

$$\vec{r}'' = -\frac{\lambda}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Доказать, что точка движется по кривой 2-го порядка.

14. Найти линии, определяемые дифференциальными уравнениями:

    (a) $\vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega}$ – постоянный вектор.

    (b) $\vec{r}\,' = \vec{e} \times (\vec{r} \times \vec{e})$, где $\vec{e}$ – постоянный единичный вектор.

2 Способы задания кривых

1. Дана линия $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 - 2$. Проверить,лежат ли на ней точки $M(-1,-1)$, $N(4,2)$, $P(1,2)$. Найти точки пересечения линии с осями координат, а также точку линии с минимальной ординатой. Записать неявное уравнение линии.

2. Составить параметрические уравнения окружности

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

   приняв за параметр:

    (a) угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку линии;

    (b) угол между осью Ox и прямой, проходящей через центр окружности.

3. Доказать, что координаты точек кривой 2-го порядка можно рационально выразить через угловой коэфициент переменной хорды кривой, проходящей через какую-нибудь выбранную точку кривой.

4. Найти параметрические уравнения декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$, воспользовавшись уравнением вспомогательной прямой $y = tx$.

5. Доказать, что точки Декартова листа, соответствующие значениям параметра t_1, t_2, t_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $t_1t_2t_3 = -1$. Точки различные.

6. Указать, какие линии изображаются параметрическими уравнениями:

    (a) $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$;

    (b) $x = t^2 - 2t + 3$, $y = t^2 - 2t + 1$;

    (c) $x = a\sin^2 t$, $y = b\cos^2 t$;

    (d) $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$;

    (e) $x = 3^t + 3^{-t}$, $y = 3^t - 3^{-t}$;

    (f) $x = \frac{a-t}{a+t}$, $y = \frac{t}{a+t}$;

    (g) $x = a\ln t$, $y = \frac{a}{2}(t + \frac{1}{t})$;

    (h) $x = a + R\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b + R\frac{2t}{1+t^2}$.

7. Параметрические уравнения гиперболы можно взять в виде

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

   Как движется точка по гиперболе, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$? Какое преобразование параметра нужно сделать, чтобы параметрические уравнения гиперболы приняли вид $x = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,\varphi$?

8. Показать, что
$$x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1-t^2}$$
есть параметрические уравнения гиперболы. Как движется точка по гиперболе при изменении параметра в пределах $-\infty < t < \infty, t \neq \pm 1$?

9. Показать что уравнения
$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$$
и
$$x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1-t^2}$$
представляют одну и ту же линию. Как движется точка по линии, когда параметр t растет от $-\infty$ до $+\infty$?

10. Записать параметрические уравнения кривых:
    (a) $(x^2+y^2)x - 2ay^2 = 0$;
    (b) $r = a(1+\cos\varphi)$;
    (c) $(x^2+y^2)x + a(x^2-y^2) = 0$.

11. Точка M вращается равномерно вокруг некоторой прямой и равномерным движением переносится параллельно этой прямой. Линия, описываемая точкой M, называется винтовой. Приняв указанную прямую за ось OZ, написать параметричиские уравнения винтовой линии. Найти ее проекции на координатные плоскости.

12. Поверхность сферы радиуса R пересечена круглой цилиндрической поверхностью, диаметр которой равен радиусу сферы и проходит через центр сферы. Линия пересечения указанных поверхностей называется линией Вивиани. Составить ее уравнения в неявном и параметрическом видах.

13. Линию
$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$$
представить как пересечение двух поверхностей.

14. Показать, что линия
$$x = \sin 2\varphi, \quad y = 1 - cos2\varphi, \quad z = 2\cos\varphi$$
лежит на сфере и является линией пересечения параболического и кругового цилиндров.

15. Найти проекцию на плоскость (xz) линии пересечения конуса $y^2 = xz$ и плоскости $x - y + z + 1 = 0$.

3 Касательная к кривой

1. Составить уравнение касательной и нормали (нормальной плоскости) к следующим линиям:
    (a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 + 1$ в точке $A(t=1)$;
    (b) $x = a\operatorname{ch} t, \quad y = a\operatorname{sh} t, \quad z = bt$ в произвольной точке;
    (c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ в точке $A(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$;
    (d) $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = C$;

(e) $r = a\varphi$;

(f) $r = 2a\cos\varphi$ в точке A, для которой $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

(g) $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 4t$ в точке $t = 0$;

(h) $x = t, \quad y = t^2 \quad z = t^3$ в точке $t = 1$.

2. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^3 + 3x^2 - 5$, перпендикулярных к прямой $2x - 6y + 1 = 0$

3. Составить уравнение касательных к кривой $y = x^2 + 2x$, проходящих через точку $P(1, -3)$, и вычислить угол между ними.

4. Показать, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, паралельны между собой.

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $P(\frac{1}{2}, 2)$, касающейся графика функции $y = -\frac{x^2}{2} + 2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$.

6. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ которые образуют угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ с осью Ox.

7. Найти все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функции $y = 3\cos 5x$ и $y = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

8. На графике функции $y = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ найти все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Ox. Определить длины отсекаемых отрезков.

9. Какая из прямых, идущих из начала координат, пересекает гиперболу $xy = a^2$ под прямым углом?

10. В уравнении параболы
$$y = x^2 + bx + c$$
постоянные b и c определить так, чтобы парабола касалась прямой $y = 3x - 5$ в точке с абсциссой $x = 2$.

11. В уравнении параболы
$$y = ax^2 + bx + c$$
постоянные a, b, c определить так, чтобы парабола касалась прямой
$$y = 4x - 1$$
в точке с абсциссой $x = 1$ и проходила через точку $A(0, 1)$.

12. При каком значении a кривая $y = \frac{x^3 + ax}{b}$ пересекает ось Ox под углом $45°$?

13. Тот же вопрос для кривой $y = \frac{ax}{1+bx^2}$.

14. Доказать, что угол между радиус-вектором, проведенным из начала координат, в точку (r, φ) кривой $r^n = a^n \cos n\varphi$ и ее касательной равен $n\varphi + \frac{\pi}{2}$.

15. Доказать, что кривая $r = e^{\alpha\varphi}$ пересекает все радиусы-векторы, идущие из начала, под одинаковым углом.

16. Найти угол между касательной к кардиоиде $r = a(1 + \cos\phi)$ и радиус-вектором точки касания.

17. Доказать, что только одна нормаль линии $y = x^n$ (n-целое положительное число) проходит через начало координат.

18. Доказать, что все нормали к развертке окружности

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = (\sin t - t\cos t)$$

одинаково удалены от начала координат.

19. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются следующие линии:

   (a) $y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y$;
   (b) $x^2 + y^2 = 8x, \quad y^2(2 - x) = x^3$.

20. Доказать, что следующие линии пересекаются под прямым углом:

   (a) $y = x - x^2, \quad y = x^2 - x$;
   (b) $x^2 - y^2 = a, \quad xy = b$.

21. Доказать, что у кривой $x = 2a\ln(\sin t) - 2a\sin^2 t, \quad y = a\sin 2t$ отрезок оси Ox между касательной и нормалью равен $2a$.

22. Доказать, что касательные к кривым $y = af(x)$, имеющую общую абсциссу точки касания, пересекаются в одной точке.

23. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к параболе две взаимно перпендикулярные нормали.

24. Доказать, что инверсия $(r, \varphi) \longrightarrow (\frac{a^2}{r}), \quad a = const$ есть конформное отображение.

25. Показать, что тангенс угла, образованного касательной к линии $r = r(\varphi)$ с радиусом-вектором, проведенным в точку касания, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\phi}}$$

26. Пусть γ-замкнутая кривая класса C^1. Доказать, что для любого вектора $\vec{a}$ найдется точка $x \in \gamma$ в которой касательная к γ ортогональна к $\vec{a}$.

27. В каких точках касательная к линии

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z - 3t + t^3$$

параллельна плоскости

$$3x + y + z + 2 = 0.$$

28. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к линии $x = a\cos t, \quad y = -a\sin t, z = b\,e^t$ с плоскостью (xy)

29. Записать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в произвольной точке линии:

   (a) $x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$;
   (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1$;
   (c) $x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$;

30. Доказать, что касательные к кривой

$$x^2 - 3y = 0, \quad 2xy - 9z = 0$$

образуют постоянный угол с фиксированным направлением.

4 Особые точки плоских кривых

1. Найти особые точки и написать уравнения касательных для следующих линий
   (a) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$ (астроида);
   (b) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ (циклоида);
   (c) $x = \frac{t^2}{1-t}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2}$;
   (d) $x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1-t^2}$;
   (e) $x = t^4, \quad y = t^2 - t^5$;
2. Исследовать и построить линии заданные параметрическими уравнениями
   (a) $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at}{1+t^3}$ (Декартов лист);
   (b) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}$;
   (c) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{(1-t^2)}{1+t^2}$
3. Найти особые точки кривых:
   (a) $x^3 - 2x^2 - y^2 + x = 0$;
   (b) $(2a - x)y^2 - x^3, \quad a > 0$;
   (c) $x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$;
   (d) $x^3 - 27(x - y)^2 = 0$;
   (e) $x^5 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0$;
   (f) $x^4 + x^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$;
   (g) $x^6 - x^4 + y^2 = 0$;
   (h) $x^3 - x^2 + xy^2 - y^2 = 0$;
4. При каком соотношении между a и b кривая $y^2 = x^3 + ax + b$ имеет особую точку?

5 Трехгранник Френе

1. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии
   $$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = e^t$$
   в точке $t = 0$
2. Составить уравнение соприкасающейся плоскости линии
   $$x = t\cos t, \quad y = -t\sin t, \quad z = at$$
   в начале координат.
3. Составить уравнение соприкасающейся плоскости линии пресечения сферы
   $$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
   и гиперболического цилиндра
   $$x^2 - y^2 = 3$$
   в точке $M(2, 1, 2)$.

4. Доказать, что линия
$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = 2t$$
расположена на поверхности
$$x^2 + y^2 - e^z = 0$$
и ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности.

5. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости поверхности проходят через фиксированную точку, то эта линия плоская.

6. Найти соприкасающиеся плоскости линии
$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$
проходящие через точку $M(2, -\frac{1}{3}, -6)$.

7. Составить уравнение главной нормали и бинормали следующих линий в указанных точках:
   (a) $x = t, \;\; y = t^2, \;\; z = e^t$ при $t = 0$;
   (b) $x = t, \;\; y = t^2, \;\; z = t^3$ при $t = 1$;
   (c) $x = y^2, \;\; x^2 = z$ в точке $M(1, 1, 1)$;
   (d) $xy = z^2, \;\; x^2 + y^2 = z^2 + 1$ в точке $M(1, 1, 1)$;

8. Найти точки на линии
$$x = \frac{2}{t}, \;\; y = \ln t, \;\; z = -t^2,$$
в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.

9. Доказать, что векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ линии
$$x = t, \;\; y = t^2, \;\; z = t^3$$
в точке $(0, 0, 0)$ совпадает с единичными векторами координатных осей.

10. Составить уравнение всех ребер и граней трехгранника Френе винтовой линии $x = a\cos t, \; y = a\sin t, \; z = bt$. Доказать, что главная нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найти векторы репера Френе.

11. Составить уравнение всех ребер и граней трхгранника Френе кривой
$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 2, \;\; 2x^2 + y^2 - 3 = 0$$
в точке $A(1, 1, 1)$.

6 Длина дуги

1. Вычислить длину дуги между двумя произвольными точками следующих линий:
   (a) $y = x^{2/3}$;
   (b) $y = x^2$;
   (c) $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin\, - \,\cos t)$;
   (d) $x = a\big(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t\big), \quad y = a\sin t$.

2. Вычислить длину дуги на заданном промежутке следующих линий:

   (a) $y = \ln \cos x \quad x \in [0, \pi/3]$;
   (b) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \quad x \in [1, 4]$;
   (c) $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t, \quad y = 2\operatorname{ch} t \quad t \in [0, 2]$;
   (d) $x = 8at^3, \quad y = 3a(2t^2 - t^4) \quad t \in [0, \sqrt{2}]$.

3. Найти длину винтовой линии

$$x = \cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

   от точки пересечения с плоскостью (x, y) до произвольной точки M.

4. Найти длину одного витка линии

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a\cos(t/2)$$

   между двумя ее точками пересечения с плоскостью (x, z).

5. Найти длину дуги линии

$$x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$$

   между плоскостями

$$y = \frac{a}{3}, \quad y = 9a.$$

6. Найти выражение для длинны дуги кривой, заданной в полярных координатах.

7. Найти длинну дуги логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

8. найти длину всей линии

   (a) $r = a(1 + cos\varphi)$;
   (b) $r = a\cos^4(\varphi/4)$.

9. Найти выражение дифференциала длинны дуги линии в сферических координатах.

10. Найти выражение дифференциала длинны дуги линии в цилиндрических координатах.

11. Составить параметрическое уравнение окружности, взяв за параметр длинну дуги.

12. Составить параметрическое уравнение цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}(x/a)$$

   приняв за параметр длинну дуги, отсчитываемую от вершины в сторону положительных абцисс.

13. Написать параметрическое уравнение винтовой линии, приняв за параметр длинну дуги.

7 Кривизна и кручение

1. Найти кривизну и кручение следующих линий:

   (a) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$;

   (b) $y^2 = 2px$;

   (c) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t$;

   (d) $x = a(t - \sin t, \quad y = a(1 - \cos t)$;

   (e) $x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$

   (f) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t$;

   (g) $y^2 = x, \quad x^2 = z$;

   (h) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$.

2. Доказать, что для следующих линий кривизна и кручение отличаются знаком:

   (a) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at$;

   (b) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$.

3. Найти кривизну линии, заданной уравнением

   (a) $r = r(\varphi)$;

   (b) $F(x, y) = 0$.

4. Найти кривизну следующих линий:

   (a) $r = ae^{h\varphi}$;

   (b) $r = a(1 + \cos\varphi)$

   (c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   (d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5. Вычислить кривизну кривой $(x - y)^2 - x^5 = 0$ в точке $A(1, 0)$.

6. Доказать, что следующтие линии плоские и составить уравнение содержащей их плоскости:

   (a) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin t + \cos t$;

   (b) $x = \frac{1+t}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{t}{1+t}$.

7. *Обобщенной винтовой*, или *линией откоса*, называется пространственная кривая, касательные к которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением. Доказать, что линия будет обобщенной винтовой, когдавыполняется одно из условий:

   (a) главные нормали перпендикулярны фиксированному напралению;

   (b) бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;

   (c) отношение кривизны к кручению постоянно.

8. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости линии перпендикулярны некоторой прямой, то то линия плоская.

8 Формулы Френе

1. Проверить, что для линии $\vec{r} = \vec{r}(s)$ выполняются следующие соотношения:

$$\vec{r}'^2 = 1, \qquad \vec{r}''^2 = k^2, \qquad |\vec{r}'''|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + k'^2,$$

$$< \vec{r}', \vec{r}'' >= 0, \quad < \vec{r}', \vec{r}''' >= -k^2, \quad < \vec{r}'', \vec{r}''' >= kk'$$

2. Доказать:
   (a) $(\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\beta}') = -\varkappa$;
   (b) $(\vec{\beta}', \vec{\beta}'', \vec{\beta}''') = k_2^5(\frac{k}{\varkappa})'$.
   (c) $(\vec{\tau}', \vec{\tau}'', \vec{\tau}''') = -k^5(\frac{\varkappa}{k})'$.

3. Доказать, что в точке M_0 кривизна линии L равна кривизне проекции L^* линии L на ее соприкасающуюся плоскость в точке M_0.

4. Доказать, что формулы Френе

$$\vec{\tau}' = k_1\vec{\nu}, \quad \vec{\nu}' = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta}, \quad \vec{\beta}' = -\varkappa\vec{\nu}$$

можно записать в виде

$$\vec{\tau}' = \vec{\omega} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\nu}' = \vec{\omega} \times \vec{\nu}, \quad \vec{\beta}' = \vec{\omega} \times \vec{\beta}$$

Найти вектор $\vec{\omega}$ (вектор Дарбу) и выяснить его смысл.

5. Динией Бертрана называется линия, главные нормали которой являются одновременно главными нормалями некоторой второй линии, отличной от первой. Доказать, что линии Бертрана характеризуются зависимостью:

$$\lambda k + \mu\varkappa = 1,$$

где λ и μ – некотрые константы.

6. Показать, что угол между касательными в соответствующих точках пары линий Бертрана постоянен.

7. Доказать, что расстояние между двумя соответствующими точками пары линий Бертрана постоянно.

8. Пусть S-площадь между кривой и секущей, проведенной параллельно касательной на расстоянии h. Проверьте, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{S^2}{h^3} = \frac{32}{9k},$$

где k – кривизна кривой в точке касания.

9. Пусть γ-регулярная кривая класса C^3. Если в точке $P \in \gamma$ кручение $\varkappa \neq 0$, то соприкасающаяся плоскость кривой в точке P пересекает γ. Доказать.

9 Натуральные уравнения линий

1. Найти натуральное уравнение для следующих кривых:
   (a) $y = x^{3/2}$
   (b) $y = \ln x$
   (c) $x = a(\cos t + \sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$;
   (d) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at$;
   (e) $x = ct, \quad y = c\sqrt{2}\ln t, \quad z = ct^{-1}$
2. Найти все плоские кривые с данным натуральным уравнением $k_1 = k_1(s)$.
3. Найти плоские кривые, заданные следующими натуральными уравнениями:
   (a) $k = a$;
   (b) $R = a\,s$;
   (c) $k^2 = \frac{1}{2s}$.
4. Составить параметрические уравнения линий, для которых:
   (a) $R = b\,e^{\alpha}$;
   (b) $R = b\,\alpha$;
   (c) $s = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
   (d) $s = b\cos\alpha$

10 Огибающая семейства плоских кривых

1. Исследовать семейства кривых (α – параметр) и сделать рисунок:
   (a) $\alpha^2 x^2 + y^2 = \alpha x$;
   (b) $x^2 + 2\alpha\, y = 2xy$.
2. Найти огибающую семейства линий (α – параметр семейства):
   (a) $(x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = \alpha^2$;
   (b) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - h = 0$;
   (c) $y^2 - (x-\alpha)^3 = 0$;
   (d) $y^3 - (x-\alpha)^2 = 0$;
   (e) $3(y-\alpha)^2 - 2(x-\alpha)^3 = 0$.
3. Найти огибающую семейства прямых, образующих с осями координат треугольники постоянной площади S.
4. Найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок постоянной длины a, если его концы скользят по осям прямоугольной системы координат.
5. Прямая врвщается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по второй прямой. Найти огибающую этого семейства прямых.
6. Найти условия, которым должны удовлетворять точки огибающей семейства линий
$$F(x, y, \alpha, \beta\,) = 0,$$
где α и β связаны соотношением $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

7. Найти огибающую семейства линий:
   (a) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, где $p + q = 1$;
   (b) $\lambda\, x^2 + \mu\, y^2 = 1$, где $\lambda + \mu = \lambda\, \mu$;
   (c) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, где $a + b = const$;
   (d) $bx + ay = ap$, где $a + b = const$.
8. Составить уравнения и начертить графики эволют следующих линий:
   (a) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$;
   (b) $x = a\,\mathrm{ch}\, t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\, t$;
   (c) $y = x^2$;
   (d) $y = \ln x$.
9. Составить уравнение эвольвент окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и сделать рисунок.
10. Составить уравнение эвольвенты цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, проходящей через ее вершину, и сделать рисунок.
11. Составить уравнение эвольвент параболы $x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2$ и сделать рисунок.
12. Второй эволютой кривой называется эволюта ее эволюты. Найти кривизну второй эволюты.

11 Разные задачи

1. Овалом называется плоская регулярная простая замкнутая кривая с кривизной $k > 0$. Вершина регулярной плоской кривой – это точка, в которой k имеет локальный экстремум. Доказать, что любой овал имеет по меньшей мере четыре вершины.
2. Пусть $\vec{r}(s)$ - овал и точка P лежит на $\vec{r}(s)$. Докажите, что существует точка P' на овале, такая, что $\vec{\tau}\,,(P') = -\vec{\tau}\,,(P)$, где $\vec{\tau}\,,(s) = \vec{r}\,'(s)$. Точка P' называется противоположной к точке P.
3. Если $\vec{r} = \vec{r}(s)$ - овал, то $\vec{\tau}\,''$ параллелен $\vec{\tau}$ по крайней мере в четырех точках. Доказать.
4. Шириной овала $\omega(s)$ в точке $P = \vec{r}(s)$ называется расстояние между касательными к овалу в противоположных точках P и P'. Овал называется овалом постоянной ширины, если $\omega(s) = const$. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ - овал постоянной ширины. Доказать, что прямая, соединяющая пару противоположных точек P и P' овала ортогональна к касательным в точках P и P'.
5. Пусть $\vec{r}(s)$ - овал с натуральной параметризацией длины L. Обозначим через θ угол между горизонталью и касательным вектором $\vec{\tau}\,,(s)$. Пусть $\omega(s)$ - ширина овала в точке, соответствующей углу θ. Доказать, что
$$\int_0^{2\pi} \omega d\theta = 2L$$
6. Сферическая кривая - это кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$, для которой существует такой постоянный вектор $\vec{m}$, что
$$< \vec{r}(t) - \vec{m}, \vec{r}(t) - \vec{m} >= r^2$$
Если все нормальные плоскости кривой пересекаются в одной точке, то кривая сферическая. Доказать.

7. Доказать, что если $\vec{r} = \vec{r}(s)$ - кривая, параметризованная натуральным параметром, $k \neq 0, \varkappa \neq 0$, то $\vec{r}(s)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда

$$\frac{\varkappa}{k} = (\frac{k'}{\varkappa k^2})$$

или

$$\varkappa R = -\left(\frac{R'}{\varkappa}\right)',$$

где $R = \frac{1}{k}$.

8. Используя результаты предыдущих задач, доказать, что кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда существуют такие константы A и B, что

$$k\Big(A\cos(\int\limits_0^s \varkappa)ds + B\sin(\int\limits_0^s \varkappa)ds\Big) \equiv 1$$

Пусть $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ - векторы репера Френе в точке P кривой γ. Отложим вектор $\vec{\tau}$, от начала координат. Когда точка P пробегает кривую γ, множество концов векторов $\vec{\tau}$, описывает кривую на еденичной сфере с центром в начале координат. Эта кривая называется сферической индикатрисой касательных кривой γ. Аналогично определяются сферические индикатрисы главных нормалей и бинормалей кривой γ.

9. Пусть s^* - длина сферической индикатрисы главных нормалей кривой $\vec{r} = \vec{r}(\vec{s})$, параметризованной натурально. Полной кривизной $K(P)$ кривой в точке P называется предел

$$K(P) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta s^*}{\Delta s}$$

где Δs - длина дуги PQ кривой, Δs^* - длина соответствующей дуги индикатриссы главных нормалей. Докажите, что если полная кривизна во всех точках кривой равна 0 , то линия является частью прямой.

10. Для того, чтобы замкнутая сферическая кривая γ была индикатриссой касательных замкнутой кривой Γ, необходимо и достаточно, чтобы γ не помещалась ни на какой полусфере. Доказать.

11. Касательный сферический образ регулярной замкнутой кривой не может лежать ни в какой замкнутой полусфере, за исключением случая, когда он является большой окружностью, ограничивающей полусферу. Доказать.

12. Доказать неравенство Фенхеля:

$$\int_\gamma k\,ds \geq 2\pi,$$

где γ – регулярная простая замкнутая кривая в E^3 с кривизной k, причем равенство достигается только в случае, когда γ – плоская выпуклая кривая.

13. Если γ – замкнутая вложенная кривая на плоскости, то $\int_\gamma k_o\,ds = 2\pi$. где k_o – ориентированная кривизна кривой. Доказать.

14. Пусть γ – пространственная замкнутая кривая. Предположим, что $0 \leq k \leq \frac{1}{a}$ для некоторого $a > 0$. Доказать, что длина γ удовлетворяет неравенству $L \geq 2\pi a$.

15. Пусть γ – плоская простая замкнутая гладкая кривая имеет длину L и ограничивает область площади F. Тогда $L^2 \geq 4\pi F$, причем $L^2 = 4\pi F$ тогда и только тогда, когда γ – окружность (изопериметрическое свойство круга). Доказать.

16. Восстановить кривую по ее сферической индикатрисе касательных.

17. Восстановить кривую по ее сферической индикатрисе главных нормалей.

18. Восстановить кривую по ее сферической индикатрисе бинормалей.

19. Дана сферическая индикатриса γ^* касательных регулярной кривой γ. Найти кривизну и кручение γ.

20. Дана сферическая индикатриса γ^* главных нормалей регулярной кривой γ. Найти кривизну и кручение γ.

21. Дана сферическая индикатриса γ^* бинормалей регулярной кривой γ. Найти кривизну и кручение γ.

22. Эволютой пространственной кривой называется геометрическое место центров соприкасающихся сфер. Для данной кривой, найти уравнение ее эволюты.

23. Кривая назывется сферической, если она лежит на некоторой сфере. Найти условие сферичности регулярной кривой.

24. Определить поверхность – геометрическое место эволют сферической кривой.

25. Семейство линий задано дифференциальным уравнением:

$$P(x,y)\,dx^2 + Q(x,y)\,dy^2 = 0.$$

Найти кривизну линий семейства.

26. Пусть $P = \gamma(s_0)$ и $Q = \gamma(s_0 + \Delta s$ две близкие точки регулярной кривой γ. Обозначим h – расстояние от точки Q до касательной к γ в точке P. Докажите, что кривизна кривой в точке P равна

$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2h}{\Delta s^2}.$$

27. Если на всех нормалях плоской кривой γ, по одну сторону от нее, отложить отрезки длиной a, то полученная кривая γ^* называется эквидистантой для γ. Пустm ds и $d\sigma$ – дифференциалы длины дуги на кривых γ и γ^* соответственно. Покажите, что кривизна кривой γ удовлетворяет условию:

$$k(s) = \lim_{a \to 0} \frac{ds - d\sigma}{a\,ds}.$$

28. Пусть γ и γ^* две плоские замкнутые выпуклые гладкие эквидистанты, находящиеся на расстоянии a. Докажите, что $\sigma = s \pm 2\pi a$ и $\Sigma = as \pm \pi a^2$, где σ и s – длины γ^* и γ соответственно, а Σ – площадь, заключенная между γ и γ^*.

29. Составить уравнение эквидистанты огибающей семейства прямых

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - h(\alpha) = 0.$$

30. Доказать, что для любого вещественного a существует замкнутая регулярная кривая γ такая, что ее интегральное кручение

$$\int_\gamma \varkappa = a.$$

31. Докажите, что если сферическая индикатрисса главных нормалей замкнутой пространственной регулярной кривой не имеет самопересечений, то она делит сферу на две равновеликие части (теорема Якоби).

32. Из начала радиусов-векторов на плоскую "зеркальную" кривую $\vec{r} = \vec{r}(s)$ падает пучек световых лучей. Составить уравнение огибающей семейства отраженных лучей.

33. На плоскую "зеркальную" кривую, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(s)$, падает пучок параллельных лучей, имеющих направление вектора $\vec{e}$. Составить уравнение огибающих лучей, отраженных от данной кривой.

12 Ответы, указания, решения

1. Вектор-функция скалярного аргумента

1. (a) $2 < \vec{r}, \vec{r}\,' >$; (b) $< \vec{r}\,', \vec{r}\,'' > /|\vec{r}|$; (c) $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'''$
   (d) $(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}^{\,(4)}$; (e) $(\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') \times \vec{r}^{\,(4)}$ (f) $< \vec{r} \times \vec{r}\,', \vec{r} \times \vec{r}\,'' > /|\vec{r} \times \vec{r}\,'|$.
2. а) Нет, например, $\vec{r} = (\cos t, \sin t)$.
   б) Да, из равенства $\vec{r}^{\;2} = |\vec{r}\,|^2$ получаем требуемое соотношение.
3. Да.
4. Да.
5. Положить $\vec{r}(t) = \phi(t)\vec{e}(t)$, где $|\vec{e}(t)| = 1$.
7. Рассмотреть единичный вектор $\vec{a}$, перпендикулярный векторам $\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''$, и доказать, что $\vec{a} = const$.
8. См. задачу 5.
9. См. задачу 5.
13. Доказать, что $(\vec{r} \times \vec{r}\,') \times \vec{r}\,' + \lambda \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = const$
14. а) Окружнрсти, центры которых лежат на прямой, проходящей через начало радиус-векторов, коллинеарны вектору $\vec{\omega}$, а плоскости этих окружностей перпендикулярны указанной прямой.
    б) Прямые, по которым пересекаются плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{e}$, с плоскостями, проходящими через прямую, проведенную через начало координат коллинеарно вектору $\vec{e}$.

2. Способы задания кривых

1. $y^3 + 2y^2 - x^2 = 0$.
2. а) $x = \frac{2a}{1+k^2},\ y = \frac{2ak}{1+k^2}$;
   б) $x = a + a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi$.
4. $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.
6. а) Парабола;
   б) часть прямой $x - y - 2 = 0$, где $x \geq 2$.
   в) отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, заключенный между осями;
   г) полуокружность;
   д) ветвь гиперболы;
   е) прямая $x + 2y - 1 = 0$;
   ж) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ – цепная линия;
   з) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – окружность.
7. $t = e^{\varphi}$.

10. а) $x = \frac{2at^2}{1+t^2},\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ -циссоида Диоклеса;

    б) $x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\ y = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$;

    в) $x = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1},\ y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$.

11. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$;

    проекции:

    $x^2+y^2 = a^2,\ y = a\sin\frac{z}{b},\ x = a\cos\frac{z}{b}$.

12. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ x^2+y^2-Rx = 0; \end{cases}$

    например,

    $x = \frac{R}{2}(1+\cos t);\ y = \frac{R}{2}\sin t,\ z = R\sin\frac{t}{2}$.

13. Например,
$$y = x^2, z = e^x$$

14. Уравнения искомых цилиндров:
$$x^2 + (y-1)^2 = 1,\ \ \frac{y}{2} + (t-z)^2$$

15. $x^2+z^2+xz+2x+2z+1 = 0,\ \ y = 0$

3. Касательная к кривой

1. (a) касательная $2x - y + 4 = 0$, нармаль $x + 2y - 3 = 0$;

   (b) касательная $\dfrac{x - a\cosh t}{a\,\mathrm{sh}\,t} = \dfrac{y - a\,\mathrm{sh}\,t}{a\,\mathrm{ch}\,t} = \dfrac{z - bt}{b}$,
   нормальная плоскость $(a\,\mathrm{sh}\,t)\,x + (a\,\mathrm{ch}\,t)\,y + bz - (a^2\,\mathrm{sh}\,2t + b^2 t) = 0$;

   (c) касательная $x + y - 3a = 0$, нормаль $x - y = 0$;

   (d) касательная $x(x^2+y^2-a^2)(X-x) + y(x^2+y^2+a^2)(Y-y) = 0$, нормаль $y(x^2+y^2+a^2)(X-x) - y(x^2+y^2-a^2)(Y-y) = 0$;

   (e) касательная $(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)x - (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)y - a\varphi = 0$,
   нормаль $(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)x + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)y - a\varphi = 0$;

   (f) касательная $y - a = 0$, нормаль $x - a = 0$;

   (g) касательная $x = 2$, $2y - z = 0$, нормальная плоскость $y + 2z = 0$;

   (h) касательная $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$,
   нормальная плоскость $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

2. $y = -3x - 6$

3. $\cos\varphi_1 = \frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\cos\varphi_2 = \frac{13}{5\sqrt{170}}$.

4. $y + 3 = (4 \pm 2\sqrt{6})(x-1)$, $\tan\varphi = \frac{4}{7}\sqrt{6}$.

6. $2x + y - 5 = 0$.

7. $(0,0), (8,0)$.

8. $x = \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$

9. $(3,-15)$; $\frac{21}{2}, 21$

10. $y = x$

11. $b = -1$, $c = -1$

12. $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$

13. $a = b$

14. $a = 1$

17. $\frac{\pi+\varphi}{2}$

20. (a) $(0,0)$, $(4,4)$, $\frac{\pi}{2}$, $\arctan\frac{3}{4}$
    (b) $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$, $(0,0,)$; $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

24. Парабола

28. $(-2, 12, 14)$, $(-2, 3, -4)$

29. $x^2 + y^2 = 2a^2$

30. Направляющий вектор касательной

$$\vec{t} = grad\, F \times grad\, \Phi$$

31. (a) $\frac{X-x}{ay} = \frac{Y-y}{bx} = \frac{Z-z}{xy}$, $\quad (X-x)ay + (Y-y)bx + (Z-z)xy = 0$
    (b) $\frac{X-x}{z} = \frac{Y-y}{0} = \frac{Z-z}{x}$, $\quad z(X-x) + x(Z-z) = 0$
    (c) $x(X-x) = -y(Y-y) = z(Z-z)$, $\quad \frac{X}{x} - \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 1$

4. Особые точки плоских кривых

2. (a) $(\pm a, 0)$, точка первого рода с касательной $y = 0$;
   (b) $(0, \pm a)$-точки возврата первого рода с касательной $x = 0$
   (c) $(2\pi ak, 0)$-точки возврата первого рода с касательными $x = 2\pi ak, k \in \mathbb{Z}$
   (d) $(0,0)$-точки возврата первого рода с касательной $y = 0$
   (e) $(0,0)$-точки возврата первого рода с касательной $y = 0$
   (f) $(0,0)$-точки возврата второго рода с касательной $y = 0$

4. (a) $(1,0)$-узловая точка с касательными $y = \pm(x-1)$;
   (b) $(0,0)$-точки возврата первого рода с касательной $y = 0$
   (c) $(0,0)$-узловая точка с касательными $y = \pm x$;
   (d) $(0,0)$-точки возврата первого рода с касательной $x = 0$
   (e) $(0,0)$-точки возврата первого рода с касательной $y = x$
   (f) $(0,0)$-точки возврата второго рода с касательной $y = 0$
   (g) $(0,0)$-точка самоприкосновения с касательной $y = 0$
   (h) $(0,0)$-точка самоприкосновения с касательной $y = 0$
   (i) $(0,0)$-изолированая точка.

5. $4a^3 + 27b^2 = 0$

5. Трехгранник Френе

1. $bx + ay + abz = 2ab$

2. $-ax + z = 0$

3. $4x - y + z - 9 = 0$

6. $3x + 3y + z + 1 = 0, \quad 3x - 3y + z - 1 = 0, \quad 108x - 18y + z - 216 = 0$

7. (a) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$ - главная нормаль;

   $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ - бинормаль;

   (b) $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{1}$ - главная нормаль;

   $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$ - бинормаль;

   (c) $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$ - главная нормаль;

   $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$ - бинормаль;

   (d) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ - главная нормаль;

   $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ - бинормаль;

8. $(1, \ln 2, -4)$

10. Касательная: $\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{z - bt}{b}$,

    Нормальная плоскость: $(a\sin t)x - (a\cos t)y - bz + b^2 t = 0$

    Бинормаль: $\frac{x - a\cos t}{b\sin t} = \frac{y - a\sin t}{\sin t} = \frac{z - bt}{0}$,

    Соприкосающаяся плоскость: $b\sin tx - b\cos ty + az - abt = 0$,

    Главная нормаль: $\frac{x - a\cos t}{cost} = \frac{y - a\sin t}{\sin t} = \frac{z - bt}{0}$,

    Спрямляющая плоскость: $x\cos t + y\sin t - a = 0$;

    $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b), \quad \vec{\nu} = (-\cos t, -\sin t, 0)$,

    $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)$

11. Касательная $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$,

    нормальная плоскость $x - 2y - 3z + 4 = 0$,

    бинормаль $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$,

    соприкасающаяся плоскость $x + 2y - z - 2 = 0$,

    главная нормаль $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$,

    опрямляющая плоскость $4x - y + 2z - 5 = 0$.

6. Длина дуги

1. а) $s = \dfrac{1}{27}[(4+9x_2)^{3/2} - (4+9x_1)^{3/2}]$;

   б) $s = \dfrac{1}{2}(x_2\sqrt{1+4x_2^2} - x_1\sqrt{1+4x_1^2}) + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2x_2+\sqrt{1+4x_2^2}}{2x_1+\sqrt{1+4x_1^2}}$;

   в) $s = \dfrac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2)$;

   г) $s = a(\ln\sin t_2 - \ln\sin t_1)$, где $0 < t_1, t_2 \le \dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{\pi}{2} \le t_1, t_2 < \pi$.

2. а) $s = \ln \operatorname{tg} 75^0$;

   б) $s = \frac{15}{4} + \ln 2$;

   в) $s = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 4 - \operatorname{ch} 0)$;

   г) $s = 48a$.

3. $s = \sqrt{a^2+b^2}\,t$

4. $s = 8a\sqrt{2}$

5. $s = 9a$

6. $ds^2 = (r^2 + r'^2)d\varphi^2$

7. $s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m(\varphi_2-\varphi_1)}$

8. а) $s = 8a$

   б) $s = \frac{16}{3}a$

9. $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$

10. $ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2$

11. $x = R\cos\frac{S}{R}, y = R\sin\frac{S}{R}$

12. $x = a\,arcsh(\frac{s}{a}), y = \sqrt{a^2+s^2}$.

13. $x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, z = \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7. Кривизна и кручение

1. а) $k = \frac{a}{y^2}, \varkappa = 0$;

   б) $k = \frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \varkappa = 0$;

   в) $k = \frac{ab}{(a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2ch^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \varkappa = 0$;

   г) $k = \frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}, \varkappa = 0$;

   д) $k = \varkappa = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}$;

   е) $k = \frac{3}{25\sin t\cos t}, \varkappa = \frac{-4}{25\sin t\cos t}$;

   ж) $k = \frac{2\sqrt{1+36y^4+64y^6}}{\sqrt{(1+4y^2+16y^4)^3}}, \varkappa = \frac{12y}{1+36y^4+64y^6}$;

   з) $k = \frac{a}{a^2+b^2}, \varkappa = -\frac{b}{a^2+b^2}$;

3. а) $k = \frac{r^2+2r'^2-r'r''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$;

   б) $k = \frac{\partial}{\partial x}\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}$.

4. (a) $k = \frac{1}{r\sqrt{1+h^2}}$

   (b) $k = \frac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$

   (c) $k = \frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}$

   (d) $k = \frac{ab}{(a^2-\varepsilon x^2)^{3/2}}$

5. $k = -\frac{15}{\sqrt{2197}}$

6. а) $x+y-z=0$ b) $x-4y-2z+3$.

8. Формулы Френе

8. $\dfrac{32}{9k}$

9. Натуральные уравнения линий

2. (a) $(27s+8)^2 = \left(4+9\frac{36R^2}{(27s+8)^2}\right)^3$

   (b) $s = \sec\alpha + \ln\operatorname{tg}(\alpha/2), \quad k = \sin\alpha\cos^2\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = x$

   (c) $R^2 = 2as$

   (d) $k = -\kappa = \frac{a}{2a^2+s^2}$

   (e) $k = -\kappa = \frac{c\sqrt{2}}{4c^2+s^2}$

3. $x = \int\cos\alpha(s)ds, \quad y = \int\sin\alpha(s)ds$ где α – угол наклона касательной к кривой к оси абсцисс.

4. (a) окружность радиуса $1/a$ если $a \neq 0$, и прямая, если $a = 0$

   (b) логарифмическая спираль

   (c) $x = \alpha\sin\alpha + \cos\alpha + C_1, \quad y = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha + C_2$

5. (a) $x = \frac{a}{2}e^{\alpha}(\sin\alpha + \cos\alpha), \quad y = \frac{a}{2}e^{\alpha}(\cos\alpha - \sin\alpha)$ – логарифмическая спираль

   (b) $x = a(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ – эвольвента окружности

   (c) $x = a\ln\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha/2), \quad y = \frac{a}{\cos\alpha}$ – цепная линия

   (d) $x = -\frac{a}{4}(1-\cos 2\alpha), \quad y = -\frac{a}{4}(2\alpha - \sin 2\alpha)$

10. Огибающая семейства плоских кривых

1. (a) При $C \neq 0$ – семейство эллипсов, одна из осей которых расположена на оси Ox. Все эллипсы касаются оси Oy в начале координат. Огибающая $y = \pm 1$. При $C = 0$ получаем ось Ox, при $C \to \pm\infty$ получим ось Oy

   (b) При $C = 0$ – пара прямых $x = 0, \quad x - 2y = 0$. При $C \neq 0$ – подобные гиперболы, асимптоты которых параллельны указанным прямым. Центры гипербол (C, C) заполняют биссектриссу $x - y = 0$. Одна из ветвей касается оси Ox в начале координат. При $C \to \pm\infty$ получим прямую $y = 0$. Огибающей нет.

2. (a) $x = 0, \quad y = 0$
   (b) $x^2 + y^2 = p^2$
   (c) огибающей нет
   (d) $9x - 9y - 2 = 0$
3. Гиперболы $xy = \pm\frac{\varrho}{2}$
4. Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
5. Циклоида
6. Точки огибающей должны удовлетворять системе уравнений

$$F(x, y, \alpha, \beta) = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{D(F, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0$$

7. (a) Четыре прямые $x = \pm y = \pm 1$
   (b) Четыре прямые $\pm x = \pm y = 1$
   (c) $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3}$, где $\alpha = a + b$
   (d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$, где $c = a + b$
8. (a) $X = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, Y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t;$
   (b) $X = \frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t, Y = \frac{b^2+a^2}{b}\operatorname{sh}^3 t;$
   (c) $X = -4x^3, Y = \frac{1}{2} + 3x^2;$
   (d) $X = 2x + \frac{1}{x}, Y = \ln x - x^2 - 1.$
9. $X = a(\cos t + (t-c)\sin t), Y = a(\sin t - (t-c)\cos t)$, где c - параметр семейства эвольвент.
10. $X = a(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t), Y = a\sin t$ - трактрисса.
11. $X = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}[c - \ln(t + \sqrt{t^2+4})]$, $Y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}[c - \ln t + \sqrt{t^2+4}]$.
12. $R_2 = R(R'^2 + RR'')$, где $R = \frac{1}{k}$ - радиус кривизны исходной кривой.

11. Разные задачи

1. См. [2, с.43].
2. Пусть точке P соответствует значение натурального параметра s, а точке p' значение $s + l$. С точностью до знака

$$\omega(s) =< \vec{r}(s+l) - \vec{r}(s), \vec{\nu}(s) > .$$

Учитывая, что $\omega(s) = const, \vec{\tau}\,,(s+l) = -\vec{\tau}\,,(s)$ и $k(s) > 0$, после дифференцирования получим

$$< \vec{r}(s+l) - \vec{r}(s), \vec{\tau}\,(s) >= 0.$$

3. Применить результат задачи 1 и формулы Френе.

5. Так как $\frac{d\theta}{ds} = k > 0$, то $\theta(s)$ - монотонная функция на промежутке $[0, L]$. Следовательно, овал можно параметризовать углом θ. Пусть $\vec{\rho}(\theta)$ - такая параметризация овала. Тогда $\vec{r}(s) = \vec{\rho}(\theta(s))$, причем $\theta \in [0, 2\pi]$. Следует помнить, что в параметризации θ противоположным точкам овала соответствуют значения θ и $\theta + \pi$. Поэтому ширина овала $\omega(\theta) =< \vec{\rho}(\theta+\pi) - \vec{\rho}(\theta), \vec{\nu}(\theta) >$, где $\vec{\nu}(\theta) = \vec{\nu}(s(\theta))$ - единичный вектор нормали овала в точке, соответствующей θ. Пусть $\vec{\tau}\,,(\theta) = \vec{\tau}\,,(s(\theta))$ - единичный касательный вектор. Используя формулы Френе, найдем:

$$\vec{\tau_\theta}' = \vec{\tau_s}'\frac{ds}{d\theta} = \vec{\nu}(s(\theta))k\frac{1}{k} = \vec{\nu}(s(\theta)) = \vec{\nu}(\theta).$$

Таким образом, $\omega(\theta) =< \vec{\rho}(\theta+\pi) - \vec{\rho}(\theta), \vec{\tau_\theta}' >$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \omega d\theta = -\int\limits_0^{2\pi} < \vec{\rho_\theta}'(\theta+\pi) - \vec{\rho_\theta}'(\theta), \vec{\tau}(\theta) > d\theta.$$

Так как $\vec{r}(s) = \vec{\rho}(\theta(s))$, то $\vec{r_s}' = \vec{\rho_\theta}'k$, а так как $\vec{r}(s+l) = \vec{\rho}(\theta(s)+\pi)$, то $\vec{r_s}'(s+l) = \vec{\rho_\theta}'(\theta+\pi)k$. Но $\vec{r}\,'(s+l) = -\vec{r}\,'(s)$. Поэтому $\vec{\rho_\theta}'(\theta+\pi) = -\vec{\rho_\theta}'(\theta)$.

Значит,

$$\int\limits_0^{2\pi} \omega d\theta = 2\int\limits_0^{2\pi} < \vec{\rho_\theta}', \vec{\tau}(\theta) > d\theta =$$
$$= 2\int\limits_0^{2\pi} < \vec{\rho}_s'\tfrac{ds}{d\theta}, \vec{\tau}(s(\theta)) > d\theta = 2\int\limits_0^{L} < \vec{r_s}', \vec{\tau}(s) > ds = 2L.$$

8. Пусть $R(s) = \frac{1}{k(s)}$ - радиус кривизны кривой. Тогда результат задачи 11.7 можно переписать в виде

$$\varkappa R = -\left(\frac{R'}{\varkappa}\right)'.$$

Таким образом,кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$ - сферическая тогда и только тогда, когда R(s) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varkappa R_s'' - \varkappa' R' + \varkappa^3 R = 0 \qquad (*)$$

Так как по условию $\varkappa \neq 0$, то функция $\alpha(s) = \int_0^s \varkappa(s)ds$ монотонна $\left(\frac{d\alpha}{ds} = \varkappa\right)$. Следовательно, существует обратная функция $s = s(\alpha)$. В уравнении (*) перейдем к параметру α:

$$R_s' = R_\alpha' \tfrac{d\alpha}{ds} = R_\alpha' \varkappa(s);$$
$$R_s'' = R_\alpha'' \varkappa^2 + R_\alpha' \varkappa';$$
$$\varkappa\ (R_\alpha''\varkappa^2 + R_\alpha'\varkappa') - \varkappa' R_\alpha' \varkappa + \varkappa^3 R = 0;$$
$$\varkappa^3\ (R_\alpha'' + R) = 0$$

Значит, как функция от α, R удовлетворяет уравнению $R'' + R = 0$, общее решение которого

$$R = A\cos\alpha(s) + B\sin\alpha(s),$$

что и требовалось доказать.

10. См [4, с.85].

11. Можно выбрать постоянный вектор $\vec{n}$ так, чтобы $\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle \geq 0$, и тогда функция $f(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{n} \rangle$ не убывает.Но так как $f(s)$- периодическая, то $f(s) = const$.Следовательно, $\langle \vec{\tau}(s), n \rangle = 0$ тождественно по s.

12. См [4, с.83].

13. См [4, с.82].

14. Применить неравенство Фенхеля.

15. См [4, с.97].

16. Обозначим радиус-вектор индикатриссы через $\vec{r}_1$. Тогда $\vec{r}_1 = \vec{\tau}$, откуда $d\vec{r} = \vec{r}_1 \frac{ds}{ds_1} ds_1$. Полагая $\frac{ds}{ds_1} = \phi(s_1)$, получим: $d\vec{r} = \vec{r}_1 \phi(s_1) ds_1$. Таким образом, $\vec{r} = \int \vec{r}_1(s_1)\phi(s_1) ds_1$.

24. Конус с вершиной в центре сферы, на которой расположена данная кривая.

25.
$$k = \frac{P\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + Q\left(P\frac{\partial P}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\left(P^2 + Q^2\right)^{3/2}}$$

26.
$$h = \frac{|\vec{\tau}\Delta s \times \Delta \vec{r}|}{\Delta s}$$

28. а) Доказать, что $ds^* = (1 \pm ka)ds$;
б) см. [5, с.67].

29. $\begin{cases} x = (h+a)\cos\alpha - h'\sin\alpha, \\ y = h'\cos\alpha + (h+a)\sin\alpha. \end{cases}$

32. $\vec{R}(s) = \vec{r}(s) + \dfrac{< \vec{r}, \vec{\nu} >}{2k|\vec{r}|^2 - < \vec{r}, \vec{\nu} >}(- < \vec{r}, \vec{\tau} > \vec{\tau} + < \vec{r}, \vec{\nu} > \vec{\nu})$ Указание: семейство отраженных лучей можно задать уравнением $\vec{R}(s,t) = \vec{r}(s) + t\vec{\rho}(s)$, где s - параметр семейства, $\rho(s) = - < \vec{r}, \vec{\tau} > \vec{\tau} + < \vec{r}, \vec{\nu} > \vec{\nu}$.

33. $\vec{R}(s) = \vec{r}(s) + \dfrac{< \vec{e}, \vec{\nu} >}{2k}(-\vec{\tau} < \vec{e}, \vec{\tau}\,, > + \vec{\nu} < \vec{e}, \vec{\nu} >)$