Лекции по аналитической геометрии. Семестр I

Ямпольский А.Л.

Оглавление

Глава 1

Геометрия прямых и плоскостей

1.1 Векторы и операции над ними

1.1.1 Направленные отрезки. Геометрические векторы

Построение курса аналитической геометрии мы начнем с простых геометрических наблюдений и конструкций, мотивированных во многом нашим чувственным восприятием окружающего мира, естественных геометрических форм. Как и во времена Евклида, к неопределяемым, априори ясным геометрическим объектам мы относим *точки, прямые и плоскости,* которые расположены в окружающем нас *пространстве.* Точки будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Из аксиоматики Евклидовой геометрии плоскости и пространства (например, аксиом элементарной геометрии А.В.Погорелова) нам известно, что всякие две несовпадающие точки A и B на плоскости или в пространстве определяют единственную прямую, содержащую эти точки, или, выражаясь геометрическим языком, *проходящую* через точки A и B. Часть прямой, заключенная между точками A и B называется *отрезком* прямой с концевыми точками A и B. В определении отрезка *не важен* порядок, в котором мы перечисляем концевые точки отрезка. Интуитивно ясно, однако, что порядок перечисления точек отрезка может иметь значение. Это интуитивное представление базируется, несомненно, на нашем опыте течения времени. Для нас по жизни важно, *какое из двух событий произошло раньше.* В геометрии такое чувственное ощущение отражается в понятии направленного отрезка и является основой для одного из фундаментальных понятий в геометрии – понятия *ориентации.*

Направленным отрезком на плоскости или в пространстве называется упорядоченная пара точек (A, B). Точка A называется начальной точкой, или *началом*, направленного отрезка, а точка B - его концевой точкой, или концом направленного отрезка. Направленный отрезок обозначают $\overrightarrow{AB}$.

Два направленных отрезка называются *коллинеарными*, если расположены на одной или на параллельных прямых.

Пусть l — прямая, $O \in l$. Точка O разбивает l на две полупрямые. Зафиксируем точку A на прямой, отличную от точки O.

Лучем с началом в точке O называется объединение всех отрезков, которые содержат точку A и имеют общий конец в точке O. Очевидно, что направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ однозначно определяет луч, который мы обозначим через $ray(\overrightarrow{OA})$.

Пусть $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ коллинеарные направленные отрезки, *лежащие на одной прямой* прямой l. Эти отрезки называются *сонаправленными* (обозначение $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$), если $ray(\overrightarrow{AB}) \supset ray(\overrightarrow{CD})$, или наоборот. В противном случае, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow\ \overrightarrow{CD}$).

Из аксиом планиметрии известно, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

Пусть $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ коллинеарные направленные отрезки, *не лежащие на одной прямой.* Они называются *сонаправленными*, если точки B и D лежат в *одной* полуплоскости относительно прямой AC и противоположно направленными, если точки B и D лежат в *различных* полуплоскости относительно прямой AC

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина соответствующего отрезка $[A, B]$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$.

Два направленных отрезка называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Геометрическим вектором называется совокупность всех равных между собой направленных отрезков. Каждый из таких направленных отрезков называется представителем вектора. Векторы, в отличие от направленных отрезков, будем обозначать строчными буквами латинского алфавита со стрелкой. Например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.

Каждый направленный отрезок однозначно определяет вектор и каждый вектор имеет своего представителя с началом в любой точке плоскости или пространства. Выражение:"*Задать представитель вектора в данной точке*"эквивалентно выражению "*Отложить вектор от данной точки*". Чтобы не утяжелять терминологию, в дальнейшем вектор и направленный отрезок различать не будем в том смысле, что **говоря о векторе каждый раз будем выбирать его представитель, отложенный от нужной точки**.

1.1.2 Операции над геометрическими векторами

Сложение векторов

Определение 1.1.1 *Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ заданные векторы. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен от конца вектора $\vec{a}$.*

Очевидными свойствами сложения векторов, вытекающими из определения их суммы, являются

- Коммутативность $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Ассоциативность $\quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Дополним множество рассматриваемых нами направленных отрезков "отрезком начало и конец которого совпадают. Разумеется, длина такого отрезка равна 0, а направление не определено. Определим *нулевой вектор*, как "вектор представленный в каждой точке нулевым направленным отрезком. Обозначать нулевой вектор будем $\vec{0}$.

Вектор $\vec{b}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Такой вектор будем обозначать $-\vec{a}$. Ясно, что $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Произведение числа на вектор

Пусть $\vec{a}$ – вектор, λ – вещественное число. Произведением числа λ на вектор $\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими свойствами:

$$\begin{cases} |\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|; \\ \vec{b} \upuparrows \vec{a}, \quad \text{если} \lambda > 0; \\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, \quad \text{если} \lambda < 0; \\ \vec{0}, \quad \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Для произведения вектора на число употребляется обозначение $\lambda\,\vec{a}$. Легко видеть, что если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda\,\vec{a} = \vec{0}$ для любого λ.

Заметим, что определение произведения числа на вектор согласовано с определением суммы векторов в том смысле, что

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n}, \quad \text{для любого натурального } n \in N$$

Отметим следующие свойства умножения числа на вектор.
Если $\vec{a} -$ вектор, $\quad \lambda, \mu \in R$, то

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
4. $1\vec{a} = \vec{a}$.

1.2 Линейное векторное пространство.

Множество L элементов произвольной природы называется *вещественным линейным векторным пространством*, если:

1. Каждым двум элементам $\vec{a}, \vec{b} \in L$ поставлен в соответствие элемент $\vec{a} + \vec{b}$, называемый суммой элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. для каждого $\vec{a} \in L$ и для каждого вещественного λ сопоставлен элемент $\lambda\,\vec{a} \in L$, называемый произведением числа λ на элемент $\vec{a}$.

Эти операции должны удовлетворять следующим аксиомам:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность);
3. существует $\vec{0} \in L$ такой, что для каждого $\vec{a} \in L$ выполнено равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. для каждого $\vec{a} \in L$ существует $-\vec{a} \in L$ такой, что $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;

5. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

7. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

8. $1\vec{a} = \vec{a}$.

для любых вещественных λ, μ и любых $\vec{a}, \vec{b} \in L$.

Элементы линейного векторного пространства принято называть векторами.

Примеры линейных векторных пространств.

1. Множество геометрических векторов с определенными выше операциями сложения и умножения на число.

2. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей $n \in N$, с обычными операциями сложения и умножения на число.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_k \in R.$$

   Заметим, что множество многочленов с вещественными коэффициентами степени равной n не образует линейного пространства (докажите).

3. X – произвольное множество, L – множество всех функций, определенных на X. Определим операции сложения и умножения на число на множестве L следующими естественными правилами:

$$\begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x), \\ (kf)(x) = kf(x) \end{array}.$$

   в каждой точке $x \in X$.

4. Вектор-строки.
   Пусть $L = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) |\, a_i \in R\}$ – множество наборов из n вещественных чисел. Элементом этого множества являются строки, вида $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

   Определим на L операции сложения и умножения на число следующим образом:

   (a) Если $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n);$$

   (b) Если $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\lambda \in R$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda\vec{a}_1, \lambda\vec{a}_2, \dots, \lambda\vec{a}_n)$..

Пусть L – линейное пространство, $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in L$. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называется выражение

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

Линейная комбинация векторов, очевидно, является вектором.

Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов этой комбинации не равен нулю.

Совокупность векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ (или, в другой терминологии, *система*) называется *линейно независимой*, если не существует нетривиальной линейной комбинации этих векторов, равной $\vec{0}$. В противном случае, эта система называется *линейно зависимой.*

Рассмотрим несколько простых утверждений о линейной зависимости систем векторов.

Предложение 1.2.1 *Если система векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ содержит нулевой вектор, то система линейно зависима.*

Доказательство. Не нарушая общности можно считать, что первый вектор — нулевой. Составим линейную комбинацию, вида

$$\lambda_1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_n, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Ясно, что эта линейная комбинация дает нулевой вектор, но не является тривиальной. Следовательно, $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ – линейно зависимая система.

■

Предложение 1.2.2 *Система векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через остальные.*

Доказательство. Пусть система $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ линейно зависима. Это означает, что

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0},$$

причем хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Перенумеровав, если нужно, векторы, мы можем считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Умножим обе части последнего равенства на $1/\lambda_1$. Получим

$$\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{a}_n = \vec{0},$$

а следовательно

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \cdots + \mu_n\vec{a}_n,$$

где $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \mu_n = -\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

Обратно, пусть некоторый вектор системы $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ линейно выражается через остальные. Перенумеровав, если нужно, векторы, можно считать, что это вектор $\vec{a}_1$:

$$\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \cdots + \mu_n\vec{a}_n.$$

Но тогда линейная комбинация

$$\vec{a}_1 - \mu_2\vec{a}_2 - \cdots - \mu_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

не тривиальная, что означает линейную зависимость всей системы.

■

1.2.1 Базис линейного пространства

Определение 1.2.1 *Пусть L линейное пространство. Система векторов*

$$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \in L$$

называется базисом линейного пространства L, *если:*

- *Система $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ линейно независима;*
- *для каждого $\vec{b} \in L$ система векторов $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$ линейно зависима.*

Количество элементов базиса называется ***размерностью линейного пространства*** *и обозначается через* $\dim L$.

Замечание. Из второго условия следует, что любой $\vec{b} \in L$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$, то есть

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Предложение 1.2.3 *Множество коллинеарных векторов образует линейное пространство L, размерность которого* $\dim L = 1$ *а базис в L составляет любой ненулевой вектор из L.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ произвольный ненулевой вектор. Система векторов $\{\vec{a}\}$, состоящая из одного вектора, линейно независима. Действительно, пусть $\lambda\vec{a} = \vec{0}$. Тогда $|\lambda||\vec{a}| = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{0}$, значит $|\vec{a}| \neq 0$, и следовательно $\lambda = 0$. Таким образом, не существует нетривиальной линейной комбинации данной системы, равной нулевому вектору, что означает линейную независимость системы.

Пусть $\vec{b}$ произвольный вектор, коллинеарный $\vec{a}$. Рассмотрим два случая:

а) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

Пусть $|\vec{b}| = b$, $|\vec{a}| = a$. Рассмотрим $\vec{c} = \frac{b}{a}\vec{a}$. Тогда $\vec{c} \upuparrows \vec{a}$ и так как $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $\vec{c} \upuparrows \vec{b}$. Поскольку $|\vec{c}| = \frac{b}{a}|\vec{a}| = b$, то $\vec{c} = \vec{b}$ как векторы, имеющие одинаковую длину и направление. Таким образом, $\vec{b} = \frac{b}{a}\vec{a}$, то есть вектор $\vec{b}$ линейно выражается через вектор $\vec{a}$.

б) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

Аналогично п. а), легко показать, что $\vec{b} = -\frac{b}{a}\vec{a}$.

Таким образом, базис пространства коллинеарных векторов составляет произвольный вектор $\{\vec{a}\} \neq \vec{0}$ и размерность $\dim L = 1$.

■

Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются *компланарными*, если представляющие их направленные отрезки расположены в одной или параллельных плоскостях.

Предложение 1.2.4 *Множество компланарных векторов образует линейное пространство L, размерность которого $\dim L = 2$, а базис в L составляет любая пара неколлинеарных векторов.*

Доказательство. Действительно, пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны. Отложим их от общего начала O. Пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ направленные отрезки, представляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ определяют плоскость. По правилу сложения направленных отрезков, линейная комбинация $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ является диагональю параллелограмма, лежащего, очевидно, в этой же плоскости. Следовательно, вектор $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и, таким образом, множество компланарных векторов образует линейное пространство.

Пусть $\vec{a}_1$ и ,$\vec{a}_2$ неколлинеарные векторы, тогда система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ линейно независима. Действительно, пусть

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Если комбинация нетривиальна, скажем $\lambda_1 \neq 0$ то, $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2$, а следовательно, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Противоречие.

Пусть $\vec{b}$ произвольный вектор, компланарный $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Отложим векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{b}$ от общего начала O и пусть $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответствующие направленные отрезки. Через точку B проведем прямые, параллельные отрезкам OA_1 и OA_2. Пусть B_1 и B_2 точки пересечения этих прямых с прямыми отрезков OA_1 и OA_2. Тогда, очевидно, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} = \lambda\,\overrightarrow{OA_1} + \mu\,\overrightarrow{OA_2}$ для некоторых λ и μ. Переходя к соответствующим векторам, получаем

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2.$$

Таким образом, система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ образует базис рассматриваемого линейного пространства и $\dim L = 2$.

■

Аналогичным образом нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 1.2.5 *Множество векторов в пространстве образует линейное пространство L, размерность которого $\dim L = 3$, а базис в L составляют любые три некомпланарных вектора.*

Важными следствиями доказанных утверждений являются следующие критерии линейной зависимости, доказательства которых оставляем читателю.

Предложение 1.2.6 *Два геометрических вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они зависимы.*

Предложение 1.2.7 *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Более формальные рассмотрения необходимы при рассмотрении нижеследующего утверждения.

Упражнение 1.2.1 *Пусть L линейное пространство строк длины n. Доказать, что размерность $\dim L = n$, а базис в L составляют векторы*

$$\vec{e}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\},\ \vec{e}_2 = \{0, 1, \ldots, 0\},\ \ldots,\ \vec{e}_n = \{0, 0, \ldots, 1\}.$$

1.2.2 Координаты вектора

Пусть L линейное пространство, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ базис в нем. Пусть $\vec{b} \in L$ произвольный вектор. Тогда

$$\vec{b} = b^1\vec{a}_1 + b^2\vec{a}_2 + \cdots + b^n\vec{a}_n,$$

где $b^i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Набор чисел $\{b^1, \ldots, b^n\}$ называется *координатами вектора* $\vec{b}$ относительно базиса $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Упражнение 1.2.2 *Докажите, что соответствие $\vec{b} \to \{b^1, \ldots, b^n\}$ является взаимно однозначным.*

Упорядоченный набор чисел $\{b^1, \ldots, b^n\}$ в вышеприведенном разложении будем называть координатным представлением вектора $\vec{b}$ (в заданном базисе) и записывать $\vec{b} = \{b^1, \ldots, b^n\}$.

Зафиксируем базис $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Пусть $\vec{b}$ и $\vec{c}$ два произвольных вектора в L. Тогда относительно выбранного базиса векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ могут быть представлены своими координатами:

$$\vec{b} = \{b^1, \ldots, b^n\}, \quad \vec{c} = \{c^1, \ldots, c^n\}.$$

Легко проверить, что:

а) $\vec{b} + \vec{c} = \{b^1 + c^1, \ldots, b^n + c^n\}$;

б) $\lambda\vec{b} = \{\lambda b^1, \ldots, \lambda b^n\}$.

Действительно, запишем последовательно

$$\vec{b} = b^1\vec{a}_1 + \cdots + b^n\vec{a}_n,$$
$$\vec{c} = c^1\vec{a}_1 + \cdots + c^n\vec{a}_n,$$

$$\vec{b} + \vec{c} = b^1\vec{a}_1 + \cdots + b^n\vec{a}_n + c^1\vec{a}_1 + \cdots + c^n\vec{a}_n =$$
$$(b^1 + c^1)\vec{a}_1 + \cdots + (b^n + c^n)\vec{a}_n,$$

а значит, $\vec{b} + \vec{c} \to \{b^1 + c^1, \ldots, b^n + c^n\}$, то есть $\vec{b} + \vec{c} = \{b^1 + c^1, \ldots, b^n + c^n\}$.

Аналогично проверяется и п. б).

Предложение 1.2.8 *Два вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$\vec{b} = \{b^1, \ldots, b^n\}, \quad \vec{c} = \{c^1, \ldots, c^n\}$$

координатные представления векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и пусть эти векторы коллинеарны. Тогда они линейно зависимы , т.е.

$$\vec{b} = \lambda\vec{c}.$$

Переходя к координатным представлениям, имеем:

$$\{b^1, \dots, b^n\} = \lambda\{c^1, \dots, c^n\} \quad \Rightarrow \quad \{b^1, \dots, b^n\} = \{\lambda c^1, \dots, \lambda c^n\}.$$

И поскольку координаты вектора относительно данного базиса определены единственным образом, то

$$b^1 = \lambda c^1, \dots, b^n = \lambda c^n.$$

■

Предложение 1.2.9 *Три вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ компланарны тогда и только тогда, когда координаты одного из них линейно выражаются через координаты остальных.*

Доказательство. Действительно, пусть векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ компланарны. Тогда они линейно зависимы, а значит для одного из них, скажем $\vec{b}$, можно записать

$$\vec{b} = \lambda\vec{c} + \mu\vec{p}.$$

Переходя к координатам, получим

$$\{b^1, \dots, b^n\} = \{\lambda c^1 + \mu p^1, \dots, \lambda c^n + \mu p^n\}.$$

И поскольку координаты вектора относительно данного базиса определены единственным образом, то

$$\begin{cases} b^1 = \lambda c^1 + \mu p^1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ b^n = \lambda c^n + \mu p^n. \end{cases}$$

■

1.3 Аффинное пространство

Пусть A множество произвольной природы. L линейное пространство, $dim\, L = n$.

Определение 1.3.1 *Пара $\mathcal{A} = (A, L)$ называется аффинным пространством, если существует (задано) отображение $\varphi : A \times A \to L$, ставящее в соответствие точкам $M_1, M_2 \in A$ единственный вектор в L, обозначаемый как $\overrightarrow{M_1M_2}$, причем*

1. *Для любой точки $M_1 \in A$ и любого вектора $\vec{a} \in L$ существует единственная точка $M_2 \in A$ такая, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a}$,*

2. *для любых $M_1, M_2, M_3 \in A$ имеет место равенство:*

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Примеры.

1. *Плоскость как аффинное пространство.* Пусть A плоскость, L – множество векторов на плоскости. Зададим отображение $\varphi : A \times A \to L$, сопоставляя паре точек (M_1, M_2) направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда пара

$$\mathcal{A} = (A, L)$$

образует аффинное пространство, называемое *аффинной плоскостью.*

2. R^n *как аффинное пространство.* Рассмотрим точечное множество $A = R^n_{\text{точ}} = (x_1, \dots, x_n)$ и линейное пространство $L = R^n_{\text{вект}} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Зададим отображение $\varphi : R^n_{\text{точ}} \times R^n_{\text{точ}} \to R^n$ действующее по правилу

$$\varphi(M_1, M_2) = \{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(2)} - x_n^{(1)}\},$$

где $M_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $M_2 = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$. Тогда пара

$$R^n_{\text{аф}} = (R^n_{\text{точ}}, R^n_{\text{вект}})$$

является аффинным пространством.

1.3.1 Аффинная система координат

Пусть $\mathcal{A}^n = (A, L)$ аффинное пространство. Зафиксируем точку $O \in A$ и произвольный базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in L$. Пусть $M \in A$ – произвольная точка. Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точка M. Разложим $\overrightarrow{OM}$ относительно выбранного базиса:

$$\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n.$$

Набор чисел $(x^1, \dots, x^n)$ называется *аффинными координатами* точки M (относительно базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$), а построенная система координат называется *аффинной системой координат.*

Предложение 1.3.1 *Пусть M_1, M_2 две произвольные точки A^n. Пусть $(x^1_{(1)}, \dots, x^n_{(1)})$ – аффинные координаты точки M_1, $(x^1_{(2)}, \dots, x^n_{(2)})$ – аффинные координаты точки M_2. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты*

$$\{x^1_{(2)} - x^1_{(1)}, \dots, x^n_{(2)} - x^n_{(1)}\}.$$

Доказательство. Для простоты, рассмотрим случай $n = 2$. Имеем,

$$\vec{r}_{M_1} = x^1_{(1)}\vec{e}_1 + x^2_{(1)}\vec{e}_2, \quad \vec{r}_{M_2} = x^1_{(2)}\vec{e}_1 + x^2_{(2)}\vec{e}_2.$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1} = x^1_{(2)}\vec{e}_1 + x^2_{(2)}\vec{e}_2 - x^1_{(1)}\vec{e}_1 - x^2_{(1)}\vec{e}_2 =$$
$$= (x^1_{(2)} - x^1_{(1)})\vec{e}_1 + (x^2_{(2)} - x^2_{(1)})\vec{e}_2,$$

что и требовалось доказать.

■

1.3.2 Формула деления отрезков в данном отношении

Пусть A^3 (геометрическое) аффинное пространство, $M_1, M_2 \in A$. Будем говорить, что точка M *делит* отрезок $[M_1, M_2]$ в отношении $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, если

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\overrightarrow{MM_2}.$$

Положим $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и перепишем последнее условие в виде

$$\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{MM_2}, \quad k \in [0; +\infty).$$

Найдем координаты точки M, если известны координаты точек M_1 и M_2. Пусть $O\,\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – аффинная система координат. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1,\ \overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r},\\
&\vec{r} - \vec{r}_1 = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}),\\
&\vec{r}(1 + \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}) = \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\vec{r}_2 + \vec{r}_1,\\
&\vec{r} = \tfrac{\lambda_1\vec{r}_2 + \lambda_2\vec{r}_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Итак, радиус-вектор искомой точки записывается в виде:

$$\vec{r} = \frac{\lambda_1\vec{r}_2 + \lambda_2\vec{r}_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Заметим, что полученное выражение является векторным и не зависит от размерности аффинного пространства.

Чтобы выписать результат в координатной форме, поступим следующим образом. Положим $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – радиус-вектор точки M. Тогда

$$\{x, y, z\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\{x_2, y_2, z_2\} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\{x_1, y_1, z_1\}.$$

Откуда немедленно находим:

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2},\\[1ex] y = \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2},\\[1ex] z = \frac{\lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{cases}$$

Упражнение 1.3.1 (Обобщенная задача и деление отрезка) *Будем говорить, что точка M делит отрезок $[M_1, M_2]$ в отношении k в обобщенном смысле, если выполняется равенство $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{M_2M}$, где $k \in \mathbb{R}$. Скажем, что точка M делит отрезок $[M_1, M_2]$ внутренним образом, если $k \in [0, +\infty)$, и внешним, если $k < 0$.*

Показать, что если

1. $-\infty < k < -1$, *то точка M находится за точкой M_2.*
2. $-1 < k < 0$, *то точка M находится за точкой M_1.*
3. $0 \le k < +\infty$, *то точка M находится внутри $[M_1, M_2]$*

Показать, что для любого k

$$\vec{r}_M = \frac{k\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{k + 1}, \qquad k \in \mathbb{R}\ (k \neq -1).$$

1.3.3 Уравнение прямой в аффинном пространстве

Параметрическое векторное уравнение прямой

Рассмотрим геометрическую аффинную плоскость. Введем аффинную систему координат. Пусть l – прямая и M_0 – точка на прямой l. Пусть задан вектор $\vec{a}$, параллельный прямой l. Пусть M — произвольная точка на l. Пусть r_0 и r радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда

$$\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{a}.$$

Значит, для каждой точки $M \in l$ существует параметр t такой, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{a}$. Откуда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}.$$

Полученное уравнение называется *векторным параметрическим уравнением прямой* на аффинной плоскости.

Тот факт, что рассуждения велись относительно геометрических векторов на плоскости очевидно не существенен. Абсолютно аналогично мы могли рассуждать о прямой в пространстве. Естественно обобщить рассмотрения и называть это уравнение *векторным параметрическим уравнением прямой* в общем аффинном пространстве. Векторное уравнение прямой не зависит от размерности.

Параметрическое координатное уравнение прямой

Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ — аффинная система координат, $M_0(x_0, y_0)$ —начальная точка прямой, $M(x, y) \in A^2$ —произвольная точка прямой, $\vec{a}$ – направляющий вектор прямой с координатами: $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$. Тогда $\{x, y\} = \{x_0, y_0\} + t\{a_x, a_y\}$. Откуда получаем параметрическое координатное уравнение прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x\,t \\ y = y_0 + a_y\,t. \end{cases}$$

Параметрическое координатное уравнение прямой в пространстве выписывается аналогично:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases}$$

Ясно, что в аффинном $n-$ мерном пространстве параметрическое координатное уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{a^1, \ldots, a^n\}$, будет иметь вид:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^0 + a^1 t, \\ x^2 = y_0^2 + a^2 t, \\ \ldots \\ x^n = z_0^n + a^n t, \end{cases}$$

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Как известно, через две заданные точки проходит единственная прямая. Напишем ее уравнения. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ заданные точки, r_0 и r_1 соответствующие радиус-векторы. В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ с координатами $\vec{a} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$. Тогда векторное параметрическое уравнение примет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t = (1-t)\vec{r}_0 + t\vec{r}_1.$$

В координатном выражении (для прямой в A^3) получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0(1-t) + x_1 t, \\ y = y_0(1-t) + y_1 t, \\ z = z_0(1-t) + z_1 t. \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой

Уравнение прямой в $\mathcal{A}^n$ можно выписать в форме, не содержащей параметр в явном виде. Рассмотрим в начале $n = 2$. Запишем параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - x_0 = a^1 t \\ y - y_0 = a^2 t \end{cases}$$

и исключим параметр t. В результате получим *каноническое уравнение* прямой на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{a^1} = \frac{y - y_0}{a^2} \ (= t)$$

При этом будем рассматривать дроби как отношения и пользоваться соглашением: если $a^1 = 0$, тогда $x - x_0 = 0$, а если $a^2 = 0$, и $a^1 \neq 0$, то $y - y_0 = 0$.

При $n = 3$ каноническое уравнение прямой выписывается аналогично:

$$\frac{x - x_0}{a^1} = \frac{y - y_0}{a^2} = \frac{z - z_0}{a^3}.$$

Общее уравнение прямой на аффинной плоскости A^2

Запишем каноническое уравнение прямой на аффинной плоскости

$$\frac{x - x_0}{a^1} = \frac{y - y_0}{a^2}$$

и раскроем пропорцию в виде:

$$a^2(x - x_0) - a^1(y - y_0) = 0.$$

Положим $A = a^2, B = -a^1$. Тогда уравнение прямой на плоскости запишется в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

или

$$Ax + By + C = 0,$$

где $C = -(Ax_0 + By_0)$. Последнее уравнение называется *общим уравнением прямой* на аффинной плоскости.

Коэффициентам A и B в каноническом уравнении можно придать определенный *геометрический смысл.* Для этого введем понятие верхней и нижней полуплоскости относительно данной прямой. А именно, рассмотрим функцию

$$F(x, y) = Ax + By + C.$$

Тогда точки прямой удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. *Верхней полуплоскостью* относительно заданной прямой называется подмножество

$$\pi_+ = \{(x, y) \in \mathcal{A}^2 \mid F(x, y) > 0\},$$

а *нижней полуплоскостью* подмножество

$$\pi_- = \{(x, y) \in \mathcal{A}^2 \mid F(x, y) < 0\}.$$

Введем в рассмотрение *вектор аффинной нормали* $N = \{A, B\}$.

Предложение 1.3.2 *Вектор аффинной нормали $\vec{N} = \{A, B\}$ направлен в верхнюю полуплоскость относительно прямой $Ax + By + C = 0$.*

Доказательство. Действительно, пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на данной прямой. Отложим от точки M_0 вектор $\vec{N}$. Обозначим через $M_1(x_1, y_1)$ его концевую точку. Тогда

$$x_1 = x_0 + A, \quad y_1 = y_0 + B.$$

Вычислим $F(x_1, y_1)$:

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = \underbrace{Ax_0 + By_0 + C}_{=0} + A^2 + B^2 > 0,$$

что и завершает доказательство.

■

Взаимное расположение двух прямых на $\mathcal{A}^2$

Прямая на плоскости всегда может быть задана своим общим уравнением (равно как и каноническим или параметрическим). В связи с этим, задачу о взаимном расположении двух прямых на плоскости можно решать с использованием наиболее удобных уравнений. Для данной задачи используем именно общие уравнения.

Теорема 1.3.1 *Пусть l_1, l_2 две прямые на плоскости заданные уравнениями:*

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Прямые l_1 и l_2

а) не имеют ни одной общей точки, если $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \neq \frac{C}{C_1}$*;*

б) имеют одну общую точку, если $\frac{A}{A_1} \neq \frac{B}{B_1}$*;*

в) совпадают, если $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$*.*

Доказательство. Прямые параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда координаты направляющих векторов пропорциональны. Если $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2\}$ векторы аффинных нормалей данных прямых, то их направляющие векторы легко находятся: $\vec{a}_1 = \{B_1, -A_1\}$, $\vec{a}_2 = \{B_2, -A_2\}$. Коллинеарность направляющих векторов, таким образом, эквивалентна коллинеарности аффинных нормалей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

откуда $A_1 = \mu A_2, \quad B_1 = \mu B_2$.

Общая точка двух данных прямых может быть найдена как решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямые параллельны, то получим

$$\begin{cases} \mu A_2x_0 + \mu B_2y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Умножим вторую строку на μ и вычтем одну строку из другой. Тогда имеем , что $\mu C_2 - C_1 = 0$. Следовательно если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \mu$, то прямые совпадают. А если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые не имеют общих точек (параллельны и не совпадают).

Если прямые не параллельны, то есть $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, найти которое можно так. Умножим первое уравнение на A_2, а второе на A_1, и вычтем одно из другого. Получим

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y + (A_2C_1 - A_1C_2) = 0,$$

откуда находим,

$$y_0 = -\frac{(A_2C_1 - A_1C_2)}{A_2B_1 - A_1B_2}.$$

Аналогично,

$$x_0 = -\frac{(B_2C_1 - B_1C_2)}{B_2A_1 - A_2B_1}.$$

■

Упражнение 1.3.2 *Пусть прямые* l_1 *и* l_2 *заданы векторными параметрическими уравнениями:*

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t, \quad l_2 : \vec{\rho} = \vec{r}_2 + \vec{b}t.$$

Доказать, что

а) $l_1 \cap l_2 = \{$*единственная точка*$\}$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

б) $l_1 \parallel l_2$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} \parallel \vec{b} \nparallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$;

в) $l_1 \equiv l_2$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

Упражнение 1.3.3 *Пусть прямые l_1 и l_2 заданы векторными параметрическими уравнениями:*

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad l_2 : Ax + By + C = 0,$$

где $r_0 = \{x_0, y_0\}$ и $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$. Доказать, что

а) $l_1 \cap l_2 = \{$*единственная точка*$\}$ *тогда и только тогда, когда* $Aa_x + Ba_y \neq 0$;

б) $l_1 \parallel l_2$ *тогда и только тогда, когда* $Aa_x + Ba_y = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$;

в) $l_1 \equiv l_2$ *тогда и только тогда, когда* $Aa_x + Ba_y = 0$ *и* $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

1.3.4 Уравнение плоскости в $\mathcal{A}^3$

Пусть в пространстве дана точка M_0 и два неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. Обозначим через $\vec{r}_0$ радиус-вектор точки M_0. Точка M принадлежит плоскости, проходящей через точку M_0 тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны. А так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а значит образуют базис в пространстве компланарных векторов, то $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$. Если обозначить через $\vec{r}$ радиус-вектор точки M, то $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ и мы получаем векторное равенство $\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$. Уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

называется *векторным параметрическим уравнением плоскости* в $\mathcal{A}^3$. Точка M_0 называется *начальной точкой* плоскости, а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ называются *направляющими векторами* плоскости.

Если направляющие векторы и начальная точка заданы координатами

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \quad \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\},$$

то координаты произвольной точки плоскости, отвечающей радиусу-вектору $\vec{r} = \{x, y, z\}$, можно легко найти, расписывая по-координатно векторное уравнение. А именно,

$$\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + u\,\{a_x, a_y, a_z\} + v\,\{b_x, b_y, b_z\}.$$

Отсюда получаем параметрические *координатные* уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = z_0 + ua_z + vb_z. \end{cases}$$

Матрицей размера 2×2 называется таблица, состоящая их двух строк и двух столбцов. Например,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Матрица называется числовой, если ее элементами являются числа. *Определителем* числовой матрицы $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $ad - cb$. Определитель матрицы обозначается $\det(M)$ или "прямыми скобками" вида $|M|$. Например,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Предложение 1.3.3 *Определитель матрицы* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *равен 0 тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) пропорциональны, то есть* $a = \lambda c, \quad b = \lambda d.$

Доказательство. Действительно, если $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$, то $ad - cb = 0$, то есть

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda,$$

где λ – коэффициент пропорциональности.

■

Возвращаясь к уравнению плоскости, введем в рассмотрение три определителя

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix},$$

составленных из координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Предложение 1.3.4 *Два вектора* $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ *и* $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Доказательство. Действительно, равенство $\Delta_z = 0$ влечет пропорцию $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$, а равенство $\Delta_x = 0$ влечет пропорцию $\frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, а значит все координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны. По признаку коллинеарности, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Обратное очевидно.

■

Предложение 1.3.5 *Уравнение плоскости, проходящей через точку с радиусом-вектором* $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, *в направлении векторов* $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ *и* $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$) *можно записать в виде*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\quad A = \Delta_x, \quad B = -\Delta_y, \quad C = \Delta_z.$

Доказательство. Так как $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$. Положим, что $\Delta_z \neq 0$. Рассмотрим параметрическое уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = z_0 + ua_z + vb_z. \end{cases}$$

и разрешим первые два уравнения относительно параметров u и v в виде

$$u = \frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} x-x_0 & b_x \\ y-y_0 & b_y \end{vmatrix}, \quad v = \frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} a_x & x-x_0 \\ a_y & y-y_0 \end{vmatrix}.$$

Подставим это решение в третье уравнение. Получим

$$z - z_0 = a_z\frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} x-x_0 & b_x \\ y-y_0 & b_y \end{vmatrix} + b_z\frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} a_x & x-x_0 \\ a_y & y-y_0 \end{vmatrix}.$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$\Delta_z(z - z_0) = a_z\begin{vmatrix} x-x_0 & b_x \\ y-y_0 & b_y \end{vmatrix} + b_z\begin{vmatrix} a_x & x-x_0 \\ a_y & y-y_0 \end{vmatrix}$$

и далее

$$\Delta_z(z - z_0) = a_z\Big(b_y(x-x_0) - b_x(y-y_0)\Big) + b_z\Big(a_x(y-y_0) - a_y(x-x_0)\Big).$$

В правой части соберем коэффициенты при $x - x_0$ и $y - y_0$. Получим

$$\Delta_z(z - z_0) = (\underbrace{a_zb_y - b_za_y}_{-\Delta_x})(x-x_0) - (\underbrace{a_zb_x - b_za_x}_{\Delta_y})(y-y_0).$$

Что и требовалось доказать.

Обратно, рассмотрим множество точек пространства, координаты котрых удовлетворяют уравнению

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0).$$

Покажем, что это есть плоскость, проходящая через точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Сама точка очевидно принадлежит этому множеству. Положим, не нарушая общности, что $C \neq 0$. Тогда все решения данного уравнения имеют вид

$$z = z_0 - \frac{A}{C}(x-x_0) - \frac{B}{C}(y-y_0),$$

причем x и y произвольны. Положим $x - x_0 = u$, $y - y_0 = v$ и обозначим $-\frac{A}{C} = p$, $-\frac{B}{C} = q$. Тогда множество решений перепишется в виде

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + u, \\ y = y_0 + v, \\ z = z_0 + pu + qv \end{array}\right. ,$$

что представляет из себя плоскость с направляющими векторами $\vec{a} = \{1, 0, p\}$ и $\vec{b} = \{0, 1, q\}$.

■

Общее уравнение плоскости в аффинном пространстве

Заметим, что уравнение плоскости в виде $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ можно преписать как $Ax+by+Cz+D=0$, положив $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Общим уравнением плоскости в $\mathcal{A}^3$ называется уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Вектор $\vec{N}=\{A,B,C\}$ называется вектором аффинной нормали данной плоскости. Его геометрическое свойство аналогично геометрическому свойству аффинной нормали прямой на плоскости. А именно, введем в рассмотрение функцию

$$F(x,y,z)=Ax+By+Cz+D.$$

Тогда точкам плоскости отвечают решения уравнения $F(x,y,z)=0$. *Верхним* (соответственно, *нижним*) полупространством относительно заданной плоскости называется множество точек в $\mathcal{A}^3$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$F(x,y,z)>0 \quad (\text{ соответственно } F(x,y,z)<0)$$

Упражнение 1.3.4 *Пусть $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ плоскость в $\mathcal{A}^3$. Покажите, что*

- *Точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ принадлежат одному полупространству тогда и только тогда, когда $F(x_1,y_1,z_1)$ и $F(x_2,y_2,z_2)$ имеют один и тот же знак.*

- *вектор $\vec{N}=\{A,B,C\}$ направлен в верхнее полупространство относительно плоскости π.*

Взаимное расположение прямой и плоскости в аффинном пространстве

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{A}^3$ прямую l и плоскость π. Зададим прямую параметрически, а плоскость – общим уравнением. Взаимное расположение прямой и плоскости описывается следующим утверждением.

Предложение 1.3.6 *Пусть прямая l и плоскость π заданы уравнениями*

$$l: \left\{\begin{array}{l} x=x_0+a_x\,t \\ y=y_0+a_y\,t \\ z=z_0+a_z\,t \end{array}\right., \qquad \pi:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Тогда

а) $l\cap\pi=\{\text{единственная точка}\}$ тогда и только тогда, когда $Aa_x+Ba_y+Ca_z\neq 0$;

б) $l\parallel\pi$ тогда и только тогда, когда $Aa_x+Ba_y+Ca_z=0$ и $Ax_0+By_0+Cy_0+D\neq 0$;

в) $l\subset\pi$ тогда и только тогда, когда $Aa_x+Ba_y+Ca_z=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

Доказательство. Будем искать множество общих точек прямой и плоскости. Если они имеют общую точку, то для точек прямой найдется такое значение параметра $t = t_0$, что точка $(x_0 + a_x t_0, x_0 + a_y t_0, z_0 + a_z t_0)$ будет лежать на плоскости, а значит удовлетворять ее уравнению. Сделаем подстановку

$$A(x_0 + a_x t_0) + B(y_0 + a_y t_0) + C(z_0 + a_z t_0) + D = 0$$

и приведем подобные относительно t_0

$$(Aa_x + Ba_y + Ca_z)t_0 + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Если $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$, то нужное значение параметра существует, причем единственное, что и доказывает а). Если $Aa_x+Ba_y+Ca_z = 0$, но $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ то нужного значение параметра не существует, а значит общей точки у прямой и плоскости нет, что доказывает б). Если $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ то при любом значение параметра точка прямой удовлетворяет уравнению плоскости, что доказывает в).

■

Упражнение 1.3.5 Пусть прямая и плоскость заданы параметрически в виде $l : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{p}t$ и $\pi : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}u + \vec{b}v$. Доказать, что

а) $l \cap \pi = \{$единственная точка$\}$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ не компланарны;

б) $l \parallel \pi$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, но векторы $\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}$ не компланарны;

в) $l \subset \pi$ $l \parallel \pi$ тогда и только тогда, когда оба вектора $\vec{p}$ и $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ компланарны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве. Общее уравнение прямой в $\mathcal{A}^3$.

Рассмотрим взаимное расположение двух плоскостей а трехмерном пространстве, заданных своими общими уравнениями.

Предложение 1.3.7 *Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Рассмотрим вектры $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, $\vec{Q}_1 = \{A_1, B_1, C_1, D_1\}$, $\vec{Q}_2 = \{A_2, B_2, C_2, D_2\}$. Тогда

а) $\pi_1 \cap \pi_2 = \{$прямая$\}$ тогда и только тогда, когда $\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$;

б) $\pi_1 \parallel \pi_2$ тогда и только тогда, когда $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$, но $\vec{Q}_1 \nparallel \vec{Q}_2$

в) $\pi_1 = \pi_2$ тогда и только тогда, когда $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2$.

Доказательство. Будем искать множество общих точек заданных плоскостей. Оно описывается системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$. Пусть для определенности $\Delta_z \neq 0$. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2 \end{cases}$$

и разрешим ее относительно x и y. Решение имеет вид

$$x = -\frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} C_1z + D_1 & B_1 \\ C_2z + D_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad y = -\frac{1}{\Delta_z}\begin{vmatrix} A_1 & C_1z + D_1 \\ A_2 & C_2z + D_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители, получим

$$x = -\frac{1}{\Delta_z}(-\Delta_x z + \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}), \qquad y = -\frac{1}{\Delta_z}(\Delta_y z + \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix})$$

что дает уравнение прямой, если положить $z = t$. Наконец, заметим, что условие $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$ эквивалентно условию $\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$.

Пусть теперь $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = 0$. Тогда $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ и, следовательно, имеют место равенства

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1.$$

и система примет вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на λ и вычтем второе. Получим

$$\lambda D_1 - D_2 = 0.$$

Если это равенство противоречиво, то система не совместна и плоскости не имеют общих точек. В этом случае, очевидно, $\vec{Q}_1 \nparallel \vec{Q}_2$. Если же равенство выполнено, то уравнения плоскостей отличаются некоторым множителем, а значит они совпадают. В этом случае, $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2$.

■

Общим уравнением прямой в трехмерном аффинном пространстве называется уравнение вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

с условием $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \nparallel \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

1.4 Евклидово пространство

1.4.1 Скалярное произведение геометрических векторов

Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим их от одной точки O и представим их направленными отрезками $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, а именно,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{ON}.$$

Два луча $ray(\overrightarrow{OM})$ и $ray(\overrightarrow{ON})$ определяют два угла, меньший из которых назовем *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим этот угол как $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$).

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ будем обозначать символом угловыми скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle$. То есть по определению,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \quad \text{где}\, \varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}.$$

Выведем основные свойства скалярного умножения.

1. *Положительная определенность:* $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причем $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

2. *Симметричность:* $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$.

3. *Линейность:* $\langle\lambda\vec{a},\vec{b}\rangle = \lambda\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

4. *Дистрибутивность по сложению:* $\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{c}\rangle$.

Доказательство.
Доказательство первых двух свойств тривиально. Действительно,

- угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}$ равен 0, а значит $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$. Причем равенство имеет место только для $\vec{a} = \vec{0}$.

- по определению, угол между векторами и их длины не зависят от порядка, в котором мы будем брать векторы для скалярного умножения.

Проверим *линейность*. Если $\lambda = 0$, то проверка очевидна. Пусть $\lambda \neq 0$. Обозначим $\varphi = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$. Тогда

$$(\lambda\vec{a})\,\hat{}\,\vec{b} = \begin{cases} \varphi, & \lambda > 0, \\ \pi - \varphi, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Если $\lambda > 0$ то имеем:

$$\langle\lambda\vec{a},\vec{b}\rangle = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = |\lambda|\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = \lambda\,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

Если $\lambda < 0$ то

$$\langle\lambda\vec{a},\vec{b}\rangle = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|(-\cos\varphi) = \lambda\,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

Для проверки *дистрибутивности*, введем понятие *проекции* вектора на ось. Обозначим через $\vec{e}_a$ единичный вектор, сонаправленный с $\vec{a}$, называемый *ортом* вектора $\vec{a}$. Очевидно,

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Вектор $\vec{e}_a$ определяет ось (т.е. прямую с выбранным на ней направлением). Будем обозначать ось вектора $\vec{a}$ через $l_{\vec{a}}$.

Ортогональной проекцией вектора $\vec{b}$ *на ось* $l_{\vec{a}}$ называется вектор

$$\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})\,\vec{e}_a = \left\langle\vec{b},\vec{e}_a\right\rangle\vec{e}_a.$$

Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ произвольные векторы на плоскости или в пространстве. Тогда векторы $\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{b}$ и $\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{c}$ коллинеарны и равенство

$$\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{b} + \overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{c} = \overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ (\vec{b}+\vec{c})$$

становится очевидным, если воспользоваться правилом сложения направленных отрезков.

Далее имеем:

$$\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{b} = \left\langle\vec{b},\vec{e}_a\right\rangle\vec{e}_a, \qquad \overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{c} = \left\langle\vec{c},\vec{e}_a\right\rangle\vec{e}_a,$$

а значит

$$\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{b} + \overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ \vec{c} = \Big(\langle\vec{b},\vec{e}_a\rangle + \langle\vec{c},\vec{e}_a\rangle\Big)\vec{e}_a.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{\Pi}_{l_{\vec{a}}}\ (\vec{b}+\vec{c}) = \langle\vec{b}+\vec{c},\vec{e}_a\rangle\,\vec{e}_a.$$

Воспользовавшись векторным равенством для проекций, имеем:

$$\Big(\langle\vec{b},\vec{e}_a\rangle + \langle\vec{c},\vec{e}_a\rangle\Big)\vec{e}_a = \langle\vec{b}+\vec{c},\vec{e}_a\rangle\,\vec{e}_a.$$

Откуда следует равенство

$$\left\langle\vec{b},\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right\rangle + \left\langle\vec{c},\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right\rangle = \left\langle\vec{b}+\vec{c},\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right\rangle.$$

По свойству линейности, множитель $\frac{1}{|\vec{a}|}$ из каждого слагаемого можно вынести и сократить на него. В результате, приходим к равенству

$$\left\langle\vec{b},\vec{a}\right\rangle + \left\langle\vec{c},\vec{a}\right\rangle = \left\langle\vec{b}+\vec{c},\vec{a}\right\rangle.$$

■

1.4.2 Скалярное произведение в A^n

Рассмотренные в предыдущем параграфе свойства скалярного умножения можно аксиоматизировать и ввести понятие скалярного умножения в произвольном аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$. Пусть L – линейное пространство, ассоциированное с $\mathcal{A}^n$. *Скалярным произведением* в L называется отображение $\left\langle\ ,\ \right\rangle\ :\ L\times L\to\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

- $\left\langle\vec{a},\vec{a}\right\rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причем $\left\langle\vec{a},\vec{a}\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a}=0$.
- $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle = \left\langle\vec{b},\vec{a}\right\rangle$.

- $\langle \lambda\vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.
- $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$.

Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым.* Соответственно, аффинное пространство, ассоциированное пространство которого является евклидовым, называется аффинным евклидовым пространством или просто евклидовым. Обозначать евклидово n- мерное пространство будем через E^n.

Длиной (модулем) вектора в E^n называется величина $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b} \in E^n$ два вектора в E^n. *Косинусом угла* между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется следующая величина:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Упражнение 1.4.1 *Проверить корректность определения, а именно, что*

$$\frac{|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1.$$

1.4.3 Метрическая форма евклидова пространства

Рассмотрим, вначале, случай $n = 2$. Обозначим через $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ векторы базиса плоскости. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвольные два вектора плоскости. Разложим их по базису

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2, \\ \vec{b} &= b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Тогда, используя свойства скалярного умножения, можно записать:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle a^1 b^1 + \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle (a^1 b^2 + a^2 b^1) + \langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle a^2 b^2.$$

Введем обозначения:

$$g_{11} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_1} \rangle, \quad g_{12} = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{e_2}, \vec{e_2} \rangle.$$

Тогда выражение для скалярного произведения перепишется в виде

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = g_{11} a^1 b^1 + g_{12}(a^1 b^2 + a^2 b^1) + g_{22} a^2 b^2.$$

Правая часть полученного выражения называется *метрической формой* евклидовой плоскости. Образуем матрицу

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица g называется *матрицей метрической формы* евклидовой плоскости. Обратно, матрица метрической формы определяет скалярное произведение векторов. Зададим, например,

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\vec{a} = \{a^1, a^2\}$ и $\vec{b} = \{b^1, b^2\}$. Тогда

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 3a^1b^1 + 2(a^1b^2 + a^2b^1) + 5a^2b^2.$$

Если задать векторы конкретно, скажем, $\vec{a} = \{1, -2\}$, $\vec{b} = \{3, 1\}$, то

$$\begin{aligned}
&\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2(1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3) + 5 \cdot (-2) \cdot 1 = -11,\\
&|\vec{a}| = \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle} = 3 \cdot 1^2 + 2(1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1) + 5 \cdot (-2)^2 = \sqrt{1}5,\\
&|\vec{b}| = \sqrt{\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle} = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3 \cdot 1 + 1 \cdot 3) + 5 \cdot 1^2 = \sqrt{4}4.
\end{aligned}$$

С геометрической точки зрения, в рассмотренном примере мы выбрали на плоскости базис такой , что

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{3}, \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{5}, \quad \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = 2.$$

Заметим, что метрическую форму плоскости можно записать в бескоординатном виде, используя матричные операции. Для этого, сформируем из координат векторов столбцы

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Поизведение матрицы на вектор определяется по правилу "строка на столбец то есть

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} \cdot a^1 + g_{12} \cdot a^2 \\ g_{21} \cdot a^1 + g_{22} \cdot a^2 \end{pmatrix}.$$

Определим *транспонированный столбец* a^t как строку , вида

$$a^t = \left[a^1, a^2\right]$$

и определим произведение строки на столбец правилом

$$a^t \cdot b = \left[a^1, a^2\right] \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = a^1 \cdot b^1 + a^2 \cdot b^2.$$

Тогда для метрической формы будем иметь

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a^t \cdot g \cdot b,$$

где $(\ )^t$ означает транспонирование.

В общем случае имеет место полная аналогия. Пусть $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ базис в E^n. Разложим произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по выбранному базису

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + \dots + a^n\vec{e}_n, \quad \vec{b} = b^1\vec{e}_1 + \dots + b^n\vec{e}_n.$$

Образуем симметричную матрицу G с компонентами $g_{ik} = \langle\vec{e}_i, \vec{e}_k\rangle$. Тогда

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}a^ib^k = a^t \cdot g \cdot b,$$

где $a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \cdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \cdots \\ b^n \end{pmatrix}$.

Базис евклидова пространства E^n называется *ортонормированным*, если

$$|\vec{e}_i| = 1, \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k, \ i, k = \overline{1, n}).$$

Матрица метрической формы E^n относительно ортонормированного базиса имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для векторов, заданных своими координатами

$$\vec{a} = \{a^1, a^2\}, \quad \vec{b} = \{b^1, b^2\},$$

относительно ортонормированного базиса, имеем

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^1 b^1 + a^2 b^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2}.$$

Ниже мы покажем, что на плоскости или в пространстве всегда можно выбрать ортонормированный базис. **В дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что рассматриваемый базис ортонормированный.** Если система координат использует выбран ортонормированный базис, то такая система координат называется *декартовой прямоугольной.*

1.4.4 Прямые и плоскости в евклидовом пространстве

Наличие в евклидовом пространстве скалярного произведения позволяет извлечь дополнительную информацию из уравнения прямой и плоскости.

Пусть l – прямая на плоскости. Запишем ее параметрическое уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

Вектор $\vec{N}$, перпендикулярный прямой l, называется ее *вектором нормали.* Пусть N_x, N_y — координаты вектора $\vec{N}$ относительно ортонормированного базиса. Так как $\vec{a}$ лежит на прямой, то $\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = 0$, а значит для всех t

$$\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0.$$

Это уравнение называется векторным общим уравнением прямой на евклидовой плоскости. Переходя к координатам, имеем

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) = 0$$

или

$$N_x x + N_y y - (N_x x_0 + N_y y_0) = 0.$$

Обозначим $A = N_x$, $B = N_y$, $-D = N_x x_0 + N_y y_0$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$Ax + By + D = 0$$

Следовательно, если система координат декартова прямоугольная, то *коэффициенты A и B общего уравнения прямой являются координатам вектора нормали прямой.*

Аналогично свойству аффинной нормали, вектор $\vec{N}$ направлен в верхнюю полуплоскость относительно прямой l.

Пусть π – плоскость в E^3. Запишем ее параметрическое уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}.$$

Если вектор $\vec{N}$ перпендикулярен плоскости , то ($\vec{N}$ перпендикулярен любой прямой, лежащей в плоскости. Следовательно, $\vec{N} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0))$ для всех u, v. Уравнение

$$\left\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \right\rangle = 0$$

называется векторным общим уравнением плоскости в евклидовом пространстве. Если в декартовой прямоугольной системе координат $\vec{N} = \{N_x, N_y, N_z\}$, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, то уравнение плоскости в координатах запишется в виде

$$N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Следовательно, если система координат декартова прямоугольная, то *коэффициенты A, B, C общего уравнения прямой являются координатам вектора нормали плоскости.*

Аналогично свойству аффинной нормали, вектор $\vec{N}$ направлен в верхнее полупространство относительно плоскости π.

Пусть теперь π – гиперплоскости в E^n. Ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_1 t_1 + \dots + \vec{a}_{n-1} t_{n-1}.$$

Вектором нормали гиперплоскости называется вектор $\vec{N}$, такой , что $\vec{N} \perp \vec{a}_i$, $i = 1 \dots n-1$, то есть $\left\langle \vec{N}, \vec{a}_i \right\rangle = 0 \, (i = 1 \dots n-1)$. Тогда для точек гиперплоскости в E^n имеем уравнение

$$\left\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \right\rangle = 0,$$

которое называется векторным общим уравнением гиперплоскости в E^n.

Пусть $x^1, \dots, x^n$ — декартова прямоугольная система координат в E^n. Если $\vec{N} = \{A_1, \dots, A_n\}$, то в координатах уравнение гиперплоскости перепишется в виде

$$A_1 x^1 + \dots + A_n x^n + D = 0.$$

Следовательно, если система координат декартова прямоугольная, то *коэффициенты $A_1, \dots, A_n$ общего уравнения прямой являются координатам вектора нормали гиперплоскости.*

Аналогично свойству аффинной нормали, вектор $\vec{N}$ направлен в верхнее полупространство относительно гиперплоскости π.

В евклидовом пространствем можно придать ясный геометрический смысл и свободному члену в уравнении гиперплоскости. Легко видеть, что $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Если ввести в рассмотрение *единичный* вектор нормали гиперплоскости $\vec{n} = \vec{N}/|\vec{N}|$, то величина $h_0 = -\langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$ численно будет равна расстоянию от начала координат до гиперплоскости. Положительность (отрицательность) h_0 означает, что начало координат находится в нижнем (верхнем) полупространстве относительно данной гиперплоскости. Величина h_0 называется *отклонением* начала координат от гиперплоскости и, таким образом, $D = h_0|\vec{N}|$.

1.4.5 Некоторые задачи, решаемые с помощью скалярного произведения

Расстояние от точки до гиперплоскости в E^n

Рассмотрим случай, когда $n = 2$. Тогда гиперплоскостью в E^2 является прямая. Рассмотрим прямую l:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t.$$

Пусть M – произвольная точка на плоскости E^2.

$$\vec{r}_M = \{x_M, y_M\}.$$

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали прямой. Тогда

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\vec{n}}\,(\vec{r}_M - \vec{r}_0) = h\vec{n},$$

где h – коэффициент пропорциональности. Величина h называется *отклонением точка M от прямой l.*

Расстоянием от точка M до прямой l называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую. Очевидно, расстояние от точки до прямой равно абсолютной величине отклонения $d = |h|$. Легко видеть, что

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\vec{n}}\,(\vec{r}_M - \vec{r}_0) = \langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle \vec{n}.$$

Следовательно,

$$h = \langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle.$$

Заметим, что уравнение прямой l имеет вид: $\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = 0$. Значит, отклонение h – результат подстановки радиус-вектора точка M в левую часть уравнения прямой, при условии единичности вектора нормали.

Уравнение прямой, имеющей единичный вектор нормали, называется *нормированным уравнением прямой* (или уравнением прямой в нормальной форме).

Вычислим отклонение h в координатах. Если прямая l задается общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то нормированное уравнение имеет вид:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Тогда отклонение
$$h = \frac{Ax_M + By_M + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
Если $h > 0$, то точка M находится в верхней полуплоскости относительно прямой l. Если $h < 0$, то в нижней.

Для расстояния от точка M до прямой l получаем формулу
$$d = |h| = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Рассмотрим случай $n = 3$. Гиперплоскость в E^3 это плоскость в обычном смысе. Уравнение плоскости имеет вид: $\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0$. Положим $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$. Ясно, что $\vec{n}$ единичный вектор нормали плоскости. Пусть M – произвольная точка в пространстве E^3, радиус-вектор которой $r\vec{_M} = \{x_M, y_M, z_M\}$. Тогда $\overrightarrow{\text{Пр}}_{\vec{n}}(\vec{r}_M - \vec{r}_0) = h\vec{n}$. Величина h называется отклонением точки M от заданной плоскости. *Расстоянием от точка M до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость.* Очевидно, расстояние от точки до прямой равно абсолютной величине отклонения $d = |h|$. Поскольку
$$h = \langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle,$$
то в векторной форме формула расстояния от точки до плоскости будет иметь вид
$$d = |h| = |\langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle.|$$

Уравнение плоскости, имеющей единичный вектор нормали, называется *нормированным уравнением плоскости.* Если плоскость π задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то нормированное уравнение плоскости имеет вид $\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$. Тогда отклонение точка M от плоскости π является результатом подстановки координат точка N в левую часть нормированного уравнения плоскости. Таким образом,
$$h = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
Для расстояния от точка M до плоскости π получаем
$$d = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В общем случае уравнение гиперплоскости π^{n-1} в E^n имеет вид
$$\pi^{n-1} : \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0.$$

Единичный вектор нормали $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$. Пусть $\vec{r}_M = \{x_M^1, \ldots, x_M^n\}$ – радиус-вектор произвольной точка M в E^n. Отклонением точка M от гиперплоскости π^{n-1} является результат подстановки координат точка M в нормированное уравнение гиперплоскости:
$$h = \langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle.$$

Расстояние от точка M до гиперплоскости π^{n-1} определим как $d = |h|$. Таким образом,

$$d = |\langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle|.$$

Зададим плоскость в декартовых координатах

$$\pi^{n-1}\colon A_1x^1 + \dots + A_nx^n + D = 0.$$

Тогда

$$h = \frac{A_1x_M^1 + \dots + A_nx_M^n}{A_1^2 + \dots + A_n^2},$$

$$d = \frac{|A_1x_M^1 + \dots + A_nx_M^n|}{A_1^2 + \dots + A_n^2}$$

Нахождение точки, симметричной данной относительно гиперплоскости в E^n

Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Зададим прямую

$$l\colon \langle \vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0,$$

найдем единичный вектор нормали $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ и зададим точку $\vec{r}_M = \{x_M, y_M\}$. Тогда

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\vec{n}}(\vec{r}_M - \vec{r}_0) = h\vec{n}$$

и, следовательно, для симметричной точки найдем

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - 2h\vec{n}.$$

Чтобы записать результат в координатах, зададим

$$l\colon Ax + By + C = 0, \quad \vec{r}_M = \{x_M, y_M\}.$$

Раскрывая векторное равенство

$$\{x_{M'}, y_{M'}\} = \{x_M, y_M\} - 2\frac{Ax_M + by_M + C}{A^2 + B^2}\{A, B\},$$

получим

$$\begin{cases} x_{M'} = x_M - 2A\dfrac{Ax_M + by_M + C}{A^2 + B^2}, \\ y_{M'} = y_M - 2B\dfrac{Ax_M + by_M + C}{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

Рассмотрение случаев $n \geq 3$ принципиально не отличается от рассмотрений на плоскости, так как уравнение гиперплоскости снова задается как $\pi\colon \langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0$ и результат в векторной форме будет иметь тот же вид:

$$\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - 2h\vec{n}.$$

Упражнение 1.4.2 *Запишите выведенную формулу в декартовых координатах.*

Нахождение угла между двумя прямыми в E^n

Начнем рассмотрение с $n = 2$. *Углом между прямыми* l_1 и l_2 на плоскости называется меньший из образованных ими углов. Для параллельных или совпадающих прямых угол принимается равным 0.

Если прямые заданы параметрически

$$l_1 \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t, \quad l_2 \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \vec{\tau}\,,,$$

то, очевидно,

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = |\cos(\vec{a}_1 \widehat{\ } \vec{a}_2)| = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

В случае $n = 3$ две прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо параллельны (совпадают), либо являются скрещивающимися. Пересекающиеся или параллельные прямые всегда располагаются в одной плоскости и угол между ними пределяется как для прямых на плоскости. Если же прямые скрещиваются, то углом между l_1 и l_2 называется угол между l_1 и прямой l_2' такой, что $l_1 \cap l_2' \neq \emptyset$ и $l_2' \parallel l_2$. Рассмотрим этот случай.

Пусть

$$\begin{aligned} l_1 &\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t, \\ l_2 &\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \vec{\tau}\,,. \end{aligned}$$

Рассмотрим плоскость

$$\pi \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 v.$$

Тогда $\quad \pi \supset l_1$ и $\pi \supset l_2' \parallel l_2$. Действительно, полагая $u = t, v = 0$, получим уравнение прямой l_1, а полагая $u = 0, v = \vec{\tau}$, получим прямую $l_2' \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_2 \vec{\tau}\,,$, котрая лежит в плрскости π и параллельна прямой l_2. Следовательно,

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = \cos(l_1 \widehat{\ } l_2') = |\cos(\vec{a}_1 \widehat{\ } \vec{a}_2)| = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

В общем случае для двух прямых

$$\begin{aligned} l_1 &\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t, \\ l_2 &\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \vec{\tau}\,, \end{aligned}$$

рассмотрим плоскость $\pi \subset E^n$, заданную уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 v.$$

Как и в случае $n = 3$,

$$\pi \supset l_1, \quad \pi \supset l_2' \parallel l_2$$

и, следовательно,

$$\cos(l_1 \widehat{\ } l_2) = |\cos(\vec{a}_1 \widehat{\ } \vec{a}_2)| = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

Упражнение 1.4.3 *Записать в координатах выражение для* $\cos\varphi$.

Нахождение угла между прямой и гиперплоскостью в E^n

При $n = 3$ решение задачи очевидно. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогодальной проекцией на плоскость. Зададим прямую параметрически

$$l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},$$

а плоскость своим общим уравнением

$$\pi : \left\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N} \right\rangle = 0.$$

Тогда $\sin(l^\frown\pi) = |\cos(\vec{N}^\frown\vec{a})|$ и, следовательно,

$$\sin(l^\frown\pi) = \frac{|\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle|}{|\vec{N}||\vec{a}|}.$$

При $n > 3$ *определим* синус угла между прямой и гиперплоскостью только что полученной формулой.

Нахождение угла между двумя гиперплоскостями в E^n

В случае $n = 3$, углом между плоскостями называется меньший из двух двугранных углов, образованных этими плоскостями. Мерой двугранного угла служит угол между прямыми, перпендикулярными ребру двугранного угла. Нетрудно видеть, что этот угол равен углу между прямыми, перпендикулярными заданным плоскостям. Зададим две плоскости общими уравнениями

$$\pi_1 : \left\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}_1 \right\rangle = 0,$$
$$\pi_2 : \left\langle \vec{r} - \vec{r}_2, \vec{N}_2 \right\rangle = 0.$$

Так как $\vec{N}_1 \perp \pi_1$ и $\vec{N}_2 \perp \pi_2$, то

$$\cos(\pi_1{}^\frown\pi_2) = \frac{|\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle|}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$$

В координатах:

$$\cos(\pi_1{}^\frown\pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пуст в E^n заданы две гиперплоскости

$$\pi_1^{n-1} : \left\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}_1 \right\rangle = 0,$$

$$\pi_2^{n-1} : \left\langle \vec{r} - \vec{r}_2, \vec{N}_2 \right\rangle = 0.$$

Тогда в качестве косинуса угла между ними принимается

$$\cos(\pi_1^{n-1}{}^\frown\pi_2^{n-1}) = \frac{|\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle|}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}.$$

1.5 Ориентация в линейном пространстве

1.5.1 Преобразование базисов и координат

Рассмотрим обычную плоскость. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базис в E^2. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – два произвольных вектора в E^2. Разложим векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2, \\ \vec{f}_2 = c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Сформируем из коэффициентов разложения матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Предложение 1.5.1 *Векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ образуют новый базис плоскости тогда и только тогда, когда* $\det C \neq 0$.

Доказательство. Столбцы матрицы (1.2) составлены из координат векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и поэтому линейная зависимость или независимость векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ эквивалентна линейной зависимости или независимости столбцов матрицы (1.2). Последнее условие эквивалентно вырожденности или невырожденности матрицы (1.2) соответственно.

■

Формулы (1.1) называются формулами *преобразования базисов* или формулами перехода (от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к базису $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$), а невырожденная матрица (1.2) называется *матрицей преобразования базисов.*

Полученные формулы могут быть записаны в бескоординатной, инвариантной относительно размерности, форме. Для этого сформируем две матрицы-строки, элементами которых являются векторы базисов, а именно

$$\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2),\ \mathbf{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2).$$

Тогда

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}C$$

Действительно,

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} = (c_1^1\vec{e}_1 + c_2^1\vec{e}_2, c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2),$$

то есть

$$\vec{f}_1 = c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2.$$

Найдем зависимость между координатами вектора в двух базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Запишем разложения произвольного вектора $\vec{X}$ относительно двух базисов. Соответствующие координаты будем помечать буквами e и f. Получим

$$\vec{X} = x_e^1\vec{e}_1 + x_e^2\vec{e}_2 \quad \vec{X} = x_f^1\vec{f}_1 + x_f^2\vec{f}_2.$$

Потребуем выполнение естественного равенства

$$x_e^1\vec{e}_1 + x_e^2\vec{e}_2 = x_f^1\vec{f}_1 + x_f^2\vec{f}_2.$$

Пользуясь формулами (1.1), продолжим

$$\begin{aligned} x_e^1\vec{e}_1 + x_e^2\vec{e}_2 = \ & x_f^1\vec{f}_1 + x_f^2\vec{f}_2 = x_f^1(c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2) + x_f^2(c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2) = \\ & (c_1^1x_f^1 + c_2^1x_f^2)\vec{e}_1 + (c_2^1x_f^1 + c_2^2x_f^2)\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем

$$\begin{cases} x_e^1 = c_1^1x_f^1 + c_2^1x_f^2, \\ x_e^2 = c_1^2x_f^1 + c_2^2x_f^2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Полученные формулы называются формулами *преобразования координат* векторов при преобразовании базисов (1.1). Эти формулы так же могут быть выписаны в инвариантной от размерности форме. Для этого сформируем из координат вектора $\vec{X}$ в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ матрицы столбцы

$$X_e = \begin{pmatrix} x_e^1 \\ x_e^2 \end{pmatrix} \quad X_f = \begin{pmatrix} x_f^1 \\ x_f^2 \end{pmatrix}$$

Тогда формулы (1.3) перепишутся в виде матричного равенства

$$X_e = CX_f$$

Матричный вид формул преобразования координат может быть легко извлечен из матричного вида преобразования базисов если заметить, что разложение

$$\vec{X} = x_e^1\vec{e}_1 + x_e^2\vec{e}_2$$

эквивалентно матричному равенству $\vec{X} = \mathbf{e}X_e$. Действительно,

$$x_e^1\vec{e}_1 + x_e^2\vec{e}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} x_e^1 \\ x_e^2 \end{pmatrix}$$

Тогда имеем,

$$\mathbf{e}X_e = \mathbf{f}X_f = (\mathbf{e}C)X_f = \mathbf{e}(CX_f)$$

и, стало быть,

$$X_e = CX_f$$

Очевидно, в матричной форме формулы преобразования базисов и кооординат не зависит от размерности и применимы в просранствах любой размерности n.

1.5.2 Ориентация

Назовем базисы e и f ориентированными одинаково, если матрица перехода $e \xrightarrow{C} f$ имеет положительный определитель $\det C > 0$. Отношение одинаковой ориентированности является бинарным отношением на множнстве всех базисов. Напомним, что бинарное отношение $\sim$ на заданном множнстве называется *отношением эквивалентности* если $\sim$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $a \sim a$ для каждого $a \in X$ (рефлексивность);

2. Если $a \sim b$, то $b \sim a$ (симметричность);
3. Если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$ (транзитивность).

Задание на множестве отношения эквивалентности определяет разбиение этого множества на непустые непересекающиеся подмножества (классы) эквивалентных между собою элементов.

Предложение 1.5.2 *Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов линейного пространства.*

Доказательство.

1. $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}$. Действительно, $\mathbf{e} \xrightarrow{C} \mathbf{f}$, где
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
2. Если $\mathbf{e} \sim \mathbf{f}$ то $\mathbf{f} \sim \mathbf{e}$.

   Действительно, пусть $\mathbf{e} \xrightarrow{C} \mathbf{f}$. Так как $\det C > 0$, то существует обратная матрица C^{-1}. Следовательно, имеем
$$\mathbf{f} = \mathbf{e}C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}C^{-1} = (\mathbf{e}C)C^{-1} = \mathbf{e}(CC^{-1}) = \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e} = \mathbf{f}C^{-1}$$
   Значит $\mathbf{f} \xrightarrow{C^{-1}} \mathbf{e}$, причем $\det C^{-1} = \frac{1}{\det C} > 0$, что означает $\mathbf{f} \sim \mathbf{e}$.
3. Если $\mathbf{e} \sim \mathbf{f}$ и $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$, то $\mathbf{e} \sim \mathbf{g}$.

   Действительно, пусть $\mathbf{e} \xrightarrow{C_1} \mathbf{f}$ $(\det C_1 > 0)$ и $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ $(\det C_2 > 0)$. Тогда
$$\begin{aligned} &\mathbf{f} = \mathbf{e}C_1, \\ &\mathbf{g} = \mathbf{f}C_2 = (\mathbf{e}C_1)C_2 = \mathbf{e}(C_1C_2). \end{aligned}$$
   Таким образом, $\mathbf{e} \xrightarrow{C_1C_2} \mathbf{g}$ и так как $\det(C_1C_2) = \det C_1 \det C_2 > 0$, то $\mathbf{e} \sim \mathbf{g}$.

■

Таким образом, все базисы линейного пространства разбиваются на два класса эквивалентных базисов. Внутри каждого класса переход от базиса к базису осуществляются матрицей с положительным определителем. Базисы из разных классов связаны между собой матрицей с отрицательным определителем. Задать ориентацию - значит выбрать базисы из определенного класса. *Линейное пространство называется ориентированным, если в нем выбрана ориентация.* Эта выбранная ориентация называется *положительной*, а противоположная - *отрицательной.*

Например, при $n = 1$, пусть $\vec{e}$ и $\vec{f}$ два ненулевых вектора на прямой. Тогда, очевидно, $\vec{f} = \lambda\vec{e}$, где $\lambda \neq 0$. В этом случае матрица преобразования базисов состоит из одного элемента $C = (\lambda)$. Класс ориентации вектора e составляют векторы, сонаправленные с e, а другой класс ориентации составляют векторы, противонаправленные с e.

Отношение одинаковой ориентируемости базисов (следовательно, и понятие ориентации) можно описать следующим образом. Пусть **e** и **f** – два базиса. Базис **e** называется *деформируемым* в базис **f**, если существует семейство векторов $\vec{a}_1(t), \vec{a}_2(t), \ldots, \vec{a}_n(t)$ таких, что $\vec{a}_k(t)$ — непрерывные функции параметра $t \in [0,1]$ и

- $\vec{a}_i(0) = \vec{e}_i, \quad \vec{a}_i(1) = \vec{f}_i.$
- $\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_n(t)$ линейно независимы для каждого $t \in [0,1]$.

Справедливо

Предложение 1.5.3 *Два базиса* **e** *и* **f** *ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда* **e** *и* **f** *деформируемы друг в друга.*

1.5.3 Некоторые применения ориентации

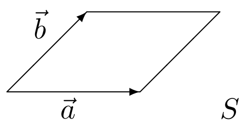
Ориентированная длина вектора на прямой

Пусть $\vec{e}$ — единичный вектор прямой, задающий ориентацию, $\vec{a}$ – произвольный вектор на прямой. Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{e}$. Величина λ называется *ориентированной длиной* вектора $\vec{a}$. Очевидно,

$$\lambda = \pm|\vec{a}|.$$

Ориентированная площадь параллелограмма. Бивекторы

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если φ – угол между этими векторами, то площадь построенного параллелограмма вычисляется по известной формуле $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.



$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

Покажем, что формуле для вычисления площади параллелограмма мжно придать выражение, инвариантное относительно размерности пространства, а именно,

$$S^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} S^2 = \; & |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\varphi = \\ & |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Замечание. Полученной формуле можно придать вид

$$S^2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \end{vmatrix}.$$

Матрица под определителем назывется *матрицей Грама* пары вектров $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Зафиксируем на плоскости ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Тогда $\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2$ и

$$|\vec{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2, \quad |\vec{b}|^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2$$
$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2 = (a^1b^1 + a^2b^2)^2 = (a^1b^1)^2 + 2a^1a^2b^1b^2 + (a^2b^2)^2.$$

Следовательно,

$$S^2 = (a^1b^2 - a^2b^1)^2.$$

С другой стороны, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют (невырожденный) параллелограмм, поэтому являются линейно независимыми и образуют другой базис плоскости. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{a}, \vec{b}$. Очевидно теперь, что

$$S = |detC|.$$

Определим *ориентированную площадь* параллелограмма формулой $S_{or} = \det C$. Из определения следует, что

$$S_{or} = \begin{cases} S, & \text{если базис } \vec{a}, \vec{b} \text{ ориентирован положительно } (\det C > 0), \\ -S, & \text{если базис } \vec{a}, \vec{b} \text{ ориентирован отрицательно } (\det C < 0) \end{cases}$$

С ориентированной площадью параллелограмма связано поняти *бивектора*, обобщающее понятие вектора. Напомним, что мы назывем вектором совокупность равных между собой направленных отрезков. Два направленных отрезка равны, если:

- имеют равные длины;
- расположены на параллельных прямых
- одинаково ориентированы (сонаправлены);

Вектор - это, образно говоря, свободно "плавающий"в пространстве класс эквивалентности равных направленных отрезков. Бивектор - это класс эквивалентности кусочков плоскости, имеющих одинаковую площадь и одинаковую ориентацию. Такие кусочки будем представлять в виде параллелограммов, постороенных на упорядоченых парах векторов. Будем считать две упорядоченных пары векторов равными, если построенные на них параллелограммы

- имеют одинаковую площадь;
- лежат в параллельных плоскостях;
- одинаково ориентированы.

Бивектором называется - класс эквивалентных пар векторов.

Ориентированный угол между прямыми на плоскости

Пусть l_1 и l_2 две прямые на ориентированной плоскости. Тогда можно определить не просто угол между прямыми l_1 и l_2, но и угол от прямой l_1 к прямой l_2.

Определение 1.5.1 *Углом от прямой l_1 к прямой l_2 (ориентированным углом между прямыми) называется угол между положительно ориентированной парой направляющих векторов прямых l_1 и l_2.*

Пусть φ угол между l_1 и l_2, а φ_{or} — ориентированный угол между ними. Тогда

$$\cos\varphi_{or} = \frac{\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}$$

при условии, что *пара направляющих векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ этих прямых ориентирована положительно.* Легко заметить, что если φ – угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, то

$$\varphi_{or} = \begin{cases} \varphi \text{ если пара } \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ ориентирована положительно,} \\ \pi - \varphi, \text{ если пара } \vec{a}_1, \vec{a}_2 \text{ ориентирована отрицательно.} \end{cases}$$

1.6 Векторное произведение

1.6.1 Определение и свойства векторного произведения

Определение 1.6.1 *Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — два вектора в E^3. Вектор $\vec{c}$ называется векторным произведением $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если*

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) Длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b})$;

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ положительно ориентирована.

Замечание. В определении предполагается, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Ниже будет показано, что для коллинеарных векторов естественно полагать $\vec{c} = \vec{0}$.

Предложение 1.6.1 *Пусть векторы $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ заданы своими координатами в некотором (произвольном) ортонормированном базисе. Тогда вектор*

$$\vec{c} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.$$

является векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тогда из первого свойства следует:

$$\begin{cases} c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = 0 \\ c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z = 0 \end{cases}.$$

Обозначим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то хотя бы один из выписанных определителей не равен нулю. Пусть, например, $\Delta_z \neq 0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_x a_x + c_y a_y = -c_z a_z \\ c_x b_x + c_y b_y = -c_z b_z \end{cases}$$

Для решения системы уравнений воспользуемся правилом Крамера:

$$c_x = \frac{\begin{vmatrix} -a_z c_z & a_y \\ -b_z c_z & b_y \end{vmatrix}}{\Delta_z} = c_z \frac{\Delta_x}{\Delta_z}, \qquad c_y = \frac{\begin{vmatrix} a_x & -a_z c_z \\ b_x & -b_z c_z \end{vmatrix}}{\Delta_z} = c_z \frac{-\Delta_x}{\Delta_z}.$$

Положим $\frac{c_z}{\Delta_z} = \lambda$. Тогда мы можем записать

$$c_x = \lambda\Delta_x,\ c_y = -\lambda\Delta_y,\ c_z = \lambda\Delta_z$$

Иначе говоря, условию $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ удовлетворяет вектор

$$\vec{c} = \lambda\{\Delta_x, -\Delta_y, \Delta_z\}.$$

Заметим, что длина и направление найденного вектора не определены однозначно.

Используем второе свойство из определения векторного произведения и покажем, что $|\lambda| = 1$. Для этого заметим, что если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то для площади образованного ими параллелограмма справедливо выражение

$$S = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} S^2 = \ & |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2(\vec{a}\widehat{\ }\vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2(\vec{a}\widehat{\ }\vec{b})) = \\ & |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a}\widehat{\ }\vec{b}) = \\ & |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2 = \\ & (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 = \\ & (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 = \\ & \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2. \end{aligned}$$

Таким образом условие $|\vec{c}| = S$ влечет $|\lambda| = 1$.

Покажем, что из третье свойства определения векторного произведения следует, что $\lambda = 1$. Для этого рассмотрим ориентацию тройки векторов $\vec{a}, vecb, \vec{c}$ при $\lambda = 1$ и покажем, что она положительна. Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \Delta_x & -\Delta_y & \Delta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_x & -\Delta_y & \Delta_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 > 0.$$

Утверждение доказано.

■

Замечание. Легко видеть, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Поэтому, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то полагаем $\vec{c} = \vec{0}$.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ будем обозначать через $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Предложение 1.6.2 *Векторное произведение обладает следующими свойствами:*

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ – *антикоммутативность;*
2. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{d}]$ – *дистрибутивность по сложению;*
3. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ – *линейность.*

Доказательство. Перестановка сомножителей ведет к перестановке строчек определителей Δ_x, Δ_y и Δ_z, что приводит к смене их знака. Аналогично выводятся и остальные свойства.

■

1.6.2 Некоторые геометрические приложения векторного произведения

Признак коллинеарности векторов

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, то есть

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a}, \vec{b}] = 0.$$

Это свойство отмечалось выше.

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть $l\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ — прямая в пространстве. Найдем расстояние от точка M_1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ до прямой l. Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$. Искомое расстояние равно высоте d этого параллелограмма. Площадь параллелограмма $S = |\vec{a}|\, d$. С другой стороны, $S = \big|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]\big|$. Следовательно,

$$d = \frac{\big|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]\big|}{|\vec{a}|}.$$

Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых

Пусть $l_1\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t$ и $l_2\colon \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2\tau$, две скрещивающиеся прямые в пространстве. Рассмотрим две плоскости $\pi_1\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1u+\ \vec{a}_2v$,
$\pi_2\colon \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_1u+\vec{a}_2v$. Очевидно, что $\pi_1\supset l_1$, $\pi_2\supset l_2$ и $\pi_1\parallel\pi_2$. Положим $\vec{N}=[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$. Тогда $\vec{N}\perp\pi_1$ и $\vec{N}\perp\pi_2$.

Рассмотрим плоскость $\pi_3\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1u+\vec{N}v$. Тогда $\pi_3\supset l_1$. Действительно, положив $u=t$, $v=0$ в уравнении плоскости π_3, получим уравнение прямой l_1. При этом $\pi_3\perp\pi_1$, $\pi_3\perp\pi_1$, так как $\pi_3\supset l_3\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{N}v$, а $l_3\perp\pi_1,\pi_2$.

Аналогично, рассмотрев плоскость $\pi_4\colon \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2u+\vec{N}v$, получим $\pi_4\supset l_2$, $\pi_4\perp\pi_1$, $\pi_4\perp\pi_2$.

Прямая $l=\pi_3\cap\pi_4$ имеет следующие свойства:

1. $l\cap l_1\neq\emptyset$, так как $l\subset\pi_3$, $l_1=\pi_3\cap\pi_1$, $\pi_3\perp\pi_1$;

2. $l\cap l_2\neq\emptyset$, так как $l\subset\pi_4$, $l_2=\pi_4\cap\pi_2$, $\pi_4\perp\pi_2$;

3. $l\perp l_1$, $l\perp l_2$.

Следовательно, прмая l и есть искомый общий перпендикуляр. Выпишем его уравнение. Запишем уравнение плоскостей в виде:

$$\pi_3\colon \left\langle \vec{r}-\vec{r}_1,\left[\vec{a}_1,\vec{N}\right]\right\rangle=0,$$
$$\pi_4\colon \left\langle \vec{r}-\vec{r}_2,\left[\vec{a}_2,\vec{N}\right]\right\rangle=0.$$

Тогда уравнение прямой l:

$$\begin{cases}\left\langle \vec{r}-\vec{r}_1,\left[\vec{a}_1,\vec{N}\right]\right\rangle=0\\ \left\langle \vec{r}-\vec{r}_2,\left[\vec{a}_2,\vec{N}\right]\right\rangle=0\end{cases},\ \text{где } \vec{N}=[\vec{a}_1,\vec{a}_2].$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые. $l_1\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t$, $l_2\colon \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2\tau$,. Точка M_1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ принадлежит π_1. Запишем уравнение плоскости π_2 в виде: $\pi_2\colon \left\langle \vec{r}-\vec{r}_2,\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right\rangle=0$. Тогда

$$d_{l_1,l_2}=\frac{|\langle \vec{r}_1-\vec{r}_2,[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\rangle|}{|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]|}.$$

Следствие 1.6.1 *Пусть $l_1\colon \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t$, $l_2\colon \vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2\tau$, , $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$ две непараллельные прямые. Тогда*

$$l_1\cap l_2\neq\emptyset\ \Leftrightarrow\ \langle \vec{r}_1-\vec{r}_2,[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\rangle=0.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что приведенное условие означает равенство нулю расстояния между скрещивающимися прямыми.

■

1.6.3 Двойное векторное произведение

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три произвольных вектора в E^3, заданные относительно ортонормированного базиса. Тогда произведение $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$ называется *двойным векторным произведением.*

Предложение 1.6.3 *Для любых трех векторов в* E^3

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle.$$

Доказательство. Выберем систему координат следующим образом: ось Oz направим вдоль $\vec{c}$, ось Oy возьмем в плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ось Ox направим перпендикулярно этой плоскости. Тогда относительно выборанной системы координат $\vec{a} = \{a^1, a^2, a^3\}$, $\vec{b} = \{0, b^2, b^3\}$, $\vec{c} = \{0, 0, c^3\}$ и мы находим

$$\left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ 0 & c^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & b^3 \\ 0 & c^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{b^2c^3, 0, 0\},$$

$$\begin{aligned}\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = {} & \left\{ \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^2c^3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^2c^3 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \\ & \left\{0, a^3b^2c^3, -a^2b^2c^3\right\}\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle &= \{0, a^3b^2c^3, a^3b^3c^3\}, \\ \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle &= \{0, 0, a^2b^2c^3 + a^3b^3c^3\},\end{aligned}$$

а значит

$$\vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \{0, a^3b^2c^3, -a^2b^2c^3\}.$$

Сравнивая вычисления, получаем требуемый результат.

■

Упражнение 1.6.1 *Докажите, что*

1. $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{a}\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle.$

2. $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{b} \perp \vec{a},\ \vec{b} \perp \vec{c}, \\ \vec{a} \parallel \vec{c}. \end{array} \right.$

1.6.4 Смешанное произведение векторов

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — три вектора в E^3. Тогда произведение $\left\langle \vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right\rangle$ называется *смешанным произведением трех векторов.*

Предложение 1.6.4 *Пусть векторы* $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ *и* $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ *заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе. Тогда*

$$\left\langle \vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right\rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Действительно,

$$[\vec{b},\vec{c}] = \left\{ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right\}$$

и

$$\left\langle \vec{a}, [\vec{b},\vec{c}] \right\rangle =$$
$$a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

■

Расстановка скобок внутри скалярного произведения не существенна. Имеется в виду следующее свойство:

$$\left\langle \vec{a}, [\vec{b},\vec{c}] \right\rangle = \left\langle [\vec{a},\vec{b}], \vec{c} \right\rangle.$$

В связи с этим, для смешанного произведения употребляется упрощенное обозначение:

$$\left\langle \vec{a}, [\vec{b},\vec{c}] \right\rangle \sim (\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Упражнение 1.6.2 *Докажите, что*

1. $\left\langle \vec{a}, [\vec{b},\vec{c}] \right\rangle = \left\langle [\vec{a},\vec{b}], \vec{c} \right\rangle$;
2. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей. Например,*
$$(\vec{a_1} + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a_2}, \vec{b}, \vec{c});$$
3. *При перестановке любых двух векторов в смешанном произведении знак произведения меняется на противоположный. Например,*
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}).$$

1.6.5 Некоторые геометрические приложения смешанного произведения

Признак компланарности векторов

Три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть в простврнстве заданы три точки с радиусами-векторами $\vec{r_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{r_3} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Точка с переменным радиусом-вектором $\vec{r} = \{x, y, z\}$ принадлежит плоскости, проходящей через заданные точки, тогда и только тогда, когда компланарны векторы $\vec{r} - \vec{r_1}$, $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ и $\vec{r_3} - \vec{r_1}$, то есть

$$(\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{r_3} - \vec{r_1}) = 0.$$

В координатном выражении это условие означает, что

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим уравнение искомой плоскости.

Ориентированный объем параллелепипеда.
Тривекторы

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$. Тогда $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ равен объему параллелепипеда, построенному на соответствующих направленных отрезках. Действительно, вектор $\vec{N} = [\vec{a}, \vec{b}]$ является вектором нормали к плоскости основания

параллелепипеда. Величина $h = |\overrightarrow{Pr}_{\vec{N}}\vec{c}|$ равна его высоте. Вычислим ее:

$$h = |\overrightarrow{Pr}_{\vec{N}}\vec{c}| = \frac{\langle \vec{c}, \vec{N} \rangle}{|\vec{N}|} = \frac{|\langle \vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}] \rangle|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{S_{осн}}.$$

Так как $S_{\text{ОСН}} h = V$ – объему параллелепипеда, то очевидно

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Ориентированным объемом V_{or} тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется величина

$$V_{or} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Легко видеть, что

$$V_{op} = \begin{cases} V, & \text{если тройка } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ориентирована положительно);} \\ -V, & \text{если тройка } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ ориентирована отрицательно.} \end{cases}$$

Используя понятие ориентированного объема, на множестве всех троек векторов можно ввести отношение эквивалентности, а именно, две тройки назовем экввивалентными, если они имеют равные ориентированные объемы. Классы эквивалентности такого рода называются *тривекторами*. С геометрической точки зрения, тривекторы – это кусочки пространства с одинаковыми объемами и одинаково ориентированные. Ясно, что цепочка: *векторы* $\to$ *бивекторы* $\to$ *тривекторы* может быть естественно продолжена по размерности. Соответствующее обобщение носит название *поливекторы*, однако здесь мы не будем касаться этого обобщения.

1.7 Элементы многомерной аналитической геометрии

1.7.1 Уравнение $k-$ мерной плоскости в $\mathcal{A}^n$

Пусть в $\mathcal{A}^n$ зафиксирована точка M_0 радиус-вектор которой $\vec{r}_0$. И пусть заданы k линейно независимых векторов $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$. *Аффинной $k-$ мерной плоскостью* π^k в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ называется множество точек в $\mathcal{A}^n$, радиус-вектор которых (в заданной аффинной системе координат) задается равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2 + \cdots + t^k\vec{a}_k.$$

Точка M_0 называется *начальной точкой плоскости* π^k, а линейное пространство L^k с базисом $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ *называется направляющим пространством* плоскости π^k.

Если $k = 1$ то 1-мерная аффиннфя плоскость называется *аффинной прямой* в $\mathcal{A}^n$. Если $k = n-1$, то такая плоскость назывеется *гиперплоскостью* в $\mathcal{A}^n$. Так, например, $\pi^2 : \vec{r} = \vec{r}_0 + t^1\vec{a}_1 + t^2\vec{a}_2$ является гиперплоскостью в $\mathcal{A}^3$, а $\pi^1 : \vec{r} = \vec{r}_0 + t^1\vec{a}_1$ является гиперплоскостью в $\mathcal{A}^2$. Ясно, что π^1 является в то же время и аффинной прямой.

Упражнение 1.7.1 *Покажите, что уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве $\mathcal{A}^n$ может быть записано в виде*

$$\pi^{n-1} : A_1 x^1 + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + D.$$

Вектор $\vec{N} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ называется вектором аффинной нормали гиперплоскости π^{n-1}.

Упражнение 1.7.2 *Покажите, что для прямой в A^n с начальной точкой $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и направляющим вектором $\vec{a} = \left\{a^1, \ldots, a^n\right\}$ можно выписать ее каноническое уравнение в виде:*

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \cdots = \frac{x^n - x_0^n}{a^n}.$$

Упражнение 1.7.3 *Пусть*

$$\pi_1^{n-1} : A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + \cdots + A_n^1 x^n + D^1,$$

$$\pi_2^{n-1} : A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + \cdots + A_n^2 x^n + D^2$$

две гиперплоскости в $\mathcal{A}^n$.

Пусть $\vec{N}_1 = \{A_1^1, \ldots, A_n^1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_1^2, \ldots, A_n^2\}$ их аффинные нормали. Образуем векторы $\vec{Q}_1 = \{A_1^1, \ldots, A_n^1, D^1\}$ и $\vec{Q}_2 = \{A_1^1, \ldots, A_n^1, D^2\}$. Покажите, что

- $\pi_1^{n-1} \cap \pi_2^{n-1} = \pi^{n-2}$, *если* $\vec{N}_1 \nparallel \vec{N}_2$;
- $\pi_1 \parallel \pi_2$, *если* $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ *и* $\vec{Q}_1 \nparallel \vec{Q}_2$;
- $\pi_1 = \pi_2$ *если* $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2$.

1.7.2 Подпространства в линейном пространстве

Пусть L^n – вещественное линейное пространство. Подмножество $\tilde{L} \subset L^n$ называется *(линейным) подпространством* в L^n, если $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \widetilde{L}$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \widetilde{L}$ и любых вещественных λ, μ.

Важнейшим для нас примером линейного подпространства в L^n является линейная оболочка системы векторов.

Определение 1.7.1 *Пусть $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ – система векторов в L^n. Линейной оболочкой $Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ данной системы называется подмножество векторов в L^n вида*

$$\sum_{i=1}^{k} u^i \vec{a}_i \mid u^i \in R.$$

Иными словами, линейная оболочка – это множество всех линейных комбинаций заданной системы вектров.

Замечание. Следует хорошо различать линейную комбинацию и линейную оболочку данной системы векторов. Линейная комбинация л.к.$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ это вектор $\vec{m}$, вида

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{k} u^i \vec{a}_i = u^1 \vec{a}_1 + \cdots + u^k \vec{a}_k,$$

где $u^1, \dots, u^k$ – *фиксированы.* Очевидно, л.к.$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) \in Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$. Например, рассмотрим два вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Тогда

$$Lin(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \{u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2 |\, u, v \in R\}.$$

Рассмотрим вектор $\vec{m} = 3\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2$. Вектор $\vec{m} =$ л.к.$(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ с коэффициентами 3 и 5. Ясно, что $\vec{m} \in Lin(a_1, a_2)$ при $u = 3, v = 5$.

Предложение 1.7.1 *$Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ – линейное подпространство в L^n. Его размерность $\dim Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) \leq k$.*

При этом $\dim Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = k$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ линейно независимы, а значит $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – один из базисов $L^k = Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$.

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{x}, \vec{y} \in Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$. Тогда

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} x^i \vec{a}_i, \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{k} y^i \vec{a}_i, \quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda x^i + \mu y^i)\vec{a}_i \in Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k),$$

а значит $Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ – линейное подпространство в L^n.

Разложим вектры $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ по некоторому базису L^n. Тогда

$$\vec{a}_1 = \{a_1^1, \dots, a_1^n\},$$
$$\dots$$
$$\vec{a}_k = \{a_k^1, \dots, a_k^n\}.$$

Линейным операциям над векторами $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ соответствуют линейные операции над строками $k \times n$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^1 & \dots & a_k^n \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов). Ранг матрицы равен максимальному размеру ее ненулевого минора. Тогда очевидно, что $rg\, A \leq \min(k, n) = k$. Если же $rg\, A = k$, то все строки матрицы A, а вместе с ними и векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$, линейно независимы. Но тогда $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – один из базисов $L^k = Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$.

■

Сумма подпространств. Прямая сумма

Определение 1.7.2 *Пусть L^k и L^l – два подпространства в L^n. Суммой $L^k + L^l$ подпространств L^k и L^l называется множество векторов в L^n вида*

$$x + y \quad \Big| \quad x \in L^k,\, y \in L^l.$$

Предложение 1.7.2 *$L^k + L^l$ — линейное подпространство в L^n.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — базис L^k, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l$ — базис L^l. Тогда $L^k = Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$, $L^l = Lin(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l)$. Следовательно, $L^k + L^l = Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l)$. ∎

Очевидно, что $\dim(L^k + L^l) \le k + l$. Если $\dim(L^k + L^l) = k + l$, то сумма называется *прямой* и обозначается $L^k \oplus L^l$. Ясно, что если сумма прямая, то векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l$ образуют базис в $L^k \oplus L^l$.

Если $L^k \oplus L^l$ – прямая сумма, то для каждого $z \in L^k \oplus L^l$ разложение $z = x + y \mid x \in L^k,\ y \in L^k$ *единственно* (то есть x и y однозначно определены). Действительно, пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — базис L^k, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l$ — базис L^l. Пусть $\vec{z} \in L^k \oplus L^l$. Тогда

$$\vec{z} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} x^i \vec{a}_i}_{\vec{x} \in L^k} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l} x^j \vec{b}_j}_{\vec{y} \in L^l}.$$

Для данного $\vec{z}$ координаты x^i, y^j определены однозначно в силу единственности разложения по базису, а значит однозначно определены и векторы $\vec{x} \in L^k$ и $\vec{y} \in L^l$

Упражнение 1.7.4 *Доказать обратное утверждение, то есть если в сумме для каждого $\vec{z} \in L^k + L^l$ разложение $\vec{z} = x + y \mid \vec{x} \in L^k$, $\vec{y} \in L^k$ единственно , то сумма $L^k + L^l$ – прямая.*

Пересечение подпространств

Определение 1.7.3 *Пусть L^k и L^l – линейные подпространства в L^n. Пересечением $L^k \cap L^l$ подпространств L^k и L^l называется множество*

$$\{\vec{x} \in L^n \mid \vec{x} \in L^k,\ \vec{x} \in L^l\}.$$

Предложение 1.7.3 *$L^k \cap L^l$ — подпространство в L^n.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in L^k \cap L^l$. Так как L^k и L^l – подпространства, то справедливы следующие импликации:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}, \vec{y} \in L^k \Rightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in L^k \\ \vec{x}, \vec{y} \in L^l \Rightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in L^l \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in L^k \cap L^l.$$

∎

Формула Грассмана

Предложение 1.7.4 *Пусть L^k и L^l — подпространства в L^n. Тогда*

$$\dim(L^k + L^l) = \dim L^k + \dim L^l - \dim(L^k \cap L^l)$$

Если положить $m = \dim(L^k \cap L^l)$, то формула Грасмана выпишется более лаконично: $\dim(L^k + L^l) = k + l - m$.

Для доказательства формулы Грассмана нам потребуется лемма, используемая и в некоторых дальнейших утверждениях.

Лемма 1.7.1 *Пусть* $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m\}$ *— линейно независимая система векторов в* L^k $(m < k)$*. Тогда ее можно дополнить до базиса* L^k*, то есть найдутся такие векторы* $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$*, что система векторов*

$$\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m; \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k\}$$

образует базис L^k*.*

Доказательство. Пусть $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$ – линейно независимы. Тогда линейная оболочка $Lin\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m\}$ является линейным подпространством в L^k. Обозначим его через L^m. Если $L^m \neq L^k$, то существует $\vec{x} \in L^k$ такой, что $\vec{x} \notin L^m$, то есть $\vec{x} \notin Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m)$. Следовательно, $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{x}$ – линейно независимы. Положим $\vec{a}_{m+1} = \vec{x}$. Тогда $Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}) = L^{m+1} \subseteq L^k$. Если $L^{m+1} \neq L^k$, продолжим процесс. В результате построим исчерпывающую цепочку подпространств

$$L^m \subset L^{m+1} \subset \ldots \subset L^k.$$

На последнем шаге получим $L^k = Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k)$.

■

Доказательство формулы Грассмана. Обозначим $L^m = L^k \cap L^l$. Пусть $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$ – базис L^m. Дополним его до базисов в L^k и L^l:

$$L^k\colon \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k,$$
$$L^l\colon \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l.$$

Покажем, что $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l$ – базис $L^k + L^l$. Для этого следует проверить, что

а) любой вектор из $L^k + L^l$ является линейной комбинацией векторов $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l$;

б) векторы $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l$ линейно не зависимы.

Пусть $\vec{z} \in L^k + L^l$. Тогда $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in L^k, \vec{y} \in L^l$.

Так как $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$ базис в L_k, то

$$\vec{x} = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k).$$

Аналогично,

$$\vec{y} = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \vec{b}_{m+1}).$$

Следовательно,

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l).$$

Пусть существует *нетривиальная*

$$\text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l) = \vec{0}.$$

Разобъем ее на две части:

$$\text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k) + \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l) = \vec{0}.$$

Заметим, что л.к.$(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l)$ *нетривиальна*, так как если бы она была тривиальной, то л.к.$(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k)$ была бы *нетривиальной* и равной $\vec{0}$, что невозможно, так как $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$ – базис L^k. Положим

$$\vec{w} = \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l).$$

Тогда с одной стороны, $\vec{w} \in L^l$ как линейная комбинация векторов базиса L^l. С другой стороны,

$$\text{л.к}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k) = -\vec{w},$$

а значит $\vec{w} \in L^k$ как линейная комбинация векторов базиса L^k. Следовательно, $\vec{w} \in L^k \cap L^l$. Но векторы $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$ образуют базис $L^k \cap L^l$. Следовательно,

$$\vec{w} = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m),$$

причем линейная комбинация в правой части равенства нетривиальная, так как $\vec{w} \neq 0$.

Таким образом, имеем две *нетривиальных* линейных комбинации, выражающие вектор $\vec{w}$:

$$\begin{gathered}\vec{w} = \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l)\\ \vec{w} = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m)\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m) = \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l).$$

Мы получили нетривиальную л.к.$(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l) = \vec{0}$, что невозможно, так как $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l$ – базис L^l.

■

1.7.3 Взаимное расположение двух плоскостей в A^n

Пусть

$$\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \sum_{i=1}^{k} t^i \vec{a}_i$$

– k-мерная плоскость в A^n. Точка M_1 с радиусом-вектором $\vec{r}_1$ называется *начальной точкой* плоскости π^k. Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ – линейно независимы, а $t_1, \ldots, t_k$ – произвольные параметры. Это означает, что уравнение плоскости π^k можно записать в виде

$$\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$$

или еще короче

$$\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + L^k,$$

где $L^k = Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$ называется *направляющим подпространством* плоскости π^k.

Параллельность плоскостей а A^n

Пусть

$$\pi^k\colon \vec r = \vec r_1 + L^k,$$
$$\pi^l\colon \vec r = \vec r_2 + L^l$$

— две плоскости в A^n, причем $k \le l$. Плоскости π^k и π^l называются *параллельными* ($\pi^k \parallel \pi^l$), если $L^k \subseteq L^l$.

Взаимное расположение двух параллельных плоскостей в A^n описывается следующим утверждением.

Теорема 1.7.1 . *Пусть*

$$\begin{matrix}\pi^k\colon \vec r = \vec r_1 + L^k,\\ \pi^l\colon \vec r = \vec r_2 + L^l,\end{matrix} \qquad (k \le l)$$

две параллельные плоскости а A^n. Положим $\vec w = \vec r_2 - \vec r_1$. Тогда

- *если $\vec w \notin L^l$, то $\pi^k \cap \pi^l = \emptyset$;*
- *если $\vec w \in L^l$, то $\pi^k \subseteq \pi^l$.*

Доказательство. Пусть $\vec a_1, \dots, \vec a_k$ — базис L^k. Поскольку $L^k \subseteq L^l$, дополним $\vec a_1, \dots, \vec a_k$ до базиса в $L^l\colon \vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l$. Тогда

$$\pi^k\colon \vec r = \vec r_1 + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k),$$
$$\pi^l\colon \vec r = \vec r_2 + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l).$$

Пусть $\vec w = \vec r_2 - \vec r_1 \notin L^l$, но предположим, что $\pi^k \cap \pi^l \ne \emptyset$. Пусть $M \in \pi^k \cap \pi^l$. Тогда

$$\vec r_M = \vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k)$$
$$\vec r_M = \vec r_2 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l).$$

Вычитая, находим:

$$\vec 0 = -\vec w + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l),$$

то есть $\vec w = \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l) \in L^l$. Противоречие.

Пусть $\vec w \in L^l$. Это означает, что $\vec r_2 - \vec r_1 = \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l)$. Тогда $\vec r_2 = \vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k) + \text{л.к.}(\vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l)$. Следовательно,

$$\pi^k\colon \vec r = \vec r_1 + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k),$$
$$\pi^l\colon \vec r = \vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k) + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l).$$

Положим $\vec r_0 = \vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k)$. В уравнении π^k выделим найденную л.к.$(\vec a_1, \dots, \vec a_k)$ из линейной оболочки $Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k)$. Получим

$$\pi^k\colon \vec r = \underbrace{\vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k)}_{\vec r_0} + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k),$$
$$\pi^l\colon \vec r = \underbrace{\vec r_1 + \text{л.к.}(\vec a_1, \dots, \vec a_k)}_{\vec r_0} + Lin(\vec a_1, \dots, \vec a_k, \vec b_{k+1}, \dots, \vec b_l).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_0 + Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k),\\
&\pi^l \colon \vec{r} = \vec{r}_0 + Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) + Lin(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_l).
\end{aligned}$$

Теперь очевидно, что $\pi^k \subset \pi^l$, так как π^k можно получить из уравнения π^l, взяв нулевую $Lin(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_l)$.

$\blacksquare$

Посним доказательство теоремы для случая прямой и плоскости.

$$\begin{aligned}
&\pi^1 \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t,\\
&\pi^2 \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + u\vec{a} + v\vec{b},\\
&\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.
\end{aligned}$$

Пусть $\vec{w} \in Lin(\vec{a}, \vec{b})$. Например, пусть $\vec{w} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Тогда $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и имеем

$$\begin{aligned}
&\pi^1 \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t,\\
&\pi^2 \colon \vec{r} = \quad \vec{r}_1 + 2\vec{a} + 3\vec{b} + u\vec{a} + v\vec{b} = \vec{r}_1 + 2\vec{a} + u\vec{a} + (v+3)\vec{b} =\\
&\qquad\qquad \vec{r}_1 + 2\vec{a} + u\vec{a} + \mu\vec{b}
\end{aligned}$$

Выделим в уравнении "плоскости" π^1 линейную комбинацию $\vec{r}_1 + 2\vec{a}$:

$$\pi^1 \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}(t + 2 - 2) = \vec{r}_1 + 2\vec{a} + \vec{a}(t-2) = \vec{r}_1 + 2\vec{a} + \vec{a}u.$$

Полагая $\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + 2\vec{a}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\pi^1 \colon \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u,\\
&\pi^2 \colon \vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + \mu\vec{b}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $\pi^1 \subset \pi^2$. Достаточно положить $\mu = 0$.

Скрещивающиеся плоскости в A^n

Две плоскости π^k и π^l в A^n называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны. Взаимное расположение двух непараллельных плоскостей в A^n описывается следующим утверждением.

Теорема 1.7.2 *Пусть*

$$\begin{aligned}
&\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + L^k,\\
&\pi^l \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + L^l
\end{aligned} \qquad (k \le l)$$

две непараллельные плоскости в A^n. Положим

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad L^m = L^k \cap L^l, \quad L^s = L^k + L^l.$$

Тогда

- *если $\vec{w} \notin L^s$, то плоскости скрещиваются;*
- *если $\vec{w} \in L^s$, то $\pi^k \cap \pi^l = \pi^m$ (т.е. плоскости пересекаются по плоскости размерности m).*

Доказательство. *Если $\pi^k \nparallel \pi^l$, то существуют плоскости p_1^s и p_2^s такие, что* $p_1^s \supset \pi^k$, $p_2^s \supset \pi^l$, $p_1^s \parallel p_2^s$.

Действительно, пусть $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ — базис L^m. Дополним $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ до базисов в L^k и L^l:

$$L^k\colon \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k,$$
$$L^l\colon \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l.$$

Тогда $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l$ — базис в L^s. Рассмотрим две плоскости:

$$p_1^s\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \vec{r}_1 + L^s,$$
$$p_2^s\colon \vec{r} = \vec{r}_2 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \vec{r}_2 + L^s.$$

Очевидно, что $p_1^s \parallel p_2^s$ (направляющие пространства совпадают). При этом $p_1^s \supset \pi^k$.

Действительно,

$$p_1^s\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + Lin(\vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l).$$

и π^k задается как $Lin(\vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = 0$.

Аналогично $p_2^s \supset \pi^l$.

Пусть $\vec{w} \notin L^s$. Тогда $p_1^s \parallel p_2^s$ и $p_1^s \cap p_2^s = \emptyset$. Следовательно, $\pi^k \cap \pi^l = \emptyset$.

Пусть $\vec{w} \in L^s$. Тогда

$$\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l),$$

то есть

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l)$$

Теперь уравнения плоскостей можно выписать с *общей начальной точкой*

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k).$$

А именно

$$\pi^l\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l),$$
$$\pi^k\colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) =$$
$$\vec{r}_1 + \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k).$$

И более того, направляющие пространства этих плоскостей ращепляются в виде

$$\pi^l\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) + Lin(\vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l),$$
$$\pi^k\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) + Lin(\vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k).$$

Рассмотрим плоскость $\pi^m = \vec{r}_0 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m)$. Ясно, что $\pi^k \supset \pi^m$ и $\pi^l \supset \pi^m$, то есть $\pi^k \cap \pi^l \supset \pi^m$.

Покажем, что $\pi^k \cap \pi^l \subset \pi^m$. Действительно, пусть $M \in \pi^k \cap \pi^l$. Тогда

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_k) = \vec{r}_0 + \vec{Q}_1 + \vec{A},$$
$$\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m, \vec{b}_{m+1}, \dots, \vec{b}_l) = \vec{r}_0 + \vec{Q}_2 + \vec{B},$$

где обозначено, соответственно,

$$\vec{Q}_1 = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m), \vec{A} = \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k) \text{ в первом выражении } \vec{r}_M,$$
$$\vec{Q}_2 = \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m), \vec{B} = \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l) \text{ во втором выражении } \vec{r}_M.$$

Вычитая, получим

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2 + \vec{A} - \vec{B} = \ & \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m) + \\ & \text{л.к.}(\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k) - \text{л.к.}(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l).\end{aligned}$$

Из линейной независимости векторов $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$, $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$, $\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l$ следует, что $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2, \vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$.

Следовательно, $\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \text{л.к.}(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m) \in \pi^m$, что завершает доказательство.

■

Частичная параллельность плоскостей в A^n

Пусть π^k и π^l — две плоскости в A^n. Плоскость π^k *параллельна порядка* m плоскости π^l (обозначим это через $\pi^l \parallel_m \pi^l$), если их направляющие пространства L^k и L^l имеют пересечение размерности m.

Равенство $m = min(k, l)$ соответствует ситуации параллельности плоскостей, в то время как $m = 0$ означает отсутствие параллельных направлений и в этом случае плоскости естественно называть *вполне непараллальными*. Если при этом π^k и π^l имеют общую точку, то есть $\pi^k \cap \pi^l \neq \emptyset$, то π^k и π^l называются *пересекающимися трансверсально*.

Предложение 1.7.5 *Пусть π^k и π^l — две $m-$параллельные плоскости. Тогда π^k содержит $(k-m)$ параметрическое семейство плоскостей, параллельных π^l. π^k содержит $(l-m)$ параметрическое семейство плоскостей, параллельных π^k.*

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$ — базис пересечения $L^k \cap L^l$. Тогда π^l и π^k могут быть заданы соответственно:

$$\begin{cases} \pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m) + Lin(\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k), \\ \pi^l \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m) + Lin(\vec{b}_{m+1}, \ldots, \vec{b}_l). \end{cases}$$

Рассмотрим плоскость π^k. Зафиксируем произвольную линейную комбинацию $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$, например, $t_0^1 \vec{a}_{m+1} + \cdots + t_0^{k-m} \vec{a}_k$. Тогда в π^k "вырезается"плоскость, задаваемая уравнением

$$\vec{r} = \underbrace{\vec{r}_1 + t_0^1 \vec{a}_{m+1} + \cdots + t_0^{k-m} \vec{a}_k}_{\vec{r}_0} + Lin(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m).$$

Ее направляющее пространство L^m лежит в L^l, а следовательно, эта плоскость параллельна L^l. Ее начальная точка $\vec{r}_0$ определяется $(k-m)$ независимыми параметрами $t_0^1, \ldots, t_0^{k-m}$.

■

1.7.4 Практический способ выяснения взаимного размещения плоскостей в A^n

Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений в матричной форме

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где A – матрица размером $m \times n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$ – столбец правых частей.

Введем в рассмотрение векторы – столбца матрицы A:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ можно переписать в виде:

$$x^1\vec{a}_1 + \cdots + x^n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Таким образом, решение системы линейных уравнений дает ответ на вопрос, ***принадлежит ли вектор*** $\vec{b}$ ***линейной оболочке заданных векторов*** $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$***?*** В частности, если $\vec{b} = \vec{0}$, то соответствующее решение дает ответ на вопрос, ***являются ли векторы*** $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ ***линейно зависимыми?***

Построение базиса суммы подпространств

Пусть подпространства L^k и L^l заданы своими базисами:

$$L^k = Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n),$$
$$L^l = Lin(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n).$$

Возьмем $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$. Предположим,что найдется $\vec{b}_{j_1} \notin Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Тогда

$$Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_{j_1}) \subseteq L^k + L^l.$$

Если $Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_{j_1}) \neq L^k + L^l$, то поищем

$$\vec{b}_{j_2} \notin Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_{j_1})$$

и рассмотрим $Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_{j_1}, \vec{b}_{j_2}) \subset L^k + L^l$ и т.д. Процесс, очевидно, конечен и заканчивается нахождением базиса суммы пространств. Количество векторов построенного базиса даст размерность суммы.

Описанный процесс реализуется алгебраически следующим образом. Пусть

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ \vdots \\ b_1^n \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ \vdots \\ b_2^n \end{pmatrix}, \ldots, \vec{b}_l = \begin{pmatrix} b_l^1 \\ \vdots \\ b_l^n \end{pmatrix}$$

— векторы базисов L^k и L^l соответственно. Сформируем из их координат (как из стлбцов) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_k^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \ldots & b_l^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n & \ldots & b_l^n \end{pmatrix},$$

Напомним, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы, а это число равно, в свою очередь, иаксимальному размеру минора матрицы, отличному от нуля. Ясно, что $rg(A) = k$. Составим матрицу

$$(A|B) \ = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \ldots & a_k^1 & b_1^1 & \ldots & b_l^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_k^n & b_1^n & \ldots & b_l^n \end{array}\right)$$

Последовательное добавление к столбцам матрицы A столбцов матрицы B, увеличивающих на каждом шаге ранг матрицы $(A|B)$ дает в конечном итоге максимальную линейно независимую систему векторов в сумме пространств $L^l + L^l$. Таким образом,

$$s = \dim(L^k + L^l) = rg(A|B),$$

а базис суммы образуют столбцы, которые отвечают базисному минору матрицы $(A|B)$.

Построение базиса пересечения подпространств

Пусть $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_{j_1}, \ldots, \vec{b}_{j_{s-k}}\}$ базис $L^k + L^l$. Перенумеруем векторы так, чтобы базис $L^k + L^l$ принял вид:

$$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-k}\}$$

Тогда $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — базис L^k, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-k}, \vec{b}_{s-k+1} \ldots, \vec{b}_l\}$ — базис L^l. Ясно, что

$$\vec{b}_{s-k+1}, \ldots, \vec{b}_l \in Lin(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-k}).$$

Найдем соответствующие линейные комбинации как решения $l + k - s := m$ систем линейных уравнений. Тогда получим:

$$\begin{array}{lcl} \vec{b}_{s-k+1} & = & \text{л.к.}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-k}), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{b}_l & = & \text{л.к.}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{l-1}). \end{array}$$

Разобъем полученные выражения так:

$$\begin{array}{lcl} \vec{b}_{s-k+1} - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{s-k}) & = & \text{л.к.}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{b}_l - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{l-1}) & = & \text{л.к.}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \end{array}$$

и заметим, что левые части равенств лежат в L^l как линейные комбинации векторов базиса L^l, а правые части лежат в L^k по аналогичной причине. Поэтому векторы

$$\begin{aligned}
&\vec{q}_1 := \vec{b}_{s-k+1} - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}) = \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k),\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\vec{q}_m := \vec{b}_l - \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{l-1}) = \text{л.к.}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)
\end{aligned}$$

лежат в $L^k \cap L^l$. Покажем, что $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ – линейно независимы. Действительно,

$$\sum \lambda^i \vec{q}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \vec{b}_{s-k+i} + \text{л.к.}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-s}) = \vec{0}$$

и следовательно $\lambda^i = 0$, так как $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l$ – базис L^l. Таким образом, $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$ — линейно независимы, лежат в пересечении подпрострвнств и их количество равно размерности пересечения. Поэтому найденные векторы образуют искомый базис.

Описанный процесс реализуется алгебраически следующим образом. Составим матрицу

$$(A|B) \;=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & b_{s-k+1}^1 & \dots & b_l^1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & b_{s-k+1}^n & \dots & b_l^n
\end{array}\right)$$

первые s столбцов которой являются векторами базиса суммы. Для каждого последующего столбца найдем решение системы уравнений с этим столбцом в качестве столбца правых частей. Если для столбца с номером $s-k+i$ набор чисел $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^k\,;\, \mu_i^1, \dots, \mu_i^{s-k}$ есть решение, а именно,

$$\vec{b}_{s-k+1} = \lambda_1^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_1^k \vec{a}_k + \mu_1^1 \vec{b}_1 + \dots + \mu_1^{s-k} \vec{b}_{s-k},$$

то

$$\vec{q}_i = \vec{b}_{s-k+i} - \mu_i^1 \vec{b}_1 - \dots - \mu_i^{s-k} \vec{b}_{s-k}$$

или, эквивалентно,

$$\vec{q}_i = \lambda_i^1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_i^k \vec{a}_k.$$

Выяснение взаимного размещения плоскостей

Пусть

$$\begin{aligned}
&\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \vec{r}_1 + L^k,\\
&\pi^l \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + Lin(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l) = \vec{r}_2 + L^l.
\end{aligned}$$

Найдем базисы $L^k + L^l$ и $L^k \cap L^l$. Пусть это будут векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$; $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{s-k}$ и $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$. Вектор $\vec{w} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ принадлежит $L^k + L^l$ тогда и только тогда, когда имеет решение система:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_1^1 & \dots & a_k^1 & b_1^1 & \dots & b_{s-k}^1 & w^1\\
\vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots\\
a_1^n & \dots & a_k^n & b_1^n & \dots & b_{s-k}^n & w^n
\end{array}\right).$$

Пусть система имеет решение, то есть

$$\vec{w} = \lambda^1\vec{a}_1 + \dots + \lambda^k\vec{a}_k + \mu^1\vec{b}_1 + \dots + \mu^{s-k}\vec{b}_{s-k},$$

тогда общая точка плоскостей находится как

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \lambda^1\vec{a}_1 + \dots + \lambda^k\vec{a}_k$$

и уравнение плоскости пересечения примет вид

$$\pi^m : \vec{r} = \vec{r}_0 + Lin(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) = \vec{r}_0 + L^m.$$

Если же стстема решений не имеет, то плоскости скрешиваются с направлением частичной параллельности L^m

Проиллюстрируем вышеизложенное на примере. Пусть заданы две двумерные плоскости

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \vec{r} = \vec{r}_1 + Lin(\vec{a}_1, \vec{a}_2), \\ \pi_2 &: \vec{r} = \vec{r}_2 + Lin(\vec{b}_1, \vec{b}_2), \end{aligned}$$

где

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор $\vec{w} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и составим матрицу $(A|B|w)$. Это позволит нам одновременно найти базис суммы, пересечения направляющих подпространств, а так же установить расположение вектора $\vec{w}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, базис суммы составляют векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1$ и вектор $\vec{w} \in L_1^2 + L_2^2$. Таким образом, $L_1^2 \cap L_2^2 \neq \emptyset$. Найдем базис пересечения. Для этого находим решение системы

$$\begin{cases} \lambda^1 + \lambda^2 + \mu^1 = 1, \\ -\lambda^2 - 2\mu^1 = 1, \\ -\mu^1 = 1. \end{cases}$$

Нам, однако, достаточно найти лишь $\mu^1 = -1$, так как $\vec{q}_1 = \vec{b}_2 - \mu^1 \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вектор $\vec{q}_1$ –направляющий вектор пересечения $L_1^2 \cap L_2^2$.

Найдем общую точку заданных плоскостей. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda^1 + \lambda^2 + \mu^1 = 1, \\ -\lambda^2 - 2\mu^1 = -3, \\ -\mu^1 = -2. \end{cases} .$$

Ее решение $\mu^1 = 2, \lambda^2 = -1, \lambda^1 = 0$. Следовательно,

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \lambda^1 \vec{a}_1 + \lambda^2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим уравнение линии пересечения:

$$\pi_1 \cap \pi_2 \colon \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{q}_1$$

или в кординатах

$$\begin{cases} x^1 = 0 + 2t, \\ x^2 = 1 + 3t, \\ x^3 = 0 + t, \\ x^4 = 1 + t. \end{cases}$$

1.7.5 Угол между плоскостями в E^n

Напомним, что евклидовым пространством называется аффинное пространство со скалярным произведением в ассоциированном линейном пространстве.

Определение 1.7.4 *Углом между двумя плоскостями в* E^n

$$\begin{aligned} &\pi^k \colon \vec{r} = \vec{r}_1 + L^k, \\ &\pi^l \colon \vec{r} = \vec{r}_2 + L^l \end{aligned}$$

назывется угол между их направляющими подпространствами L^k *и* L^l.

Для определения угла между подпространствами нам потребуются дополнительные рассмотрения, являющиеся естественными обобщениями соответствующих конструкций при $n = 2, 3$. Читателю рекомендуется "держать в уме"маломерные картинки.

Ортогонализация базиса в E^n

Предложение 1.7.6 *Если E^n — евклидово пространство, то в E^n существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Начнем с геометрически ясного постороения ортонормированного базиса в E^3. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ некоторый базис в E^3. Положим

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}.$$

Рассмотрим вектор

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1.$$

Вектор $\vec{b}_2 \neq \vec{0}$ так как вектры $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно не зависимы и, кроме того,

$$\vec{b}_2 \perp \vec{e}_1.$$

Положим

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}.$$

Рассмотрим вектор

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2.$$

Вектор $\vec{b}_3 \neq \vec{0}$ так как вектры $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ линейно не зависимы и, кроме того,

$$\vec{b}_3 \perp \vec{e}_2, \, \vec{b}_3 \perp \vec{e}_2.$$

Положим

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}.$$

Тогда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ составят искомый ортонормированный базис.

Общий случай полностью аналогичен рассмотренному. Предположим, что $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ – какой-нибудь базис в E^n. Тогда "запустим"процесс:

$$\begin{array}{ll}
 & \vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|}, \\
\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1, & \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \\
\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{a}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2, & \vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \\
\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \vec{a}_n, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i & \vec{e}_n = \frac{\vec{b}_n}{|\vec{b}_n|}.
\end{array}$$

Этот процесс называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.*

■

Угол между вектором и попространством

Два подпространства L^k и L^l в E^n называются *взаимно ортогональными*, если для каждого $\vec{X} \in L^k$, для каждого $\vec{Y} \in L^l$ имеем $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$. Чтобы указать на ортогональность подпространств мы пишем $L^k \perp L^l$.

Пусть $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$, где $L^{n-k} \perp L^k$. Тогда L^{n-k} называется *ортогональным дополнением* L^k и обозначается как $(L^k)^\perp$. Для данного подпространства его ортогональное дополнение всегда существует. Справедливо

Предложение 1.7.7 *Если L^k — подпространство в E^n, то существует подпространство L^{n-k} такое, что $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$, причем $L^k \perp L^{n-k}$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ — базис в L^k. Дополним $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ до базиса в E^n: $\underbrace{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k}_{L^k}, \underbrace{\vec{b}_{k+1}, \dots, \vec{b}_n}_{L^{n-k}}$. Очевидно, что $E^n = L^k \oplus L^{n-k}$. Выполним ортогонализацию базиса L^k. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ – ортонормированный базис L^k. Рассмотрим вектор

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_{k+1} - \langle \vec{b}_{k+1}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \dots - \langle \vec{b}_{k+1}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k.$$

Тогда $\vec{c}_1 \perp \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ и $\vec{c}_1 \notin L^k$. Следовательно, $\vec{f}_1 = \frac{\vec{c}_1}{|\vec{c}_1|}$ обладает свойствами:

$$|\vec{f}_1| = 1, \ \vec{f}_1 \perp \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k.$$

Продолжая процесс, получим базис в E^n: $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$; $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-k}$, причем $Lin(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-k}) = (L^k)^\perp$.

■

Пусть $\vec{Y}$ — произвольный вектор и пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-k}$ — ортонормированный базис в E^n такой, что $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ – базис L^k, $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-k}$ – базис $(L^k)^\perp$. Тогда для произвольного вектора

$$\vec{Y} = Y^1 \vec{e}_1 + \dots + Y^k \vec{e}_k + Y^{k+1} \vec{f}_1 + \dots + Y^n \vec{f}_{n-k}$$

вектор

$$\vec{Y}_{L^k} = Y^1 \vec{e}_1 + \dots + Y^k \vec{e}_k$$

называется *ортогональной проекцией* Y на L^k.

Определение 1.7.5 *Углом между вектором и подпространством называется угол между вектором и его ортогональной проекцией на подпространство. Таким образом,*

$$\cos(\vec{Y} \widehat{\ } L^k) = \frac{|\vec{Y}_{L^k}|}{|\vec{Y}|}.$$

В частности, *углом между прямой и плоскостью в* E^n называется угол между направляющим вектором прямой и направляющим подпространством плоскости.

Угол между трансверсальными подпространствами в E^n

Пусть L^l и L^k – два подпространства, причем $L^k \cap L^l = \vec{0}$. В этом случае мы будем говорить, что подпространства L^k и L^l *трансверсальны.*

Определение 1.7.6 *Углом между трансверсальными подпространствами L^l и L^k называется наименьший угол φ между вектором $\vec{Y} \in L^l$ и $\vec{Y}_{L^k}$, когда $\vec{Y}$ пробегает все пространство L^l:*

$$\cos\varphi = \max_{\vec{Y} \in L^l} \frac{|\vec{Y}_{L^k}|}{|\vec{Y}|}.$$

Предложение 1.7.8 *Угол между двумя трансверсальными подпорстранствами существует.*

Доказательство. Действительно, пусть L^k и L^l – трансверсальны, то есть $L^k \cap L^l = \vec{0}$ Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$– ортонормированный базис L^k, $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_l$ – ортонормированный базис L^l. Дополним базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ до базиса E^nтак, что $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-k}$ составят ортонормированный базис E^n.

Пусть $\vec{Y} = Y^1 \vec{f}_1 + \dots + Y^l \vec{f}_l$ – произвольный вектор в L^l. Тогда $|\vec{Y}|^2 = \sum_{i=1}^{l} (Y^i)^2$.

С другой стороны, разложим $\vec{Y}$ по базису $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{n-k}$. Тогда $\vec{Y} = \tilde{Y}^1 \vec{e}_1 + \dots + \tilde{Y}^k \vec{e}_k + \tilde{Y}^{k+1} \vec{g}_1 + \dots + \tilde{Y}^n \vec{g}_{n-k}$ и часть разложения $\tilde{Y}^1 \vec{e}_1 + \dots + \tilde{Y}^k \vec{e}_k$ определит ортогональную проекцию $\vec{Y}$ на L^k. Найдем координаты этой части разложения.

$$\begin{array}{l} \tilde{Y}^1 = \left\langle \vec{Y}, \vec{e}_1 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{l} Y^i \vec{f}_i, \vec{e}_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{l} Y^i \left\langle \vec{f}_i, \vec{e}_1 \right\rangle \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad , \\ \tilde{Y}^k = \left\langle \vec{Y}, \vec{e}_k \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{l} Y^i \vec{f}_i, \vec{e}_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{l} Y^i \left\langle \vec{f}_i, \vec{e}_k \right\rangle. \end{array}$$

Если ввести обозначения $p_{ik} = \left\langle \vec{f}_i, \vec{e}_j \right\rangle \quad (i = 1, \dots, l\,; j = 1, \dots, k)$, то результаты вычислений запишутся в виде

$$\tilde{Y}^1 = \sum_{i=1}^{l} p_{i1} Y^i, \quad \dots, \quad \tilde{Y}^k = \sum_{i=1}^{l} p_{ik} Y^i$$

Теперь легко находим

$$|\vec{Y}_{L^k}|^2 = \sum_{j=1}^{k} (\tilde{Y}^j)^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{l} p_{ij} Y^i \right)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных, выражение для $|\vec{Y}_{L^k}|^2$ примет вид квадратичной формы

$$|\vec{Y}_{L^k}|^2 = \sum_{s,j=1}^{k} q_{js} Y^j Y^s.$$

Тогда

$$\cos^2(L^k \widehat{\ } L^l) = \max_{\vec{Y}} \frac{\sum_{j,s=1}^{k} q_{js} Y^j Y^s}{\sum_{i=1}^{k} (Y^i)^2} = \max_{|\vec{Y}|=1} \left(\sum_{j,s=1}^{k} q_{js} Y^j Y^s \right).$$

Как известно, локальные экстремумы квадратичной формы $Q(\vec{Y},\vec{Y}) = \sum_{j,s=1}^{k} q_{js} Y^j Y^s$ при условии $|\vec{Y}| = 1$ равны собственным числам матрицы этой формы, то есть корням характеристического уравнения

$$\det(Q - \lambda E) = 0.$$

Следовательно,

$$\cos(L^k \widehat{\ } L^l) = \sqrt{\lambda_{\max}},$$

где λ_{max} – максимальное собственное число матрицы Q.

$\blacksquare$

Вычислим, к примеру, угол между плоскостью $L_1^2 = Lin(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $L_2^2 = Lin(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$, где

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \{1,0,0,0\}, & \vec{f}_1 &= \tfrac{1}{2}\{1,1,1,1\}, \\ \vec{e}_2 &= \{0,1,0,0\}, & \vec{f}_2 &= \tfrac{1}{2}\{1,-1,1,-1\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\vec{Y} = Y^1\vec{f}_1 + Y^2\vec{f}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\Pi\mathrm{p}_{L_1}\vec{Y}} = \ & \langle \vec{Y}, \vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{Y}, \vec{e}_2\rangle \vec{e}_2 = \\ & \big[Y^1\langle \vec{f}_1, \vec{e}_1\rangle + Y^2\langle \vec{f}_2, \vec{e}_1\rangle\big]\vec{e}_1 + \big[Y^1\langle \vec{f}_1, \vec{e}_2\rangle + Y^2\langle \vec{f}_2, \vec{e}_2\rangle\big])\vec{e}_2 = \\ & \left[Y^1\cdot\frac{1}{2} + Y^2\cdot\frac{1}{2}\right]\vec{e}_1 + \left[Y^1\cdot\frac{1}{2} - Y^2\cdot\frac{1}{2}\right]\vec{e}_2 = \\ & \frac{1}{2}\big[Y^1 + Y^2\big]\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\big[Y^1 - Y^2\big]\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$|\overline{\Pi\mathrm{p}_{L_1}\vec{Y}}|^2 = \frac{1}{4}\Big(\big[Y^1+Y^2\big]^2 + \big[Y^1-Y^2\big]^2\Big) = \frac{1}{2}\big((Y^1)^2 + (Y^2)^2\big).$$

Таким образом,

$$\cos(L_1^2 \widehat{\ } L_2^2) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(Y^1)^2 + (Y^2)^2}}{\sqrt{(Y^1)^2+(Y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол между данными плоскостями равен $\pi/4$.

Угол между нетрансверсальными подпространствами в E^n

Пусть L^k и L^l — два подпространства такие, что $L^k \cap L^l = L^m$.

Предложение 1.7.9 *Пусть $L^m \subset L^k$. Тогда имеет место разложение $L^k = L^m \oplus L^{k-m}$, где $L^m \perp L^{k-m}$. Подпространство L^{k-m} называется ортогональным дополнением L^m в L^k.*

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$ — базис L^m. Начиная с вектора $\vec{q}_1$ и добавляя векторы $\vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$, построим ортонормированный базис L^m: $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$. На $m+1$-м шаге процесса ортогонализации мы получим вектор $\vec{p}_{m+1}$, ортогональный всем векторам $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$, а значит и всему подпространству L^m. Продолжая процесс, придем к базису в L^k

$$\{\underbrace{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m}_{L^m}, \underbrace{\vec{p}_{m+1}, \dots, \vec{p}_k}_{L^{k-m}}\},$$

причем $L^m \perp L^{k-m}$.

∎

Следствие 1.7.1 *Пусть L^k и L^l — два подпространства в L^n и пусть $L^m = L^k \cap L^l$. Тогда*

$$\begin{cases} L^k = L^m \oplus L^{k-m} \\ L^l = L^m \oplus L^{l-m}, \end{cases}$$

где L^{k-m} и L^{l-m} – ортогональные дополнения L^m в L^k и L^l соответственно.

Легко показать, что в полученных разложениях подпространства L^{k-m} и L^{l-m} трансвенрсальны. Поэтоиу следующее определение выглядит естественно.

Определение 1.7.7 *Углом между двумя нетрансверсальными подпространствами L^k и L^l называется угол между ортогональными дополнениями подпространства $L^k \cap L^l = L^m$ в L^k и L^l соответственно.*

1.8 Выпуклые множества в $\mathcal{A}^n$

1.8.1 Определение и основные свойства выпуклых множеств

Множество $M \subset \mathcal{A}^n$ называется выпуклым, если для любых двух различных точек $A_1, A_2 \subset M$ отрезок $[A_1, A_2] \subset M$.

Замечание.Одноточечное и пустое множество считаются выпуклыми по определению.

Пусть A_1, A_2 – точки с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки A_1 и A_2 имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad -\infty < t < \infty.$$

Заметим, что $\vec{r}(0) = \vec{r}_1,\ \vec{r}(1) = \vec{r}_2$. Следовательно, точки отрезка $[A_1, A_2]$ задаются как

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad 0 \le t \le 1.$$

Перепишем это в виде

$$\vec{r} = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2, \quad 0 \le t \le 1.$$

и введем обозначения: $\lambda_1 = 1 - t,\ \lambda_2 = t$. Тогда точки отрезка $[A_1, A_2]$ представляются в виде *выпуклой комбинации* или *выпуклой оболочки* своих концевых точек:

$$\vec{r} = \lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2, \quad \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Предложение 1.8.1 *Если M_2, $M_2 \in \mathcal{A}^n$ –выпуклые множества, то их пересечение $M_1 \bigcap M_2$ –выпуклое множество.*

Доказательство. Действительно, предположим, что $A_1, A_2 \in M_1 \bigcap M_2$. Тогда $A_1, A_2 \in M_1$ и $A_1, A_2 \in M_2$. Но тогда из выпуклости, $[A_1, A_2] \in M_1$ и $[A_1, A_2] \in M_2$. Откуда $[A_1, A_2] \in M_1 \bigcap M_2$.

■

Упражнение 1.8.1 *Доказать, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Очевидно, что в общем случае *объединение* выпуклых множеств не является выпуклым множеством.

Предложение 1.8.2 *Полуплоскость – выпуклое множество.*

Доказательство. Рассмотрим полуплоскость $\pi_+ = \big\{(x,y)\,|\,Ax + By + C > 0\big\}$. Положим $F(x,y) = Ax + By + C$. Тогда для точек π_+ имеем $F(x,y) > 0$. Рассмотрим $[A_1, A_2]\,:\, r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$, где $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Для каждой точки $A \in [A_1, A_2]$ выполнено следующее:

$$x_A = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y_A = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2.$$

Пусть $A_1, A_2 \in \pi_+$. Следовательно $F(x_1, y_1) > 0$ и $F(x_2, y_2) > 0$. Тогда

$$\begin{array}{l} A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + B(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + C = \\ \lambda_1(Ax_1 + By_1) + \lambda_2(Ax_2 + By_2) + C(\lambda_1 + \lambda_2) = \\ \lambda_1(Ax_1 + By_1 + C) + \lambda_2(Ax_2 + By_2 + C) = \\ \lambda_1 F(x_1, y_1) + \lambda_2 F(x_2, y_2) > 0. \end{array}$$

Следовательно, для всех $A \in [A_1, A_2]$ выполнено $F(x_A, y_A) > 0$ и значит $[A_1, A_2] \subset \pi_+$

■

Аналогично доказывается и общее утверждкение.

Предложение 1.8.3 *Аффинное полупространство является выпуклым множеством.*

Следствие 1.8.1 *Выпуклыми множествами являются:*

- *Угол, как пересечение двух полуплоскостей;*
- *Телесный треугольник, как пересечение трех полуплоскостей;*
- *Выпуклый многоугольник, как пересечение конечного числа полуплоскостей;*
- *Выпуклый многогранник,как пересечение конечного числа полупространств.*

1.8.2 Выпуклая оболочка

Выпуклой оболочкой множества M называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество M. Обозначение: $conv(M)$. Другими словами, это такое выпуклое множество, которое лежит в любом выпуклом множестве, содержащем M. Пусть M — выпуклое множество A – произвольная точка. *Конусом с вершиной в точка A и основанием M* называется объединение всех отрезков, соединяюших точка A с точками множества M.

$$C_A(M) = \bigcup_{B \in M} [A, B].$$

Предложение 1.8.4 *Если M – выпуклое множество и A – произвольная точка, то*

$$conv(M, A) = C_A(M).$$

Доказательство. $C_A(M) \subset conv(M, A)$, так как

$$\begin{array}{l} M \subset conv(M, A) \\ A \subset conv(M, A) \end{array} \Rightarrow \bigcup_{B \in M} [A, B] = C_A(M) \subset conv(M, A).$$

Покажем, что $C_A(M) \supset conv(M, A))$. Для этого покажем, что $C_A(M)$ – выпуклое множество . Пусть $A_1, A_2 \in C_A(M)$. Тогда существуют такие $m_1, m_2 \in M$, что

$$\begin{array}{l} A_1 \in [A, m_1] \subset C_A(M), \\ A_2 \in [A, m_2] \subset C_A(M). \end{array}$$

Поскольку M– выпуклое множество, то $[m_1, m_2] \subset M$, а следовательно телесный $\triangle m_1 A m_2 \subset C_A(M)$, а вместе с ним и $[A_1, A_2] \subset C_A(M)$.

■

Выпуклая оболочка конечного числа точек легко может быть задана аналитически.

Теорема 1.8.1 *Пусть $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ конечный набор точек. Тогда , $conv(M)$ – это множество точек, радиус-вектор которых имеет вид:*

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{r}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью метода математической индукции. При $n = 2$ имеем:

$$M = \{A_1, A_2\},\ conv(M) = [A_1, A_2],$$

а для точек отрезка мы уже имели выражение вида

$$\vec{r} = \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Предположим, что для $n - 1$ точек верно:

$$conv(A_1, \ldots, A_{n-1}) \colon \vec{r} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\nu}_i \vec{r}_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \vec{\nu}_i = 1, \quad \vec{\nu}_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n-1).$$

Покажем, что такое представление верно и для множества из n точек. Выделим $M = conv(A_1, \ldots, A_{n-1})$ и добавим к M точку A_n. Тогда

$$conv(M, A_n) = C_{A_n}(M) = \bigcup_{A \in M} [A_n, A].$$

Радиус-вектор любой точки конуса запмшется в виде

$$\begin{aligned} \vec{r} = \ & \mu_1 \vec{r}_n + \mu_2 \vec{r}_A = \mu_1 \vec{r}_n + \mu_2 (\vec{\nu}_1 \vec{r}_1 + \cdots + \vec{\nu}_{n-1} \vec{r}_{n-1}) = \\ & \lambda_1 \vec{r}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \vec{r}_{n-1} + \lambda_n \vec{r}_n \end{aligned}$$

где $\mu_1+\mu_2=1, \quad \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0,$ и мы положили $\lambda_i=\mu_2\vec{\nu}_i$ $(i=1,\dots,n-1)$, $\lambda_n=\vec{\nu}_1$. Осталось заметить, что

$$\lambda_i \geq 0 \ (i=1,\dots,n) \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mu_2\underbrace{(\vec{\nu}_1+\cdots+\vec{\nu}_{n-1})}_{=1}+\mu_1=1.$$

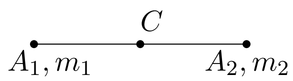
■

Выпуклая оболочка когечного числа точек имеет *определенный механический* смысл. Для его формулировки, докажем, вначале,

Предложение 1.8.5 *Пусть $A_1,\dots,A_n$ точки в R^n, в которых сосредоточены массы $m_1,\dots,m_2$. Пусть точкам A_i соответствуют радиус-векторам $\vec{r}_i$. Тогда радиус-вектор $\vec{r}_c$ центра тяжести системы точек имеет такой вид:*

$$\vec{r}_c=\frac{m_1\vec{r}_1+\cdots+m_n\vec{r}_n}{m_1+\cdots+m_n}.$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции. В случае, когда $n=2$ имеем следующее:



Согласно законам механики, $\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{CA_2}}=\dfrac{m_2}{m_1}$. Поэтому

$$m_1(\vec{r}_c-\vec{r}_1)=m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_c)$$

откуда легко находим

$$\vec{r}_c=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}.$$

Предположим, что формула верна для системы из k точек, то есть

$$\vec{r}_{c_{(k)}}=\frac{m_1\vec{r}_1+\ldots+m_k\vec{r}_k}{m_1+\ldots+m_k}.$$

Рассмотрим систеиу из $k+1$ точки. Пусть $\vec{r}_{c(k)}$ радиус-вектор центра масс системы из k точек. Тогда центр масс системы из $k+1$ точки ищется как центр масс точек $C(k)$ и A_{k+1}, а именно,

$$r_{c(k+1)}=\frac{M\vec{r}_{c(k)}+m_{k+1}r_{k+1}}{M+m_{k+1}},$$

где $M=m_1+\cdots+m_k$. Используя формулу для $\vec{r}_{c(k)}$, получим

$$r_{c_{(k+1)}}=\frac{m_1\vec{r}_1+\ldots+m_k\vec{r}_k+m_{k+1}\vec{r}_{k+1}}{m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}}.$$

■

Следствие 1.8.2 *Пусть $\{A_i\}$ набор точек, которым соответствуют радиус-векторы $\vec{r}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда*

$$conv(A_1, \ldots, A_n) : r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

является геометрическим местом центров масс $m_1, \ldots, m_n$, находящихся в точках $A_1, \ldots, A_n$, при условии, что $m_1 + \ldots + m_n = 1$.

Нетрудно видеть, что в выражении выпуклой оболочки конечного числа точек не все точки являются существенными. Так, напримкр, для трех точек, лежащих на одной прямой, их выпуклой оболочкой будет отрезок, соединяющий две крайние точки. Это и означает, что средняя точка не существенна для описания их выпуклой оболочки. Какие же точки существенны? Для ответа на этот вопрос нам потребуется несколько дополнительных понятий.

Точка m называется *внутренней* для множества M, если круг с центром в точке m целиком лежащий в множестве M. Точка m называется *граничной* для множества M, если любой круг с центром в точке m пересекается как с множеством M так и с его дополнением. Множество граничных точек M называктся границеM и обозначается ∂M. Множество M называется *открытым*, если все его точки внутренние и *замкнутым*, если множество M содержит свою границу. Существуют не открытые и не замкнутые множества.

Определение 1.8.1 *Точка $m \in M$ называется экстремальной (угловой) точкой замкнутого выпуклого множества M, если множество $M \setminus \{m\}$ также выпукло.*

Например, экстремальные точки выпуклого многоугольника – это его вершины.

Справедлива следующая **теорема Крейна-Мильмана**.

Теорема 1.8.2 *Если M —замкнутое, ограниченное и выпуклое множество в $\mathcal{A}^n$, то $M = conv(ext(M))$, где $ext(M)$ —множество экстремальных точек.*

Следствие 1.8.3 *Выпуклый многоугольник (многогранник) совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.*

Полученное следствие является ключевым для следующего утверждения.

Предложение 1.8.6 *Пусть f –линейная функция на $\mathcal{A}^n$ и M – выпуклый многоугольник в $\mathcal{A}^n$ с набором вершин $\{A_i\}_{i=1}^{N}$. Тогда*

$$\max f|_M = \max_{i=1,\ldots,N} f(A_i),$$
$$\min f|_M = \min_{i=1,\ldots,N} f(A_i).$$

Доказательство.

Действительно, функция f на $\mathcal{A}^n$ называется линейной, если

$$f(\lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2) = \lambda f(\vec{r}_1) + \mu f(\vec{r}_2),$$

для любых двух точек с радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Пусть M — замкнутый, выпуклый многоугольник. Тогда для любой точки $m \in M$ имеем $\vec{r}_m = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{r}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$. Радиус-вектори $\vec{r}_i$ соответствуют вершинам A_i. Воспользуемся линейностью функции f. Тогда

$$f(\vec{r}_m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(\vec{r}_i) \leq \max_i f(\vec{r}_i) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \max f(\vec{r}_i).$$

$$f(\vec{r}_m) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(\vec{r}_i) \geq \min_i f(\vec{r}_i) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \min f(\vec{r}_i).$$

■

1.8.3 Задача линейнй оптимизации

Задача линейной оптимизации состоит в отыскании максимкми или минимума линейной функции на выпуклом многоугольнике (многограннике). По существе, ее решение было представлено в предыдущем разделе. Здесь мы рассмотрим некоторую конкретную задачу, в которой срабатывет развитая нами техника.

Задача на смешивание. *В дневном рационе питания должны присутствовать витамины типа $A \geq 6$ единиц, типа $B \geq 8$ единиц и типа $C \geq 13$ единиц. В наличии имеется два типа продуктов разного качества:*

- *Первый тип продукта содержит: A – 2 единицы, B – 2 единицы, C – 4 единицы;*
- *Второй тип содержит: A – 3 единицы, B – 2 единицы, C – 1 единица.*

Цена первого типа – 3 гривны за грамм, второго – 2 гривны. Сколько и каких продуктов следует употребить, чтобы обеспечить рацион и иметь наименьшие затраты.

Решение.Формализуем задачу. Пусть x – количество граммов продукта первого типа, y – количество граммов продукта второго типа в рационе. Такой рацион содержит $x(2A+2B+4C)+y(3A+2B+C) = A(2x+3y)+B(2x+2y)+C(4x+y)$ единиц соответствующих витаминов. Для обеспечения витаминами в нужном количестве нужно потребовать условия:

$$\begin{cases} 2x+3y \geq 6; \\ 2x+2y \geq 8; \\ 4x+y \geq 13; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Подсчитаем затраты: $L(x,y) = 3x+2y$. Таким образом, необходимо найти минимум *линейной* функции $L(x,y)$ при заданных условиях типа неравенства, то есть на выпуклом множестве. Задача решается перебором значений функции в угловых точках:

$$\begin{cases} L(0,13) = 26; \\ L(4,0) = 12; \\ L(3,1) = 11. \end{cases}$$

Оптимальный план: $x = 3, y = 1$.

1.9 Движения. Классификация движений

1.9.1 Определение и основные свойства движения

Определение 1.9.1 *Отображение $F : E^n \longrightarrow E^n$ евклидова пространства в себя, называется движением, если для всех $A_1, A_2 \in E^n$ выполнено следующее:*

$$|F(A_1)F(A_2)| = |A_1A_2|.$$

По определению, движение сохраняет расстояния между соответствующими точками. В дополнение, справедливо

Предложение 1.9.1 *При движении сохраняются углы между соответствующими отрезками .*

Доказательство. Пусть $\angle BAC = \varphi$. При движении A переходит в A', B переходит в B', C переходит в C'. Из определения движения следует, что

$$|AB| = |A'B'|, \quad |AC| = |A'C'|, \quad |BC| = |B'C'|.$$

Следовательно $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и $\angle B'A'C' = \angle BAC = \varphi$.

■

Предложение 1.9.2 *При движении прямая переходит в прямую.*

Доказательство. Пусть l–прямая. Рассмотрим отрезок $[A, B] \in l$.

Пусть $C \in [A, B]$, тогда по определению движения:

$$F(A) = F(A'),$$
$$F(B) = F(B'),$$
$$F(C) = F(C').$$

Тогда $C' \in [A', B']$. Действительно, допустим $C' \notin [A', B']$, тогда точки A', B', C' образуют треугольник $A'B'C'$. По неравенству треугольника имеем:

$|A'B'| < |A'C'| + |C'B'|$.

Из определения движения следует, что $|A'B'| = |AB|$, тогда

$|A'C'| + |C'B'| = |AC| + |CB| = |AB|$. Противоречие, следовательно $C' \in [A'B']$.

■

Предложение 1.9.3 *При движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

Доказательство. Движение является взаимно-однозначным отображением, так как несовпадающие точки переходят в несовпадающие ввиду сохранения расстояния между ними.

■

Пусть F– движение. Тогда F порождает отображение соответствующего векторного пространства E^n в себя, действующее по правилу

$$\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{F(A)F(B)}$$

для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Пусть $\vec{a}$ вектор и $\overrightarrow{AB}$ какой-нибудь направленный отрезок его представляющий. Положим $F(\vec{a})$ равным вектору, представленному направленным отрезком $\overrightarrow{F(A)F(B)}$.

Предложение 1.9.4 *Движении сохраняет скалярное произведение векторов, то есть*

$$\left\langle F(\vec{a}), F(\vec{b})\right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b}\right\rangle.$$

Доказательство следует из сохранения длин отрезков и углов между ними.

Пусть F_1 и F_2 движения. Определим их композицию как

$$(F_2 \circ F_1)(A) \stackrel{def}{=} F_2(F_1(A)).$$

Предложение 1.9.5 *Относительно взятия композиции, множество движений образует группу единицей которой служит тождественое движение.*

1.9.2 Аналитическое задание движения

Ортогональные матрицы и ортонормированные базисы

Определение 1.9.2 *Матрица C называется ортогональной, если*

$$CC^t = C^tC = E.$$

Определитель ортогональной матрицы $|\det C| = 1$. Если $\det C = 1$, то матрица называется *собственно ортогональной*, если же $\det C = -1$ матрица называется *несобственно ортогональной*. Легко проверить, что относительно матричного умножения ортогональные $n \times n$ матрицы образуют группу $O(n)$, единицей которой служит единичная матрица E. Собственно ортогональные матрицы образуют подгруппу $SO(n) \subset O(n)$.

Между ортогональными матрицами и ортонормированными базисами в E^n имеется тесная связь.

Предложение 1.9.6 *Пусть E^n – евклидово пространство и пусть $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ ортонормированный базис в нем. Система векторов $\mathbf{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ образует другой ортонормированный базис в E^n тогда и только тогда, когда матрица C преобразования*

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}C$$

является ортогональной. Собственно ортогональная матрица сохраняет ориентацию, несобственно ортогональная ее обращает.

Доказательство.

Рассмотрим, вначале, $n = 2$.

Пусть $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – ортонормированный базис в E^2, то есть $\left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2\right\rangle = 0$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. И пусть $(\mathbf{f}) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ – произвольный набор векторов. Разложим его по базису $\mathbf{e}$.

$$\vec{f}_1 = c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\vec{e}_2,$$
$$\vec{f}_2 = c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\vec{e}_2.$$

Сформируем матрицу C, столбцы которой составлены из координат соответствующих векторов системы $\mathbf{f}$:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда разложение системы $\mathbf{f}$ по базису $\mathbf{e}$ запишется инвариантно:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}C.$$

Смстема векторов $\mathbf{f}$ образует новый базис тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$. Этот базис будет ориентированным положительно, если $\det C > 0$ и отрицательно, если $\det C < 0$. Этот базис будет ортонормированным, если

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}_1, \vec{f}_1 \rangle &= |\vec{f}_1|^2 = (c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 = 1, \\ \langle \vec{f}_2, \vec{f}_2 \rangle &= |\vec{f}_2|^2 = (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1, \\ \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle &= c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны матричному равенству $CC^t = E$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 & c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 \\ c_2^1 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 & (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для рассмотрения общего случая достаточно заметить, что в разложении

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}C.$$

столбцы матрицы C сформированы из координат векторов системы $\mathbf{f}$ относительно базиса $\mathbf{e}$, а матрица CC^t состоит из попарных произведений $\langle \vec{f}_i, \vec{f}_k \rangle$. Следовательно, ортогональность матрицы C и ортонормированность системы $\mathbf{f}$ эквивалентны.

■

Аналитическое задание движения

Лемма 1.9.1 *Пусть $F : E^n \longrightarrow E^n$ – движение и пусть $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ произвольная (фиксированная) декартова система координат в E^n. Если $(x^1, \ldots, x^n)$ – координаты произвольной точки $M \in E^n$, то координаты $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ точки $\tilde{M} = F(M)$ относительно той же системы координат имеют вид:*

$$\tilde{X} = CX + b,$$

где X и $\tilde{X}$ вектор-столбцы из соответствующих координат, C – ортогональная матрица, а b – вектор-столбец составленный из координат точки $\tilde{O} = F(O)$.

Доказательство. Пусть F–движение, $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – фиксированная декартова система кординат. Обозначим $\tilde{O} = F(O), \vec{f}_i = F(\vec{e}_i)$. Тогда $(\tilde{O}, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ – новая декартова система координат, так как из сохранения длин и углов следует, что вектры $\vec{f}_i$ образуют новый ортонормированный базис E^n.

Пусть $\overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n$ – радиус-вектор произвольной точки M. Очевидно, что $x^i = \langle \overrightarrow{OM}, \vec{e}_i \rangle$.

Пусть $\overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}} = y^1\vec{f}_1 + \ldots + y^n\vec{f}_n$ – радиус-вектор точки $\tilde{M} = F(M)$ в новой системе координат. Тогда $y^i = \langle\overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}, \vec{f}_i\rangle$. Но движение сохраняет скалярное произведение. Следовательно,

$$y^i = \langle\overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}, \vec{f}_i\rangle = \langle F(\overrightarrow{OM}), F(\vec{e}_i)\rangle = \langle\overrightarrow{OM}, \vec{e}_i\rangle = x^i.$$

Пусть $\overrightarrow{O\tilde{M}} = \tilde{x}^1\vec{e}_1 + \cdots + \tilde{x}^n\vec{e}_n$ – радиус вектор точки $\tilde{M}$ в исходной системе координат, $\overrightarrow{O\tilde{O}} = b^1\vec{e}_1 + \ldots + b^n\vec{e}_n$. Имеет место очевидное векторное равенство:

$$\overrightarrow{O\tilde{M}} = \overrightarrow{O\tilde{O}} + \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}}.$$

Перепишем его в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение вектор-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}$$

и строки

$$\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n), \quad \mathbf{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n).$$

Тогда можно записать

$$\overrightarrow{O\tilde{M}} = \mathbf{e}\tilde{X}, \quad \overrightarrow{O\tilde{O}} = \mathbf{e}\,b, \quad \overrightarrow{\tilde{O}\tilde{M}} = \mathbf{f}X$$

и выписанное выше векторное равенство перепишется в виде

$$\mathbf{e}\tilde{X} = \mathbf{e}b + \mathbf{f}X.$$

Так как $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$– ортонормированные базисы, то $\mathbf{f} = \mathbf{e}C$, где C – ортогональная матрица. Продолжая, имеем

$$\mathbf{e}\tilde{X} = \mathbf{e}C\,X + \mathbf{e}\,b = \mathbf{e}(CX + b).$$

В силу единственности разложения по базису,

$$\tilde{X} = CX + b.$$

■

Определение 1.9.3 *Движение в E^n называется собственным, если в его аналитическом задании* $\det C = +1$ *и несобственным, если* $\det C = -1$.

1.9.3 Классификация движений на плоскости

Специальные виды движений на плоскости

→ • **Параллельный перенос.**

Определение 1.9.4 *Параллельным переносом на плоскости называется движение, аналитическое задание которого имеет вид*

$$\tilde{x} = x + b^1,$$
$$\tilde{y} = y + b^2.$$

В матричной форме параллельный перенос запишется как

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det C = 1$, то параллельный перенос является собственным движением. Параллельный перенос не имеет неподвижных точек.

$\rightarrow \bullet$ **Поворот.**

Определение 1.9.5 *Поворотом (вращением) называется движение на плоскости, имеющее единственную неподвижную точку, называемую центром вращения.*

Предложение 1.9.7 *В системе координат, отнесенной к неподвижной точке, аналитическое задание поворота имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Параметр φ называется углом поворота.

Доказательство. Пусть F - поворот. Пусть $O = F(O)$ – неподвижная точка (центр вращения). Для любой точки M на плоскости, $|OM| = |OF(M)$. Следовательно, точки M и $F(M)$ находятся на дуге одной окружности. Каждая точка этой окружности переходит в точку этой же окружности с сохранением расстояния между ними. Следовательно, рассматриваемое движение есть поворот на некоторый угол φ всех окружностей с центром в точке O.

Поместим начало координат в точку O, и пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ортонормированный базис декартовой системы координат с началом в точке O. Выполним поворот F на угол φ. Положим $\vec{f}_1 = F(\vec{e}_1), \vec{f}_2 = F(\vec{e}_2)$. Тогда

$$\vec{f}_1 = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2,$$
$$\vec{f}_2 = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2.$$

Следовательно, аналитическое задание поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

■

Так как $\det C = 1$, то поворот является собственным движением.

$\rightarrow \bullet$ **Осевая симметрия.**

Определение 1.9.6 *Нетождественное движение, оставляюще неподвижной прямую, называется осевой симметрией.*

Предложение 1.9.8 *В системе координат, ось Ox которой совпадает с неподвижной прямой, аналитическое задание осевой симметрии имеет вид*

$$\tilde{x} = x,$$
$$\tilde{y} = -y$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть l– неподвижная прямая движения F. Направим ось Ox вдоль прямой l, а ось Oy – перпендикулярно l. Запишем общий вид движения

$$\tilde{x} = c_1^1 x + c_2^1 y + b^1,$$
$$\tilde{y} = c_1^2 x + c_2^2 y + b^2$$

и потребуем, чтобы оно оставляло неподвижной прямую l, совпадающую в нашей системе координат с осью Ox. Тогда точка с координатами (x,0) при движении F переходит в точку с координатами (x,0). Следовательно равенства

$$x = c_1^1 x + b^1,$$
$$0 = c_1^2 x + b^2.$$

должны выволняться тождественно по x. Отсюда находим

$$b^1 = b^2 = 0 \quad c_1^1 = 1, \; c_1^2 = 0.$$

Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2^1 \\ 0 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица C – ортогональна, то должно быть выполнено равенство $1c_2^1 + 0c_2^2 = 0$. Значит $c_2^1 = 0$. Так как $|\det C| = 1$, то $|c_2^2| = 1$. Если $c_2^2 = 1$, то преобразование является тождественным. Следовательно $c_2^2 = -1$, что завершает доказательство.

■

Так как $\det C = -1$, то осевая симметрия является несобственным движением.

→ • **Скользящая симметрия.**

Определение 1.9.7 *Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии.*

Предложение 1.9.9 *В системе координат, ось Ox которой совпадает с неподвижной прямой, аналитическое задание скользящей симметрии имеет вид*

$$\tilde{x} = x + b^1,$$
$$\tilde{y} = -y$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Обозначим через T_b параллельный перенос на вектор $\vec{b}$, а через S_l – осевую симметрию относительно прямой l. Тогда скользящая симметрия $F = T_b \circ S_l$. Выберем декартову систему координат, оговоренную в условии. Пусть (x, y) произвольная точка плоскости. Тогда

$$(x, y) \xrightarrow{S_l} (x, -y) \quad \text{а затем} \quad (x, -y) \xrightarrow{T_b} (x + b^1, -y).$$

Следовательно,

$$(x, y) \xrightarrow{T_b \circ S_l} (x + b^1, -y).$$

■

Ясно, что скользящая симметрия есть движение несобственное. Осевая симметрия – частный случай скользящей.

Классификация движений на плоскости

Описанными в предыдущем разделе движениями исчнрпываются все движения на плоскости.

Теорема 1.9.1 ***(Шаль)*** *Любое собственное движение на плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом. Любое несобственное движение является скользящей симметрией.*

Доказательство. Пусть F движение и $\tilde{X} = CX + b$ его аналитическое задание. Так как

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица, то

$$\begin{aligned} &(c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 = 1 \\ &(c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1 \\ &c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение параметры φ и ψ, полагая $c_1^1 = \cos\varphi, c_1^2 = \sin\varphi$ и $c_2^1 = \cos\psi, c_2^2 = \sin\psi$. Тогда матрица C примет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\psi \\ \sin\varphi & \sin\psi \end{pmatrix}.$$

Но так как $c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$, то $\cos(\varphi - \psi) = 0$. Следовательно либо $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, либо $\psi = \varphi + \frac{3\pi}{2}$.

Если $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, то матрица C принимает вид

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

и отвечает собственному движению.

Если же $\psi = \varphi + \frac{3\pi}{2}$, то

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

и движение является несобственным.

$\to\bullet$ Рассмотрим случай собственного движениея, то есть движения с аналитическим заданием

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Если $\varphi = 0$, то

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

и движение является переносом вида

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + b^1, \\ \tilde{y} = y + b^2. \end{cases}$$

Пусть $\varphi \neq 0$. Покажем, что тогда у движения существует единственная неподвижная точка, а значит движение является поворотом.

Условие, что точка $M_0(x_0, y_0)$ остается на месте означает, что

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_0 = \cos\varphi\, x_0 - \sin\varphi\, y_0 + b^1, \\ y_0 = \sin\varphi\, x_0 + \cos\varphi\, y_0 + b^2. \end{cases}$$

После преобразования получим:

$$\begin{cases} \quad (1-\cos\varphi)\, x_0 + \sin\varphi\, y_0 = b^1, \\ -\sin\varphi\, x_0 + (1-\cos\varphi)\, y_0 = b^2. \end{cases}$$

Опприделитель полученной системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin^2\frac{\varphi}{2} & 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} & 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$4\sin^2\frac{\varphi}{2} \begin{vmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \\ -\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \neq 0,$$

так как $0 < \varphi < 2\pi$. Поэтому неподвижная точка M_0 существует и единственна.

$\to\bullet$ Рассмотрим случай, когда F – несобственное движение.Тогда его аналитическое задание есть

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что существует такой параллельный перенос T_a на вектор $\vec{a}$, что $T_a^{-1} \circ F = S_l$, где S_l –симметрия, ось которой параллельна вектору $\vec{a}$. Тогда, очевидно, $F = T_a \circ S_l$ есть скользящая симметрия. Покажем, что T_a можно подобрать так, чтобы $T_a^{-1} \circ F$

оставляло на месте некоторую прямую. Так как T_a^{-1} есть параллельный перенос на вектор $-\vec{a}$, то аналитически композиция $T_a^{-1} \circ F$ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Поищем неподвижные точки этого преобразования, то есть потребуем выполнения равенств

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 - a^1 \\ b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

или, упрощая,

$$\begin{cases} x(1-\cos\varphi) - y\sin\varphi = b^1 - a^1, \\ -x\sin\varphi + (1+\cos\varphi)y = b^2 - a^2, \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = 1 - (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2 \equiv 0$. Подбкрем параметры a^1, a^2 так, чтобы неподвижные точки образовывали прямую, параллельную вектору $\vec{a}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} \dfrac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi} = \dfrac{-\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \dfrac{b^1 - a^1}{b^2 - a^2}, & \text{(условие существование решения)} \\ (1-\cos\varphi)a^1 - \sin\varphi a^2 = 0 & \text{(условие параллельности).} \end{cases}$$

Положим $\lambda = \frac{1-\cos\varphi}{-\sin\varphi}$. Тогда система перепишется в виде

$$\begin{cases} b^1 - a^1 = \lambda(b^2 - a^2), \\ \lambda a^1 + a^2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a^1 - \lambda a^2 = b^1 - \lambda b^2, \\ \lambda a^1 + a^2 = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = 1 + \lambda^2$. Следовательно, для данных b^1 и b^2 решение всегда существует, что завершает доказательство.

■

1.9.4 Классификация движений в пространстве

Аналитическое задание движения F общего вида $\tilde{X} = CX + b$ можно рассматривать как композицию параллельного пареноса T_b и движения F_0 вида $\tilde{X} = CX$, а именно, $F = T_b \circ F_0$. Рассмотрим подробнее структуру движения F_0.

Описиние движений без смещения

Предложение 1.9.10 *Пусть F_0 движение, аналитическое задание которого $\tilde{X} = CX$. Тогда существует прямоугольная декартова системе координат относительно* *которой движение F_0 задается матрицей C вида:*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{— \textit{для собственного движения}} \qquad (1.4)$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ — \textit{для несобственного движения}} \qquad (1.5)$$

Доказательство. Покажем, что движение F_0 оставляет инвариантной прямую, проходящую через начало координат (точки этой прямой необязательно остаются на месте).

Пусть $Oxyz$ – исходная система координат. Рассмотрим прямую l, проходящую через начало координат. Если точки прямой l при движении переходят в точки на этой же прямой, то

$$F_0(\overrightarrow{OM}) = \lambda\overrightarrow{OM},$$

что в аналитической записи означает

$$CX = \lambda X$$

для любой точки на прямой с координатами $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$. Переписывая это условие в виде

$$(*) \qquad (C - \lambda E)X = 0,$$

получаем однородную систему уравнений, которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(C - \lambda E) = 0$, то есть

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - \lambda & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 - \lambda & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Многочлен $\chi(\lambda) = \det(C - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы C. Ненулевой вектор X, удовлетворяющий уравнению $(*)$ называется *собственным вектором* матрицы C. Корни характеристического многочлена называются *собтвенными числами* матрицы C.

В рассматриваемом случае уравнение $\det(C - \lambda E) = 0$ является алгебраическим уравнением третьего порядка. Такое уравнение всегда имеет вещественный корень λ_0, а система $(C - \lambda_0 E)X = 0$ имеет ненулевое решение X_0. Значит, прямая проходящая через начало координат в направлении собственного вектора X_0 под действием движения F_0 переходит в себя.

Так как F_0 – движение, то $\langle CX_0, CX_0\rangle = \langle X_0, X_0\rangle = |X_0|^2$. С другой стороны $\langle CX_0, CX_0\rangle = \langle\lambda_0 X_0, \lambda_0 X_0\rangle = \lambda^2\langle X_0, X_0\rangle = \lambda_0^2|X_0|^2$. Следовательно $\lambda_0^2 = 1$, откуда $\lambda_0 = \pm 1$.

Выберем систему координат так, чтобы ось Oz была направлена вдоль инвариантной прямой, а плоскость (xy) зададим перпендикулярно вектору $\vec{e}_3$. Так как $C\vec{e}_3 = \pm\vec{e}_3$, то

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $c_3^1 = 0, \quad c_3^2 = 0, \quad c_3^3 = \pm 1$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ c_1^3 & c_2^3 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Но C ортогональная матрица, следовательно $c_1^3 = c_2^3 = 0$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

и $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}$ – ортогональная 2×2 матрица, соответствующая некоторому движенио в выбранной нами плосклсти Oxy.

Выбором системы координат в этой плоскости, матрица движения приводится к известным уже формвм. Таким образом, мы получаем 4 возможных варианта:

$$(a)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай (a). Тогда $\det C = +1$, движение собственное и при преобразовании

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

каждая плоскость $z = z_0$ переходит в себя, в то время как в самой плоскости $z = z_0$ точки испытывают поворот на угол φ вокруг точки $(0, 0, z_0)$. Значит, рассматриваемое движение есть **поворот вокруг неподвижной оси**.

Рассмотрим случай (b). Здесь $\det C = -1$ и движение будет несобственным. Представим матрицу C в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь очевидно, что $F_0 = S \circ R_l$, где S – симметрия относительно плоскости, перпендикулярной неподвижной прямой l, а R_l – поворот на угол φ вокруг этой прямой. Такое движение называется **зеркальным поворотом вокруг неподвижной оси**.

Рассмотрим случай (c). Здесь $\det C = -1$ и мы снова имеем дело с несобственным движением. Это движение снова переводит каждую плоскость $z = z_0$ всебя, но на каждой такой плоскости является несобственным движением, то есть скользящей симметрией. Однако точка $(0,0,0)$ очевидно является неподвижной. Следовательно в каждой плоскости $z = z_0$ движение является осевой симметрией. Примем одну из этих прямых за ось Ox новой системы координат. Тогда в такой системе координат матрица, задающая рассматриваемое движение, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но это в точности зеркальный поворот на угол $\varphi = 0$ вокруг новой оси Oy.

Рассмотрим случай (d). Здесь $\det C = +1$, движение собственное. Рассмотрим плоскость $z = 0$. Эту плоскость движение переводит в себя и действует на этой плоскости как несобственное движение, то есть как скользящая симметрия. Однако точка $(0,0,0)$ очевидно является неподвижной. Следовательно в плоскости $z = 0$ движение является осевой симметрией. Примем эту ось в качестве новой оси Ox. В такой системе координат матрица, задающая движение, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и является матрицей поворота на угол $\varphi = \pi$ вокруг новой оси Ox.

■

Описание движений общего вида

Рассмотрим теперь общий случай. Как уже отмечалось в начале параграфа, общее движение есть композиция движений F_0 и параллельного переноса. Выделим частные случаи таких композиций.

1. **Параллельный перенос**.
$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + b^1, \\ \tilde{y} &= y + b^2, \\ \tilde{z} &= z + b^3. \end{aligned}$$
   Это собственое движение с матрицей
$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Винтовое движение** – *композиция поворота вокруг неподвижной оси и параллельного переноса в направлении этой оси.* В системе координат, с неподвижной прямой в качнестве оси Oz это движение запишется в виде
$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

Винтовое движение является собственным. Заметим, что параллельный перенос является частным случаем ($\varphi = 0$) винтового движения.

3. **Скользящая симметрия** – *композиция симметрии относительно плоскости и параллельного переноса вдоль плоскости симметрии.* Если плоскость Oxy системы координат расположить в плоскости симметрии, а ось Oz направить перпендикулярно к ней, то скользящая симметрия запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скользящая симметрия является несобственным движением.

4. **Зеркальный поворот** – *композиция вращения вокруг неподвижной оси и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения.* В системе координат, в которой ось Oz направлена по оси вращения, а плоскость Oxy является плоскостью симметрии, зеркальный поворот запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Зеркальный поворот является несобственным движением.

Оказывается, что любое движение в пространстве сводится к одному из перечисленных типов. В доказательстве этого утверждения используется следующая простая лемма.

Лемма 1.9.2 *Любой параллельный перенос T можно представить в виде*

$$T = S_1 \circ S_2,$$

где S_1и S_2 – симметрии относительно некоторых плоскостей, перпендикулярных направлению переноса.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ – вектор с длиной $a = |\vec{a}|$, задающий параллельный перенос T. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$. Пусть $Oxyz$ – декартова система координат с осью $Oz \| \vec{a}$.

Возьмем произвольную точку M на оси Oz и пусть $T(M) = \tilde{M}$. Ясно, что $\tilde{M}$ так же лежит на оси Oz. Рассмотрим точку A на оси Oz, находящуюся на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки M, причем M лежит между A и $\tilde{M}$. Обозначим через S_A и S_M симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных оси Oz и проходящих через точки A и M соответственно. Тогда , очевидно, $\tilde{M} = (S_A \circ S_M)(M)$, что и требовалось доказать. ■

Теорема 1.9.2 ***(Шаль)*** *Любое собственное движение в пространстве является винтовым. Любое несобственное движение в пространстве является либо скользящей симметрией, либо зеркальным поворотом.*

Доказательство. Пусть $\tilde{X} = CX + b$ движение. Тогда относительно некоторой системы координат матрица C имеет вид:

$$(a)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (b)\ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай (a). Если $\varphi = 0$ то рассматриваемое движение есть параллельный перенос и доказывать нечего. Пусть $\varphi \neq 0$. Тогда матрице C соответствует поворот на угол φ вокруг оси Oz. Обозначим его Ω и для удобства ссылок переобозначим и саму матрицу $C \to \Omega$.

При движении $\tilde{X} = \Omega X$ ось Oz является инвариантной. Представим вектор смещения $\vec{b}$ в виде $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, где вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости xOy, а вектор $\vec{a}$ параллелен оси Oz. Тогда $\vec{a} = (a^1, a^2, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, c^3)$ и $T_b = T_c \circ T_a$.

Запишем наше движение F в виде $\tilde{X} = \Omega X + b$. Тогда

$$F = T_b \circ \Omega = T_c \circ T_a \circ \Omega = T_c \circ \Omega'.$$

Покажем, что Ω' — поворот около некоторой прямой l, которая перпендикулярна плоскости Oxy. Действительно,

$$\Omega' X = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi + a^1 \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi + a^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждая плоскость $z = z_0$ переходит в себя, а в каждой такой плоскости есть неподвижная точка. Так как ее координаты не зависят от выбора z_0, то все такие точки лежат на некоторой прямой l, которая перпендикулярна плоскости xOy. Следовательно, Ω' — поворот около прямой l. Но тогда $F = T_c \circ \Omega'$ — винтовое движение.

Рассмотрим случай (b). Пусть S — симметрия относительно плоскости xOy. Она задается матрицей вида

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, врассматриваемом случае

$$C = S\Omega = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и мы можем аналитически задать наше движение в виде

$$\tilde{X} = S\Omega X + b,$$

а само движение представить как композицию

$$F = T_b \circ S \circ \Omega.$$

Вектор смещения $\vec{b}$ разложим в виде: $\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$, где $\vec{a}\perp Oz$, $\vec{c}\parallel Oz$. Тогда $T_b=T_a\circ T_c$. По лемме $T_c=S_1\circ S_2$, где S_1 и S_2 симметрии отноительно плоскостей, перпендикулярных оси Oz. Следовательно,

$$F=T_a\circ S_1\circ S_2\circ S\circ\Omega.$$

Ясно, что $S_1\circ S_2\circ S$ есть симметрия относительно некоторой плоскости, перпендикулярной оси Oz (каждая из симметрий является такой). Обозначим ее через S'. Так как $\vec{a}\perp Oz$, то легко видеть, что $T_a\circ S'=S'\circ T_a$ и мы приходим к выводу

$$F=S'\circ T_a\circ\Omega.$$

Если $\varphi=0$, то Ω есть тождественное движение и тогда $F=T_a\circ S'$, то есть скользящую симметрию. Если же $\varphi\neq 0$, то как и в случае (а) композиция $T_a\circ\Omega=\Omega'$ есть поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости Oxy, а следовательно $F=S'\circ\Omega'$ — зеркальный поворот.

■